arXiv:2305.01093v1 [math.DG] 1 May 2023

三维空间形式中具有常外蕴曲率的稳定自由边界曲面

Leonardo Damasceno* Maria Fernanda Elbert†

2023年5月3日

摘要

本文利用具有常高阶平均曲率的自由边界曲面的稳定性概念，获得了单连通三维空间形式中测地球或 $\mathbb{R}^3$的薄层内具有自由边界的 H_2-曲面的刚性结果。

1 引言

曲面的外蕴曲率 H_2 是其主曲率的乘积。根据高斯方程，当浸入曲率等于 $c \in \mathbb{R}$ 的三维流形时，内蕴曲率 K 与外蕴曲率通过 $H_2 = K - c$相关联。特别是，当环境空间是三维欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 时，这两个概念一致。

过去四十年来，数学家一直在研究常平均曲率曲面的稳定性概念。众所周知，极小超曲面可视为体积泛函的临界点，而常平均曲率（CMC）超曲面也可以用变分的方式描述。它们是保持体积的变分下的面积泛函临界点。因此，稳定性意味着对于这类变分，它们的面积达到最小值。

给定黎曼流形 M 中的区域 Ω，若超曲面 $\Sigma \subseteq \Omega$ 的边界 $\partial\Sigma$ 包含于 $\partial\Omega$ 中，且其边界与 $\partial\Omega$ 正交相交，则称其具有自由边界。在一个

*Instituto de Matem´atica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, CP 68530, CEP 21941-909,里约热内卢，巴西。电子邮箱：damasceno@im.ufrj.br

†数学研究所，Universidade Federal do Rio de Janeiro，CP 68530，CEP 21941-909，里约热内卢，巴西。电子邮箱：fernanda@im.ufrj.br 关键词：等距浸入，自由边界，毛细，高阶平均曲率 2000年数学主题分类：53C42，53A10。作者得到CAPES的部分资助。

在更一般的情形中，当接触角沿交线保持恒定时，这样的子流形称为毛细子流形。支撑在 $\partial\Omega$上的极小或常平均曲率毛细超曲面也可以视为体积泛函的临界点，但在这种情况下，只考虑使边界保持在支撑超曲面上的变分。对于环境空间维数等于 3 [13–15, 17]的情形，已有许多结果得到证明。

在考虑高阶平均曲率时，稳定性的概念并非源自变分框架。尽管如此，对于闭超曲面（固定有界变分），第二作者和 Barbara Nelli 通过使用相应偏微分方程的线性化（见 [7]），提出了此类超曲面的稳定性概念；在 [5], 中，第一作者和第二作者为自由边界情形和毛细情形提出了稳定性概念）。

本文的主要目标是证明以下结果:

定理 1.1. 设 Σ^2 是一个闭圆盘，φ: $\Sigma \to \Omega \subseteq \mathbb{M}^3(c)$ 是 H_2-曲面，在 $\partial\Omega$ 和 $H_2 > 0$ 中具有自由边界。那么 $\varphi(\Sigma)$ 是全脐的。

定理 1.2. 设 $\varphi : \Sigma^2 \to B_R \subseteq \mathbb{M}^3(c)$ 是一个位于半径为 $R > 0$ 的测地球 B_R 中、具有自由边界的稳定 H_2-曲面。若 $c > 0$ 假设该曲面包含于一个半球内，并且若 $c < 0$假设 $A(\Sigma)\,\ell(\partial\Sigma) \overset{>}{-} \mathrm{cn}_c(R)\,c\,\mathrm{sn}_c(R)$，~~其中~~

$$\mathrm{sn}_c(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\rho\sqrt{c}\right)}{\sqrt{c}}, & \text{if } c > 0 \\ \rho, & \text{if } c = 0 \\ \dfrac{\sinh\left(\rho\sqrt{-c}\right)}{\sqrt{-c}}, & \text{if } c < 0 \end{cases} \tag{1}$$

以及 $\mathrm{cn}_c(\rho) = \mathrm{sn}_c'(\rho)$。那么 $\varphi(\Sigma)$ 是全脐的。

定理 1.3. 设 $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ 是一个紧致稳定的 H_2-曲面，其自由边界位于由两个平行平面 Π_1 和 Π_2 围成的薄层中，且其亏格等于 0，并且 $H_2 > 0$。那么 $\varphi(\Sigma)$ 是一个绕着与 Π_1正交的轴旋转的旋转曲面。

第一个是对 [12, 定理 1] 在 $c = 0$ 时以及 [17, 定理 4.1] 在 $c \neq 0$时的推广。第二个定理是对 [17, 定理 5.1] 的扩展，而第三个是对 [1, 定理 3.1]的扩展。本文安排如下：第 2 节用于确定全文后续部分所用的记号和概念，第 3、4、5 节则分别用于证明定理 1.1、1.2 和 1.3。

