arXiv:2305.01049v1 [math.LO] 1 May 2023

可数博雷尔可树化等价关系可由 ℓ_1分类

SHAUN ALLISON

Abstract. 在 [GJ15], 中，研究者证明，任何由可数阿贝尔波兰群诱导的可数博雷尔等价关系（CBER）都是超有限的。这促使 Hjorth 提出疑问：对于所有可由（不可数）阿贝尔波兰群分类的 CBER，这一结论是否也成立?

我们描述了涉及自由巴拿赫空间的归约，从而证明每个树可化 CBER 都可由阿贝尔波兰群分类。由于存在并非超有限的树可化 CBER，这就对 Hjorth 的问题给出了否定答案。

另一方面，我们证明，任何可由局部紧阿贝尔波兰群的可数乘积分类的 CBER（例如 $\mathbb{R}^\omega$）确实都是超有限的。我们使用了 Hjorth 对波兰群作用进行分析的一小部分内容；这种分析是 Hjorth 将可数结构的 Scott 分析推广到波兰群作用上的结果。

1. Introduction

我们称博雷尔等价关系 E 可由波兰群 G 分类，如果存在一个从 E 到由 G 在波兰空间上的连续作用所诱导的轨道等价关系的博雷尔归约。可数等价关系是指每个等价类都可数的等价关系。

在 [GJ15], 中，Gao-Jackson 证明了，任何可由可数阿贝尔群分类的可数等价关系都是超有限的；这一证明使用了深刻的组合论证。这个结果最初由 Weiss 针对 $\mathbb{Z}^n$ 证明。Gao-Jackson 的结果促使 Hjorth 提出能否将这一结果加强如下。

问题 1.1（Hjorth, [Hjo10]）。假设 E 是一个可由阿贝尔波兰群分类的可数等价关系。那么 E 必定是超有限的吗?

我们有充分理由认为这可能成立。例如，在 [DG17], 中，Ding-Gao 展示了如何轻松地将 Gao-Jackson 的结果推广到由非阿基米德阿贝尔波兰群分类的情形；而在 [Cot19], 中，Cotton 也对由局部紧阿贝尔波兰群分类的情形给出了肯定答案。

然而，在本文中，我们证明如下结果：

定理 1.2. 每个可数可树化等价关系都可以由阿贝尔波兰群分类。特别地，它们可以由 ℓ_1 分类。

我们知道，存在一些不是超有限的可数博雷尔树可化等价关系，例如自由群 F_2 在 2^{F_2} 上的移位作用的自由部分（见[JKL02]）。这使我们能够对 Hjorth 的问题给出否定回答。

日期：2023年5月3日。2020年数学主题分类。主要分类号：54H05，03E15；次要分类号：22A05，54H15。关键词和短语：波兰群、CBER、可树化、巴拿赫空间、Hjorth 分析、超有限、博雷尔归约。

Hjorth 还针对可由$\mathbb{R}^\omega$分类的等价关系这一特定情形提出了问题 1.1。为此，我们证明如下结论：

定理 1.3. 每个可由局部紧阿贝尔波兰群的可数乘积分类的 $\mathbf{\Pi}^0_3$ 等价关系，都博雷尔可归约到 E^ω_0。

本质可数的等价关系是潜在的 $\mathbf{\Pi}^0_3$（事实上是潜在的 $\mathbf{\Sigma}^0_2$），因此根据 Hjorth-Kechris 第六二分定理，我们可以得出以下结论：

推论 1.4. 对于可由局部紧阿贝尔波兰群的可数乘积分类的等价关系这一特殊情形，问题 1.1 的答案是肯定的，例如 $\mathbb{R}^\omega$。

我们将在第 3 节证明定理 1.2，并在第 4 节证明定理 1.3。最后，我们还会作一些补充说明，并提出一些后续问题。

1.1. 致谢。作者谨向 Clinton Conley、Aristotelis Pana- giotopoulos、Su Gao、Omer Ben-Neria、Slawek Solecki 和 Benjamin Weiss 致谢，感谢他们多次进行宝贵的交流。

更早的　本文前半部分的一个版本曾出现在作者的博士论文中　.

2. Preliminaries

我们假设读者对博雷尔可约性理论有基本了解，例如 [Gao09]。如果存在闭子群 G' 以及从 G' 到 H的连续满同态，我们就说波兰群 G 包含波兰群 H。以下事实在等价关系的分类理论中十分重要。

事实 2.1（Mackey、Hjorth）。设 G和 H 是满足以下条件的波兰群：G包含 H。那么，对于任意波兰 H-空间 Y，存在一个波兰 G-空间 X，使得 E^G_X 和 E^H_Y在博雷尔意义下双向可约。

特别地，如果某个等价关系可由 H 分类，且 G 包含 H，那么根据前述事实，它可由 G分类。关于其原始的、更强的表述及证明，参见 [BK96, Theorem 2.3.5]

