arXiv:2305.01066v1 [math.LO] 1 May 2023

可证明的更优拟序

ANTON FREUND、ALBERTO MARCONE、FEDOR PAKHOMOV 和 GIOVANNI SOLD`A

Abstract. 近期研究表明，像 ACA_0 这样相当强的公理系统，无法证明由三个元素组成的反链是更佳拟序（bqo）。本文完整刻画了在这类公理系统中可证明为 bqo 的有限偏序。该结果还将推广到无限序。作为应用，我们推出，最小坏数组引理的一个版本在 ACA_0之上是弱的。与此形成鲜明对比的是，近期的一项结果表明，同一版本在更强的基础理论 ATR_0之上等价于 Π^1_2-概括公理。

1. 引言

我们先回顾更优拟序的概念。我们用 $[X]^{<\omega}$ 和 $[X]^{\omega}$ 分别表示集合 X的有限子集与可数无限子集组成的集合。当有 $X \subseteq \mathbb{N}$时，我们将 $[X]^{<\omega} \cup [X]^{\omega}$ 中的元素视为枚举这些子集的严格递增序列。对于这类序列，我们用 $s \sqsubset t$ 表示s 是 t 的真初始片段（其中 t 可以是无限的，但 s 必定是有限的）。即使将它们视为序列，我们仍使用诸如 $\subseteq$ 这样的记号来表示集合上的通常概念。我们用 $\subset$ 表示真子集关系。

块是一个集合 $B \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$，使得所谓的基 $\bigcup B \subseteq \mathbb{N}$ 是无限的，并且每个 $X \in [\bigcup B]^{\omega}$ 都有唯一的 $s \sqsubset X$ 满足 $s \in B$。由此可知，不可能有 s、$t \in B$ 满足 $s \sqsubset t$。障碍集是满足更强条件的块 B，即对任何 s、$t \in B$，$s \subset t$ 都不成立。对于拟序 Q，所谓的 Q-数组，是指定义在某个障碍集 B上的函数 $f\colon B \to Q$。

对于具有最小元素 x 的 $X \subseteq \mathbb{N}$，我们定义 $X^- := X\setminus\{x\}$。给定 s、$t \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$，如果存在一个 $X \in [\mathbb{N}]^{\omega}$，使得 $s \sqsubset X$ 且 $t \sqsubset X^-$，我们就记作 $s \lhd t$。后者是可判定的，因为它仅取决于 $s \cup t \sqsubset X$。一个数组 $f\colon B \to Q$ 称为良好的，如果存在 s、$t \in B$，使得 $s \lhd t$，并且 $f(s) \leq f(t)$ 在序 Q 中成立。否则，f 称为坏的。更佳拟序（bqo）是一种拟序 Q，满足任意 Q-数组都是良好的。

令 $[\mathbb{N}]^1$ 为包含所有单元素集的障碍集。由 $([\mathbb{N}]^1, \lhd) \cong (\mathbb{N}, <)$ 可知，任何更优拟序都是良拟序（wqo）。C. Nash-Williams 引入了良拟序这一概念，以确保更强的闭包性质 [19, 20]。它在 R. Laver 著名的证明 [12] 中发挥了关键作用；该证明解决了 Fra¨ıss´e 猜想，即可数线性序在嵌入关系下是良拟序（实际上，该证明得出了更强的结果：σ-散序是更优拟序）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 06A06, 03B30, 03F35。*Key words and phrases.* 更优拟序、逆向数学、最小坏数组引理。Anton Freund 的研究由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号为 460597863。Alberto Marcone 的研究部分由意大利 PRIN 2017 项目“数理逻辑：模型、集合、计算能力”资助。Fedor Pakhomov 和 Giovanni Sold`a 的研究由 FWO 项目资助 G0F8421N 资助。

从数理逻辑的视角，尤其是在逆向数学的框架下，对更优拟序进行了分析（背景介绍见 [5, 24, 10, 2]，关于逆向数学中良拟序和更优拟序的近期综述见 [17] ）。Marcone 特别证明了良拟序这一概念是 Π^1_2-完备的 [14, 15]。我们提及一个技术性但重要的事实 [1] ：块 B 的基 $\bigcup B$ 可以在 RCA_0中构造。将障碍集替换为块，可以得到等价的良拟序定义；要确保这种等价性，基础理论 WKL_0就足够了 [1]。定义在块上的映射 $B \to Q$ 对应于在适当意义下连续的函数 $[\bigcup B]^\omega \to Q$ （见第 4 节）。正如 S. Simpson [23], 所示，将“连续”弱化为“博雷尔”可得到良拟序的另一种等价定义。介于两者之间的一种选择，则产生了下文将要讨论的 Δ^0_2-良拟序概念。在这些情形下，要证明等价性似乎需要强得多的基础理论。在逆向数学的结果中，我们采用上文给出的、以障碍集为基础的标准定义。大部分讨论也适用于块。

A. Montalb´an 已证明 [18] ，Fra¨ıss´e 猜想可在逆向数学中的理论 Π^1_1-CA_0 中得到证明。为确立这一结果，Montalb´an 对 Fra¨ıss´e 猜想给出了一种新的证明，因为 Laver论证依赖于极小坏数组原理，而该原理此前被猜想无法在 Π^1_1-CA_0 中证明。A. Freund、F. Pakhomov 和 G. Sold`a [4], 最近证实了这一猜想：他们证明，在基础理论 ATR_0 上，极小坏数组原理等价于更强的集合存在原理，即 Π^1_2-概括公理。

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们用 n 表示通常的线性序，用 $\overline{n}$ 表示底集 $\{0, \dots, n-1\}$ 上的反链。Montalb´an 上述结果的一个重要组成部分是命题：$\overline{3}$ 是 Δ^0_2-良拟序。后者蕴含 RCA_0, 上的算术超限递归，正如 Freund [3], 最近所证明的；他还证明，由“$\overline{3}$ 是良拟序”这一命题可推出沿 $\mathbb{N}$ 的算术递归（ACA^+_0 的核心公理）。

根据 Marcone [16] 的一个结果及 Freund [3] 对其的强化，若 RCA_0 的某个扩展证明 $\overline{3}$ 是良拟序，那么它也证明所有有限拟序都具有这一性质。这引出了下面的问题：

> 哪些有限偏序能在诸如 ACA_0, 这样的理论中被证明为良拟序
> 而这些理论并不证明 $\overline{3}$ 是良拟序?