2 预备知识

设 $\left(M^3、\ g\right)$ 为一个定向黎曼流形，φ: $\Sigma^2 \to M$ 为一个具有单位法向量场 η 的定向曲面，其法丛为 $\Gamma(N\Sigma)$。其第二基本形式 II，标量

第二基本形式 第二基本形式 II_η 和 Weingarten 算子 $A=(\mathrm{II}_\eta)^\flat$ 分别定义为： a s

$$\begin{aligned} II(X,Y) &= \left(\overline{\nabla}_X Y\right)^\perp = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, \eta\right\rangle \eta = II_\eta(X,Y)\,\eta \\ \langle A(X), Y\rangle &= II_\eta(X,Y) = \left\langle -\overline{\nabla}_X \eta, Y\right\rangle, \end{aligned}$$

其中， X、$Y\in\Gamma(T\Sigma)$ 和 $\overline{\nabla}$ 分别表示 M的列维-奇维塔联络。设 $\kappa_1(p)$ 、 $\geq\kappa_2(p)$ 为曲面 φ 在 p处的主曲率。1-平均曲率 H_1 是 κ_1 和 κ_2 的算术平均值，而 2-平均曲率则由它们的乘积 $H_2=\kappa_1\kappa_2$给出。如果 H_r 在整个 Σ上为常数，则称该曲面具有 $r\in\{1,2\}$ 阶常平均曲率；此时， Σ 称为一个 H_r-曲面。

第一牛顿变换 P_1 由 $P_1=2H_1I-A$定义。由于对于所有$p\in\Sigma$， A_p 都是自伴的，因此牛顿变换也是自伴的，并且它们的特征向量与 A的特征向量相同。如果 $\{e_1,e_2\}$ 表示 A 的特征向量，那么与 e_i 相关联的特征值等于$S_1(A_i)=2H_1-\kappa_i$。此外，我们有以下恒等式：

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} P_1 &= 2H_1 && (2)\\ \operatorname{tr} P_1 A &= 2H_2 && (3)\\ \operatorname{tr} P_1 A^2 &= 2H_1H_2. && (4) \end{aligned}$$

在一般的黎曼流形（M， g）中，若带有列维-奇维塔联络 $\overline{\nabla}$，且 ϕ 是 M上的逐点对称（2，0）-张量，则 $f\in C^\infty(M)$的程-丘算子定义为

$$\Box f=\operatorname{tr}\left(\phi\left(\operatorname{Hess} f\right)^\flat\right)=\operatorname{div}\left(\phi\overline{\nabla}f\right)-\left\langle\operatorname{div}\phi,\overline{\nabla}f\right\rangle,$$

其中，Hess f表示 M中 f的海森张量，(Hess f)$^\flat$是 M上与 Hess f等价的度量（1，1）-张量场，而 div $\phi:=\operatorname{tr}(\overline{\nabla}\phi)$。若算子 ϕ 满足 div $\phi=0$，则称其散度为零。

考虑一个定向曲面 φ： $\Sigma^2\to M^3$，其形算子为 $A\in\Gamma(\mathrm{End}(T\Sigma))$，则 L_1-算子 Σ 定义为牛顿变换 P_1 的程-丘算子，即

$$L_1 f=\operatorname{tr}\left(P_1\left(\operatorname{Hess} f\right)^\flat\right),\quad f\in C^\infty(\Sigma).$$

这里，当 P_1 在 Σ的每一点上均为正定时，我们称 $-L_1$ 为二阶椭圆微分算子。若 $H_2>0$，则在对 φ选择定向后， P_1 为正定。 [6, 引理 3.10]。在 [16, 定理 4.1], 中，H. Rosenberg 证明了：当 M 具有常截面曲率时， P_1 散度为零（对于 $r=1$ 且 M 为爱因斯坦的情形，另见 [6, 推论 3.7] ）。

设 $\Omega\subseteq M$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的闭区域，并假设 $\varphi:\Sigma\to M$ 是一个定向曲面，使得 $\varphi(\Sigma)\subseteq\Omega$ 且 $\varphi(\partial\Sigma)\subseteq\partial\Omega$。设 $\nu\in\Gamma(T\Sigma|_{\partial\Sigma})$ 为 $\partial\Sigma$ 上的单位外余法向量场，设 $\overline{\nu}\in\Gamma(T\partial\Omega|_{\partial\Sigma})$ 和 $\overline{\eta}\in\Gamma(TM|_{\partial\Omega})$ 分别为与浸入 $\varphi|_{\partial\Sigma}$：$\partial\Sigma\to\partial\Omega$ 和 $\iota_{\partial\Omega}$：$\partial\Omega\hookrightarrow M$ 相关联的单位法向量场，使得 $\{\nu,\eta\}$