设 X 是一个波兰空间。回忆一下，$\mathcal{F}(X)$ 表示由埃夫罗斯博雷尔结构赋予的 X 的所有闭子集构成的标准博雷尔空间；该结构即由形如以下集合生成的 σ-代数

$$\{C \in \mathcal{F}(X) \mid C \cap U \neq \emptyset\}$$

对于开集 $U \subseteq X$。若 X 是一个波兰 G-空间，也就是说，它配有一个波兰群 G 的连续作用 $G \curvearrowright X$，那么该作用

$$G \curvearrowright \mathcal{F}, \quad g \cdot C = \{g \cdot x \mid x \in C\}$$

是博雷尔的，因此它是一个博雷尔 G-空间（即配有波兰群的博雷尔作用的标准博雷尔空间）。回忆一下，每个博雷尔 G-空间都可以赋予一个波兰拓扑，使其生成相同的博雷尔集，并使其成为一个波兰 G-空间 [BK96，定理 5.2。1]。

给定一个波兰空间 X，我们用 $X^{\leq\omega}$ 表示波兰空间 $\bigsqcup_{\alpha\leq\omega} X^\alpha$。以下结论容易验证。

引理 2.2。映射

$$X^{\leq\omega} \to \mathcal{F}(X), \quad (x_i)_{i<\alpha} \mapsto \overline{\{x_i \mid i < \alpha\}}$$

是博雷尔的。

2.1. 自由巴拿赫空间。给定一个度量空间（X， d），其中 $d \leq 1$ 可以定义 X 上的自由巴拿赫空间。该构造最早由 Pestov 在 [Pes86] 中引入。我们将回顾 [GP03] 中所介绍的最相关内容。

我们考虑度量空间 $(X \sqcup \{*\}, d)$，其中 $*$ 是一个新点，满足对于每个 $x \in X$，都有 $d(x,*) = d(*,x) = 1$。定义 $L(X)$ 为唯一一个以 $X \sqcup \{*\}$ 为哈梅尔基的实向量空间。

对于 $x \in L(X)$，我们将范数 $\|x\|$ 定义为所有满足以下条件的和的下确界

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| d(x_i, y_i)$$

对于满足以下条件的 $n \in \omega$、 x_i、 $y_i \in X \sqcup \{*\}$ 和 $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = x \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in \operatorname{Span}\{*\}.$$

要验证这确实是 $L(X)$ 上的范数，可参见例如 [GP03，定理 2.2]。令 d 为诱导度量 $d(x,y) = \|x - y\|$。容易验证，若 X 可分，则 $L(X)$ 也可分，其可数稠密集为

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid n \in \omega,\ \lambda_i \in \mathbb{Q},\ x_i \in D \right\}, \tag{1}$$

其中 D 是 X的某个可数稠密子集。

在 $\|x\|$ 的定义中，对于某些满足 x_i的 x_i、 y_i，其下确界总能取到，并且对每个 $1 \leq i \leq n$ 都有 $y_i \in \operatorname{supp}(x)$（参见 [GP03，推论 2.9]）。由此很容易验证

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \right) \cdot \min\{ d(x_i, x_j) \mid i \neq j \} \tag{2}$$

始终成立。

当然，我们可以通过映射 $x \mapsto 1x$将 X 与其在 $L(X)$ 中的副本等同起来。事实上， $d \restriction X = d$（参见 [GP03，推论 2.12] 及其前面的评注）。

定义 X上的自由巴拿赫空间，记作 $B(X)$，为 $L(X)$的完备化。包含映射 $X \to B(X)$ 是一个等距嵌入。令 $Z^{<\omega} = \bigsqcup_{n<\omega} Z^n$，对任意波兰$Z$，容易验证映射

$$(X \times \mathbb{R})^{<\omega} \to B(X), \quad (x_i, \lambda_i)_{i<n} \mapsto \sum_{i<n} \lambda_i \cdot x_i$$

是连续的。

3. Countable treeable equivalence relations

本节的目标是说明，每个可数树化博雷尔等价关系都可以由某个阿贝尔波兰群分类。首先，我们需要引入波兰边标记的概念，以及这类标记的一种性质，我们称之为“拉伸”。

3.1. 波兰边标记。给定一个波兰空间 X， $\boldsymbol{X}$ 上的一个（无向）图是一个集合

$$G \subseteq (X \times X) \setminus \{(x,x) \mid x \in X\}$$

满足对称性。我们将 $E_G \subseteq X \times X$ 记为连通关系；当 G是博雷尔关系且具有可数分支时，它也是博雷尔关系。

$\boldsymbol{G}$ 中的一条路径是由 G的边组成的序列 $(x_0, x_1), (x_1, x_2)$ ..., (x_{n-1}, x_n)。称两点 x 和 y 的路径距离为 $\boldsymbol{k}$，当且仅当 k 是满足存在一条由 k条边组成、从 x 到 y的路径的最小值。