本文回答了这个问题，并给出了在这些理论中可被证明为良拟序的无限偏序的刻画。这与可证明良序这一经典主题相关，而该主题是序数分析的研究内容（背景介绍见 [22] ）。需要指出的是，本文聚焦于偏序纯粹是出于方便，因为任何拟序都等价于一个反对称商。

为陈述我们的结果，我们先引入一些记号。给定一个偏序 $(I, \preceq)$，以及适用于 $i \in I$ 的拟序 $(Q_i, \leq_i)$，我们考虑由下式给出的拟序

$$\textstyle\sum_{i\in I} Q_i = \{(i, q) \mid i \in I \text{ and } q \in Q_i\},$$
$$(i, q) \leq (j, r) \text{ in } \textstyle\sum_{i\in I} Q_i \quad \Leftrightarrow \quad i \prec j \text{ or } (i = j \text{ and } q \leq_i r).$$

需要指出的是，具有不可比较加项的二元和可以表示为

$$Q_0 \oplus Q_1 = \textstyle\sum_{i\in\overline{2}} Q_i.$$

所谓线性和，是指一种序 $\sum_{i\in I} Q_i$ ，使得 I 是线性的。当后者还是良基时，我们称之为良序和。若一个拟序是

具有某种性质的序的线性和或良序和，是指它同构于一个线性和或良序和 $\sum_{i\in I} Q_i$，其中每个 Q_i 都具有所讨论的性质。我们还回顾一下，拟序之间的函数 $f\colon P \to Q$ 称为保序反映映射，是指对所有 p、$q \in P$，若 $f(p) \leq_Q f(q)$，则有 $p \leq_P q$。当所有这些蕴含关系都是等价关系时，f 称为嵌入。若 Q 是良拟序，且存在保序反映映射 $f\colon P \to Q$，那么 P 也是良拟序，因为任何坏数组 $g\colon B \to P$都会导出一个坏数组 $f \circ g\colon B \to Q$。

Marcone [16] 已证明，RCA_0 证明 $\overline{2}$ 是良拟序。为了刻画可证明的良拟序，我们将把这一事实与以下新结果结合起来：RCA_0 证明以下每一项：

- 序 $1 \oplus 2$ 是良拟序，当且仅当 $\overline{3}$ 也具有同样性质（推论 2.6），
- 偏序 P 是大小至多为二的反链的线性和，当且仅当不存在从 $1 \oplus 2$ 到 P的保序反映映射（推论 3.2），
- 良拟序类在良序和下封闭（命题 3.3）。

关于第三点，我们注意到，良拟序实际上在指标集为良拟序的和下封闭（该指标集不必是线性的）。然而，鉴于 $\sum_{p\in\overline{2}} \overline{2} \cong \overline{4}$，这一推广需要更强的基础理论。

因此，对于那些不能证明 $\overline{3}$ 是良拟序的 RCA_0 的扩展，可证明为良拟序的有限偏序可刻画为反链 $\overline{1}$ 和 $\overline{2}$ 的线性和（定理 3.4）。结合上述结果与关于可证明良序的经典结果，我们还可以刻画这类公理系统中可证明为良拟序的无限偏序（定理 3.5）。

作为我们关于可证明的更优拟序研究的一项应用，我们为上述关于极小坏数组原理 [4] 的结果需要相当强的基础理论提供了形式化证据。具体而言，我们证明，该原理的某个版本不能推出 ACA_0 上的算术超限递归（推论 4.5）。作为有趣的对照，我们还证明，该原理的另一个版本能够推出 RCA_0 上的算术理解（命题 4.6）。

2. 一加二等于三

回顾一下，我们用 n 表示该线性序，用 $\overline{n}$ 表示底集为 $\{0, \ldots, n-1\}$ 的反链。我们用 $\oplus$ 表示各个分项彼此不可比的序的不交并。在本节中，我们证明，在 RCA_0 中可证明：$1 \oplus 2$ 是更佳拟序，当且仅当 $\overline{3}$ 也是如此。根据先前的结果 [3],，$1 \oplus 2$ 是良拟序这一事实蕴含至少 ACA_0^+（沿 $\mathbb{N}$ 的算术递归）。在下一节中，我们将看到，$1 \oplus 2$ 和 $\overline{3}$ 是中等弱度理论中可证明为良拟序的偏序的禁子序。

拟序 Q 是良拟序，当且仅当在以 Q 为原子元素的遗传可数集上定义的某个适当序是良基的，或等价地，是良拟序。为避免混淆，我们强调，一般而言，良基性并不等价于良拟序；只有在上述情形下才等价。关于以原子元素为元素的集合的良拟序刻画，可追溯至 Nash-Williams 的原始工作 [19]（详见 [21]中的详细证明）。与 [3], 一样，我们关注遗传有限情形。

定义 2.1（RCA_0）。考虑一个拟序 Q。我们按以下条款递归生成集合 $H_f(Q)$：

(i) 对于每个 $q \in Q$，我们都加入一个元素 $(0, q) \in H_f(Q)$,

(ii) 对于每个由我们已经构造出的元素组成的有限集 $a \subseteq H_f(Q)$，我们都加入一个元素 $(1, a) \in H_f(Q)$。

此外，我们通过规定满足以下条款，在集合 $H_f(Q)$ 上定义一个拟序 $\leq_{H(Q)}$：

$$\begin{aligned}&(0,p) \leq_{H(Q)} (0,q) \Leftrightarrow \quad p \leq q \text{在 } Q \text{ 中成立，} (0,p) \leq_{H(Q)} (1,b) \Leftrightarrow \text{存}\\&\text{在某个 } y \in b \text{ 使得 } (0,p) \leq_{H(Q)} y, \ (1,a) \leq_{H(Q)} (0,q) \Leftrightarrow \text{所有}\\&x \in a \text{ 都验证 } x \leq_{H(Q)} (0,q), \ (1,a) \leq_{H(Q)} (1,b) \Leftrightarrow \text{每个 } x \in a \text{ 都}\\&\text{有一个 } y \in b \text{ 使得 } x \leq_{H(Q)} y\end{aligned} .$$

为提高可读性，今后我们将写作 $q \in Q$ 和 $a \in H_f(Q)\backslash Q$，以分别指代集合 $H_f(Q)$ 中的元素 $(0, q)$ 和 $(1, a)$。

