非线性可辨识性的一般解析条件及其在病毒动力学中的应用

Agostino Martinelli

arXiv:2305.01060v1 [math.OC] 1 May 2023

摘要——**可辨识性描述了根据系统的输入和输出，确定表征动态系统的未知参数值的可能性。本文给出了全面表征这一性质的一般解析条件。该条件适用于任何系统，不受其复杂程度和非线性类型的限制。对于时变参数，只要求其时间依赖关系是解析的。此外，该条件的实施无需用户发挥创造性，只需遵循系统化流程，执行导数计算和矩阵秩计算即可。时变参数被视为未知输入，其可辨识性基于最新的未知输入可观测性问题解析解 [1], [2]。最后，对于不可辨识的参数，本文还提供了一种解析方法，用于确定无穷多个与其真实值不可区分的参数值。本文运用该条件研究了病毒动力学领域两个非线性模型（艾滋病病毒和 COVID-19）的可辨识性。具体而言，对于前者，本文研究了一个广受欢迎的艾滋病病毒常微分方程模型，并利用该条件自动得出一项新的基本结果，揭示了现有研究水平中存在的严重错误。**

索引词—**非线性可辨识性；时变参数；非线性未知输入可观测性；未知输入重构；病毒动力学；HIV动力学**

I. 引言

常微分方程（ODE）被用于对众多科学领域中的大量现象建模，涉及从自然科学和应用科学到社会科学的各个领域。

常微分方程模型的特征是具有由若干标量构成的状态。其随时间的演化由一组常微分方程精确描述（每个状态分量对应一个方程）。除状态分量外，常微分方程模型还可以包含一组参数，这些参数可能已知，也可能未知。最后，常微分方程模型还具有一组输出，并且通常还具有一组输入。输入是时间的函数，作用于状态动力学，并且可以被指定（但须满足取决于具体情形的一些限制）。输出是可获取的量，可以用状态表示；在某些情况下，也可以用上述输入和模型参数表示。

状态可观测性和参数可辨识性是常微分方程模型的两种结构性质。前者刻画了根据系统输入和输出（例如， [3]–[7]）推断状态分量取值的可能性。后者则刻画了根据系统输入和输出推断模型参数取值的可能性，同样，例如， [8]–[10]。

常微分方程模型也可能包含未知输入，即以与上述输入完全相同的方式作用于系统动力学的输入。然而，它们与上述输入的区别在于它们是未知的。从数学角度看，未知输入与未知时变参数的作用完全相同。在文献中，推断其取值的可能性有不同称法：输入可观测性、输入重构，有时也称为系统可逆性（例如， [11]–[18]）。

本文始终采用以下术语。可观测性 指状态的各个分量。未知输入可观测性（缩写为 UIO）仍仅指状态分量，但适用于常微分方程模型还包含未知输入（或时变参数）的情况。可辨识性 指所有未知参数。当参数随时间变化时，我们也使用术语未知输入重构来表示其可辨识性。

常微分方程可辨识性分析广泛存在于各类科学领域，已有多种有趣的方法被提出。关于截至2011年的方法的全面综述可见 [19]。其中一些方法非常有意思，而且在许多情况下，可以成功用于检测给定常微分方程模型的所有可辨识性性质。然而，这些方法存在以下根本局限：

- 它们并不具有普适性。它们基于若干属性，而在存在特定类型的系统非线性（即，方程（1）中的特定函数 f 和/或 h ）时，这些属性有时无法加以利用。尤其是，其中许多属性仅适用于多项式非线性。
- 它们无法自动执行。在大多数情况下，必须根据正在研究的具体案例进行调整，而这种调整需要用户发挥创造性。特别是，这一过程不能仅仅通过遵循系统化流程的步骤来完成（例如，在没有人工干预的情况下运行代码）。

在时变参数的情况下，第二个局限尤为突出：在某些情况下，错误地应用这些方法会得出错误结果（在第四节关于常微分方程艾滋病病毒模型可辨识性的研究中，我们得到的结果与现有研究水平中的结果相矛盾，而后者正是使用这些方法之一得出的）。

过去十年间，得益于未知输入可观测性方面的进展，人们提出了若干新颖且有趣的方法。具体而言，研究者通过引入扩展状态来处理非线性未知输入可观测性问题，该扩展状态包含原始状态，

A. Martinelli 任职于法国蒙博诺的 INRIA Rhone Alpes，电子邮箱：agostino.martinelli@inria.fr

以及未知输入及其截至给定阶数的时间导数 [20]–[24]。在 [22]–[24], 中，这一方法被用于研究未知时变参数的可辨识性。特别是， [22]–[24], 中提出了若干自动迭代算法。这些算法可自动运行，并能够检验时变参数的可辨识性。另一方面，它们也存在以下局限：

- 它们不会自动收敛。具体而言，在每次迭代中，都会通过纳入未知输入的新时间导数来扩展状态。因此，如果在某一步扩展状态是可观测的，就能实现收敛。然而，如果情况并非如此，我们就无法排除扩展状态在后续某一步变得可观测的可能性。因此，在存在不可观测性的情况下，所有这些算法都无法得出结论。
- 由于之前的状态扩增，经过几步后计算负担很容易变得难以承受。

最近，我们基于 [2][1]中给出的结果/推导，提出了非线性未知输入可观测性 [1], 的解析解。特别是， [1] 中提出的系统化流程不受上述局限[2] 的影响，并且能够全面解决存在未知输入（或时变参数）时任意非线性常微分方程模型的状态可观测性问题。另一方面，该系统化流程研究的是状态的可观测性，而非时变参数的可辨识性。在 [1], 中，我们利用这一解析解，初步研究了时变参数的可辨识性（未知输入重构）。本文的目标之一是扩展这一初步且部分的结果，并提出用于研究时变参数可辨识性的一般解析条件。随后，我们采用该条件研究一个广为人知的艾滋病病毒模型（例如，[19], [24], [27]–[31]）和一个新冠肺炎模型 [32], [33]。

本文的贡献有以下三点：
1) 介绍一种解析条件，该条件完整刻画了任意常微分方程模型中所有未知参数的局部可辨识性（第三节）。
2) 确定连续变换（单参数李群），从而能够为任意不可辨识参数确定无限多个与其真实值不可区分的值。
3) 确定一个广泛使用的艾滋病病毒模型和一个 COVID-19 模型的可辨识性性质，并发现现有研究水平中关于 HIV模型可辨识性存在的严重错误。

关于第一项贡献，时变参数被划分为两个不同的组。第二组可以为空。属于第二组的参数始终是不可辨识的，即使是局部不可辨识也是如此（定理3的第一部分）。条件是定理2的第一部分（公式（3））给出了完全表征第一组参数局部可辨识性的条件。最后，第三节-F（公式（10））给出了表征常参数局部可辨识性的条件。

关于第二项贡献，第一组时变参数的连续变换由式（6）中的微分方程组给出，而第二组时变参数的连续变换则由式（8）给出。需要注意的是，式（6）中的微分方程组也提供了常参数的连续变换（参见第三节 D 部分中的备注 3）。

关于第三项贡献，我们的结果改进了现有研究水平中的先前结果。特别是，在这两种情况下，条件（3）都表明时变参数具有不可辨识性。换言之，在这两种情况下，时变参数都无法被唯一辨识（对于HIV模型而言，这一结果与现有研究水平相矛盾）。此外，对于这些常微分方程模型，可以获得（6）中微分方程组的解析解。这使我们能够确定无穷多个不可辨识参数的值，并且这些值对应于模型的相同输出。关于艾滋病病毒常微分方程模型，在IV-D节中，我们直接证明了（6）的解产生相同的输出。这无可置疑地表明了系统的不可辨识性，与现有研究水平中的结果相矛盾。最后，我们确定了唯一确定系统参数所需的最少外部信息（即输出信息之外的信息）。

本文结构安排如下。第II节对问题及其假设给出基本的数学描述。第三节给出解析条件（所有证明均见附录）。第四节和第五节研究文献 [19], [24], [27]–[31], 中讨论的广受关注的艾滋病病毒模型，以及文献 [32], [33]中介绍的新冠肺炎模型。第六节给出一个机器人学应用，进一步展示本文前两项贡献的有效性和普适性。具体而言，我们研究一种广受关注的感知模型的可辨识性，该模型基于视觉和惯性传感。最后，第七节给出结论。

II. 问题与基本假设

我们从以下一般模型出发：

$$\begin{cases} \dot{X} &= f(X(t),\ t,\ U(t),\ Q,\ W(t)) \\ y &= h(X(t),\ t,\ U(t),\ Q,\ W(t)), \end{cases} \tag{1}$$

其中：
- 函数 f 和 h 定义在 $\mathcal{M}_m \times \mathcal{I} \times \mathcal{M}_{m_u} \times \mathcal{M}_q \times \mathcal{M}_{m_w}$上，其中 $\mathcal{M}_m$、 $\mathcal{M}_{m_u}$、 $\mathcal{M}_q$和$\mathcal{M}_{m_w}$ $\mathcal{C}^\infty$–分别是维数为 m、 m_u、 q和 m_w的流形，且 $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ 是一个开时间区间。
- $X(t) \in \mathcal{M}_m$ 是状态。
- $y(t) = [y_1(t) \ldots,\ y_p(t)]^T$是输出向量。
- $U(t) = [U_1(t) \ldots,\ U_{m_u}(t)]^T \in \mathcal{M}_{m_u}$ 是已知输入向量。
- $Q = [Q_1,\ \ldots,\ Q_q]^T \in \mathcal{M}_q$是未知常参数的集合。

[1]该解析解同样基于 [25]和 [26], 中获得的结果，这两项研究涉及特殊系统，即具有单个未知输入且动力学相对于该未知输入呈线性的系统。

[2]注意， [1]中引入的解可能需要将某些未知输入纳入状态中。不过，这种纳入是有针对性的，并会在有限步内终止；一旦扩展系统达到其最高未知输入可重构度 （参见 [1]第 5 节）。

- $W(t) = [W_1(t)\dots,\ W_{m_w}(t)]^T \in \mathcal{M}_{m_w}$是未知时变参数的集合。

请注意，$W(t)$可视为一个系统输入向量，和 $U(t)$一样，它作用于系统动力学。然而，它在两个根本方面与 $U(t)$不同：（i）它无法被指定；（ii）它是未知的。

我们作如下假设：

假设1 函数 f 和 h 对其所有变量均光滑。

假设2 函数 $W(t)$ 关于 t是解析的。

假设3（仅当 f 不是关于 U的仿射函数时才需要）函数 $U(t)$ 是可微的。

本文要解决的问题是引入解析条件，以全面表征系统参数（包括常数参数和时变参数）的局部可辨识性。为此，我们利用了有关未知输入可观测性问题的最新研究结果。为了应用这些结果，我们不采用式（1），而是采用以下系统表征：

$$\begin{cases} \dot{x} &= g^0(x,t) + \sum_{k=1}^{m_u} f^k(x,t)u_k(t) + \sum_{j=1}^{m_w} g^j(x,t)w_j(t) \\ y &= [h_1(x,t),\dots,h_p(x,t)], \end{cases} \tag{2}$$

其中：

- $x \in \mathcal{M}_n$ 是状态，$\mathcal{M}_n$ 是一个维数为 n的 $\mathcal{C}^\infty$–流形。
- $u_1(t)\dots,u_{m_u}(t)$是已知输入。
- $w_1(t)\dots,w_{m_w}(t)$是未知输入或未知时变参数。
- $f^1,\dots,f^{m_u},g^0,g^1,\dots,g^{m_w}$是关于 x 和 t的光滑向量函数。
- $h_1,\dots,h_p$是关于 x和 t的光滑标量函数。

请注意，就我们的目的而言，只需将所有常参数 Q 纳入状态 x，并适当设置$f^1,\dots,f^{m_u},g^0,g^1,\dots,g^{m_w}$，即将会在 (2) 中产生 Q 的所有**.**分量设为零，就能轻松地将上述刻画扩展到包含常参数的情形。请注意，许多非线性系统都具有 (2) 中的结构。如果情况并非如此，也可以轻松地将 (1) 转换为 (2)。我们**. .**设定 $u(t) = U$，以及 $w(t) = W$（其中 $u = [u_1,\dots,u_{m_u}]$和$w = [w_1,\dots,w_{m_w}]$），并将 $U(t)$、$W(t)$ 和 Q 纳入状态（即 $x = [X^T,\ U^T,\ W^T,\ Q^T]^T$）。在本文其余部分，我们直接引用 (2) 中给出的刻画。