在 $\{\overline{\nu},\overline{\eta}\}$ 的每个点上具有与 $\varphi(\partial\Sigma)$ 相同的定向。如果 θ 表示 ν 与 $\overline{\nu}$ 之间的夹角，那么

$$\begin{cases}\nu=\cos\theta\,\overline{\nu}+\sin\theta\,\overline{\eta}\\ \eta=-\sin\theta\,\overline{\nu}+\cos\theta\,\overline{\eta}\end{cases},\quad \text{or conversely,}\quad \begin{cases}\overline{\nu}=\cos\theta\,\nu-\sin\theta\,\eta\\ \overline{\eta}=\sin\theta\,\nu+\cos\theta\,\eta\end{cases}. \tag{5}$$

若 H_r-曲面 $\varphi:\ \Sigma\to\Omega\subseteq M$ 的接触角 θ（$\partial\Sigma$ 与 $\partial\Omega$ 之间）为常数，则称其为毛细曲面。当 $\theta=\frac{\pi}{2}$、φ 时，称其为自由边界曲面。当 $\varphi:\ \Sigma\to\Omega\subseteq M$ 是 Ω 中具有自由边界的曲面时，(5) 蕴含 $\nu=\overline{\eta}$ 和 $\eta=-\overline{\nu}$。

下述结果将在本文中始终使用。

引理 2.1（[1, 引理 2.2]）。设 $\iota_{\partial\Omega}$ 是到 M 中的全脐浸入，且 φ 是到 M 中的毛细浸入。那么，单位外法向量场 $\nu\in\Gamma\left(T\Sigma|_{\partial\Sigma}\right)$ 是 φ 的主方向。

φ 的一个变分是一个光滑函数 $\Phi:\ \Sigma^2\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to M^3$，满足对于每个 $t\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$，$\varphi_t=\Phi|_{\Sigma\times\{t\}}$ 是一个等距浸入，且 $\varphi_0=\varphi$。记这对 (Σ,φ_t^*g) 为 Σ_t。Φ 在 φ_t 中的变分场定义为

$$\xi_t(p)=\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(p,t)}\in\Gamma\left(TM|_{\varphi_t(\Sigma)}\right).$$

如果 $\eta_t\in\Gamma(N\Sigma)$ 是 φ_t 的单位法向量场，则 Φ 在 t 处的支撑函数定义为

$$f_t=\langle\xi_t,\eta_t\rangle\in C^\infty(\Sigma).$$

由于 $\varphi_t:\ \Sigma\to M$ 是一个定向曲面，可以定义它的第二基本形式 II_t、标量第二基本形式 $(\mathrm{II}_t)_{\eta_t}$ 以及它的 Weingarten 算子 A_t。此外，令 $\overline{R}_{\eta_t}(X):=\overline{R}(\eta_t,X)\,\eta_t$，其中 $\overline{R}$ 是由以下定义的 M 的黎曼曲率张量。

$$\overline{R}(X,Y)Z=\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_XZ-\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_YZ+\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z,\quad X,Y,Z\in\Gamma(TM).$$

如果 $H_2(t)$ 表示与浸入 φ_t 相关的 2-平均曲率，则其变分为

$$H_2'(t)=(L_1)_t\,f_t+2H_1(t)H_2(t)f_t+\mathrm{tr}_{\Sigma_t}\left(\left(P_1\overline{R}_\eta\right)_t\right)f_t+\xi_t^\top\left(H_2(t)\right), \tag{6}$$

其中 $(L_1)_t$ 是浸入 φ_t 的 L_1-算子，且 $\left(P_1\overline{R}_\eta\right)_t:=(P_1)_t\circ\overline{R}_{\eta_t}$。(6) 的证明可参见 [6,命题 3.2]。

Σ 与 Σ_t 之间的围成体积定义为 $\mathcal{V}(t)=\int_{\Sigma\times[0,t]}\Phi^*d\mu_M$，其中 $d\mu_M$ 是(M,g)的体积形式。若对所有 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$\mathcal{V}(t)=\mathcal{V}(0)$，则变分 Φ 是保体积的。已知

$$\mathcal{V}'(0)=\int_\Sigma f\,d\mu_\Sigma,$$

其中 $u = \langle \xi、\ \eta \rangle \in C^\infty(\Sigma)$，且 $d\mu_\Sigma$ 是$(\Sigma, \varphi^* g)$的体积形式。因此，变分 Φ 是保体积的，当且仅当 $\int_\Sigma f\, d\mu_\Sigma = 0$。