图 G 的（有向）波兰边标记 $\gamma : \mathsf{Lab} \to G$ 是一个波兰空间 Lab，以及一个满足以下条件的连续单射函数 γ

$$\forall (x,y) \in G, \text{ exactly one of } (x,y) \text{ and } (y,x) \text{ is in the image of } \gamma.$$

换言之，该标记为每条边关联一个唯一的实数和一个方向。由通常的改变拓扑论证可知，每个博雷尔图都有一个波兰边标记。

设 $\gamma : \mathsf{Lab} \to G$ 是定义在 X上的图的波兰边标记。通过映射将像 $\gamma[\mathsf{Lab}]$ 与其在 $B(\mathsf{Lab})$中的副本对应起来：

$$(x,y) \mapsto 1 \cdot l, \quad \text{where } \gamma(l) = (x,y),$$

以及通过映射将 $G \setminus \gamma[\mathsf{Lab}]$ 与 $B(\mathsf{Lab})$ 中的副本对应起来

$$(x,y) \mapsto -1 \cdot l, \quad \text{where } \gamma(l) = (y,x).$$

将 $1 \cdot l$ 视为沿边 $\gamma(l)$“向前”行进，将 $-1 \cdot l$ 视为沿 $\gamma(l)$“向后”行进。暂时定义 $\sigma : \{(\pm 1) \cdot l \mid l \in \mathsf{Lab}\} \to G$ 为这两个映射之并的逆映射。

称一个和 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i l_i \in B(\mathsf{Lab})$ 为路径标签，当且仅当 $\lambda_l = 1, -1$ 对于 $i = 1, ..., n$，且$\sigma(\lambda_{j_1} l_{j_1})$ ..., $\sigma(\lambda_{j_n} l_{j_n})$ 在某种重排 $l_{j_1}, ..., l_{j_n}$ 下构成 G 中的一条路径，其中重排的是 $l_1, ..., l_n$。注意，这样一条路径沿每条边至多经过一次。若图 G 无环，则同一连通分量中任意两点之间恰有一个路径标签。自然地，我们称路径标签始于顶点 $x \in X$ 、止于顶点 $y \in X$，当且仅当它所标记的路径始于 x、止于 y。

引理 3.1. 如果 $\gamma : \mathsf{Lab} \to G$ 是波兰边标记，且 G 无环，那么映射

$$E_G \to B(\mathrm{Lab}), \quad (x,y) \mapsto p_{x,y}$$

是博雷尔的，其中 $p_{x,\,y}$ 是从 x 到 y 的唯一路径标签。

证明。令 $A \subseteq X^2 \times (\mathsf{Lab} \times \{-1,1\})^{<\omega}$ 为满足以下条件的 $(x, y, ((\ell_i, \lambda_i)_{i<n}))$ 所构成的博雷尔集：存在 $\{0, ..., n-1\}$ 的一个置换 π，使得 x 是 $\sigma(\lambda_{\pi(0)} \ell_{\pi(0)})$ 的左分量， y 是 $\sigma(\lambda_{\pi(n-1)} \ell_{\pi(n-1)})$ 的右分量，并且对于每个 $0 \le i < n-1$， $\sigma(\lambda_{\pi(i)} \ell_{\pi(i)})$ 的右分量都等于 $\sigma(\lambda_{\pi(i+1)} \ell_{\pi(i+1)})$ 的左分量。注意，对于任意 (x, y)，截面 $A_{(x,y)}$ 必须是有限的。特别地，根据第 2 章末尾的注释，所有 $(x, y, p_{x,\,y})$ 构成的集合 $B \subseteq X^2 \times B(\mathsf{Lab})$ 是 A 的连续有限到一像。集合 B 是所需函数的图像。□

我们指出，路径标记具有以下良好的闭包性质：如果 p 是从 x 到 y 的路径标记，且 q 是从 y 到 z的路径标记，那么 $p + q$ 就是从 x 到 z的路径标记。特别地，如果 G 是无环的，那么对于同一连通分支中的任意 x、 y、 z， $p_{x,\,z} = p_{x,\,y} + p_{y,\,z}$。

3.2. 拉伸标记。我们希望边标记满足一种性质，并将其称为“拉伸”。

令 G_{Lab} 为 Lab 上的边图，当且仅当 $\gamma(l_1)$ 和 $\gamma(l_2)$ 关联于同一个顶点时，边 (l_1, l_2) 存在（不论方向）。

定义 3.2. 给定一个波兰边标记 $\gamma : \mathrm{Lab} \to G$，以及 Lab 上的相容完备度量 $d \le 1$，称 $\boldsymbol{\gamma}$ 关于 $\boldsymbol{d}$ 是伸展的，当且仅当存在某个固定的 $\epsilon > 0$，使得只要 l_1 和 l_2 在边图 G_{Lab} 中的路径距离为 $k \ge 1$，就有 $d(l_1, l_2) \ge \epsilon \cdot 1/k$。