给定满足假设1和假设2的系统(2)（当同时满足假设3时，该系统等价于系统(1)），本文旨在提供用于检验其所有未知参数的局部可辨识性的解析条件。

III. 非线性可辨识性的一般解析条件

为了提供表征局部可辨识性的解析条件，我们必须首先执行 [1], 中引入的系统化程序，该程序提供了状态可观测性。存在未知输入的情况下（ [1]中的算法9）。因此，在介绍该条件之前，我们必须提醒读者一些在 [1]（第III-A节）中引入的概念和定义，以及 [1]（第III-B节）中算法9的一些特征。然后，第三节III-C和III-D给出了刻画时变参数局部可辨识性的条件。第三节III-C讨论状态可观测时的特殊情形（定理1），第三节III-D则给出一般情形下的条件（定理2和定理3）。请注意，所有这些定理所陈述的结果都适用于一个系统（本文中记为 $\mathcal{E}$），该系统可能与原系统不同。特别是，在 [1], 中执行算法9的过程中，原系统的某些未知输入可能已被纳入状态，因此 $\mathcal{E}$ 中相应的未知输入便成为原未知输入的时间导数。另一方面，即使如此，一旦获得 $\mathcal{E}$的可辨识性性质，便可立即得到原系统的可辨识性性质，具体说明见III-E节。最后，III-F节给出了刻画常参数局部可辨识性的条件。所有证明均见附录。

A. 在 [1]中介绍的基本概念

我们在此提醒读者注意 [1] 中引入的若干定义和概念（详情请参阅该文）。

1) 未知输入可重构性矩阵：给定一个由式（2）和状态的 k 标量光滑函数 $\lambda_1(x)\dots,\lambda_k(x)$表征的系统，该系统关于 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$的未知输入可重构性矩阵为：

$$\mathcal{RM}\left(\lambda_1,\dots,\lambda_k\right) := \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{g^1}\lambda_1 & \mathcal{L}_{g^2}\lambda_1 & \dots & \mathcal{L}_{g^{m_w}}\lambda_1 \\ \mathcal{L}_{g^1}\lambda_2 & \mathcal{L}_{g^2}\lambda_2 & \dots & \mathcal{L}_{g^{m_w}}\lambda_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{L}_{g^1}\lambda_k & \mathcal{L}_{g^2}\lambda_k & \dots & \mathcal{L}_{g^{m_w}}\lambda_k \end{bmatrix}$$

其中，$\mathcal{L}_\tau$ 是沿向量 τ的李导数算子。请注意，$\lambda_1,\dots,\lambda_k$也可以依赖于时间 t。

2) 未知输入可重构度：给定由 (2) 描述的系统以及函数 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$，系统关于$\lambda_1,\dots,\lambda_k$的未知输入可重构度是 $\mathcal{RM}\left(\lambda_1,\dots,\lambda_k\right)$[3] 的秩。当函数集 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$由所有独立的可观测函数[4,5] 组成时，我们省略对这些函数的说明，并称之为

[3]如 [1], 中所述，本文始终将开集理解为 $\mathcal{M}_n$ 上的一个集合，在该集合上上述秩取常数值。

[4]可观测函数的定义见 [25]。可观测函数是在不可区分集上为常数的标量场（见 [25]中的定义2）。从实际角度来看，可观测函数是这样一个标量场：在给定时间区间内取值可以由系统输入和输出唯一确定。例如，假设描述一辆在平面上移动的车辆的状态包括其笛卡尔坐标 x 和 y，并且假设我们无法根据输入和输出确定它们的值，但可以获得车辆到原点的距离。该状态是不可观测的。然而，函数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 是一个可观测函数。

[5]这里所说的独立，是指它们的微分是线性无关的余向量。因此，最多只能有 n 个线性无关的可观测函数（当有 n 个线性无关的可观测函数时，显然整个状态都是可观测的）。

系统的未知输入可重构度。

3）关于未知输入的规范系统与规范形式：根据构造，对于由（2）表征的系统，从任意一组标量函数中重构其未知输入的可重构度不会超过 m_w。如果一个系统的未知输入可重构度为 m_w，则称该系统关于其未知输入是规范的。一般而言，在初始阶段，除系统输出 $h_1, \ldots, h_p$（它们显然是可观测函数）之外，其他可观测函数尚不可用。当从所有可用的可观测函数中重构未知输入的可重构度达到 m_w[6] 时，我们称该系统已关于其未知输入被设定为规范形式。需要注意的是，存在一些关于其未知输入并非规范的系统，因此无法将其设定为规范形式。

4）有限未知输入扩展：对于由（2）描述的系统，我们将通过把其部分（或全部）未知输入及其截至给定阶数的时间导数（每个纳入的未知输入可以具有不同的阶数）加入状态中而得到的任何系统称为该系统的有限未知输入扩展。所得系统仍满足（2），其中包含m_u 已知输入（保持不变）和 m_w 未知输入（将变为原始未知输入的给定阶数的时间导数）。新的动力学由新的向量描述，这些向量可以直接从（2）中得到（参见 [1]第5节中的公式（21）—（23））。

5）最高未知输入可重构度：给定一个由（2）刻画的系统，其最高未知输入可重构度是其所有有限未知输入扩展的未知输入可重构度中的最大值。

在 [1] 中执行算法9可以建立原系统的有限未知输入扩展（在许多情况下并无必要）。在必要时，状态增广是最小的，即仅包含实现最高未知输入可重构度所需的未知输入。此外，最高未知输入可重构度总能在有限步内实现[7]。 [1] 中的算法9会自动选择必须包含的未知输入。在本文中，我们将这个特殊的未知输入扩展记为 $\mathcal{E}$。

请注意， $\mathcal{E}$ 可能与原系统不同，因为其中一些未知输入已变为原未知输入的给定阶时间导数。当原系统的最高未知输入可重构度与其未知输入可重构度不一致时，就会出现这种情况。此外， $\mathcal{E}$ 也可能与原系统不同，因为其未知输入可能已重新排序，因此，式 (2) 中的向量场$g^1, \ldots, g^{m_w}$ 也随之交换。

[6]当我们进行可观测性分析时，除了输出之外，还可以获得一些新的可观测函数。当我们遵循 [1] 中算法9的步骤时，情况正是如此。[7]这一点已在 [1] 中得到证明（第7.2节、命题 2，以及第7.1节中的引理 1）。

B. 算法*9*在 *[1]*的结果

[1] 中的算法9是一种递归过程，可在有限步内得出以下结果：

1）上述未知输入扩展 $\mathcal{E}$。2） $\mathcal{E}$的未知输入可重构度，记为 m，以及一组可观测函数$\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$，$h_1, \ldots, h_m$，使得 $\mathcal{E}$相对于 $h_1, \ldots, h_m$的未知输入可重构矩阵为满秩。注意，如果 $\mathcal{E}$ 相对于其未知输入是规范的，则 $m = m_w$。 3） $\mathcal{E}$的可观测性余分布，记为 $\mathcal{O}$。

C. 状态可观测时的时变参数可辨识性

在 [1],我们证明了，当表征系统的状态是可观的时，如果系统相对于其未知输入是规范的，那么所有未知输入都可以被重构（定理4在 [1]中）。反之亦然，因此，当状态是可观的时，我们得到了对我们问题的完整回答，该回答由以下定理给出：

定理1 假设 $\mathcal{E}$ 的状态是可观测的。当且仅当所有未知输入都是局部可辨识的，$\mathcal{E}$ 相对于其未知输入是规范的。

证明： 注意到该结论可由定理2和定理3所述结果推出（参见注4），即可得到证明。鉴于其简洁性，我们还在附录D中给出了直接证明。 ◄

请注意， [1] 中的算法9提供了最高的未知输入可重构度（m）。 $\mathcal{E}$ 关于其未知输入是规范的，当且仅当 $m = m_w$。因此，当状态可观测时，定理1为未知输入重构问题提供了完整的解答。

D. 一般情况下时变参数的可辨识性

令 $\mathcal{O}^\perp$ 表示 $\mathcal{O}$的正交分布。注意，当状态可观测时，$\mathcal{O}^\perp$ 仅包含零向量。我们提醒读者， m 是 $\mathcal{E}$ 的未知输入可重构度（或原系统的最高未知输入可重构度）。以下基本结果完整刻画了 $\mathcal{E}$的前 m 个未知输入的局部可辨识性：

定理2 未知输入 $w_j (j = 1, \ldots, m)$ 是局部可辨识的，当且仅当对于任意 $\xi \in \mathcal{O}^\perp$ 以及任意 α =0、1、…、 m，我们有：

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_j^i \xi_i^\alpha = 0, \tag{3}$$

其中：

- ν *is the inverse of the following* $(1,1)$*-tensor field*[8]*:*

[8]请注意，在 [1] 中，当 $m < m_w$时，张量 ν 记作 ${}^m\nu$。类似地，当 $m < m_w$时，张量 μ 记作 ${}^m\mu$。

$$\mu_j^i = \mathcal{L}_{g^i}\widetilde{h}_j, \quad i,\ j = 1, \ldots, m \tag{4}$$

- ξ_i^α取决于 ξ，且对于任意 $i = 1$、...、 m:

$$\xi_i^\alpha = \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x}\dot{\mathcal{L}}_{g^0}\widetilde{h}_i\right)\cdot\xi, & \alpha = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_{g^\alpha}\widetilde{h}_i\right)\cdot\xi, & \alpha = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{5}$$

与 。 $\mathcal{L}_{g^0} = \mathcal{L}_{g^0} + \frac{\partial}{\partial t}$。

此外，记 $x(t)$ 为 $\mathcal{E}$ 在t时的真实状态，并记 $w_1(t)\ldots, w_m(t)$ 为 $\mathcal{E}$ 在 t时的前 m 个真实未知输入。对于任意向量场 $\xi \in \mathcal{O}^\perp$，考虑以下关于 τ 的微分方程组（其中 t 为固定参数）：

$$\begin{cases} \frac{dx'}{d\tau} & = \xi(x'(t,\ \tau)) \\ \frac{dw'}{d\tau} & = \chi(x'(t,\ \tau),\ w'(t,\ \tau)) \\ x'(t,\ 0) & = x(t),\quad w'(t,\ 0) = w(t), \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\chi = [\chi_1, \ldots, \chi_m]^T$ 和 χ_j、 $j = 1$、.....、 m 为:

$$\chi_j = \chi_j(x,\ w) = -\sum_{i=1}^{m}\ \nu_j^i\left(\xi_i^0 + \sum_{k=1}^{m}\xi_i^k w_k\right). \tag{7}$$

假设对于任意 $t \in \mathcal{I}$ 和任意 $\tau \in \mathcal{U}$，*(6)* 的解均存在，其中 $\mathcal{U}$ 是包含 $\tau = 0$ 的 $\mathbb{R}$ 开区间。那么，*(6)* 在任意 $\tau \in \mathcal{U}$ 处的解，即 $x'(t,\ \tau)$ 和 $w'(t,\ \tau)$，与 $x(t)$ 和 $w(t)$ 不可区分。

证明： 证明见附录 C。

当系统关于未知输入为规范形式时， $m = m_w$ 上述结果完全刻画了所有 时变参数的局部可辨识性。另一方面，当 $m < m_w$时，定理2无法判断最后 $m_w - m$ 个时变参数是否可辨识。答案显而易见：它们都不是局部可辨识的。具体而言，我们有以下结果:

定理3 假设 $m < m_w$ （系统关于未知输入不是规范形式）。最后 $m_w - m$ 个时变参数即使在局部也不可辨识。此外，对于任意 $\tau \in \mathbb{R}$， w_j（t） 与w_j'（t， τ）不可区分，定义如下:

$$w_j'(t,\ \tau) := w_j(t) + \tau, \qquad j = m+1, \ldots, m_w. \tag{8}$$

证明： 证明见附录 B。

我们给出以下备注。

备注 1 先确定 x'（t， τ），即可求得式（*6*）的解（即先求解 $\frac{dx'}{d\tau} = \xi$（x'（t， τ），初始条件为 x'（t，0） $= x$（t））， 然后将其代入 $\frac{dw'}{d\tau} = \chi$（x'（t， τ） w'（t， τ），此时它变为一个仅包含 w'（t， τ）的微分方程。