若在每个点 $p \in \Sigma$ 上，P_1 都是正定的，则 H_2-曲面 $\varphi : \Sigma \to M$ 是正定的。曲面 φ: $\Sigma \to \Omega$ 的变分 Φ 称为可容许的，若对任意 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，都有 $\varphi_t(\operatorname{int}\Sigma) \subseteq \operatorname{int}\Omega$ 且 $\varphi_t(\partial\Sigma) \subseteq \partial\Omega$，其中 $\varphi_t = \Phi|_{\Sigma\times\{t\}}$。若 Φ 是 φ 的可容许变分，则 $\xi|_{\partial\Sigma} \in \Gamma(T\partial\Omega|_{\partial\Sigma})$。若 Σ 是支撑于 $\partial\Omega$ 中、接触角为 $\theta \in (0, \pi)$ 的毛细 H_2-曲面，且 Φ 是 φ 的保体积可容许变分，考虑定义于 [5], 的泛函

$$\mathcal{F}_{1,\theta}[\Sigma_t] = -\int_\Sigma H_2(t)\, \langle \xi_t, \eta_t \rangle\, d\mu_{\Sigma_t} + \int_{\partial\Sigma} \langle \xi_t, (P_1\nu - |P_1\nu| \cos\theta\, \overline{\nu})_t \rangle\, d\mu_{\partial\Sigma_t}, \tag{7}$$

其中 $d\mu_{\Sigma_t}$ 和 $d\mu_{\partial\Sigma_t}$ 分别表示 Σ_t 与 $\partial\Sigma_t = (\partial\Sigma, (\varphi_t|_{\partial\Sigma})^*\, g)$ 的体积形式。若 $\partial\Omega$ 是全脐的，且 Φ 是 φ 的保体积可容许变分，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_{1,\theta}\left[\Sigma_t\right]\Big|_{t=0} = &-\int_\Sigma f\left(L_1 f + \operatorname{tr}\left(P_1\left(A^2 + \overline{R}_\eta\right)\right) f\right) d\mu_\Sigma + \\ &+ \int_{\partial\Sigma} |P_1\nu|\, f\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} + \left(\csc\theta\, (II_{\partial\Omega})_{\overline{\eta}}(\overline{\nu}, \overline{\nu}) - \cot\theta\, (II_\Sigma)_\eta(\nu, \nu)\right) f\right) d\mu_{\partial\Sigma},\end{aligned} \tag{8}$$

其中，$f = \langle \xi, \eta \rangle \in C^\infty(\Sigma)$ 是 Φ 在 $t = 0$ 处的支撑函数，II_Σ 和 $\mathrm{II}_{\partial\Omega}$ 分别是 $\varphi : \Sigma \to \Omega$ 与 $\iota_{\partial\Omega} : \partial\Omega \hookrightarrow \Omega$ 的第二基本形式。证明见 [5, 附录 A]。若正定毛细 H_2-曲面 $\varphi : \Sigma \to \Omega \subseteq M$ 支撑于 $\partial\Omega$，且接触角为$\theta \in (0, \pi)$，则称其为 r-稳定的，如果对 φ 的任意保体积容许变分 Φ，都有 $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_{1,\,\theta}\left[\Sigma_t\right]\Big|_{t=0} \geq 0$。若该不等式对 φ 的所有容许变分均成立，则称 Σ 为强 r-稳定。表达式 (8) 与下述特征值问题相关:

$$\begin{cases} T_1 f = -L_1 f - q_r f = \lambda f, & \text{in } \Sigma \\ \dfrac{\partial f}{\partial \nu} + \alpha_\theta f = 0, & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}, \tag{9}$$

其中，$q_r = \operatorname{tr}\left(P_1\left(A^2 + \overline{R}_\eta\right)\right) \in C^\infty(\Sigma)$ 以及 $\alpha_\theta = \csc\theta\, (\mathrm{II}_{\partial\Omega})_{\overline{\eta}}(\overline{\nu}, \overline{\nu}) - \cot\theta\, (\mathrm{II}_\Sigma)_\eta(\nu, \nu) \in C^\infty(\partial\Sigma)$。有关其主特征值的性质，见 [5, 命题 3.4]。当 P_1 为负定时，也可考虑 1-稳定性的概念，见 [5, 注 3.5]。

令 $\mathbb{M}^3(c)$ 为常截面曲率为 c 的单连通空间形式，即，当 $c = 0$ 时，$\mathbb{M}^3(c)$ 等于 $\mathbb{R}^3$；当 $c > 0$ 时，等于 $\mathbb{S}^3(c)$；当 $c = 0$ 时，等于 $\mathbb{H}^3(c)$。本文考虑 $\mathbb{M}^3(c)$ 的以下模型:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &= \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\right\} \\ \mathbb{S}^3(c) &= \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{c^2}\right\}\end{aligned}$$

$$\mathbb{H}^3(c) \;=\; \left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4_1 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=-\frac{1}{c^2}, x_4>0\right\}$$