在 RCA_0，中，$H_f(Q)$ 的元素并不表示为二阶对象意义下的集合，而是表示为有限树或项的数值编码，其叶标签或常量符号取自 Q。相应地，我们将 $\leq_{H(Q)}$ 视为这些编码之间的原始递归关系。对树或项进行归纳法，可确认其中隐含的断言：$H_f(Q)$ 是一种拟序。以下结果是所引文献中的定理 3.2。

命题 2.2（RCA_0；[3]）。如果 Q 是良拟序，那么 $H_f(Q)$ 也是良拟序。

将 $x \in H_f(Q)$ 视为一棵树时，我们用 $\mathrm{supp}(x)$ 表示 x的叶标签集合，这意味着

$$\begin{aligned}&\mathrm{supp}(q) = \{q\} && \text{for } q \in Q,\\&\mathrm{supp}(a) = \bigcup\{\mathrm{supp}(x) \mid x \in a\} && \text{for } a \in H_f(Q)\backslash Q,\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{supp}(x)$ 是 Q 的有限子集，故为 $H_f(Q)$ 的一个元素。与 [3], 中一样，对树或项进行直接的归纳法即可得到以下结果。

引理 2.3（RCA_0；[3]）。对于任意拟序 Q，有

$$\begin{aligned}x \leq_{H(Q)} y \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{supp}(x) \leq_{H(Q)} \mathrm{supp}(y) && \textit{for any } x, y \in H_f(Q),\\x \in a \quad &\Rightarrow \quad x \leq_{H(Q)} a && \textit{when } a \in H_f(Q)\backslash Q.\end{aligned}$$

如 [3]所示，序 $\overline{H}_f(3)$包含两份彼此独立的自然数集副本。现在我们证明，在 $H_f(1 \oplus 2)$ 中可以找到两份“交错”的副本。约定记作 $1 \oplus 2 = \{\star\} \cup \{0, 1\}$，其中 $0 < 1$ 是唯一的严格不等式。

定义 2.4（RCA_0）。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们递归地定义 $\dot{n}, \ddot{n} \in H_f(1 \oplus 2)$如下：

$$\dot{n} = \{\star, 0\} \cup \{\dot{m} \mid m < n\}, \qquad \ddot{n} = \{\star, 1\} \cup \{\ddot{m} \mid m < n\}.$$

下面的结果是关于 $H_f(3)$的一个结果的变体，该结果已在 [3]中证明。不同之处在于，在 $H_f(3)$中，$\dot{m}$ 和 $\ddot{n}$ 始终不可比；而我们得到 $\dot{n} \leq \ddot{n}$，因为 $0 < \overline{1}$ 在 $1 \oplus 2$中成立。

命题 2.5（RCA_0）。对于任意 $m, \ n \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\dot{m} \leq_{H(1\oplus 2)} \dot{n} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{m} \leq_{H(1\oplus 2)} \ddot{n} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{m} \leq_{H(1\oplus 2)} \ddot{n} \quad \Leftrightarrow \quad m \leq n.$$

此外，对于任意 m，我们都有 $\ddot{m} \not\leq_{H(1\oplus 2)} \dot{n}$，$n \in \mathbb{N}$。

证明。为提高可读性，我们用 $\leq_H$ 表示 H_f（$1 \oplus 2$）上的序关系。为证明该命题的最后一个断言，我们首先注意到

$$\mathrm{supp}(\ddot{m}) = \{\star, 1\} \quad \text{and} \quad \mathrm{supp}(\dot{n}) = \{\star, 0\}.$$

鉴于 $1 \not\leq \star$ 和 $1 \not\leq 0$ 在 $1 \oplus 2$ 中成立，我们得到 $\mathrm{supp}(\ddot{m}) \not\leq_H \mathrm{supp}(\dot{n})$。为了得出 $\ddot{m} \not\leq_H \dot{n}$，我们现在调用引理 2.3。

下面我们证明给定等价关系中的最后一个。其他等价关系的证明类似，可见于 [3]。

为了证明 $m \leq n$ 蕴含 $\dot{m} \leq_H \ddot{n}$，我们对 n 使用归纳法。给定 $m \leq n$，任务是证明每个 $x \in \dot{m}$ 都存在一个 $y \in \ddot{n}$，使得 $x \leq_H y$。对于 $x = \star$ 和 $x = \dot{0}$，我们分别可以取 $y = \star$ 和 $y = 1$。在剩余的情形中，我们有 $x = k$，其中 $\ddot{}$ 是某个 $k < n$。归纳假设保证 $y = k$ 满足所需条件。

现在对 m 使用归纳法，以证明对于所有 n，$\dot{m} \leq_H \ddot{n}$ 蕴含 $m \leq n$。注意，这相当于一种 Π^0_1-归纳法，在 RCA_0 中可以使用。为导出矛盾，我们假设 $\dot{m} \leq_H \ddot{n}$，但 $m > n$。后者蕴含 $\dot{n} \in \dot{m}$，因此对于某个 $y \in \ddot{n}$，我们得到 $\dot{n} \leq_H y$。鉴于 $\mathrm{supp}(\dot{n}) \ni 0 \not\leq \star$ 且 $\mathrm{supp}(\dot{n}) \ni \star \not\leq 1$，我们现在可以使用引理 2.3 推得 $y \notin \{\star, 1\}$。唯一的另一种可能是，对于某个 $k < n$，我们有 $y = k$。但这样一来，$\dot{n} \leq_H y$ 便与归纳假设矛盾。□

现在让我们推导出所承诺的结果。

推论 2.6（RCA_0）。序 $1 \oplus 2$ 是良拟序，当且仅当 $\ddot{3}$ 也满足这一条件。

证明。反向显然，因为存在一个从 $1 \oplus 2$ 到 $\ddot{3}$ 的保序反映映射。为通过命题 2.2 证明正向，我们证明 $H_f(1 \oplus 2)$ 包含一个大小为三的反链。这样的反链为

$$\{\ddot{0}, \dot{5}\}, \quad \{\ddot{1}, \dot{4}\}, \quad \{\ddot{2}, \dot{3}\}.$$

作为一个代表性情形，我们说明为什么前两个元素不可比。再次地，我们用 $\leq_H$ 表示 $H_f(1 \oplus 2)$ 上的不等式。根据命题 2.5，$\dot{\ddot{\cdot}}$，我们有 $5 \not\leq_H 1$ 和 $5 \not\leq_H 4$，因此由定义 2.1 可得 $\{0, 5\} \not\leq_H \{1, 4\}$。我们还有 $\ddot{1} \not\leq_H \ddot{0}$ 和 $\ddot{1} \not\leq_H \dot{5}$，由此得到 $\{\ddot{1}, \dot{4}\} \not\leq_H \{\ddot{0}, \dot{5}\}$。□