局部有限博雷尔图总是具有伸展的波兰边标记：

引理 3.3. 设 G 为一个局部有限博雷尔图。那么存在一个波兰边标记$\gamma : \mathrm{Lab} \to G$，以及 Lab 上的相容完备度量 $d \le 1$，使得 γ 关于 d 是伸展的。

证明。固定一个波兰边标记 $\gamma : \mathrm{Lab} \to G$。对每个 n，令 $G^{(n)}{}_{\mathrm{Lab}}$ 为无向图；当且仅当 l_1 和 l_2 在边图 G_{Lab}中的路径距离至多为 2^n 时，边 (l_1, l_2) 属于该图。注意，每个 $G^{(n)}{}_{\mathrm{Lab}}$ 都是博雷尔且局部有限的，因此固定 $G^{(n)}{}_{\mathrm{Lab}}$ 的正常着色 $c^{(n)} : \mathrm{Lab} \to \omega$，对每个 n 各固定一个。固定一个相容的、更精细的波兰拓扑，使每个 $c^{(n)}$ 连续，并固定一个诱导此拓扑的相容完备度量 d'。将 d' 替换为如下定义的相容完备度量，即把任意两个 ℓ_1、$\ell_2 \in \mathrm{Lab}$ 的距离规定为……，便可确保 $d' \le 1$

$$\frac{d'(\ell_1, \ell_2)}{d'(\ell_1, \ell_2) + 1}.$$

映射 $x \mapsto (c^{(n)})_{n<\omega}$ 从 Lab 到 ω^ω 连续。令 Lab$'$ 为该函数的（闭）图，并令 γ' 为先取第一坐标投影、再与 γ 复合所得的映射。在 Lab$'$ 上，我们有度量

$$d((l_1, s_1), (l_2, s_2)) = \frac{1}{2}[d'(l_1, l_2) + d_{\omega^\omega}(s_1, s_2)],$$

其中，$d_{\omega^\omega}((a_n), (b_n)) = \sum\{1/2^n \mid a_n \neq b_n\}$ 是 ω^ω上的通常完备度量。显然，$\gamma' : \mathrm{Lab}' \to G$ 关于此度量是拉伸的，并且 $d \le 1$。□

引理 3.4. 设 $\gamma : \mathrm{Lab} \to G$ 是定义在 X上的图的波兰标记，它关于相容完备度量 $d \le 1$ 是拉伸的。进一步假设 G是无环的。那么对于任意 $x \in X$，从 x 出发的路径标记集合在 B(Lab) 中是闭的。事实上，它们是一致离散的。

证明。固定一个来自标记拉伸度的 $\epsilon > 0$。设 p_1 是从 x到 y 的路径标记，且 p_2 是从 x 到 y′的路径标记。那么 $p_2 - p_1$ 是从 y 到 y′的路径标记，并且不会重复使用同一条边。因此，由等式 2 可得

$$\|p_2 - p_1\| \ge (n/2) \cdot \min\{d(l_1, l_2) \mid l_1, l_2 \in \mathrm{supp}(p_2 - p_1)\}$$

其中 n 是路径 $p_2 - p_1$ 的长度（所经过的边数）。根据拉伸度，对于路径标签 $p_2 - p_1$的支撑中的每个 l_1和 l_2，都有$d(l_1, l_2) \ge \epsilon \cdot 1/(n-1)$。因此我们有

$$\begin{aligned}\|p_2 - p_1\| &\ge (n/2) \cdot \min\{d(l_1, l_2) \mid l_1, l_2 \in \mathrm{supp}(p_2 - p_1)\} \\ &\ge (n/2) \cdot (\epsilon/(n-1)) \\ &\ge \epsilon/2.\end{aligned}$$

对于从 x 出发的任意路径标记 p_1 和 p_2，上述结论均成立，因此该集合是一致离散的。□

3.3. 归约。设 G 是定义在波兰空间 X 上的局部有限无环图，其边标记为波兰空间之间的映射 γ : Lab $\to G$。此外，根据引理 3.3，可假设该标记相对于 Lab 上的相容完备度量 $d \leq 1$ 是拉伸的。

考虑映射

$$X \to \mathcal{F}(B(X) \times X), \quad x \mapsto \{(p_{x,y}, y) \mid y \; E_G \; x\}.$$

由引理 3.4，这一定义良好。要证明它是博雷尔的，首先注意到，由 Feldman–Moore 定理，存在一个博雷尔函数 f: $X \to X^{\leq \omega}$使得 $f(x)$ 枚举了 $[x]_{E_G}$。由引理 3.1，存在一个博雷尔函数 g : $X \to B(\text{Lab})^{\leq \omega}$，使得 $g(x)$ 枚举了从 x 出发的路径集合。最后，由引理 2.2，所需的映射是博雷尔的。