其中 $c\geq 0$ 配备欧几里得度量的拉回，或 $c<0$ 配备闵可夫斯基度量的拉回。当 $M=\mathbb{M}^3(c)$ 时，对于所有 $X\in\Gamma(T\mathbb{M}^3(c))$，有 $\overline{R}_\eta(X)=cX$，且 div $P_1=0$（见 [16, 定理 4.1]）。因此，(8) 可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_{1,\theta}\left[\Sigma_t\right]\Big|_{t=0}=\int_\Sigma \langle P_1\nabla f,\nabla f\rangle-2H_1\left(H_2+c\right)f^2\,d\mu_\Sigma+\int_{\partial\Sigma}|P_1\nu|\,\alpha_\theta f^2\,d\mu_{\partial\Sigma}. \tag{10}$$

方程（10）可以看作是希尔伯特空间 $H^1(\Sigma)$ 上一个对称双线性型所对应的二次型，其中该空间是关于索博列夫范数的 $C^\infty(\Sigma)$ 的闭包。

$$\|\cdot\|^2_{H^1(\Sigma)}=\|\cdot\|^2_{L^2(\Sigma)}+\|\nabla\cdot\|^2_{L^2(\Sigma)}.$$

φ 的 1-指标型：$\Sigma\to\Omega\subseteq\mathbb{M}^3(c)$ 是

$$\mathcal{I}_{1,\theta}(f_1,f_2)=\int_\Sigma \langle P_1\nabla f_1,\nabla f_2\rangle-2H_1\left(H_2+c\right)f_1f_2\,d\mu_\Sigma+\int_{\partial\Sigma}|P_1\nu|\,\alpha_\theta f_1f_2\,d\mu_{\partial\Sigma}, \tag{11}$$

其中 $f_1,f_2\in H^1(\Sigma)$。Σ 是强1稳定的，当且仅当对所有 $f\in H^1(\Sigma)$，$\mathcal{I}_{1,\theta}(f,f)\geq 0$；若对所有 $f\in\mathcal{F}=\left\{f\in H^1(\Sigma)\mid\int_\Sigma f\,d\mu_\Sigma=0\right\}$，$\mathcal{I}_{1,\theta}(f,f)\geq 0$，则称其为1稳定。可以证明，支撑于 $\mathbb{M}^3(c)$ 的连通全脐曲面上的全脐毛细紧致曲面是1稳定的，见命题 4.2]。

与 $r=0$ 情形一样，在考虑 φ 毛细（$r+1$）极小曲面，即 $H_2=0$ 时，我们称 φ 为 1稳定，如果对所有 $f\in C_0^\infty(\Sigma)$，均有 $\mathcal{I}_{1,\theta}(f,f)\geq 0$。这意味着不再要求变分是保体积的。

如果 $f\in\mathcal{F}$，则 $\xi=f\eta$在 Σ上的法向量场是一个雅可比场，当且仅当 $f\in\ker\mathcal{I}_{1,\theta}|_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}}$，即 $\mathcal{I}_{1,\theta}(f,g)=0$对每个 $g\in\mathcal{F}$都成立。下一个引理的证明见 [5, 引理 4.4]，，它给出了 Σ上雅可比场的一个刻画。

引理 2.2. 设 $\varphi:\Sigma\to\Omega\subseteq\mathbb{M}^3(c)$ 是位于 $\partial\Omega$ 中且满足 $f\in\mathcal{F}$ 的正定 H_2-曲面，并具有自由边界。则

i) $\xi=f\eta$ 是 Σ 上的雅可比场，当且仅当 $f\in C^\infty(\Sigma)$且

$$\begin{cases} T_1f=\text{constant} & \text{in } \Sigma \\ \dfrac{\partial f}{\partial\nu}+\alpha_\theta f=0 & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}. \tag{12}$$

ii) 如果 φ是 r-稳定的，且 $\mathcal{I}_{1,\theta}(f,f)=0$，那么 f是 Σ上的雅可比场。

3 定理1.1的证明

定理 1.1 的灵感来自 J. Nitsche 在 [12] 中证明的类似版本（当 $c = 0$ 时），以及 R. Souam 在 [17, 定理 4.1] 中证明的类似版本（当 $c \neq 0$时）；二者都讨论了在 $\mathbb{M}^3(c)$中将圆盘浸入球内的常平均曲率浸入。这里，我们考虑将圆盘浸入紧致凸光滑体 Ω。为了证明这一结果，需要用到 R. Bryant 证明的以下定理。

定理 A [3, 定理 3]: 设 $\varphi\colon \Sigma^2 \to \mathbb{M}^3(c)$ 是一个满足如下形式的魏因加滕方程 $H_1 = f(H_1^2 - H_2)$ 的光滑浸入，其中 $f \in C^\infty((-\varepsilon, \infty); \mathbb{R})$ 且 $\varepsilon > 0$。那么，φ 是全脐的；否则，脐点集完全由指标严格为负的孤立点组成。