注2 定理*2*不仅提供了一种检查局部可辨识性的简单条件，还提供了一种可能性。以这种方式定量确定无穷多个与真实值（方程（*6*）的解）不可区分的取值。同样，定理*3*确定了最后 $m_w - m$ 个时变参数的无穷多个取值的平凡表达式，这些取值与其真实值不可区分（方程（*8*））。

注3 式（*6*）的解确定了前 m 个时变参数和常参数的不可区分取值。后者确实是状态（x）的组成部分，其不可区分取值就是 x'（t, τ）中的相应分量。

注4 如果状态可观测，则正交分布 $\mathcal{O}^\perp$ 仅包含零向量。因此，条件（*3*）显然成立（ξ_i^α在（*5*）中消失 $\forall\alpha$ 和 $\forall i$）。因此，前 m 个未知输入是局部可辨识的。另一方面，定理*3*指出，后 $m_w - m$ 个未知输入始终不可辨识。因此，根据定理*2*和定理*3*，我们可以得出结论：如果状态可观测，那么所有未知输入局部可辨识当且仅当 $m = m_w$。这正是定理*1*的表述。

注5 状态不可观测并不意味着前m 个未知输入不可局部辨识。在这种情况下，条件（*3*）也可能成立（例如，在特殊情形下，对于任意 $\xi \in \mathcal{O}^\perp$，式（*5*）中的所有量都为零，。 ~即对于任意 $i = 1$，.....， m，我们有：$d\mathcal{L}_{g^0}h_i \in \mathcal{O}$，且~$d\mathcal{L}_{g^k}h_i \in \mathcal{O}$，对于任意 $k = 1$，.....， m。

E. $\mathcal{E}$ 及原系统的可辨识性性质

定理1、定理2和定理3给出的解析条件针对系统 $\mathcal{E}$。该系统可能与原系统不同，因为某些未知输入及其截至给定阶数的时间导数被纳入了状态中（$\mathcal{E}$ 也可能与原系统不同，因为其未知输入可能经过了重新排序）。假设情况确实如此，并且未知输入 j^{th} 及其前 $\mathcal{J}-1$ 阶时间导数被纳入了 $\mathcal{E}$的状态中。

上述定理的条件实际上给出了 w_j的 $\mathcal{J}^{th}$阶时间导数的局部可辨识性（即$w_j^{(\mathcal{J})} := \frac{d^{\mathcal{J}}w_j}{dt^{\mathcal{J}}}$）。另一方面，只需验证原未知输入及其前 $\mathcal{J}-1$ 阶时间导数的微分是否属于可观测性余分布 $\mathcal{O}$，即可轻易检验它们的可辨识性；该余分布由 [1]中的算法9给出。换言之，只需验证条件（$l = 0$, 1，.....， $\mathcal{J}-1$）：

$$dw_j^{(l)} \in \mathcal{O}. \tag{9}$$

F. 常参数的可辨识性

常参数 $Q_1, \ldots, Q_q$属于 $\mathcal{E}$ 的状态。刻画其局部可辨识性的条件显然为 ($i = 1, \ldots, q$):

$$dQ_i \in \mathcal{O}. \tag{10}$$

IV. 艾滋病病毒感染

我们研究一种简单常微分方程模型的可辨识性性质，该模型广泛用于描述接受抗逆转录病毒治疗的艾滋病病毒感染患者的 HIV动力学 [19], [24], [27]–[31]。该模型由以下三个方程和以下两个输出构成：

$$\begin{cases} \dot{T}_U &= \lambda - \rho T_U - \eta(t) T_U V \\ \dot{T}_I &= \eta(t) T_U V - \delta T_I \\ \dot{V} &= N\delta T_I - cV \\ y &= [V,\ T_U + T_I], \end{cases} \tag{11}$$

其中，T_U 是未感染细胞的浓度，T_I 是感染细胞的浓度，V 是病毒载量。该模型还由时变参数$\eta(t)$和五个常参数 λ, ρ, δ, N, c表征。它们定义如下：

- $\eta(t)$是感染率，它是抗病毒治疗效果的函数。
- λ 是未感染细胞的生成率。
- ρ 是未感染细胞的死亡率。
- δ 是感染细胞的死亡率。
- N 是单个感染细胞在其生命周期内产生的病毒颗粒的平均数量。
- c 是游离病毒颗粒的清除率。假设所有这些参数均未知。

首先，为继续分析，我们需要引入一个状态，其中包括随时间变化的量 T_U, T_I, V以及常参数（即 λ, ρ, δ, N, c）。我们设：

$$x = [T_U,\ T_I,\ V,\ \lambda,\ \rho,\ \delta,\ N,\ c]^T \tag{12}$$

该系统直接是（2）的一个特殊情形。具体而言，$m_u = 0$, $m_w = 1$, $p = 2$, $h_1(x) = V$, $h_2(x) = T_U + T_I$,

$$g^0 = \begin{bmatrix} \lambda - \rho T_U \\ -\delta T_I \\ N\delta T_I - cV \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g^1 = \begin{bmatrix} -T_U V \\ T_U V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

A. 可观测性分析

[1] 中的算法9针对这一特定情形给出了以下结果[9]：

1) 本文中记作 $\mathcal{E}$ 的系统与原系统一致。2) $\mathcal{E}$ 的未知输入可重构度为 $m = m_w = 1$ （该系统相对于其未知输入是规范的）。此外：

$$\widetilde{h}_1 = \lambda - \rho T_U - \delta T_I. \tag{14}$$

[9]详细推导见 [34] 第6.1节（请注意，此推导使用的是 [1], 中算法9的等价版本，即 [34]中的算法1）。

3）可观测性余分布

$$\mathcal{O} = \text{span}\left\{dh_1,\ dh_2,\ dh_3,\ d\widetilde{h}_1,\ dh_4,\ dh_5,\ dh_6\right\},$$

with: $h_3 = N\delta T_I - cV$, $h_4 = c(Vc - NT_I\delta) + \frac{N\delta\rho(T_I\delta - \lambda + T_U\rho)}{\delta - \rho}$, $h_5 = \frac{N\delta}{\rho - \delta}$, and $h_6 = c\frac{Vc^2\delta - Vc^2\rho - NT_Ic\delta^2 + NT_Ic\delta\rho + NT_I\delta^2\rho + NT_U\delta\rho^2 - N\lambda\delta\rho}{\rho - \delta}$.

$\mathcal{O}$ 的秩为 7，小于式（12）中状态的维数。因此，状态不可观测。特别地，其正交分布非空。我们有：

$$\mathcal{O}^\perp = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} T_I\delta \\ -T_I\delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta(\delta - \rho) \\ N\rho \\ 0 \end{bmatrix}\right\}. \tag{15}$$

B. 常参数的可辨识性

不难验证如下结论：

$$d\lambda \in \mathcal{O},\quad d\rho \in \mathcal{O},\quad d\delta \notin \mathcal{O},\quad dN \notin \mathcal{O},\quad dc \in \mathcal{O}.$$

（只需检查上述微分是否与 $\mathcal{O}^\perp$ 正交即可。）因此，就常参数而言，其中两个（δ 和 N）即使在局部也不可辨识。这一结果与现有研究水平的结论相矛盾（例如，参见 [19] 的第 6.2 节）。在 IV-D 节中，我们将明确证明本结果的正确性。

C. 时变参数的可辨识性

由于 $m = m_w$，定理2给出了所有可辨识性性质。根据公式（3），我们需要计算 ξ_1^0、ξ_1^1 和 ν_1^1。由（13）和（14）可得：$\sim$ $\sim\mathcal{L}_{g^0}h_1 = T_I\delta^2 - \rho(\lambda - T_U\rho)$, $\mathcal{L}_{g^1}h_1 = -T_UV(\delta - \rho)$。根据公式（5），利用（15）中针对 ξ 的 $\mathcal{O}^\perp$ 的生成元，我们得到：

$$\xi_1^0 = T_I\delta(\delta - \rho)^2,\quad \xi_1^1 = -V\delta(T_I + T_U)(\delta - \rho). \tag{16}$$

我们来计算 ν_1^1。由 (4)、(13) 和 (14) 可得$\mu_1^1 = -T_UV(\delta - \rho)$。因此，其逆为：

$$\nu_1^1 = -\frac{1}{T_UV(\delta - \rho)}. \tag{17}$$

对于 $\alpha = 0$, 1, （3）中的条件均不成立。这意味着时变参数 $\eta(t)$ 即使在局部范围内也不可辨识。此结果与现有研究水平中的结果相矛盾（例如，参见 [19] 的第 6.2 节）。在 IV-D节中，我们明确证明了结果的有效性。

我们应用定理 2 的第二部分，以确定无穷多个与真实值不可区分的不可辨识参数值。这涉及常数参数和时变参数，具体如下。

至备注 3。为确定这些值，我们需要针对该特定情形求解（6）中的微分方程组。将（16）和（17）中的表达式代入（7），可得：

$$\chi_1 = \frac{T_I\delta(\delta-\rho)}{T_U V} - \frac{\delta(T_I+T_U)}{T_U}\eta$$

因此，中的微分方程组变为：

(6)

$$\begin{cases} \frac{dT'_U}{d\tau} & = T'_I\delta' \\ \frac{dT'_I}{d\tau} & = -T'_I\delta' \\ \frac{dV'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\lambda'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\rho'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\delta'}{d\tau} & = \delta'(\delta'-\rho') \\ \frac{dN'}{d\tau} & = N'\rho' \\ \frac{dc'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\eta'}{d\tau} & = \frac{T'_I\delta'(\delta'-\rho')}{T'_U V'} - \frac{\delta'(T'_I+T'_U)}{T'_U}\eta' \\ T'_U(t,\ 0) & = T_U(t),\ T'_I(t,\ 0) = T_I(t), \\ V'(t,\ 0) & = V(t), \\ \lambda'(0) = \lambda,\ \rho'(0) & = \rho,\ \delta'(0) = \delta,\ N'(0) = N, \\ c'(0) = c,\ \eta'(t,\ 0) & = \eta(t) \end{cases} \tag{18}$$

这些方程可以通过解析的方式求解。我们对$x'(t,\ \tau)$得到：

$$\begin{cases} T'_U(t,\ \tau) & = T_U(t) + T_I(t) - \frac{T_I(t)}{\rho}\left(\delta e^{-\rho\tau} + \rho - \delta\right) \\ T'_I(t,\ \tau) & = \frac{T_I(t)}{\rho}\left(\delta e^{-\rho\tau} + \rho - \delta\right) \\ V'(t,\ \tau) & = V(t) \\ \lambda'(\tau) & = \lambda \\ \rho'(\tau) & = \rho \\ \delta'(\tau) & = \delta\rho\,/\left((\rho-\delta)e^{\rho\tau} + \delta\right) \\ N'(\tau) & = Ne^{\rho\tau} \\ c'(\tau) & = c \end{cases} \tag{19}$$

关于未知输入，我们得到：

$$\eta'(t,\ \tau) = \tag{20}$$

$$\frac{\eta(t)T_U(t)V(t)\rho e^{\rho\tau} + \left[T_I(t)\delta^2 - T_I(t)\delta\rho - \eta(t)T_U(t)V(t)\delta\right]\left[e^{\rho\tau}-1\right]}{V(t)\left[T_I(t)\delta + T_U(t)\rho\right]e^{\rho\tau} - V(t)T_I(t)\delta}$$

我们得到了以下基本结果。设 $x(t) = [T_U(t)\ \ T_I(t)\ \ V(t)\ \ \lambda,\ \ \rho,\ \ \delta,\ \ N,\ \ c]^T$表示时间 t 的真实状态，$\eta(t)$表示时间t的真实未知输入。那么，对于任意 $\tau \in \mathbb{R}$，式 (19) 中给出的 $x'(t,\ \tau)$ 和式 (20) 中给出的 $\eta'(t,\ \tau)$，分别与 $x(t)$ 和 $\eta(t)$ 不可区分。

D. 与现有研究水平的比较

正如前文所述，我们的结果与现有研究水平中关于由（11）刻画的完全相同的常微分方程模型所得结果相矛盾（例如，参见 [19] 的第 6.2 节）。具体而言，与现有研究水平的结论相反，我们发现无法根据输出恢复状态和参数。此外，我们还得到了一个一维的不可区分状态集合 $x'(t,\ \tau)$，以及一个参数的函数集合 $\eta'(t,\ \tau)$；仅凭输出，无法区分这些集合中的元素。鉴于这一差异，我们希望在此提供一个简单直接的证明，明确表明该系统不可辨识，这与现有研究水平中的结果相反。特别是，只需进行一次简单的代入即可验证我们的结果。感兴趣的读者还可以在 [34] 的第 6.6 节以及 [35] 中找到更多细节。