现在考虑作用

$$a : B(\text{Lab}) \curvearrowright \mathcal{F}\left(B(\text{Lab}) \times X\right)$$

定义如下

$$g \cdot C = \{(g + h, x) \mid (h, x) \in C\}.$$

很容易验证这一定义良好且是博雷尔的。

断言 1。映射 $f = x \mapsto \{(p_{x,y}, y) \mid y \; E_G \; x\}$ 是从 E_G 到 E_a的一个归约。

证明。要说明它是一个同态，注意如果 $x \; E_G \; y$ 和 $p_{x,y}$ 是从 x 到 y的唯一一条路径，那么

$$f(y) = \{(p_{y,z}, z) \mid z \; E_G \; y\} = \{(p_{y,x} + p_{x,z}, z) \mid z \; E_G \; y \; E_G \; x\} = p_{y,x} + f(x).$$

另一方面，如果 $f(x) \; E_a \; f(y)$，那么必定存在某个路径标签 p，使得 $(p, x) \in f(y)$，因此 $x \; E_G \; y$。□

推论 3.5。任何可数可树化等价关系都可以由某个阿贝尔波兰群分类。

证明。任何可数可树化等价关系都博雷尔可归约到 E_G，其中 E_G 是定义在某个波兰空间 X 上的局部可数博雷尔无环图（参见 [JKL02]）。由引理 3.3，我们可以找到一个波兰边标记 γ : Lab $\to G$，它相对于 Lab 上的某个相容完备度量 $d \leq 1$ 是伸展的。正如我们刚才所见，对于所述作用，我们得到 $E_G \leq_B E_a$。□

根据 [GP03 定理 4.3], ，每个阿贝尔波兰群都被 ℓ_1 所包含，因此通过事实 2.1（Mackey-Hjorth），我们得到了本文标题中的结果。

4. Actions of countable products of locally compact abelian Polishgroups

本节证明，可由 $\mathbb{R}^\omega$ 分类的可数博雷尔等价关系都是超有限的。

我们回顾以下两个结果：

命题 4.1（Kechris [Kec92]）。设 G 是一个局部紧波兰群，a :$G \curvearrowright X$ 是作用在标准博雷尔空间上的博雷尔作用。那么 E_a 是本质可数的。

命题 4.2（Cotton [Cot19]）。设 G 是一个局部紧阿贝尔波兰群，且a： $G \curvearrowright X$ 是标准博雷尔空间上的博雷尔作用。那么 E_a 本质超有限。

回顾一下，等价关系 E 是本质可数的，当且仅当它博雷尔可约到某个可数博雷尔等价关系；它是本质超有限的，当且仅当它博雷尔可约到某个超有限等价关系。

给定一个连续作用 $a\colon G \curvearrowright X$，其中波兰群为 G、波兰空间为 X，我们回顾 Hjorth 对波兰群作用进行分析时，在满足 $x \in X$ 且为开集的 $U \subseteq G$ 上定义的关系 $\leq_2$，其作用对象是有序对 (x,U)。对于任意开且非空的 $U' \subseteq U$，都存在开且非空的 $V' \subseteq V$，使得 $V'y \subseteq \overline{U'y}$，当且仅当 $(x,U) \leq_2 (y,V)$。最后，$(x,G) \leq_2 (y,G)$ 且 $(y,G) \leq_2 (x,G)$，当且仅当 $x \sim_1 y$。容易验证，$x \sim_1 y$ 蕴含 $\overline{G\cdot x} = \overline{G\cdot y}$。

关于 Hjorth 分析的一般参考资料，可参阅 [Dru22] 或 [All23]。不过，下一个引理提取了我们所需的、关于波兰群的 Hjorth 分析中的特定部分。

引理 4.3. 设 A、$B \subseteq X$ 是 G-不变的 $\mathbf{\Pi}^0_3$ 集，且存在满足 $x \sim_1 y$ 的 $x \in A$ 和 $y \in B$。那么 A 和 B 必相交。

证明。令 τ 表示 X 上原有的波兰 G-空间拓扑。设某些 x、$y \in X$ 满足 $(x,G) \leq_2 (y,G)$ 且 $(y,G) \leq_2 (x,G)$。由于 $[x]_F$ 和 $[y]_F$ 都是 $\mathbf{\Pi}^0_3$，我们可以写成$[x]_F = \bigcap_n \bigcup_m A_{n,\ m}$ 和 $[y]_F = \bigcap_n \bigcup_m B_{n,\ m}$，其中 $A_{n,\ m}$ 是 $B_{n,\ m}$ 是闭集。

根据 Vaught 变换的基本性质（定义及其性质见 [BK96]），我们可以写成

$$[x]_F = [x]_F^{*G} = \bigcap_n \Big[\bigcup_m A_{n,m}\Big]^{*G} = \bigcap_n \bigcap_V \Big[\bigcup_m A_{n,m}\Big]^{\Delta V} = \bigcap_n \bigcap_V \bigcup_m A_{n,m}^{\Delta V}$$