关于指标的定义，见 [10, 第 107] 页。由带边流形的庞加莱-霍普夫定理 [11, （第 35], 页）可直接推出霍普夫定理的边界版本：

定理 B（霍普夫定理的边界版本）设 Σ^2 是一个紧致带边流形$\partial\Sigma$，其脐点集 $\mathcal{U}$ 是有限的。假设其中一个主方向与 $\partial\Sigma$横截。那么

$$\sum_{p\in\mathcal{U}} i(p) = \chi(\Sigma),$$

其中 $i(p)$ 是 $p \in \mathcal{U}$ 的指标。

定理 1.1 的证明。由于 $\varphi\colon \Sigma^2 \to \mathbb{M}^3(c)$ 是一个 H_2曲面，其平均曲率满足一个温加滕方程 $H_1 = f(H_1^2 - H_2)$，其中 $f(y) = \sqrt{y + H_2}$且 $y \in (-H_2, +\infty)$。若 φ不是全脐的，则根据定理 A，φ 的脐点构成一个有限集 $\mathcal{U} \subseteq \Sigma$，且每个脐点的指标均为负。由于沿着 $\partial\Sigma$，ν 是一个主方向，因此可应用定理 B 得到

$$0 > \sum_{p\in\mathcal{U}} i(p) = \chi(\Sigma) = 1,$$

这就产生了矛盾。因此，Σ 是全脐的。 □

备注 3.1。若 Σ 是常平均曲率曲面，同样的论证仍然成立，因为定理 A 在此情形下依然成立（取 f 为常函数）。

4 定理 1.2 的证明

本节将证明定理 1.2。对于所有 $R \in (0, R_c)$，测地球 B_R 都是凸的，其中当 $c \leq 0$ 时 $R_c = +\infty$，当 $c > 0$ 时 $R_c = \dfrac{\pi}{2\sqrt{c}}$。其边界 ∂B_R 是一个全脐球面，其相对于内向单位法向量的平均曲率等于 $\mathrm{cn}_c(R)/\mathrm{sn}_c(R)$。

需要陈述一些将在整个证明过程中用到的恒等式。

引理 4.1. 设 $\varphi : \Sigma^2 \to \mathbb{M}^3(c)$ 是一个曲面。那么

$$L_1\varphi = 2H_2\eta - 2cH_1\varphi \tag{13}$$
$$L_1\eta = -\operatorname{tr}\left(P_1 A^2\right)\eta + 2cH_2\varphi - \nabla H_2, \tag{14}$$

这里 $L_1\varphi$ 和 $L_1\eta$ 是按坐标分别计算的。

关于（13）和（14）的证明，请参见 [16, 注 5。1]
下面的引理对于定理 1.2 的证明也起着关键作用。

引理 4.2. 假设 $\varphi : \Sigma \to \Omega \subseteq M$ 是一个曲面，满足 $H_2 > 0$，且令 $u \in C^\infty(\Sigma)\backslash\{0\}$ 是一个满足 $T_1 u = 0$ 的函数。那么，其节点集 $\Gamma = u^{-1}(\{0\})$ 是一个有限图，其顶点为 u 的临界点。在每个临界点 Γ 的邻域内，都有一个由至少两个分支组成的星形。

证明。令 $p \in \Sigma$，并取 $\varphi : U_p \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ 在 p 处的 Σ 参数化，其局部坐标为（u, v）。由于 L_1 是仅含主部的二阶椭圆微分算子，根据 [8, 第 3] 章中的偏微分方程理论，存在一个坐标变换

$$\overline{u} = h_1(u, v), \quad \overline{v} = h_2(u, v)$$

属于 C^2 类，定义在 $p_0 = \varphi^{-1}(p)$ 的某个邻域内，其雅可比行列式在 p_0 处不为零，并且将 L_1 的拉回变换为拉普拉斯算子中的项。必要时限制 U_p 后，我们可以假设 $(\overline{u}, \overline{v})$ 是 U_p上的微分同胚。因此，在新坐标 $(\overline{u}, \overline{v})$ 下，L_1 是拉普拉斯算子，而 [4, 定理 2.5] 表明，其在 U_p 中的节点线相交于临界点。由于 Σ 是紧的，我们可以用有限多个这样的开邻域 U_p覆盖Σ，从而证明该结论。 □