根据 [3], 的主要结果，我们可以得出以下结论。

推论 2.7。在 $\mathbb{N}$ 上进行算术递归（ACA^+_0），可由 $1 \oplus 2$ 是良拟序这一陈述推出，且该结论在 RCA_0 中成立。特别是，ACA_0 无法证明 $1 \oplus 2$ 是良拟序。

3. A characterization of provable better quasi orders

本节旨在刻画当 $\ddot{3}$ 不是良拟序时，哪些偏序能够被证明是良拟序。鉴于推论 2.6，以下禁用小图刻画将发挥核心作用。以下结果中陈述 (i) 的确切含义已在引言中说明。

命题 3.1（RCA_0）。对于任意偏序 P，以下各项等价：

(i) 序 P 是反链的线性和；(ii) P 中不可比关系的自反闭包是一个等价关系；(iii) 不存在从 $1 \oplus 2$ 到 P 的序嵌入。

证明。显然，(i) 蕴含 (ii)。由于不可比较关系的自反闭包在 $1 \oplus 2$ 中不具有传递性，因此在任何能够嵌入 $1 \oplus 2$ 的序中也不具有传递性，所以 (ii) 蕴含 (iii)。

为证明 (iii) 蕴含 (ii)，注意，任何不可比较关系的自反闭包不具有传递性的 P（这是它可能不是等价关系的唯一原因），都包含三个互不相同的元素 x、y、z，使得 x 与 y 不可比，后者与 z 不可比，但 x 与 z 可比。这显然给出了从 $1\oplus 2$ 到 P 的一个嵌入（将 1 中的元素映射到 y，将 2 中的元素映射到 x 和 z）。

最后，我们假设一个序 P 满足 (ii)，并证明它也满足 (i)。显然，关于不可比较关系的自反闭包的等价类都是反链。同时，序 P 与此等价关系相容：事实上，若有不可比的 x_1、x_2，以及另一个与它们均不可比的元素 y，那么 P 对 x_1 与 y 的比较结果，以及对 x_2 与 y 的比较结果将一致；否则，由传递性将推出 $x_1 <_P x_2$ 或 $x_1 >_P x_2$。令 C 为 P 关于不可比较关系的自反闭包所得的商集。按照逆向数学中的惯例，我们研究定义在自然数集 $\mathbb{N}$ 的子集上的关系所构成的序。为便于后文引用，我们正式定义 C 为 P 的子序，它包含每个等价类中 $<_{\mathbb{N}}$-最小的元素。记 $A(p)$ 为包含 $p \in C$ 的等价类。于是有 $P \cong \sum_{p\in C} A(p)$，这正是 (i) 所需。□

如引言中所述，Marcone [16] 已证明 RCA_0 能够证明 2 是良拟序。这说明了以下结果的重要性。

推论 3.2（RCA_0）。对于任意偏序 P，以下条件等价：

(i) 偏序 P 是每个反链至多含两个元素的反链线性和；(ii) 不存在从 $1 \oplus 2$ 到 P的保序反映映射；(iii) 不存在从 $1 \oplus 2$ 到 P的嵌入，也不存在从 $\underline{3}$ 到 P的嵌入。

证明。根据前述命题，只需注意到，从 $1 \oplus 2$到 P 的映射是保序反映映射但不是嵌入，当且仅当其像是含有三个元素的反链。□

为刻画某些理论可证明的良拟序，我们将把前一个推论与以下结果结合起来。正如引言中所述，对于以良拟序为指标的和，相应结果可以在强得多的理论 ATR_0 中得到证明（构造相对于指标序而言完美的子数组）。基础理论 RCA_0 不足以支持这一推广，因为它能证明 2 是良拟序，却不能证明 $\overline{4} \cong \sum_{p\in\overline{2}} \overline{2}$也是如此。

命题 3.3（RCA_0）。任意良拟序的良序和本身也是良拟序。

证明。考虑一个映入良拟序之良序和的坏数组 $f\colon B \to \sum_{i\in I} Q_i$。记 $f_0\colon B \to I$ 为 f 与映射 $\sum_{i\in I} Q_i \ni (i,q) \mapsto i \in I$ 的复合。给定 $s \in B$，我们定义 B/s 为由所有 $t \in B$ 构成的子障碍集，其中 $t \in B$ 的最小元素严格大于 s 的最大元素。对于 $t \in B/s$，我们找到 $s \cup t$ 的区间 $r^i \in B$，它们构成一条链 $s = r^0 \lhd \ldots \lhd r^n = t$。鉴于 f 是坏的，我们必有 $f_0(s) = f_0(r^0) \geq_I \ldots \geq_I f_0(r^n) = f_0(t)$。

假设对于所有 $s \in B$，都存在 $t \in B/s$，使得 $f_0(s) >_I f_0(t)$。于是，通过选择最小的 t（相对于 $\leq_{\mathbb{N}}$），我们可以在 I 中定义一个下降序列，这与 I 是良基的事实相矛盾。因此，必定存在一个元素 $s \in B$，使得 f_0 在 B/s 上恒取值 $i = f_0(s) \in I$。但此时，$f_1\colon B/s \to Q_i$ 满足 $f(t) = (i, f_1(t))$，是坏的，因此 Q_i 不可能是更佳拟序。□

现在我们推导可证明的更优拟序的一种刻画。在无限情形下，我们把偏序视为存在于“现实世界”中，并认为它们在二阶算术的子系统中由适当的描述表示，因此内涵方面也发挥作用（考虑 $\mathbb{N}$：若某个大基数概念相容，则它是线性序；否则它是反链）。此外，由于 RCA_0 证明一个线性序是良拟序，当且仅当它是良基的，因此无限情形与证明论序数有关。基于这些原因，我们先从较为直接的有限序情形入手，并假设它们由一个固定的标准数值编码系统表示（例如通过关联矩阵）。如果一个有限序具有由编码上的 Σ^0_1-条件给出的性质（可通过有限验证确立），那么这一来自“现实世界”的事实已经可以通过 Σ^0_1-完备性原理在 RCA_0，中得到证明（例如参见 [9] 的定理 I.1.8）。

值得注意的是，ACA_0 满足下述结果对 T 的条件；此外，如果某个理论 T $\supseteq \mathsf{RCA}_0$ 证明 3 是良拟序，那么它也证明任何有限偏序都是如此（见 [3]的推论 2.13 和推论 3.9）。