类似地

$$[y]_F = \bigcap_n \bigcap_V \bigcup_m B_{n,m}^{\Delta V}$$

其中 V 遍历 G 的基本开子集。

根据 Hjorth 对波兰拓扑变换所作的精细分析（参见 [Gao09，定理 4.3.3]），存在 X 上更细的波兰拓扑 τ^*，它由一个可数族的集合生成，这些集合要么在 τ 中是开集，要么具有 $C^{\Delta V}$ 的形式，其中 C 在 τ 中是闭集且 $V \subseteq G$ 是基本开集；在该拓扑下，每个 $A_n^{\Delta V,\ m}$ 都是开集。特别地，$[x]_F$ 和 $[y]_F$ 在 τ^* 中是 G_δ。因此，我们只需证明 $G\cdot x$ 和 $G\cdot y$ 在 τ^* 中具有相同的闭包，因为这意味着在拓扑 τ^* 下，$[x]_F \cap \overline{G\cdot x}$ 和 $[y]_F \cap \overline{G\cdot y}$ 都是 $\overline{G\cdot x} = \overline{G\cdot y}$ 的稠密 G_δ 子集。于是，只需证明对于任意 τ-闭的 $C \subseteq X$，$x \in C^{\Delta G}$ 当且仅当 $y \in C^{\Delta G}$。

首先假设 $x \in C^{\Delta G}$。那么存在某个 $g \in G$，以及 G 的单位元的某个对称开邻域 V，使得 $g\cdot x \in C^{*V}$。实际上，这意味着 $\overline{Vg\cdot x} \subseteq C$。由于 $(x,G) \leq_2 (y,G)$，因此存在某个非空开集 $V' \subseteq G$，使得 $V'\cdot y \subseteq \overline{Vg\cdot x}$。特别地，

$$V'\cdot y \subseteq \overline{Vg\cdot x} \subseteq C$$

因此 $y \in C^{*V'}$，这意味着 $y \in C^{\Delta G}$。另一个方向的证明也相同　　me.　　□

现在我们利用这一事实证明：由可数个波兰群的可数乘积上的作用所诱导的任一轨道等价关系，实际上都博雷尔可约于一列轨道等价关系的可数乘积，其中每个轨道等价关系仅由该序列中的有限多个波兰群诱导。

命题 4.4. 设 $G = \prod_n G_n$ 是波兰群的可数乘积，并且

$$a : \prod_n G_n \curvearrowright Z$$

是波兰空间上的连续作用 Z。那么存在连续作用

$$b_n : \prod_{k\leq n} G_k \curvearrowright Y_n$$

在波兰空间 Y_n 上，以及一个博雷尔函数 $g\colon Z \to \prod_n Y_n$，它是从 E_a 到 $\prod_n E_{b_n}$ 的博雷尔同态，并满足以下附加性质：对于任意 G-不变的 $\mathbf{\Pi}^0_3$ 集 A、$B \subseteq Z$，如果存在满足 $g(x) \prod_n E_{b_n} g(y)$ 的 $x \in A$ 和 $y \in B$，那么 A 与 B 必相交。

证明。对于每个 n，令 $H_{>n}$ 为 G 的闭正规子群，由满足对每个 $k > n$ 均有 $g_k = 1_{G_k}$的序列组成；令 $H_{\leq n}$ 为 G 的闭正规子群，由满足对每个 $k \leq n$均有 $g_k = 1_{G_k}$的序列组成。

对于每个 n，令 $Y_n = \mathcal{F}(G)^\omega$，并令 $b_n\colon H_{>n} \curvearrowright Y_n$ 为通过右平移定义的连续作用，即

$$h \cdot \langle C_k \mid k \in \omega\rangle = \langle C_k h^{-1} \mid k \in \omega\rangle.$$

令 U_k（其中 $k \in \omega$ 枚举 Z 上的一个拓扑基），并将 $f_n\colon Z \to Y_n$ 定义为博雷尔函数

$$f_n(x) = \langle \overline{\{g \in G \mid H_{\leq n} g \cdot x \cap U_k \neq \emptyset\}} \mid k \in \omega\rangle$$

容易看出，这是一个从 E_a 到 E_{b_n}的同态。

因此，博雷尔映射

$$\bar{f} : Z \to \prod_n Y_n$$

定义如下：

$$\bar{f}(x) = \langle f_n(x) \mid n \in \omega\rangle$$

是一个从 E_a 到 $\prod_n E_{b_n}$的博雷尔同态。

现在令 A、$B \subseteq X$ 为 G-不变的，并且 $\mathbf{\Pi}^0_3$，且假设 $x \in A$ 和 $y \in B$ 满足$g(x) \prod_n E_{b_n} g(y)$。根据引理 4.3，只需证明 $x \sim_1 y$。