首先，由（19）式可以很容易地验证，输出 $y_1(t) = T_U(t) + T_I(t)$ 和 $y_2(t) = V(t)$ 与 $T'_U(t,\ \tau) + T'_I(t,\ \tau)$ 和 $V'(t,\ \tau)$ 相同，并且这对任意 $\tau \in \mathbb{R}$ 都成立。

其次，我们计算 $T'_U(t,\ \tau)$、$T'_I(t,\ \tau)$ 和 $V'(t,\ \tau)$ 的时间导数。我们使用它们在 (19) 中的表达式，并应用 (11)。同时，利用 (20) 中 $\eta'(t,\ \tau)$ 的表达式，最终得到：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}T'_U & = \lambda' - \rho'T'_U - \eta'T'_U V' \\ \frac{d}{dt}T'_I & = \eta'T'_U V' - \delta'T'_I \\ \frac{d}{dt}V' & = N'\delta'T'_I - c'V' \end{cases} \tag{21}$$

换句话说，新的三个状态在采用新参数时，恰好满足式（11）中的相同动力学方程。

我们得出结论，$T'_U(t,\ \tau)$、$T'_I(t,\ \tau)$、$V'(t,\ \tau)$、$\eta'(t,\ \tau)$、$\lambda'(\tau)$、$\delta'(\tau)$、$\rho'(\tau)$、$N'(\tau)$和 $c'(\tau)$分别无法与 $T_U(t)$、$T_I(t)$、$V(t)$、$\eta(t)$、λ、δ、ρ、N和 c区分。关于模型参数，鉴于 $\eta'(t,\ \tau) \neq \eta(t)$、$\delta'(\tau) \neq \delta$以及 $N'(\tau) \neq N$，我们得出结论：$\eta(t)$、δ和 N不可辨识。最后，我们指出，τ 可以取无穷小值，并且在 $\tau \to 0$的极限下，有：$T'_U(t,\ \tau) \to T_U(t)$、$T'_I(t,\ \tau) \to T_I(t)$、$V'(t,\ \tau) \to V(t)$、$\eta'(t,\ \tau) \to \eta(t)$、$\delta'(\tau) \to \delta$以及 $N'(\tau) \to N$。因此，我们得出结论，这三个参数 $\eta(t)$、δ和 N 甚至不具备局部可辨识性。

我们希望强调，我们的结论在此可通过简单的代入轻松证明。并不简单的是对公式(19)和(20)中表达式的解析推导。这些表达式是利用定理2所陈述的极其强大且通用的结果解析确定的。得益于这一结果，公式(19)和(20)中表达式的推导变得简单，因为它遵循自动化过程的步骤，无需用户发挥创造性。

E. 数值结果

在本节中，我们明确给出第 IV-C 节中获得的不可区分集。我们参考文献中相同的可用数据（例如，参见 [24] 的电子补充材料）。该数据集的特征如下：

- 时间区间为 $\mathcal{I} = [0,\ 201]s$。
- $T_U(0) = 600$、$T_I(0) = 0$、$V(0) = 10^5$、$\lambda = 36$、$\rho = 0.108$、$\delta = 0.5$、$N = 10^3$和 $c = 3$。
- 时变参数为：

$$\eta(t) = k\left(1 - 0.9\cos\left(\frac{\pi}{1000}t\right)\right), \tag{22}$$

其中 $k = 0.00009$。

我们给出了参数 $\tau \in \mathcal{U}$ 取若干不同值时的不可区分状态和不可区分未知输入。

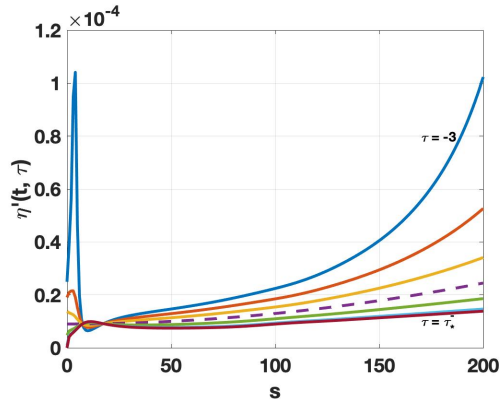

图 1. 时变参数$\eta'(t,\ \tau)$的若干条不可区分曲线，对应参数 τ从 -3 到 $\tau_* \cong 2.2532$的若干取值。紫色虚线是由 (22) 给出的曲线，即 $\eta'(t,\ \tau)$，其中 $\tau = 0$。

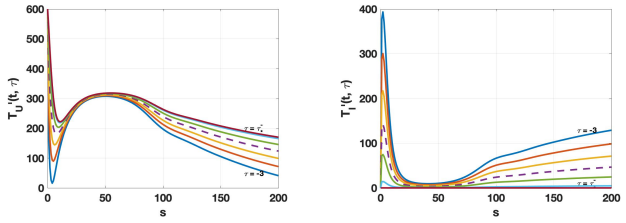

图 2. 参数 τ从 -3到 $\tau_* \cong 2.2532$的若干取值所对应的曲线：$T_U'(t,\ \tau)$（左侧）和 $T_I'(t,\ \tau)$（右侧）。紫色虚线是 $\tau = 0$对应的曲线。

其中，$\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间，包含 $\tau = 0$，且对于任意 $\tau \in \mathcal{U}$，式 (19) 和 (20) 中的量均具有物理意义，具体说明如下。

根据 (19) 中 $\delta'(\tau)$ 的表达式以及我们数据集的取值，可以得到

$$\lim_{\tau \to \tau_*^-} \delta'(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \to \tau_*^+} \delta'(\tau) = -\infty$$

其中 $\tau_* := \frac{\text{对数}\left(\frac{\delta}{\delta - \rho}\right)}{\rho} \cong 2.2532$。此外，我们发现，对于 $\tau = -4$，(20) 中的函数 $\eta'(t,\ \tau)$ 在$t \in [2,\ 6]s$取负值。最后，我们验证了在区间

$$\mathcal{U} := \left[-3,\ \tau_*\right)$$

所有量 $\delta'(\tau)$、$N'(\tau)$、$\eta'(t,\ \tau)$、$T_U'(t,\ \tau)$ 和 $T_I'(t,\ \tau)$ 均取正值（最后三个量在整个时间区间 $\mathcal{I}$ 上均如此）。因此，我们可以使用任意 $\tau \in \mathcal{U}$。

图 1 展示了 $\eta'(t,\ \tau)$ 的曲线。$\tau = 0$ （紫色虚线）的曲线正是式（22）中设定的曲线。改变 τ 会使曲线发生显著变化，这意味着该参数是“强”不可辨识的。此外，改变 τ时，两个不可辨识的常参数（即 δ 和 N）也会显著变化。例如，根据式（19），对于 $\tau = -3$ 和 $\tau = \tau_*$，可得到以下变化：

$$\begin{aligned} \delta = \delta'(0) &= 0.5 \quad \to \delta'(-3) \cong 0.25 \ \to \delta'(\tau \to \tau_*^-) = +\infty \\ N = N'(0) &= 10^3 \ \to N'(-3) \cong 723 \ \to N'(\tau_*) \cong 1276. \end{aligned}$$

δ' 的变化甚至是发散的。

图 2 展示了 $T_U'(t,\ \tau)$ 和 $T_I'(t,\ \tau)$ 的曲线。改变 τ 也会使它们显著变化，这意味着 $T_U'(t,\ \tau)$ 和 $T_I'(t,\ \tau)$ 也都是“强”不可观测的。

F. 最少外部信息

我们对由 (11) 表征的模型进行分析后发现，只有三个参数是可辨识的，分别是 λ、ρ 和 c。其余常参数 δ 和 N，以及时变参数 $\eta(t)$，均无法辨识。最后，我们通过回答以下这一兼具基础性与实践性的问题来结束本研究：必须向模型中加入哪些测量值，才能使所有模型参数都局部可辨识？

可以证明，只要再加入输出 $y_3 = T_U$ （或 $y_3 = T_I$），状态就变得可观测，且所有参数都可辨识。通过针对由这一新增输出表征的新系统重复分析，即可证明这一点。另一方面，根据我们的分析，可以直接得出一个更有意义的结果。实际上，只需在单个时刻 $t^* \in \mathcal{I}$ 获得这一新增输出（而不必覆盖整个时间区间），就能辨识所有参数（并使状态可观测）。确实，只要知道单个时刻的 T_U （或等价地，$T_I = y_2 - T_U$），就可以根据 (19) 中 T_U' （或 T_I'）的表达式轻松确定 τ 的值。

V. COVID-19 流行病动力学的分舱式 SEIAR 模型

我们考虑一个简单模型，它推广了常用于病毒性疾病的 SEIR 模型。这个更一般的常微分方程模型新增了一个分舱，$A(t)$，即无症状感染者，[33]。其他分舱与 SEIR 模型相同，即：S，易感者；E，暴露者；I，感染者（有症状感染者）；R，移除者（即康复者或死亡者）。该模型的微分方程描述了人群中的个体在上述五类之间的转移，即：$S(t)$ $E(t)$ $I(t)$ $A(t)$ 和 $R(t)$。动力学及输出由以下方程组给出（例如，参见 [33]）：

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta S(I + A) \\ \dot{E} &= \beta S(I + A) - \gamma E \\ \dot{I} &= \gamma p E - \mu_1 I \\ \dot{A} &= \gamma(1 - p)E - \mu_2 A \\ \dot{R} &= \mu_1 I + \mu_2 A \\ y &= [I,\ A,\ S + E + R], \end{cases} \tag{23}$$

该模型包含以下常参数，假定这些参数未知：

- μ_1 和 μ_2 分别是有症状感染者（$I(t)$）和无症状感染者（$A(t)$）的移除率。
- γ 即暴露个体（E（t））被感染的速率。
- p 表示感染者出现症状的概率（ $1 - p$ 表示感染者无症状的概率）。

该模型还包含以下未知的时变参数：

- $\beta = \beta(t)$ 是指 S 类个体与属于 I 和 A 两类之一的个体接触所导致的疾病传播概率，等于单次接触时的疾病传播概率乘以人均接触次数。假设该参数随时间变化，因为它可能受到政府措施的影响（例如佩戴口罩、关闭学校、远程办公）。

我们假设可以测量有症状感染者（$I(t)$）和无症状感染者（$A(t)$）。因此，我们的模型由式（23）中的前两个输出表征。最后，由于我们已知总人口，$S(t) + E(t) + I(t) + A(t) + R(t)$，从中扣除上述两个测量值后，即可得到式（23）中的第三个输出，也就是 $S(t) + E(t) + R(t)$。

为继续进行，首先，我们需要引入一个状态，其中包含随时间变化的量（即 S、 E、 I、 A、 R）以及常参数（即 μ_1、 μ_2、 γ、 p）。我们定义：

$$x = [S,\ E,\ I,\ A,\ R,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \gamma,\ p]^T \tag{24}$$

该系统直接是（2）的一个特殊情形。特别地，$m_u = 0$、$m_w = 1$、 $p = 3$（x） h_1、 h_2（x） $= I$、 h_3（x） $= S + E + R$,

$$g^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma E \\ \gamma p E - \mu_1 I \\ \gamma(1-p)E - \mu_2 A \\ \mu_1 I + \mu_2 A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad g^1 = \begin{bmatrix} -S(I+A) \\ S(I+A) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

A. 可观测性分析

[1] 中的算法9针对这一特定情形给出了以下结果[10]：

1）本文记作 $\mathcal{E}$ 的系统与原系统重合。2） $\mathcal{E}$ 的未知输入可重构度为$m = m_w = 1$ （系统相对于其未知输入是规范的）。此外：

$$\widetilde{h}_1 = \gamma p E - \mu_1 I. \tag{26}$$

3）可观测余分布 y
$\mathcal{O} = \text{span}\left\{dh_1,\ dh_2,\ dh_3,\ dh_4,\ dh_5,\ dh_6,\ d\widetilde{h}_1\right\}$, where $h_1(x) = I$, $h_2(x) = A$, $h_3(x) = S + E + R$, $h_4(x) = -A\mu_2 - E\gamma(p-1)$, $h_5(x) = \frac{1-p}{p}$, and $h_6(x) = \mu_2(A\mu_2 + E\gamma(p-1)) + \mu_1\frac{1-p}{p}(E\gamma p - I\mu_1)$.