定理 3.4。设 T 是二阶算术语言中的一个理论，它扩张 RCA_0，且不能证明含有三个元素的反链是更佳拟序。对于任意有限偏序 P，以下命题等价：

(i) 理论 T 证明 P 是更佳拟序；(ii) 序 P 是由至多含两个元素的反链构成的线性和。

证明。先假设 (ii) 不成立。于是，根据推论 3.2，存在一个从 $1 \oplus 2$ 到 P的保序反映映射。由于 Σ^0_1-完备性原理，T 可以识别这一事实。因此，如果 P是良拟序，T 就证明 $1 \oplus 2$ 是良拟序。根据推论 2.6，除非 T 证明 3 是良拟序，否则我们可以得出 (i) 不成立。

现在假设 (ii) 成立。由于我们讨论的是有限序，T 凭借 Σ^0_1-完备性可以识别这一事实，而且线性和与良序和相同。此外，T 知道大小至多为二的反链是良拟序，这由 [16] 的引理 3.2 得知。由上面的命题 3.3 可得 (i)。□

与定理 3.4 的情形一样，以下结果也可以推广到其他无法证明 3 是良拟序的理论。为了避免对证明论序数的标准记号系统进行一般性讨论，我们针对一个具体情形来表述这一结果。序 $\overline{2} \cdot \gamma$ 定义为对于所有 $\beta \in \gamma$，由 $\gamma = \{\beta \in \varepsilon_0 \mid \beta < \gamma\} \subseteq \varepsilon_0$ 和 $P_\beta = \overline{2}$ 构成的 $\sum_{\beta \in \gamma} P_\beta$。换言之，这是 $\gamma \times \overline{2}$ 上的字典序，它对应于通常的序数算术（注意因子的顺序是反过来的）。

定理 3.5. 对于任意偏序 Q，以下命题等价：

(i) 序 Q 同构于某个 $\gamma < \varepsilon_0$ 的可计算枚举子序，其中 $\overline{2} \cdot \gamma$（$\varepsilon_0$ 通过标准记号表示，如 [26, §11]所述）；(ii) 存在一个序 $P \cong Q$ 的可计算表示，使得 ACA_0 证明 P 是更佳拟序。

证明。为说明 (i) 蕴含 (ii)，回顾 ACA_0 的证明论序数为 ε_0。因此，对于外部固定的每个 $\gamma < \varepsilon_0$，ACA_0 证明 γ 是良基的（参见例如 [26, § 13]，这是 G. 根岑 [6, 7]所证明的结果）。由上述命题 3.3 和 [16], 的引理 3.2可知，ACA_0 证明 $\overline{2} \cdot \gamma = \sum_{\beta < \gamma} \overline{2}$ 是良拟序。

现在假设 Q同构于一个可计算函数 $e\colon \mathbb{N} \to \overline{2} \cdot \gamma$的像。令 P为定义在有序对$(p, n) \in (\overline{2} \cdot \gamma) \times \mathbb{N}$ 上的序，使得 n在满足 $e(n) = p$的条件下是极小的；其中，$(p, m) \leq (q, n)$在 P中成立，当且仅当 $p \leq q$属于 $\overline{2} \cdot \gamma$。那么 P是

可计算的，并且通过投影$(p,n) \mapsto p$与 Q 同构。在 ACA_0 中，我们知道每个 p 至多允许一个满足$(p,n) \in P$的 n （根据 P的定义），由此可知 P是一个偏序，且该投影是到 $\overline{2}\cdot\gamma$中的嵌入。由上可知， P 是良拟序这一事实因此可在 ACA_0中得到证明。

对于逆向蕴含，我们考虑一个如 (ii) 中的偏序 P的可计算表示。通过考虑另一种可计算描述，在等价元素中选取代码最小者，我们可以假设 ACA_0 证明 P是一个偏序（而不仅仅是一个拟序）。令 $C \subseteq P$ 按命题 3.1 的证明中的方式定义。稍后我们将证明， P与 $\sum_{p\in C} A(p)$ 同构，正如该证明中所述；但是，在 ACA_0 中可能无法获得这一事实（因为 ACA_0 可能不知道 (i) 成立）。然而，后者确实能识别出 C 是一个线性子序；当 P 是良拟序时，它必然是一个良序。根据根岑的序数分析（见 [26]中的定理 13.4），我们因而得到一个可计算嵌入 $f\colon C \to \gamma$，其中某个 $\gamma < \varepsilon_0$。

现在我们证明，不存在从 $1 \oplus 2$ 到 P的保序反映映射。如果存在这样的映射，ACA_0 凭借 Σ^0_1-完备性就能识别出来。鉴于 ACA_0证明了 P是良拟序，它也会证明 $1 \oplus 2$ 是良拟序，这与推论 2.7 相矛盾。由命题 3.1 和推论 3.2 的证明可知， P 同构于某个和 $\sum_{p\in C} A(p)$，其中反链 $A(p) \ni p$ 至多含有两个元素。利用上文的 $f\colon C \to \gamma$，我们得到一个嵌入 $g\colon \sum_{p\in C} A(p) \to \overline{2}\cdot\gamma$，其定义为：当 $p \in C$时，映射为 $g(p) = (f(p), 0)$；当 $q \in A(p)\backslash\{p\}$时，映射为 $g(q) = (f(p), 1)$（回忆一下，序 $\overline{2}\cdot\gamma$ 的底集为 $\gamma \times \overline{2}$）。 g 的像就是 (i) 所要求的可计算枚举子序。□

需要指出的是，定理 3.5 的陈述 (ii) 与关于可证明良序的经典刻画相类似。特别是，这些刻画也涉及选择一种恰当的表示，因为 $\mathbb{N}$ 上的通常序可以有一种非标准描述；除非某个强一致性陈述成立，否则这种描述看起来并非良序（例如，参见 [22, 第 2 节1] 中 G. Kreisel 对这一现象的观察）。相比之下，定理 3.5 的陈述 (i) 不像线性序的情形那样直接。这是因为 ε_0 的任意子序都同构于一个初始片段，因而也同构于一个可计算子序。从这个意义上说，可计算性是自动满足的，因此关于可证明良序的经典结果可以不必提及标准记号系统。对于 $\overline{2}\cdot\gamma$，当 γ 的分量被压缩到一个初始片段上时，来自 2 的分量可能编码不可计算的信息，因此从同样的意义上说，可计算性并非自动满足。为了得到一个不涉及选择序数记号的结果版本，可以考虑那些是 Δ^1_1 而非可计算的序。