令 $V \subseteq G$ 为任意开集。取足够大的 n，使得 $V = VH_{\leq n} = H_{\leq n}V$。ˆ 根据 (3)，存在某个 $h \in H_{>n}$，使得对每个 k，

$$\overline{\{g \in G \mid H_{\leq n} g \cdot y \cap U_k \neq \emptyset\}}\hat{h}^{-1} = \overline{\{g \in G \mid H_{\leq n} g \cdot x \cap U_k \neq \emptyset\}}$$

或者等价地

$$(*) \qquad \overline{\{g \in G \mid H_{\leq n} g\hat{h} \cdot y \cap U_k \neq \emptyset\}} = \overline{\{g \in G \mid H_{\leq n} g \cdot x \cap U_k \neq \emptyset\}}.$$

ˆ我们证明 $Vh \cdot y \subseteq \overline{V \cdot x}$。固定任意一个 $v \in V$，并固定 $vh \cdot y$ 的任意基本开邻域 ˆU_k。特别地，这意味着 v 属于 (∗) 的左侧，因此也属于右侧。这意味着存在某个 $v' \in V$，使得 $H_{\leq n} v' \cdot x \cap U_k \neq \emptyset$。由于 $H_{\leq n} v' \subseteq V$，且 v 是任意选取的，我们得到 $V \cdot x \cap U_k \neq \emptyset$，这正是所需。□

应用命题 4.1 和 4.2，我们得到如下结果：

推论 4.5. 如果 G 是局部紧波兰群的可数乘积，并且 $a\colon \prod_n G \curvearrowright X$ 是作用在波兰空间 X 上的连续作用，使得 E_a 是 $\mathbf{\Pi}^0_3$，那么 $E_a \leq_B E^\omega_\infty$。此外，如果 G 是局部紧阿贝尔波兰群的可数乘积，那么 $E_a \leq_B E^\omega_0$。

现在我们可以得出本节的主要结果。

定理 4.6。设 E 是一个可数博雷尔等价关系，可由波兰群 G 分类，其中 G 是局部紧阿贝尔波兰群的可数乘积。那么 E_a 是超有限的。

证明。设 Z 是一个带有连续作用 a 的波兰空间： $G \curvearrowright Z$ ，并设 E 定义在波兰空间 X上。设 $f\colon X \to Z$ 是从 E 到 E_a的博雷尔归约。设 $B := f[X]$，由于 f 是博雷尔且至多可数对一，因此它是博雷尔函数。根据 Kec95 练习 35 的反射论证， [设 $F \supseteq E$ 是满足以下条件的博雷尔等价关系

$$\forall x, x' \in X, (f(x)\ F\ f(y)) \to x\ E\ y.$$

设 $P \subseteq Z \times X$ 定义如下

$$P := \{(z, x) \in Z \times X \mid z\ F\ f(x)\}.$$

由于这是一个截面可数的博雷尔集合，根据卢津-诺维科夫定理，存在一个博雷尔函数$h\colon [B]_F \to X$ ，使 P 一致化。特别地， h 是从 $F \restriction B$ 到 E 的归约，并满足 $g(f(x))\ E\ x$ ，对每个 $x \in X$ 均成立。

根据 [BK96，定理 5.2。1], 存在一种更细的波兰 G-空间拓扑，使得在生成相同博雷尔 σ-代数的意义下，它与原拓扑相容；在该拓扑中，对每个基本开 $U \subseteq Y$ 和开 $V \subseteq G$， B 是闭的， $g^{-1}[U]^{\Delta V}$ 是开的。

令 $g\colon Z \to Y$ 为命题 4.4 中满足 $Y = \prod_n Y_n$ 的函数。

断言 2。复合映射 $g \circ f$ 是从 E 到 $\prod_n E_{b_n}$ 的博雷尔归约

证明。任取 x、 $y \in X$。首先，假设 $x\ E\ y$。于是有 $f(x)\ E_a\ f(y)$。根据 g 的选取，有 $g(f(x))\prod_n E_{b_n}\ g(f(y))$，证毕。

现在假设 e $g(f(x))\prod_n E_{b_n}\ g(f(y))$。由于 $h(f(x))$ 是可数的，它是 Σ^0_2，因此

$$[h(f(x))]_E = \bigcup_n \bigcap_m (X \setminus U_{n,m})$$

对于某个由 X 的基本开子集构成的序列 $(U_{n,\ m})$。特别是，

$$\begin{aligned}
[f(x)]_F &= \Big[\bigcup_n \bigcap_m h^{-1}[X \setminus U_{n,m}])\Big] = \Big[\bigcup_n \bigcap_m h^{-1}[X \setminus U_{n,m}]\Big]^{\Delta G} \\
&= \bigcup_n \Big[\bigcap_m h^{-1}[X \setminus U_{n,m}]\Big]^{\Delta G} = \bigcup_n \bigcup_V \Big[\bigcap_m h^{-1}[X \setminus U_{n,m}]\Big]^{*V} \\
&= \bigcup_n \bigcup_V \bigcap_m h^{-1}[X \setminus U_{n,m}]^{*V} = \bigcup_n \bigcup_V \bigcap_m B \setminus h^{-1}[U_{n,m}]^{\Delta V}
\end{aligned}$$