[10] [34] 中的第7.1节给出了详细推导（请注意，该推导使用了 [1], 中算法9的一个等价版本，即 [34]中的算法1）。

$\mathcal{O}$ 的秩为 7，小于式（24）中状态的维数。因此，该状态不可观测。特别地，其正交分布非空。我们有：

$$\mathcal{O}^\perp = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} E \\ -E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix}\right\}. \tag{27}$$

B. 常参数的可辨识性

不难验证如下结论：

$$d\mu_1 \in \mathcal{O},\quad d\mu_2 \in \mathcal{O},\quad d\gamma \notin \mathcal{O},\quad dp \in \mathcal{O}.$$

（只需检查上述微分是否与 $\mathcal{O}^\perp$ 正交即可。）因此，对于常参数，其中一个（γ）即使在局部范围内也不可辨识。

C. 时变参数的可辨识性

根据 $m = m_w$，定理2给出了所有可辨识性性质。根据公式（3），我们需要计算 ν_1^1，以及 $\mathcal{O}^\perp$ 在（27）中的两个生成元各自对应的系数 ξ_1^0、 ξ_1^1。

我们来计算 ν_1^1。由（4）、（25）和（26）可得 $\mu_1^1 = S\gamma p(A+I)$。因此，其逆为：

$$\nu_1^1 = \frac{1}{S\gamma p(A+I)}. \tag{28}$$

由（25）和（26）可得：

$$\mathcal{L}_{g^0}\widetilde{h}_1 = \mu_1(I\mu_1 - E\gamma p) - E\gamma^2 p,\quad \mathcal{L}_{g^1}\widetilde{h}_1 = S\gamma p(A+I).$$

由公式（5），利用式（27）中针对 ξ 的第一个生成元，我们得到：

$$\xi_1^0 = 0,\quad \xi_1^1 = \gamma p(A+I). \tag{29}$$

对于 $\alpha = 1$，式 (3) 中的条件不成立。无需使用式 (27) 中$\mathcal{O}^\perp$ 的第二个生成元重复计算。我们得出结论，时变参数 $\beta(t)$ 即使在局部也不可辨识。

我们应用定理 2 的第二部分，以确定与真实值不可区分的不可辨识参数的取值。这涉及常数参数和时变参数，具体如备注 3 所述。由于在本例中，我们有两个独立的 $\mathcal{O}^\perp$ 生成元，因此可以确定两组独立的参数集。

1) 第一组：让我们从第一个生成元开始。我们在（6）中给出相应的微分方程组。将（29）和（28）代入（7），我们得到：

$$\chi_1 = -\ \nu_1^1(\xi_1^0 + \xi_1^1 w_1) = -\frac{1}{S}\beta$$

因此，中的微分方程组变为：

(6)

$$\begin{cases} \frac{dS'}{d\tau} & = 1 \\ \frac{dE'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{dI'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{dA'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{dR'}{d\tau} & = -1 \\ \frac{d\mu_1'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\mu_2'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\gamma'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{dp'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\beta'}{d\tau} & = -\frac{\beta'}{S'} \\ S'(t,\ 0) & = S(t),\ E'(t,\ 0) = E(t),\ I'(t,\ 0) = I(t), \\ A'(t,\ 0) & = A(t),\ R'(t,\ 0) = R(t),\ \mu_1'(0) = \mu_1, \\ \mu_2'(0) & = \mu_2,\ \gamma'(0) = \gamma,\ p'(0) = p \\ \beta'(t,\ 0) & = \beta(t) \end{cases} \tag{30}$$

这些方程可以解析求解。我们得到$x'(t,\ \ \tau)$：

$$\begin{cases} S'(t,\ \tau) & = S(t) + \tau \\ E'(t,\ \tau) & = E(t) \\ I'(t,\ \tau) & = I(t) \\ A'(t,\ \tau) & = A(t) \\ R'(t,\ \tau) & = R(t) - \tau \\ \mu_1'(\tau) & = \mu_1 \\ \mu_2'(\tau) & = \mu_2 \\ \gamma'(\tau) & = \gamma \\ p'(\tau) & = p \end{cases} \tag{31}$$

关于未知输入，我们得到：

$$\beta'(t,\ \tau) = \frac{\beta(t)S(t)}{S(t) + \tau}. \tag{32}$$

2) 第二组：现在使用第二个生成元。我们给出式 (6) 中相应的微分方程组。首先，用式 (29) 替代，我们得到：

$$\xi_1^0 = -\gamma^2\ p\ E, \quad \xi_1^1 = \gamma p(A + I)(E + S).$$

并将式 (28) 中给出的 ν_1^1 代入式 (7)，得到：

$$\chi_1 = -\ \nu_1^1(\xi_1^0 + \xi_1^1 w_1) = \frac{\gamma\ E}{S(A + I)} - \frac{E + S}{S}\beta$$

因此，中的微分方程组变为：

(6)

$$\begin{cases} \frac{dS'}{d\tau} & = E' \\ \frac{dE'}{d\tau} & = -E' \\ \frac{dI'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{dA'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{dR'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\mu_1'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\mu_2'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\gamma'}{d\tau} & = \gamma' \\ \frac{dp'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\beta'}{d\tau} & = \frac{\gamma'\ E'}{S'(A'+I')} - \frac{(E'+S')}{S'}\beta' \\ S'(t,\ 0) & = S(t),\ E'(t,\ 0) = E(t),\ I'(t,\ 0) = I(t), \\ A'(t,\ 0) & = A(t),\ R'(t,\ 0) = R(t),\ \mu_1'(0) = \mu_1, \\ \mu_2'(0) & = \mu_2,\ \gamma'(0) = \gamma,\ p'(0) = p \\ \beta'(t,\ 0) & = \beta(t) \end{cases} \tag{33}$$

这些方程可以解析求解。我们得到$x'(t,\ \ \tau)$：

$$\begin{cases} S'(t,\ \tau) & = S(t) + E(t)\ (1 - e^{-\tau}) \\ E'(t,\ \tau) & = E(t)\ e^{-\tau} \\ I'(t,\ \tau) & = I(t) \\ A'(t,\ \tau) & = A(t) \\ R'(t,\ \tau) & = R(t) \\ \mu_1'(\tau) & = \mu_1 \\ \mu_2'(\tau) & = \mu_2 \\ \gamma'(\tau) & = \gamma\ e^{\tau} \\ p'(\tau) & = p \end{cases} \tag{34}$$

关于未知输入，我们得到：

$$\beta'(t,\ \tau) = \frac{\gamma E(t)(1 - e^{\tau}) - S(t)\beta(t)\left[A(t) + I(t)\right]}{\left[A(t) + I(t)\right]\left[E(t) - (E(t) + S(t))e^{\tau}\right]}. \tag{35}$$

按照 IV-D 节中完全相同的方法，使用前两组结果，即分别使用式 (31)、(32) 中给出的解以及式 (34)、(35) 中给出的解，可以立即检验我们结果的有效性。在 [34], 的 7.6 节中，我们还提供了使用这些解获得的数值结果。

VI. 视觉惯性传感器融合

我们在一个截然不同的领域中进一步应用这一方法。我们讨论视觉惯性传感器融合问题。与前几节研究的病毒系统不同，该系统还包含已知输入（$m_u \neq 0$）。为便于说明，我们将分析限定在 a $2D$ 环境中。 $3D$ 情形仅在计算上更为繁琐。

我们考虑一个配备视觉传感器和陀螺仪的刚体（$\mathcal{B}$）。该刚体在平面上运动。视觉传感器在其自身的局部坐标系中提供特征的方位角。陀螺仪提供角速度（这是一个标量，单位为 $2D$）。我们假设两个传感器的局部坐标系重合，并将这个公共坐标系称为机体坐标系。此外，我们假设陀螺仪测量值无偏。图3展示了我们的系统。

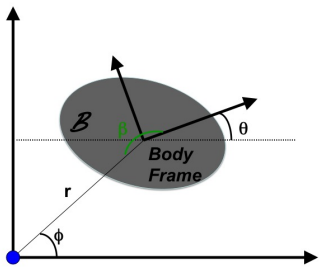

图3. 全局坐标系、机体坐标系以及视觉传感器提供的观测（角度 β）。

使用极坐标非常方便。因此，我们定义状态 $[r,\ \phi,\ v,\ \alpha,\ \theta]^T$，其中 r 和 ϕ 表示机体位置，θ 表示其方向（示意图见图3），v和 α表示极坐标下的机体速度。具体而言，$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$和 $\alpha=\arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$，其中$[v_x,\ v_y]^T$是笛卡尔坐标下的机体速度。动力学方程为:

$$\begin{bmatrix}\dot{r} & = v\cos(\alpha-\phi)\\ \dot{\phi} & = \frac{v}{r}\sin(\alpha-\phi)\\ \dot{v} & = A_x\cos(\alpha-\theta)+A_y\sin(\alpha-\theta)\\ \dot{\alpha} & = -\frac{A_x}{v}\sin(\alpha-\theta)+\frac{A_y}{v}\cos(\alpha-\theta)\\ \dot{\theta} & = \omega\end{bmatrix} \tag{36}$$

其中，$[A_x,\ A_y]^T$ 表示机体坐标系中的机体加速度，ω 表示角速度。为简洁起见，我们假设视觉传感器仅观测一个点特征，且该特征位于全局坐标系的原点。换言之，视觉传感器提供角度 $\beta=\pi-\theta+\phi$。因此，我们可以利用输出进行可观测性和可辨识性分析（忽略 π）：

$$y=h(x)=\phi-\theta \tag{37}$$

A_x、A_y 是未知的，而 ω 是已知的。通过将（36）和（37）与（2）进行比较，我们得到：$n=5$、$m_u=1$、$m_w=2$、$p=1$、$u_1=\omega$、$w_1=A_x$、$w_2=A_y$。由于 $p=1<2=m_w$，该系统显然不是关于 w_1 和 w_2的规范形式。我们甚至不知道它是否关于它们是规范的。

A. 可观测性分析

通过在 [1] 中应用算法9，我们得到系统 $\mathcal{E}$、其未知输入可重构度 m、函数$\sim h_1,\dots,h_m$，以及 $\mathcal{E}$的可观测性余分布（记为 $\mathcal{O}$）[11]。特别地，$\mathcal{E}$ 与原系统不同，因为其状态还包括第二个未知输入（A_y）。因此，定义 $\mathcal{E}$ 的状态为:

$$x=[r,\ \phi,\ v,\ \alpha,\ \theta,\ A_y]^T \tag{38}$$

[11]详细推导见 [1]的第 9.2.2 节。请注意，arXiv 版本的 [1]中也提供了这一推导（不过，该版本使用的是等价版本，而非 [34], 中的算法9）。

。 $\mathcal{E}$ 的未知输入是 A_x 和 A_y。利用式（36），我们可以轻松求得新状态的动力学，并通过与式（2）比较，得到:

$$g^0=\begin{bmatrix}v\cos(\alpha-\phi)\\ \frac{v}{r}\sin(\alpha-\phi)\\ A_y\sin(\alpha-\theta)\\ \frac{A_y}{v}\cos(\alpha-\theta)\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ g^1=\begin{bmatrix}0\\0\\ \cos(\alpha-\theta)\\ -\frac{1}{v}\sin(\alpha-\theta)\\0\\0\end{bmatrix} \tag{39}$$

$$g^2=[0,0,0,0,0,1]^T, f^1=[0,0,0,0,1,0]^T.$$

在 [1] 中应用算法9还得到了 $\mathcal{E}$的未知输入可重构度，即 $m=2$,

$$\widetilde{h}_1=\frac{v}{r}\sin(\alpha-\phi),\ \ \widetilde{h}_2=A_y\frac{\cos(\phi-\theta)}{r}, \tag{40}$$

以及 $\mathcal{E}$的可观测性余分布，即 $\mathcal{O}=\text{span}\left\{d\phi-d\theta,\ d\widetilde{h}_1,\ d\widetilde{h}_2,\ dh_3\right\}$，其中 $h_3=A_y\sin(\phi-\theta)\,r$。我们有 $m=2=m_w$，这意味着 $\mathcal{E}$相对于其未知输入是规范的。