4. Minimal bad arrays over weak base theories

Freund、Pakhomov 和 Sold`a 最近证明，不同版本的极小坏数组原理等价于 ATR_0 上的 Π^1_2-概括公理。本文证明，其中一个版本不能在 ACA_0 上推出 ATR_0。我们还证明，另一个版本在 RCA_0 上至少能推出 ACA_0。

根据引言， Q-数组是在障碍集 B 上的函数 $f\colon B \to Q$。这样的函数导出映射 $F\colon [\bigcup B]^\omega \to Q$，满足对所有 $B \ni t \sqsubset X$， $F(X) = f(t)$。显然，当且仅当对所有 $X \in [\bigcup B]^\omega$，都有 $F(X) \not\leq_Q F(X^-)$ 时， f 是坏的。注意， F 是连续的，意思是每个 $X \in [\bigcup B]^\omega$ 都有一个 $s \sqsubset X$，使得 F 在 $\{Y \in [\bigcup B]^\omega \mid s \sqsubset Y\}$ 上为常值。反过来，

任何满足此意义下连续条件的映射 $F\colon [V]^\omega \to Q$，只要具有 $V \in [\mathbb{N}]^\omega$，都可由定义在以 $\bigcup B_0 = V$ 为基的块上的函数 $f_0\colon B_0 \to Q$ 导出。这里 B_0 未必是障碍集。与此同时，根据 [1] 已知，理论 WKL_0 尽管相当弱，仍支持构造障碍集 B，使得 $\bigcup B \subseteq \bigcup B_0$，并且每个 $t \in B$ 都有一个 $s \in B_0$，满足 $s \sqsubseteq t$。由 $f\colon B \to Q$ 导出的连续映射（满足对所有 $B_0 \ni s \sqsubseteq t$，$f(t) = f_0(s)$）是我们最初映射 F 的一个限制。

下文假设，任何连续的 $F\colon [V]^\omega \to Q$ 且具有 $V \in [\mathbb{N}]^\omega$ 的对象，都是定义在诱导它的某个块上的函数。稍微宽泛地使用术语，我们也将这样的 F 称为 Q-数组。若对所有 $X \in [V]^\omega$，$F(X) \not\leq_Q F(X^-)$ 都成立，我们就称它是坏的。正如我们所见，理论 WKL_0 保证，Q 是良拟序，当且仅当不存在按此新意义定义的坏 Q-数组。在缺少 WKL_0,的情况下，我们坚持采用先前关于屏障上的数组的良拟序定义。现在我们引入一些将在极小坏数组原理中用到的概念。

定义 4.1（RCA_0）。拟序 Q 的一个部分秩是定义在 Q 上的良基偏序 $\leq'$，并且 $p \leq' q$ 蕴含 $p \leq_Q q$。给定这样的秩，若对于 $[V]^\omega \to Q$ 上的 Q-数组 F和 $[W]^\omega \to Q$ G，有 $V \subseteq W$并且对所有 $X \in [V]^\omega$，$F(X) \leq' G(X)$，我们就记作 $F \leq' G$。若对于所有这样的 X，甚至有 $F(X) <' G(X)$，则记作 $F <' G$。所谓 $\leq'$-极小坏 Q-数组，是指一个不包含任何坏 Q-数组 $F <' G$的坏 Q-数组 G。

注意，每个良基偏序都是自身的一个部分排序。我们考虑以下版本的极小坏数组原理，它们针对的是连续函数意义下的数组 $[V]^\omega \to Q$ with $V \in [\mathbb{N}]^\omega$。

> **(MBA)** 当 $\leq'$ 是拟序 Q的一个部分排序时，任意坏Q-数组 F_0 都包含一个 $\leq'$-极小坏 Q-数组 $F \leq' F_0$。**(MBA$^-$)** 对于每个不是良拟序的良基偏序 Q，都存在一个 $\leq_Q$-极小坏 Q-数组。

在 [4], 中，原理 MBA 被称为“辛普森版本的最小坏数组引理”。它的表述确实与辛普森 [23], 给出的版本一致，唯一不同的是，后者采用了更大的数组类别，即博雷尔可测数组，而非连续数组（见本文引言）。在 [4], 中，以下等价命题还包含了另一个版本的极小坏数组原理，该版本可追溯至纳什-威廉姆斯的工作，并由拉弗 [13]加以提炼。

定理 4.2（ATR_0；[4]）。MBA 和 MBA^- 分别等价于强的 Π^1_2-概括公理集合存在原理。

证明。对于 MBA，根据 [4]中的定理 1.3，该等价关系成立。为了得到剩余的等价关系，只需注意到，[4] 中推论 2.3 的证明只使用了 MBA^-，而不是 MBA。□

下文将证明，基础理论 ATR_0 在以下意义下是必要的：MBA^- 在 ACA_0上是弱的。我们先做一些准备。给定一个偏序 Q 和某个 $n \in \mathbb{N}$，令 $[Q]^{\leq n}$ 表示 Q 的所有非空子集组成的集合，其中每个子集至多含有 n 个元素。对于 a、$b \in [Q]^{\leq n}$，我们规定

$$a \prec b \quad \Leftrightarrow \quad \text{each } p \in a \text{ admits a } q \in b \text{ with } p <_Q q,$$

这定义了 $[Q]^{\leq n}$上的一个（严格）偏序 $\prec$。

引理 4.3. 对每个 $n \in \mathbb{N}$，理论 RCA_0 证明：只要 Q是良基偏序，关系 $\prec$ 在 $[Q]^{\leq n}$上就是良基的。

证明。我们对 n （RCA_0 之外）进行归纳。 $n = 0$ 的基例是显然的。在归纳步骤中，我们从假设 $a_0 \succ a_1 \succ \dots$ 在 $[Q]^{\leq n+1}$ 中无限下降推出矛盾。对每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $b_i \subseteq a_i$ 为满足 $b_i \succ a_{i+1}$ 的最小者。先假设存在一个无限的 $I \subseteq \mathbb{N}$，使得对所有 $i \in I$ 都有 $b_i \neq a_i$。对于 I 中的 $i < j$，我们得到 $b_j \preceq a_j \preceq a_{i+1} \prec b_i$。因此， b_i 在 $[Q]^{\leq n}$ 中构成一个无限下降序列，这与归纳假设矛盾。在剩下的情形中，我们可以假设对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $b_i = a_i$ （将原序列截去前面有限项后即可）。由此可知，每个 $q \in a_i$ 都有一个 $p \in a_{i+1}$ 满足 $p <_Q q$。如果这对 q 不成立，那么 $a_{i+1} \prec a_i$ 就会提升为 $a_{i+1} \prec a_i \backslash \{q\}$，这与 $b_i = a_i$ 的极小性矛盾。现在我们可以递归地选取 $q_i \in a_i$，使得 q_0、 q_1、.....在 Q 中构成一个无限下降序列。但已假定后者是良基的。□