定理 1.2 的证明。该证明是对 [15, 定理 11]中证明的推广。根据 [14, 引理 1.1],$(\mathrm{II}_{\partial B})_{\overline{\nu}}(\overline{\nu}, \overline{\nu}) = -\operatorname{cn}_c(R)\operatorname{sn}_c(R)$, $\partial\Sigma$在 Σ中的曲率等于 $\operatorname{cn}^c(R)\operatorname{sn}_c(R)$。因此，高斯-博内定理表明

$$2\pi\chi(\Sigma) = \int_\Sigma K\, d\mu_\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \kappa_g\, d\mu_{\partial\Sigma} = \int_\Sigma H_2 + c\, d\mu_\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \kappa_g\, d\mu_{\partial\Sigma} > cA(\Sigma) + \frac{\operatorname{cn}_c(R)}{\operatorname{sn}_c(R)}\ell(\partial\Sigma).$$

在上述三种情形中，不等式均表明 Σ 的亏格等于零。

现在考虑 $c = 0$ 的情形，并且不失一般性地假设 B_R 是以 $\mathbb{R}^3$ 的原点为中心的单位球。设 $p_0 \in \Sigma$ 为函数 $p \in \Sigma \mapsto |\varphi(p)|$ 取得其最小值的点，并定义函数

$$f(p) = \langle \varphi(p) \wedge \eta(p_0), \eta(p) \rangle, \quad p \in \Sigma, \tag{15}$$

其中 $\wedge$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的叉积。显然，$f(p_0) = 0$，且对所有 $\mathbf{v} \in T\Sigma$,

$$\langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}\langle \varphi \wedge \eta(p_0), \eta \rangle = \langle \mathbf{v} \wedge \eta(p_0), \eta \rangle + \left\langle \varphi \wedge \eta(p_0), \overline{\nabla}_{\mathbf{v}}\eta \right\rangle = \left\langle \eta(p_0) \wedge \eta - A\left(\varphi \wedge \eta(p_0)\right)^\top, \mathbf{v} \right\rangle.$$

因此， $\nabla f = \eta(p_0) \wedge \eta - A(\varphi \wedge \eta(p_0))^\top$，其中 $^\top$ 表示到 $T\Sigma$ 的投影。由于 $|\varphi|$ 在 p_0 处取得其最小值，我们有 $\varphi(p_0) \parallel \eta(p_0)$，因此 $\nabla f(p_0) = 0$。此外，我们有

$$\begin{aligned} L_1 f &= L_1 \langle \varphi \wedge \eta(p_0), \eta \rangle = L_1 \langle \eta \wedge \varphi, \eta(p_0) \rangle \\ &= L_1 \left\langle \left(\eta^2\varphi^3 - \eta^3\varphi^2, \eta^3\varphi^1 - \eta^1\varphi^3, \eta^1\varphi^2 - \eta^2\varphi^1\right), \eta(p_0) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(L_1\left(\eta^2\varphi^3 - \eta^3\varphi^2\right), L_1\left(\eta^3\varphi^1 - \eta^1\varphi^3\right), L_1\left(\eta^1\varphi^2 - \eta^2\varphi^1\right)\right), \eta(p_0) \right\rangle, \end{aligned}$$

其中 $\varphi^i = \langle \varphi、 \mathsf{e}_i \rangle$、 $\eta^i = \langle \eta、 \mathsf{e}_i \rangle$、 $i \in \{1,2,3\}$ 以及向量 $\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的标准基。利用 (13) 和 (14)，对于 i、 $j \in \{1,2,3\}$,

$$\begin{aligned} L_1\left(\eta^i\varphi^j\right) &= \varphi^j L_1\eta^i + \eta^i L_1\varphi^j + 2\left\langle P_1\nabla\eta^i, \nabla\varphi^j \right\rangle \\ &= -2H_1H_2\eta^i\varphi^j + 2H_2\eta^i\eta^j - 2\left\langle P_1 A\mathbf{e}_i^\top, \mathbf{e}_j^\top \right\rangle \\ L_1\left(\eta^i\varphi^j - \eta^j\varphi^i\right) &= -2H_1H_2\left(\eta^i\varphi^j - \eta^j\varphi^i\right). \end{aligned}$$

因此， $L_1 f + 2H_1H_2 f = 0$ 在 Σ上。此外，由于 $\varphi = \nu$ 在 $\partial\Sigma$上，引理 2.1 表明，在 $\partial\Sigma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \nu} &= \langle \nabla f, \nu \rangle = \left\langle \eta(p_0) \wedge \eta - A(\varphi \wedge \eta(p_0))^\top, \nu \right\rangle \\ &= \langle \nu \wedge \eta(p_0), \eta \rangle - \langle \nu \wedge \eta(p_0), A\nu \rangle \\ &= f - |A\nu| \langle \nu \wedge \eta(p_0), \nu \rangle = f. \end{aligned}$$