B. 可辨识性分析

我们的系统由两个时变参数。(A_x 和 A_y)表征。此外，它们相对于该系统是规范的。因此，利用定理2的结果即可得到所有可辨识性性质。首先，我们需要计算正交分布 $(\mathcal{O})^\perp$。得到:

$$(\mathcal{O})^\perp=\text{span}\{[0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]^T,\ \ [r\ 0\ v\ 0\ 0\ A_y]^T\}. \tag{41}$$

注意，根据其第二个生成元的表达式，我们立即得到 $dA_y\notin\mathcal{O}$，这意味着原来的第二个时变参数 $A_y(t)$不是局部可辨识的。。为检验 A_x 和 A_y 的局部可辨识性，我们使用条件(3)。利用(39)和(40)，计算(4)中的(1，1)张量 μ。其逆为:

$$\nu_1^1=-\frac{r}{\sin(\phi-\theta)},\ \ \nu_2^1=\nu_1^2=0,\ \ \nu_2^2=\frac{r}{\cos(\phi-\theta)}.$$

然后，对于(41)中$(\mathcal{O})^\perp$ 的每个生成元，我们利用(5)、(39)、(40)和(41)计算 ξ_i^α的系数，其中 $\alpha=0,\ 1,\ 2$，以及 $i=1,\ 2$。对于第一个生成元，这些系数均为零。因此，使用第一个生成元时，条件(3)成立。对于第二个生成元，我们得到:

$$\xi_1^0=\xi_2^0=\xi_2^1=\xi_1^2=0,\ \xi_1^1=\frac{\sin(\phi-\theta)}{r},\ \xi_2^2=-\frac{\cos(\phi-\theta)}{r}$$

将上述 ν_j^i 和 ξ_i^α代入 (3)，可得以下结果。对于第一个参数 $A_x(t)$（即 (3) 中的 $j=1$），仅当 $\alpha=1$时，结果才不为零。。具体而言，可得 -1。对于第二个参数 $A_y(t)$（即 (3) 中的 $j=2$），仅当 $\alpha=2$时，结果才不为零。具体而言，再次得到 -1。

我们得出结论，两个时变参数均不具备局部可辨识性。

最后，我们利用定理2的第二部分，确定与这些参数的真实值不可区分的无穷多个取值。由上述内容可知，我们必须仅使用第二个生成元来构建式（6）中的微分方程组。 χ 在（7）中的分量为：

$$\chi_1 = A_x, \quad \chi_2 = \dot{A}_y$$

式（6）中的微分方程组为：

$$\begin{cases} \frac{dr'}{d\tau} & = r' \\ \frac{d\phi'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{dv'}{d\tau} & = v' \\ \frac{d\alpha'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{d\theta'}{d\tau} & = 0 \\ \frac{dA'_y}{d\tau} & = A'_y \\ \frac{dA'_x}{d\tau} & = A'_x \\ \frac{d\dot{A}'_y}{d\tau} & = \dot{A}'_y \\ r'(t,\ 0) & = r(t),\ \phi'(t,\ 0) = \phi(t) \\ v'(t,\ 0) & = v(t),\ \alpha'(t,\ 0) = \alpha(t) \\ \theta'(t,\ 0) & = \theta(t),\ A'_y(t,\ 0) = A_y(t) \\ A'_x(t,\ 0) & = A_x(t),\ \dot{A}'_y(t,\ 0) = \dot{A}_y(t) \end{cases} \tag{42}$$

其解很容易得到：

$$r'(t,\ \tau) = e^{\tau} r(t),\ \phi'(t,\ \tau) = \phi(t),\ v'(t,\ \tau) = e^{\tau} v(t) \tag{43}$$

$$\alpha'(t,\ \tau) = \alpha(t),\ \theta'(t,\ \tau) = \theta(t),\ A'_y(t,\ \tau) = e^{\tau} A_y(t)$$

$$A'_x(t,\ \tau) = e^{\tau} A_x(t),\ \dot{A}'_y(t,\ \tau) = e^{\tau} \dot{A}_y(t)$$

换言之，从状态和时变参数的真实值出发，通过进行尺度变换（对于任意 $\tau \in \mathbb{R}$，尺度恰好为 e^{τ}），我们可以确定与它们不可区分的无穷多个取值。这一结果并不令人意外。所有信息都来自测量值，而这些测量值仅包含角度测量（视觉传感器只提供图3中的角度 β，陀螺仪只提供角速度）。因此，系统没有度量信息来源，任何度量量都只能确定到一个尺度因子。

VII. 结论

本文作出了以下三项主要贡献：

- **第一项贡献：** 提出了一般解析条件，该条件全面刻画了任意常微分方程模型中所有未知参数的局部可辨识性。
- **第二项贡献：** 提出了连续变换，使我们能够确定任意不可辨识参数（常数或时变参数）有无穷多个与其真实值不可区分的取值。
- **第三项贡献：** 提出了关于一个广受关注的艾滋病病毒模型和一个新冠肺炎模型可辨识性的重要新结果。关于艾滋病病毒模型的结果揭示了现有研究水平中存在的一个严重错误。

1）第一项贡献：第III节给出了这一解析条件。它适用于任何系统，不受其复杂性和非线性类型的限制，也适用于存在时变参数的情形。特别是，在假设1-3成立的条件下，该条件可应用于式（1）中的非常一般的模型。应用该条件不需要用户发挥创造性，只需进行非常基础且自动化的计算（求导和计算矩阵秩）。

2）第二项贡献：当一个或多个参数（常数和/或时变参数）不可辨识时，它们还存在其他取值，能够产生完全相同的输出（并且在存在已知输入时，也与相同的已知输入相一致）。第三节介绍了一种数学工具，可定量确定这些不可区分的取值。该工具由一个一阶常微分方程组构成，见式（6）。

3）第三项贡献：第四节和第五节详细研究了两个病毒常微分方程模型的可辨识性性质。具体而言，第四节研究的常微分方程模型十分常见，涉及HIV动力学。对于该模型，式（6）中的微分方程组变为式（18）中的系统。该系统十分复杂，因此现有研究水平中未能发现任何不同于真实值、但与其不可区分的时变参数取值，这并不令人意外；该模型也因此被归类为可辨识。换言之，尽管式（18）的解可以通过解析方法求得，但其结构复杂，无法像第六节研究的视觉惯性传感器融合问题那样通过直观推理确定。对于后一种情况，式（6）中的微分方程组变为式（42）中的系统，该系统是平凡的。其解为式（43），可以通过直观推理得出（基本上，该解的物理意义是我们无法重建绝对尺度，这一点是直观的）。

最后，我们强调本文所提出结果的普适性。这些结果能够自动确定任意非线性系统中所有参数（常数参数和时变参数）的局部可辨识性，而不受系统复杂度和非线性类型的影响。本文首次将所有这些理论结果应用于两个病毒模型，并自动发现了若干重要的新性质（以及现有研究水平中的一处错误）。鉴于上述普适性，我们坚信，这些理论结果在许多其他科学领域都大有用处，基本上可用于研究任何能够用含时变参数的常微分方程模型描述的系统。这类系统存在于许多科学领域，从自然科学和应用科学到社会科学，无所不包。

附录

本附录给出定理3（B节）、定理2（C节）和定理1（D节）的证明。首先，我们将说明在存在时变参数且模型显式依赖时间的情况下，可辨识性和局部可辨识性这两个概念（A节）。

A. 可辨识性的定义

我们为模型（1）引入可辨识性的定义。显然，根据假设3，该定义同样适用于与模型（1）等价的模型（2）。我们仅强调，在后一种情况下，下文给出的 θ-状态定义（方程（44））无需包含常参数，因为它们已经包含在 x中。

可辨识性的概念将基于不可区分性的概念。我们必须考虑：(i) 模型对时间的显式依赖性，以及 (ii) 时变参数的存在。由于时变参数作为未知输入作用于系统动力学，因此我们采用了在存在未知输入时引入不可区分性概念所使用的相同概念（例如，参见 [26] 中的第II节或 [2]中的定义6.15）。此外，我们按照 [36]中的方法，考虑式(1)中模型对时间的显式依赖性。另一方面，与这些先前的研究不同，我们在此关注参数的可辨识性，而非状态可观测性。然而，状态的可观测性与参数的可辨识性彼此相关。为考虑这一点，我们首先引入一个扩展状态，其中包含状态和所有参数。我们用符号 θ表示所有参数（即 $\theta = \left[Q^T,\ W^T(t)\right]^T$）。我们引入如下定义的 θ-状态：

$$S = \left[X^T,\ \theta^T\right]^T = \left[X^T,\ Q^T,\ W^T\right]^T. \tag{44}$$

注意，对于模型（2），我们有 $\left[x^T,\ w^T\right]^T$。我们用 $X(t; t_0, X, Q, W)$ 表示时间 $t \geq t_0$ 的状态；当模型参数为 $Q = Q,\ W(t) = W(t)$ 时，该状态满足式 (1) 中的动力学，且时间 t_0 的状态为 X。

令 $\mathcal{W}$ 为所有可能的未知输入函数 (W) 的一阶时间导数所构成的巴拿赫函数空间[12]。

我们将不可区分性定义如下：

定义1（不可区分 θ-状态） 给定（1）中的系统，$\left[X_b^T,\ Q_b^T, W_b^T\right]^T$ 两个 θ-状态 $S_a = \left[X_a^T,\ Q_a^T, W_a^T\right]^T$，在 $t_0 \in \mathcal{I}$ 时刻不可区分，若对于任意时间赋值 $U(t)$、$t \in \mathcal{I} \bigcap [t_0, \infty)$，存在一个非空子集 $\mathcal{W}_a \subseteq \mathcal{W}$，使得对于任意未知输入 $W_A(t)$ 且满足 $W_A \in \mathcal{W}_a$ 和 $W_A(t_0) = W_a$，存在一个未知输入$W_B(t)$ 且满足 $W_B(t_0) = W_b$，从而 $\forall t \in \mathcal{I} \bigcap [t_0, \infty)$：

$$h(X(t;\ t_0, X_a, Q_a, W_A),\ t,\ U(t),\ Q_a,\ W_A(t)) =$$

$$h(X(t;\ t_0, X_b, Q_b, W_B),\ t,\ U(t),\ Q_b,\ W_B(t)).$$

上述定义考虑到我们并不知道未知输入 $W(t)$ 随时间的变化情况。特别是，定义1并未排除这样的可能性：即使对于许多时间曲线 $W_A(t)$ 和 $W_B(t)$，由 S_a 和 S_b 产生的输出仍可能不同。然而，定义1指出，对于属于一个非羞集的所有曲线，输出都相同。换言之，输出相同的概率非零[13]。这会使下面关于可辨识性和局部可辨识性的定义（定义2和定义3）较为保守，因为它们以定义1为基础。

定义 2（可辨识性） 若所有在 t 时与 $\left[X^T,\ Q^T,\ W^T\right]^T$ 不可区分的 θ 状态 $\left[X^T,\ Q^T, W^T\right]^T$ 均满足以下条件，则系统 *(1)* 在给定的 $X \in \mathcal{M}_m$、$Q \in \mathcal{M}_q$、$W \in \mathcal{M}_{m_w}$ 和 $t \in \mathcal{I}$ 处可辨识：

$$\overline{Q} = Q, \quad \text{and} \quad \overline{W} = W. \tag{45}$$

若系统在任意 $(X、\ Q、\ W、\ t) \in \mathcal{G}$ 处均可辨识，则称其在子集 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}_m \times \mathcal{M}_q \times \mathcal{M}_{m_w} \times \mathcal{I}$ 上可辨识。

定义 3（局部可辨识性） 若存在 $\left[X^T,\ Q^T,\ W^T\right]^T$ 的一个开邻域 $\mathcal{B}$，使得所有在 t 时与 $\left[X^T,\ Q^T,\ W^T\right]^T$ 不可区分的 θ 状态 $\left[X^T,\ Q^T, W^T\right]^T \in \mathcal{B}$ 均满足等式 *(45)*，则系统 *(1)* 在给定的 $X \in \mathcal{M}_m$、$Q \in \mathcal{M}_q$、$W \in \mathcal{M}_{m_w}$ 和 $t \in \mathcal{I}$ 处局部可辨识。若系统在任意（$X、\ Q、\ W、\ t$）$\in \mathcal{G}$ 处局部可辨识，则称其在子集 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}_m \times \mathcal{M}_q \times \mathcal{M}_{m_w} \times \mathcal{I}$ 上局部可辨识。