以下结果对于证明 MBA^- 在 ACA_0 上是弱的将起到核心作用。它涉及一个根据推论 2.7 可知虽为假但与理论相容的假设。

命题 4.4（RCA_0）。如果 $1 \oplus 2$ 不是良拟序，则 MBA^- 成立。

证明。考虑一个非良拟序的良基偏序 Q。必定存在一个从 $1 \oplus 2$ 到 Q 的保序反映映射。否则，根据推论 3.2，我们可以将 $Q \cong \sum_{i \in I} A_i$ 写成一个线性序 I 和一族大小至多为二的反链 A_i。鉴于 Q 是良基的， I 也具有相同的性质。但根据命题 3.3 以及 2 是良拟序这一事实， Q 将是良拟序。

所谓坏三元组，是指 Q 的一个子集，它构成某个保序反映（因而特别是单射的）函数 $1 \oplus 2 \to Q$ 的值域。我们将坏三元组视为 $[Q]^{\leq 3}$ 中的元素，并赋予前一引理中的序 $\prec$；由于 Q 也具有良基性，因此该序是良基的。考虑一个 $\prec$-极小的坏三元组 $b \subseteq Q$。根据假设， $1 \oplus 2$ 不是更佳拟序，因此可得一个坏数组 G：$[W]^\omega \to Q$，其值域为 b。为反证法证明 MBA^-，假设对某个坏数组 F：$[V]^\omega \to Q$， $F <_Q G$ 成立。我们可以将 F 视为取值于该子序中的一个数组

$$Q_0 = \{p \in Q \mid p <_Q q \text{ for some } q \in b\}.$$

由于 F 证明了 Q_0 不是良拟序，因此后者必定包含一个坏三元组 a。但根据 Q_0的定义，我们有 $a \prec b$，这与 b的极小性相矛盾。□

现在我们来给出先前承诺的应用。如下述证明所示，将 ACA_0 替换为某个无法证明 $1 \oplus 2$ 是良拟序的其他理论后，结果依然成立；而算术超限递归则可以替换为可能更弱的命题： $1 \oplus 2$ 是良拟序。

推论 4.5。在理论 ACA_0 中，无法证明 MBA^- 蕴含算术超限递归（ATR_0）原理。

证明。令 T 为 ACA_0 加上命题「 $1 \oplus 2$ 不是良拟序」所得的扩展理论。根据推论 2.7，该理论是一致的。前面的命题告诉我们， T 可以证明 MBA^-。因此，若当前断言不成立，那么 T 就能证明算术超限递归。但根据闭开 Ramsey 定理（见 [16]），后者意味着 $1 \oplus 2$ 是良拟序。因此， T 将是不一致的。□

我们以如下结果作为对前一结果的补充。需要指出的是，我们不知道在 MBA⁻替换为 MBA 以及反过来替换时，这两个结果是否仍然成立。此外，我们不知道以下结论能否推广到算术理解之外。最后，我们指出，以下证明并未用到 MBA 的一项特定性质，即可以在给定坏数组之下找到一个极小坏数组。

命题 4.6 (RCA_0)。算术概括公理 (ACA_0) 可由 MBA 推出。

证明。给定一个线性序 α，我们用 ω^α 表示 α 中按字典序排列的有限弱递减序列所构成的集合。对于任意良序 α， ω^α 是良序这一原理，在 RCA_0,上等价于算术概括公理，正如 J.-Y. Girard [8] 和 J. Hirst [11]所证明的那样。

我们用 $\sigma = \langle \sigma_0, \ldots, \sigma_{l(\sigma)-1} \rangle$ 表示有限序列的长度及其各项。对于 $\sigma,\tau \in \omega^\alpha$，现在规定

$$\sigma \leq' \tau \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \langle \tau_i, \ldots, \tau_{l(\tau)-1} \rangle \text{ for some } i \leq l(\tau).$$

这给出了 ω^α上序的一种部分排序。为导出矛盾，我们假设 α是良序，而 $\sigma^0, \sigma^1, \ldots \subseteq \omega^\alpha$ 严格递减。我们通过规定得到一个坏数组 $F_0 \colon [\mathbb{N}]^\omega \to \omega^\alpha$ ：当 x 是 X 的最小元素时，令 $F_0(X) = \sigma^x$。

现在我们调用 MBA，得到一个 $\leq'$-极小坏数组 $G \colon [W]^\omega \to \omega^\alpha$。如上所述，后者由块上的函数 $g \colon B \to \omega^\alpha$ 表示，意即我们有 $G(X) = g(t)$，其中 $B \ni t \sqsubset X$。鉴于 G，因此 g 是坏的，对于任意满足 $s \lhd t$ 的 s、$t \in B$，我们有 $g(s) \not\leq g(t)$，其中 ω^α。特别地，每个序列 $g(s)$ 都非空。令 $g(s)_\star = \langle g(s)1, \ldots, g(s)_{l(g(s))-1} \rangle$ 表示从 $g(s)$ 中移除首项 $g(s)_0$ 后得到的序列。由 $s \lhd t$，我们得到 $g(s)_0 \geq g(t)_0$，其中 α；而对于 $g(s)_0 = g(t)_0$，我们得到 $g(s)_\star \not\leq g(t)_\star$，其中 ω^α。

与命题 3.3 的证明类似（不过现在我们处理的是块而非障碍集），每个 $s \in B$ 都会产生一个新的块 $B/s = \{t \in B \mid s_{l(s)-1} < t_0\}$。对于任意 $t \in B/s$，我们都能找到 $r^i \in B$，使得 $s = r^0 \lhd \ldots \lhd r^n = t$，因此上述论证得出不等式 $g(s)_0 \geq g(t)_0$，其中 α。由于后者是良基的，我们因而可以固定一个 $r \in B$，使得对于 $t \in B/r$， $g(t)_0 = g(r)_0$ 为常数。关键在于，我们找到了一个完美的 α-数组，而无需使用闭开 Ramsey 定理；这远远超出了 RCA_0 的能力范围。