其中 V 遍历 G 的基本开子集。特别是， $[f(x)]_F$ 是 $\mathbf{\Sigma}^0_2$ 且因此 $\mathbf{\Pi}^0_3$。类似地， $[f(y)]_F$ 也是如此。因此，根据 g 的选取，我们有 $f(x)\ F\ f(y)$。根据 F 的选取，我们如愿得到 $x\ E\ y$ 。□

根据命题 4.2，我们有 $\prod_n E_{b_n}$ 博雷尔可归约到 E^ω_0 ，因此 E 也如此。根据 Hjorth-Kechris 第六二分定理（见 [HK97]），我们知道 E 实际上是超有限的。□

我们指出，根据事实 2.1，前一个推论中的假设可以弱化为： G is 仅由局部紧阿贝尔波兰群的可数乘积所涉及。

我们还注意到，通过对 Hjorth 分析进行更精细的应用，很可能可以省去第六二分定理的应用。

5. Final remarks and further questions

目前尚不清楚，在定理 1.2 中使用树性是否是必要的。每个可数博雷尔等价关系是否都能由阿贝尔波兰群进行分类，这一问题仍未解决。事实上，是否能由 tsi波兰群进行分类与是否能由阿贝尔波兰群进行分类相同，也尚未解决。在 [AP21], 中证明了，存在一个可以由 cli波兰群分类、但不能由 tsi波兰群分类的等价关系（即，存在一个具有相容的完备左不变度量的波兰群，但不存在具有相容的完备双侧度量的波兰群）。因此，cli波兰群比 tsi波兰群具有更高的“分类强度”。然而，尚不清楚 tsi波兰群的分类强度是否高于阿贝尔波兰群。

定理 1.2 的逆命题不成立。显然，可由阿贝尔波兰群分类的等价关系类在乘积运算下是闭的。然而，可数博雷尔树可化等价关系类并非如此。例如，若 F 是自由群 F_2 在 2^{F_2} 上的移位作用的自由部分所诱导的轨道等价关系，那么 $E \times E_0$ 可以由 $G \times \mathbb{Z}$ 分类，其中 G 是一个将 E分类的阿贝尔波兰群。然而， $E \times E_0$不是树可化的（见 [JKL02，推论 3.28]）。

References

[All23] S. Allison. 非阿基米德tsi波兰群及其潜在博雷尔复杂度谱，2023年。[AP21] S. Allison 和 A. Panagiotopoulos. （余）同调及其他 TSI 群不变量分类中的动力学障碍。《美国数学会汇刊》，374:8793–8811，2021年。[BK96] H. Becker 和 A. S. Kechris. 波兰群作用的描述集合论，伦敦数学会讲义系列第232卷。剑桥大学出版社，1996年。[Cot19] M. R. Cotton. 阿贝尔群作用与超光滑等价关系，2019年。北德克萨斯大学博士论文。[DG17] L. Ding 和 S. Gao. 非阿基米德阿贝尔波兰群及其作用。《数学进展》，307:312–343，2017年。[Dru22] O. Drucker. Hjorth秩的有界性原理。《数学逻辑档案》，61:223–232，2022年。[Gao09] S. Gao. 不变描述集合论，纯数学与应用数学第293卷。CRC出版社，2009年。[GJ15] S. Gao 和 S. Jackson. 可数阿贝尔群作用与超有限等价关系。《数学发明》，201:309–383，2015年。[GP03] S. Gao 和 V. Pestov. 关于某些阿贝尔波兰群的一种普适性。《基础数学》，179:1–15，2003年。[Hjo10] G. Hjorth. 博雷尔等价关系：二分定理与结构。http://www.logic.ucla.edu/greg/BerkeleyThree.pdf，2010年4月。加州大学伯克利分校塔尔斯基讲座幻灯片。[HK97] G. Hjorth 和 A. S. Kechris. 博雷尔等价关系的新二分。《符号逻辑通报》，3:329–346，1997年。[JKL02] S. Jackson, A. S. Kechris, 和 A. Louveau. 可数博雷尔等价关系。《数学逻辑杂志》，2:1–80，2002年。[Kec92] A. S. Kechris. 局部紧群作用的可数截面。《Ergodic Theory Dynam. Systems》，12:283–295，1992年。[Kec95] A. S. Kechris. 经典描述集合论，数学研究生教材第156卷。施普林格出版社，纽约，1995年。

[Pes86] V. G. Pestov. 自由巴拿赫空间与拓扑群的表示。Funktsional. Anal. i Prilozhen.，20:81–82，1986年。

Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, Canada电子
邮箱地址：shaunpallison@gmail.com 网址：https://www.shaunallison.com