上述两个定义可以轻松扩展，用于刻画单个参数的可辨识性（或局部可辨识性）。将模型 (1) 中的一个参数记为 $\theta_l, l = 1、\ldots\ldots、\ q + m_w$。具体而言，$\theta_1、\ldots\ldots、\ \theta_q$是常参数 $Q_1、\ldots\ldots、\ Q_q$，而 $\theta_{q+1}、\ldots\ldots、\ \theta_{q+m_w}$是时变参数 $W_1、\ldots\ldots、\ W_{m_w}$。只需将 (45) 中的等式替换为单个等式 $\theta_l = \theta_l$，即可得到参数 θ_l 的可辨识性（或局部可辨识性）定义。

B. 定理3的证明

我们考虑由 [1], 中的算法9提供的系统 $\mathcal{E}$，其中 m 是其未知输入可重构度，$\mathcal{O}$ 是其可观测性余分布。$\mathcal{E}$ 由 (2) 刻画，并且可能不同于原系统，正如第三节 III-A节中所解释的。

我们首先证明以下性质：

引理 1 如果 $m < m_w$，则有：

$$\mathcal{L}_{g^{m+j}}\gamma = 0, \quad j = 1, \ldots, m_w - m,$$

其中 $g^1, \ldots, g^{m_w}$ 是刻画 $\mathcal{E}$ 动力学的向量场，而 γ 是状态（$\mathcal{E}$的状态）的任意标量函数，使得 $d\gamma \in \mathcal{O}$。

[12]关于 shy 集的定义，请参见 [37] 。

[13]对于有限维空间，概率是通过测度的概念来定义的。遗憾的是，无限维空间中的测度概念并非显而易见。特别是，在无限维巴拿赫空间上，例如我们的函数空间 $\mathcal{W}$，不存在勒贝格测度的类似物。一种常用的方法是采用普遍集与稀疏集的概念 [37]。给定的 W 属于 $\mathcal{W}$ 的稀疏子集的概率为 0。给定的 W 属于 $\mathcal{W}$ 的普遍子集的概率为 1。最后，给定的 W 属于 $\mathcal{W}$ 的非稀疏子集的概率严格大于 0。

证明： 提醒读者，当系统相对于其未知输入不是规范的时，可观测性余分布是第 6.2 节 [1], 中定义、由 [1] 中的算法8计算得到的级数 $\mathcal{O}_k^\infty$的极限余分布。根据 [1] 中的命题 2，我们知道余分布级数 $\mathcal{O}_k^\infty$ 收敛，且其极限余分布恰好是 $\mathcal{O}$。因此，余分布 $\mathcal{O}$ 在沿向量场 ${}^m\widehat{g}^\alpha_{d\infty}$ 的李导数下保持不变，其中这些向量场对任意 $\alpha = 0, 1, \ldots, m$均由 [1], 中的公式（31）定义。由此，对于任意满足 $d\gamma \in \mathcal{O}$ 的函数 γ，我们可得，对于任意 $j = 1, \ldots, m - m_w$ 以及任意 $\alpha = 0, 1, \ldots, m$， $\mathcal{L}_{{}^m\widehat{g}^\alpha_{d\infty}}\gamma$ 与 w_{m+j} 无关（注意，对于时变系统，$\boldsymbol{\cdot}$并且对于 $\alpha = 0$，此结果实际上涉及 $\mathcal{L}_{{}^m\widehat{g}^0_{d\infty}}\gamma$，其中 $\boldsymbol{\cdot}\mathcal{L}_{{}^m\widehat{g}^0_{d\infty}} := \mathcal{L}_{{}^m\widehat{g}^0_{d\infty}} + \frac{\partial}{\partial t}$）。考虑上述函数在 $\alpha = 0$时的情形。根据 [1], 中的公式（31），并利用已知的${}^m\nu_0^0 = 1$，我们有：

$$ {}^m\widehat{g}^0_{d\infty} = g^0_{d\infty} + \sum_{j=1}^{d} {}^m\nu_j^0 g^j_{d\infty}, $$

与 $d = m_w - m$ 一起。由 [1], 中的公式（27）和（28）可知，在上述表达式中，只有 $g^0_{d\infty}$ 取决于 w_{m+j}（$j = 1, \ldots, m_w - m$）。另一方面：

$$ \mathcal{L}_{{}^m\widehat{g}^0_{d\infty}}\gamma = \mathcal{L}_{g^0_{d\infty}}\gamma + \sum_{j=1}^{d} {}^m\nu_j^0 \mathcal{L}_{g^j_{d\infty}}\gamma $$

而在此函数中，只有第一项 $\mathcal{L}_{g^0_{d\infty}}\gamma$ 可能取决于 w_{m+j}。

由 [1], 中的公式（27）可得：

$$ \mathcal{L}_{g^0_{d\infty}}\gamma = \mathcal{L}_{g^0}\gamma + \sum_{j=1}^{d} \left(\mathcal{L}_{g^{m+j}}\gamma\right) w_{m+j} $$

由于该函数必须与 w_{m+j} 无关，对于任意 $j = 1, \ldots, m - m_w$，我们得到：

$$ \mathcal{L}_{g^{m+j}}\gamma = 0 $$

对于任意 $j = 1, \ldots, m - m_w$，以及满足 $d\gamma \in \mathcal{O}$ 的任意函数 γ。 ◀

现在，我们准备证明定理3。

证明： 附录A中给出的给定参数局部可辨识性的定义，与存在未知输入时及对时变系统而言的可观测性定义相同（例如，参见 [2] 中的定义6.15或 [26] 中的第II节），前提是将其应用于 θ-状态的相应分量。因此，我们可以通过研究 θ-状态的可观测性余分布来研究给定参数的可辨识性。将此余分布记为 $\mathcal{O}^S$。状态为（这里指由（2）表征的系统 $\mathcal{E}$）：

$$ S = [x^T,\ w_1, \ldots, w_{m_w}]^T \tag{46} $$

其中，x 是 $\mathcal{E}$ 的状态，并且已经包含所有常参数。给定参数的局部可辨识性，只需验证其微分是否属于 $\mathcal{O}^S$即可获得。

下面计算 $\mathcal{O}^S$。我们知道 $\mathcal{O}$，它是 $\mathcal{E}$的可观测性余分布。

从表征 x 动力学的向量场表达式出发，可以直接得到表征 S 动力学的向量场表达式。特别地，漂移项（记为 G^0）的表达式如下：

$$ G^0 = \begin{bmatrix} g^0 + \sum_{j=1}^{m_w} g^j w_j \\ 0_{m_w} \end{bmatrix} \tag{47} $$

其中，0_{m_w} 是零 m_w 列向量。

我们知道，对于任意满足 $d\gamma \in \mathcal{O}$ 的标量函数 $\gamma(x)$，有（仅针对一阶李导数）：

$$ d\dot{\mathcal{L}}_{G^0}\gamma \in \mathcal{O}^S. $$

其中 $\boldsymbol{\cdot}\ \mathcal{L}_{G^0} = \mathcal{L}_{G^0} + \frac{\partial}{\partial t}$ [14]。

我们将 $\mathcal{O}$ 的秩记为 n_o ($\leq n$，其中 n 是 x 的维数)。[1] 中的算法9给出了 $\mathcal{O}$ 的 n_o 个生成元。将它们记为 $\gamma_1(x), \ldots, \gamma_{n_o}(x)$。我们有：

$$ \mathcal{O} = \operatorname{span}\{d\gamma_1, \ldots, d\gamma_{n_o}\}. $$

$\sim$ $\sim$ [1] 中的算法9还给出了函数 $h_1, \ldots, h_m$，这些函数是 m 个标量场，使得可重构性矩阵满秩，且其微分属于 $\mathcal{O}$，即 $\sim dh_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, \ldots, m$。因此：

$$ d\dot{\mathcal{L}}_{G^0}\widetilde{h}_i \in \mathcal{O}^S, \quad i = 1, \ldots, m. $$

此外，由于由$\boldsymbol{\cdot}\ \sim\ \boldsymbol{\cdot}\ \sim$得到的可重构性矩阵满秩，余向量 $d\mathcal{L}_{G^0}h_1, \ldots, d\mathcal{L}_{G^0}h_m$线性无关，且它们也与 $\mathcal{O}$ 的生成元线性无关（因为后者与未知输入无关）。因此，$n_o + m$ 个余向量 $\boldsymbol{\cdot} \sim \boldsymbol{\cdot} \sim d\gamma_1, \ldots, d\gamma_{n_o}, d\mathcal{L}_{G^0}h_1, \ldots, d\mathcal{L}_{G^0}h_m$ 线性无关。

根据引理 1，以及 G^0 在 (47) 中的结构，我们可以得到，对于任意满足 $d\gamma \in \mathcal{O}$ 的标量函数 $\gamma(x)$，$\boldsymbol{\cdot}\mathcal{L}_{G^0}\gamma$ 与最后 $m_w - m$ 个未知输入无关（即 S 的最后 $m_w - m$ 个元素）。因此，$\mathcal{O}^S$ 的秩不能超过 $n_o + m$。因此：

$$ \mathcal{O}^S = \operatorname{span}\left\{d\gamma_1, \ldots, d\gamma_{n_o},\ d\dot{\mathcal{L}}_{G^0}\widetilde{h}_1, \ldots, d\dot{\mathcal{L}}_{G^0}\widetilde{h}_m\right\}. \tag{48} $$

让我们研究 $\mathcal{O}^S$的零空间结构。由于$\boldsymbol{\cdot}\ \sim\ \boldsymbol{\cdot}\ \sim$所有 $n_o + m$ 函数 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n_o}, \mathcal{L}_{G^0}h_1, \ldots, \mathcal{L}_{G^0}h_m$ 均不依赖于最后的 $m_w - m$ 个未知输入，因此，任何一个维数为 $n+m_w$、前 $n+m_w-m$ 个分量均为零的向量，必然属于 $\mathcal{O}^S$的零空间。因此，微分 $dw_{m+j} \notin \mathcal{O}^S$。这证明了定理的第一部分。

为证明第二部分，我们利用以下性质。记 Δ^S 为与可观测性余分布正交的分布（即，$\Delta^S := \left(\mathcal{O}^S\right)^\perp$）。$\Delta^S$ 是对合的

[14]在时不变情形下，我们有 $d\mathcal{L}_{G^0}\gamma \in \mathcal{O}^S$。这一性质众所周知，过去得到了广泛应用（例如，所有基于在 [20]–[24] 中引入的状态扩展的过程）。在时变情形下，我们需要添加时间导数算子（参见 [36]中的算法2、定理2和公式（10））。

（$\mathcal{O}^S$ 按构造是可积余分布）。记 $S(t)$为时间 t的真实 θ-状态。对于任意向量场$\xi^S \in \Delta^S$，考虑 τ 中的以下微分方程组（其中 t 是一个固定参数）：

$$\begin{cases} \frac{dS'}{d\tau} & = \xi^S(S'(t,\ \tau)) \\ S'(t,\ 0) & = S(t), \end{cases} \tag{49}$$

假设对于任意 $t \in \mathcal{I}$ 和任意 $\tau \in \mathcal{U}$，(49) 的解均存在，其中 $\mathcal{U}$ 是包含 $\tau = 0$ 的 $\mathbb{R}$ 开区间。那么，在任意 $\tau \in \mathcal{U}$ 处，(49) 的解，即 $S'(t,\ \tau)$，与 $S(t)$[15] 不可区分。

对于给定的 $k = 1,\ \ldots\ldots,\ m_w - m$，我们考虑最后几个未知输入中的一个，即未知输入 w_{m+k}。

在证明的第一部分，我们证明了，任何维数为 $n + m_w$ 且前 $n + m_w - m$ 个分量均为零的向量，必定属于 $\mathcal{O}^S$ 的零空间。因此，以下向量场必定属于 Δ^S:

$$\xi^S_k = \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_m \\ e_k \end{bmatrix}$$

其中，0_n 是零 n 列向量，0_m 是零 m 列向量，e_k 是 $(m_w - m)$ 列向量，其分量 k^{th} 1 非零，其余分量均为零。将上述 ξ^S_k 代入 (49) 以替换 ξ^S，并对 (49) 直接积分，我们立即得到 $w'_{m+k}(t,\ \tau) = w_{m+k}(t) + \tau$ 与 $w_{m+k}(t)\ \forall \tau \in \mathbb{R}$ 不可区分。 ◀