对于刚刚固定的 $r \in B$，现在考虑函数 $f \colon B/r \to \omega^\alpha$，满足 $f(t) = g(t)_\star$。给定 s、$t \in B/r$，有 $g(s)_0 = g(r)_0 = g(t)_0$,，因此如上所示， $s \lhd t$蕴含在 ω^α 中 $f(s) = g(s)_\star \not\leq g(t)_\star = f(t)$。现在给定由 $F(X) = f(t)$ 定义的 $F \colon [V]^\omega \to \omega^\alpha$，其中 $V = \bigcup B/r$，对 $B/r \ni t \sqsubset X$ 成立。于是 F是一个坏数组。对于任意 $X \in [V]^\omega$，我们选取满足 $t \sqsubset X$ 的 $t \in B/r \subseteq B$，得到

$$F(X) = f(t) = g(t)_\star <' g(t) = G(X).$$

但这样一来，我们就有了 $F <' G$，这与 G 是极小的这一假设相矛盾。 □

References

1. Peter Cholak、Alberto Marcone 和 Reed Solomon, *Reverse mathematics and the equivalence of definitions for well and better quasi-orders* **69** 2004 3, , 《符号逻辑杂志》 () ，第 – 期。2. 683 712

Damir Dzhafarov 和 Carl Mummert, *Reverse mathematics. Problems、reductions and proofs* 2022 , 《可计算性理论与应用》，施普林格，瑞士沙姆，。

3. Anton Freund,
On the logical strength of the better quasi order with three elements, 《美国数学会汇刊》（即将发表），预印本见 arXiv:2206.11132，17页。 4. Anton Freund、Fedor Pakhomov 和 Giovanni Sold`a, *The logical strength of minimal badarrays*, 2023年，预印本见 arXiv:2304.00278，11页。 5. 哈维·弗里德曼,
Some systems of second order arithmetic and their use, 《1974年温哥华国际数学家大会论文集》（拉尔夫·邓肯·詹姆斯编），第1卷，加拿大数学大会，1975年，第235–242页。 6. 格哈德·根岑,
Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlenthe-orie, 《逻辑与精密科学基础研究》，新系列第4卷（1938年），第19–44页，英文译文见 [25]。 7. ,
Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie, 《数学年刊》119（1943年），第149–161页，英文译文见 [25]。 8. 让-伊夫·吉拉尔, *Proof theory and logical complexity, volume 1*, 《证明论研究》，Bibliopolis，那不勒斯，1987年。 9. Petr H´ajek 和 Pavel Pudl´ak, *Metamathematics of first-order arithmetic*, 《数学逻辑展望》，施普林格，柏林，1993年。 10. 丹尼斯·赫希菲尔特,
Slicing the truth. On the computable and reverse mathematics of com-binatorial principles,
《新加坡国立大学数学科学研究所讲义系列》，第28卷，世界科学出版社，哈肯萨克（新泽西州），2014年。 11. 杰弗里·L·赫斯特, *Reverse mathematics and ordinal exponentiation*, 《纯粹与应用逻辑年刊》66（1994年），第1–18页。 12. 理查德·拉弗,
On Fraïssé's order type conjecture **93** 1971 1, ,
89 111
《数学年刊》（ ），第 期，页码–。 13. , *Better-quasi-orderings and a class of trees*, 《逻辑与组合学基础研究》（吉安-卡洛·罗塔编），《数学进展与补充研究》第1卷，学术出版社，1978年，第31–48页。 14. Alberto Marcone, *Foundations of BQO theory*, 美国数学会汇刊345（1994年），第2期，第641–660页。 15. , *The set of better quasi orderings is* $\mathbf{\Pi}^1_2$, 《数学逻辑季刊》41（1995年），第3期，第373–383页。MR 1373122 16. ,
WQO and BQO theory in subsystems of second order arithmetic, 《逆向数学2001》（斯蒂芬·辛普森编），《逻辑讲义》第21卷，剑桥大学出版社，2005年，第303–330页。 17. ,
The reverse mathematics of wqos and bqos, 《计算、逻辑、语言与推理中的良拟序》（彼得·舒斯特、莫妮卡·塞森贝格和安德烈亚斯·魏尔曼编），《逻辑趋势》第53卷，施普林格，Cham，2020年，第189–219页。 18. Antonio Montalb´an, *Fraïssé's conjecture in* Π^1_1*-comprehension*, 《数学逻辑杂志》17（2017年），第2期，文章编号1750006。 19. 克里斯平·圣约翰·A·纳什-威廉姆斯,
On well-quasi-ordering infinite trees, 《剑桥哲学学会数学学报》61（1965年），第697–720页。 20. , *On better-quasi-ordering transfinite sequences*, 《剑桥哲学学会数学学报》64（1968年），第273–290页。 21. 扬·佩基尼奥, *Towards better: A motivated introduction to better-quasi-orders*, 《EMS 数学科学综述》4（2017年），第2期，第185–218页。 22. 迈克尔·拉特延,
The realm of ordinal analysis, 《集合与证明》（S·巴里·库珀和约翰·K·特拉斯编），剑桥大学出版社，1999年，第219–279页。 23. 斯蒂芬·辛普森, *Bqo theory and Fraïssé's conjecture*, R·曼斯菲尔德和G·魏特坎普所著《递归集合论的递归方面》一书中的章节，牛津大学出版社，1985年，第124–138页。 24. 斯蒂芬·G·辛普森, *Subsystems of second order arithmetic*, 《逻辑展望》，剑桥大学出版社，2009年。 25. M·E·萨博（编）, *The collected papers of Gerhard Gentzen*, 《逻辑与数学基础研究》第55卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1969年。 26. 竹内外史, *Proof theory*, 第2版，《逻辑与数学基础研究》第81卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1987年。

Anton Freund, University of Würzburg, Institute of Mathematics, Emil-Fischer-Strasse 40, 97074 Würzburg, Germany*Email address*: anton.freund@uni-wuerzburg.deAlberto Marcone, Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche, Uni-versità di Udine, Via delle Scienze, 208 – Loc. Rizzi, 33100 Udine, Italy*Email address*: alberto.marcone@uniud.it

Fedor Pakhomov and Giovanni Soldà, Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics, Ghent University, Krijgslaan 281 S8, 9000 Ghent, Belgium *Email address*: fedor.pakhomov@ugent.be, giovanni.a.solda@gmail.com