C. 定理2的证明

证明： 我们按照定理 3 的证明进行。在此情形下，我们首先证明定理的第二部分。只需证明，对于 $\forall \xi \in \mathcal{O}^\perp$，向量场:

$$\xi^S := \begin{bmatrix} \xi \\ \chi \end{bmatrix}, \tag{50}$$

其中 χ 由式 (7) 定义，属于式 (48) 中 $\mathcal{O}^S$ 的零空间。

考虑 $\mathcal{O}^S$ 的前 n_o 个生成元。由于 $\xi \in \mathcal{O}^T$，我们有:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \cdot \xi = 0, \quad i = 1, \ldots, n_o.$$

因此，

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial S} \cdot \xi^S = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial \gamma_i}{\partial w} \cdot \ \chi = 0 + \underbrace{[0, \ldots, 0]}_{m_w} \cdot \chi = 0, \quad i = 1, \ldots, n_o.$$

由于 γ_i 与 w 无关（它仅依赖于 x）。

让我们考虑剩余的 m 生成元。我们有:

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}_{G^0} \widetilde{h}_l}{\partial S} \cdot \xi^S = \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}_{G^0} \widetilde{h}_l}{\partial x} \cdot \xi + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}_{G^0} \widetilde{h}_l}{\partial w_k} \chi_k \tag{51}$$

[15]只需证明，任意一个关于 θ-状态的标量函数 $\Gamma(S)$，只要其微分属于可观测性余分布（即 $d\Gamma \in \mathcal{O}^S$），就满足 $\frac{\partial \Gamma(S'(t,\ \tau))}{\partial \tau} = 0$，即可轻松证明这一点。该等式成立是 $d\Gamma$ 与 ξ^S 正交的直接结果。

另一方面，

$$\dot{\mathcal{L}}_{G^0} \widetilde{h}_l = \dot{\mathcal{L}}_{g^0} \widetilde{h}_l + \sum_{j=1}^{m} (\mathcal{L}_{g^j} \widetilde{h}_l) w_j, \quad l = 1, \ldots, m \tag{52}$$

将（52）代入（51），并利用（4）和（5），得到:

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}_{G^0} \widetilde{h}_l}{\partial S} \cdot \xi^S = \xi^0_l + \sum_{j=1}^{m} \xi^j_l w_j + \sum_{k=1}^{m} \mathcal{L}_{g^k} \widetilde{h}_l \chi_k = \xi^0_l + \sum_{j=1}^{m} \xi^j_l w_j + \sum_{k=1}^{m} \mu^k_l \ \chi_k.$$

现在，利用式 (7) 中 χ_k 的表达式，以及 μ 是 ν 的逆（即 $\sum_{k=1}^{m} \mu^k_l \ \nu^i_k = \delta^i_l$），最终得到:

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}_{G^0} \widetilde{h}_l}{\partial S} \cdot \xi^S = 0.$$

因此，我们证明了 $\xi^S \in \Delta^S$。将其代入（49），即可证明该定理的第二部分。

证明第一部分。正如前文所述，检查给定参数的局部可辨识性，等价于检查其微分是否属于 $\mathcal{O}^S$。但这又等价于检查：对于属于 $\mathcal{O}^S$零空间的所有向量场，χ 中与该参数对应的分量是否均为零。换言之，关于 j^{th} 时变参数，其局部可辨识性等价于条件 $\chi_j = 0$，对任意 $\xi \in \mathcal{O}^\perp$均成立，其中 χ_j 由式（7）给出。由于式（7）中出现的所有系数 ξ^α_i都与 w无关（它们只依赖于 x），因此 $\chi_j = 0$ 当且仅当对任意 $\alpha = 0,\ 1, \ldots, m$，条件（3）成立。 ◀

D. 定理1的证明

证明： 根据定理4中给出的结果 [1], ，接下来需要证明逆命题，即如果未知输入是局部可辨识的，那么该系统关于其未知输入是规范的。

我们采用反证法。假设该系统关于其未知输入不是规范的。

由于状态是可观测的，其所有分量都属于观测空间，因此至少在局部有 $\mathcal{O} = \text{span}\ \{dx_1, \ldots, dx_n\}$。由于我们假设该系统不是规范的，$\deg_w(\mathcal{O}) < m_w$。因此，矩阵 $\mathcal{RM}(x_1, \ldots, x_n)$ 的秩小于 m_w。另一方面，通过显式计算可得:

$$\mathcal{RM}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} [g^1]_1 & [g^2]_1 & \cdots & [g^{m_w}]_1 \\ [g^1]_2 & [g^2]_2 & \cdots & [g^{m_w}]_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [g^1]_n & [g^2]_n & \cdots & [g^{m_w}]_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^1 & g^2 & \cdots & g^{m_w} \end{bmatrix},$$

其中 $[g^j]_i$ 是向量场$g^j (j = 1, \ldots, m_w$和 $i = 1, \ldots, n)$ 的 i^{th} 分量。因此，由于秩$(\mathcal{RM}(x_1, \ldots, x_n)) < m_w$，向量 $g^1\ g^2\ \ldots\ g^{m_w}$线性相关。我们用 $\widehat{n}$ 表示一个非零向量，它

属于上述矩阵的零空间。考虑以下动力学：

$$\dot{x} = g^0 + \sum_{k=1}^{m_u} f^k u_k + \sum_{j=1}^{m_w} g^j w_j.$$

对于任意 $w = [w_1, w_2, \ldots, w_{m_w}]$，通过如下方式变换未知输入，我们可以得到相同的动力学：

$$w \to w' = w + \widehat{n}$$

因此， w 无法与 w'区分。◀

参考文献

[1] A. Martinelli, 《非线性未知输入可观测性与未知输入重构：一般解析解》, Information Fusion，第85卷，2022年，23–51页，ISSN 1566-2535, https://doi.org/10.1016/j.inffus.2022.03.004。本文内容也可通过 arXiv: 2201 07610 [ ] 获取。数学：运筹学与控制 [2] A. Martinelli, 《可观测性：基于不变群的新理论》，由 SIAM 于《设计与控制进展》系列出版，2020年，ISBN：978-1-61197-624-3。[3] Kalman R. E., 《控制系统的一般理论》，IFAC第一届国际大会论文集，莫斯科，1960年，1481，Butterworth，伦敦，1961年。[4] Kalman R. E., 《线性动力系统的数学描述》，SIAM J. Contr. 1963年，1，152。[5] Her mann R. 和 Krener A.J.，1977年，《非线性可控性与可观测性》，Transaction On Automatic Control，AC-22(5)：728–740。[6] Casti J. L., 《非线性系统理论的最新进展与未来展望》，SIAM Review，第24卷，第3期，1982年7月。[7] Isidori A., 《非线性控制系统》，第3版，伦敦，Springer Verlag，1995年。[8] M. Grewal 和 K. Glover，《线性与非线性动力系统的可辨识性》，发表于 IEEE Transactions on Automatic Control，第21卷，第6期，第833–837页，1976年12月，doi: 10.1109/TAC.1976.1101375。[9] E. Tunali 和 Tzyh-Jong Tarn，《非线性系统可辨识性的新结果》，发表于 IEEE Transactions on Automatic Control，第32卷，第2期，第146–154页，1987年2月，doi: 10.1109/TAC.1987.1104544。[10] E. Walter、L. Pronzato，《非线性参数模型的可辨识性与可区分性》，Mathematics and Computers in Simulation，第42卷，第2–3期，1996年，125–134页，ISSN 0378-4754, https://doi.org/10.1016/0378-4754(95)00123-9。[11] G. Basile 和 G. Marro，《关于具有未知输入的线性时不变系统的可观测性》，J. Optimization Theory Appl.，3，415，1969年，410：–。[12] R. Guidorzi 和 G. Marro，《在未知输入系统观测器综合中关于 Wonham稳定性条件》，Automatic Control, IEEE Transactions on，16(5)：499–500，1971年10月。[13] Basile G，Marro G.，《线性系统若干结构性质的新刻画：未知输入可观测性、可逆性与函数可控性》。Int. J. Control 17，931–943，1973年。(doi:10.1080/00207177308932438) [14] Hirschorn RM.，《非线性控制系统的可逆性》。SIAM J. Control Optim. 17，289–297，1979年。(doi:10.1137/0317022) [15] Singh S. 1981年，《非线性系统可逆性的改进算法》。IEEE Trans. Autom. Control 26，595–598，1981年。(doi:10.1109/TAC.1981.1102657) [16] Fliess M.，《关于非线性输入输出微分系统可逆性的一则注记》。Syst. Control Lett. 8，147–151，1986年。(doi:10.1016/0167-6911(86)90073-3) [17] Kryazhimskiy A, Osipov YS.，《线性动力学的输入可重构性》。常微分方程。国际应用系统分析研究所。WP-93-65，1993年。[18] Hou M，Patton RJ.，《输入可观测性与输入重构》。Automatica 34，789–794，1998年。(doi:10.1016/S0005-1098(98)00021-1) [19] H. Miao、X. Xia、A. S. Perelson 和 H.Wu，《非线性常微分方程模型的可辨识性及其在病毒动力学中的应用》，SIAM Review，第53卷，第1期，第3–39页，2011年。[20] F. A. W. Belo、P. Salaris 和 A. Bicchi，《求解平面方位SLAM并完全重构未知输入只需3个已知地标》，IROS 2010，台北，台湾。

[21] A. Martinelli. 将可观测性秩条件扩展至由未知输入驱动的非线性系统。第23届地中海控制与自动化会议（MED），2015年6月。托雷莫利诺斯，西班牙 [22] Villaverde AF, Barreiro A., Papachristodoulou A., 动态系统生物学模型的结构可辨识性，PLOS计算生物学，10月，2016 10 1371 1005153 https://doi.org/ 。/ [23] 2019 journal.pcbi. Maes, K., Chatzis, M., Lombaert, G., . 具有未测输入的非线性系统的可观测性。机械系统与信号处理 130, 378–394。[24] Villaverde, A.F., Tsiantis, N., Banga, J.R., 非线性生物模型中未知输入、状态和参数的完全可观测性与估计。英国皇家学会界面期刊 [25] 16, 2019 A. Martinelli，非线性未知输入可观测性：可观测性秩条件的扩展，IEEE Transactions on Automatic Control，第 64， 1， 222 237 卷，第 [26] 期，第页 – M. A. Sarafrazi, U. Kotta and Z. Bartosiewicz，关于非线性未知输入可观测性条件中的停止准则，载于 IEEE Transactions on Automatic Control，第67卷第9期，第4733-4737页，2022年9月，doi: 10.1109/TAC.2022.3160133。[27] A. S. Perelson and P. W. Nelson，体内HIV-1动力学的数学分析，SIAM评论，41（1999），第3–44页。[28] A. S. Perelson，病毒与免疫系统动力学建模，自然综述：免疫学，2（2002），第28–36页。[29] X. Xia and C. H. Moog，非线性系统的可辨识性及其在HIV/AIDS模型中的应用，IEEE自动控制汇刊，48（2003），第330—336页。[30] Chen J, Wu H.，确定性动态模型中时变参数的估计。统计学报 18, 987–1006, 2008。[31] M. J. Mhawej, C. H. Moog, F. Biafore, C. Brunet-Franc.艾滋病病毒感染控制与药物剂量，生物医学信号处理与控制，第5卷第1期，2010年，第45-52页，ISSN 1746-8094，https://doi.org/10.1016/j.bspc.2009.05.001。[32] Massonis G., Banga J. R., Villaverde A. F.，COVID-19疫情房室模型的结构可辨识性与可观测性，控制年度评论，第51卷，2021年，第441–459页，ISSN 1367-5788，https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.12.001. (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578820300778) [33] Pribylova, L., Hajnova, V. (2020). 含无症状群体的SEIAR模型及其对COVID-19疫情中政府隔离措施效率的影响。arXiv:2004.02601。[34] A. Martinelli，时变参数非线性常微分方程模型的可辨识性：一般解析解及其在病毒动力学中的应用，arXiv: 2211 13507 . A. [35] Martinelli，发现论文《非线性常微分方程模型的可辨识性及其在病毒动力学中的应用》中的一个严重错误，arXiv: 2304 14288 [ ] . 数学：运筹学与控制 A. Martinelli，将可观测性秩条件扩展至时变非线性系统，载于 IEEE Transactions on Automatic Control，第67卷第9期，第5002-5008页，2022年9月，doi: 10.1109/TAC.2022.3180771。[37] B. R. Hunt, T. Sauer and J. A. Yorke，普遍性：无限维空间上平移不变的“几乎处处”，美国数学会通报，第27卷第2期，1992年10月 [36]