因此，函数 f 满足

$$\begin{cases} L_1 f + 2H_1H_2 f = 0 & \text{in } \Sigma \\ \dfrac{\partial f}{\partial \nu} - f = 0 & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}. \tag{16}$$

我们断言 $f \equiv 0$ 位于 Σ上。否则，根据引理 4.2，节点集 $f^{-1}(\{0\})$的线交于 f的临界点。对 $\Sigma \backslash \beta^{-1}(\{0\})$的每个连通分支 Σ_i应用高斯-博内定理，我们得到

$$\int_{\Sigma_i} K \, d\mu_\Sigma = 2\pi\chi(\Sigma_i) - \int_{\partial\Sigma_i} \kappa_g \, d\mu_{\partial\Sigma} - \sum_j \theta_{ij}, \tag{17}$$

其中， θ_{ij}、 $j \in \{1, ..., j_i\}$ 表示 Σ_i的外角。对所有 i将（17）式求和，得到

$$\begin{aligned} \int_\Sigma K \, d\mu_\Sigma &= \sum_i \int_{\Sigma_i} K \, d\mu_\Sigma = \sum_i \left(2\pi\chi(\Sigma_i) - \int_{\partial\Sigma_i} \kappa_g \, d\mu_{\partial\Sigma} - \sum_j \theta_{ij} \right) \\ &= 2\pi \sum_i \chi(\Sigma_i) - \int_{\partial\Sigma} \kappa_g \, d\mu_{\partial\Sigma} - \sum_l \theta_l, \end{aligned} \tag{18}$$

其中最后一项表示每个连通分支 Σ_i 的所有外角之和。由于$\partial\Sigma$ 光滑，再次由高斯-博内定理可知，(18) 推出的是 to

$$\begin{aligned} 2\pi\left(2-2g-s\right) &= 2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} K\, d\mu_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \kappa_g\, d\mu_{\partial\Sigma} \\ &= 2\pi \sum_i \chi(\Sigma_i) - \sum_l \theta_l, \end{aligned}$$

其中 s 是 $\partial\Sigma$的分支数。由于 $f(p_0) = 0$ 且 $\nabla f(p_0) = 0$，引理 4.2 蕴含 f 至少有两条节点线在 p_0 处相交，并在 p_0处形成一个星形；因此 $\sum_l \theta_l \geq 2\pi$。另一方面，另一方面，在 $\partial\Sigma$ 的每个连通分支 Γ_i 上，取一个正向弧长参数化 γ，我们有 $\varphi \wedge \eta = -\gamma'$。因此

$$\int_{\Gamma_i} f\, d\mu_{\partial\Sigma} = \int_{\Gamma_i} \langle \varphi \wedge \eta(p_0), \eta \rangle\, d\mu_{\partial\Sigma} = -\int_{\Gamma_i} \langle \varphi \wedge \eta, \eta(p_0) \rangle\, d\mu_{\partial\Sigma} = \int_{\Gamma_i} \langle \gamma', \eta(p_0) \rangle\, d\mu_{\partial\Sigma} = 0,$$

由此可得， f在每个分支 Γ_i上至少有两个零点。 $f^{-1}(\{0\})$中的每个点 $\cap\, \Gamma_i$在最后一个等式中至少为 π 贡献了 θ_j 的总和。因此，综合以上结果可得

$$\sum_l \theta_l \geq 2\pi\left(1+s\right) \tag{19}$$

将 (19) 代入 (18)，可得

$$\sum_i \chi(\Sigma_i) = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\left(2-2g-s\right) + \sum_l \theta_l\right) \geq 2-2g-s+1+s = 3-2g.$$

假设 Σ 的亏格为 $g = 0$，则 $\Sigma \backslash f^{-1}(\{0\})$ 至少有三个连通分支。若 Σ_1 和 Σ_2 是 f的节点域的两个连通分支，定义

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f & \text{in } \Sigma_1 \\ \alpha f & \text{in } \Sigma_2 \\ 0 & \text{in } \Sigma \backslash (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \end{cases},$$

~ ~其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 满足 $f \in \mathcal{F}$。由于 $\partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma = \partial\Sigma \cap \Sigma_i$ 且 $f \equiv 0$ 位于 Σ_i之外，我们有

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \left\langle P_1 \nabla\widetilde{f}, \nabla\widetilde{f} \right\rangle - 2H_1H_2\widetilde{f}^2\, d\mu_{\Sigma} &= \int_{\Sigma_1} \left\langle P_1 \nabla\widetilde{f}, \nabla f \right\rangle - 2H_1H_2\widetilde{f} f\, d\mu_{\Sigma} \\ &= -\int_{\Sigma} \widetilde{f}\left(L_1 f + 2H_1H_2 f\right)\, d\mu_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma\cap\Sigma_1} |P_1\nu| \widetilde{f} \frac{\partial f}{\partial \nu}\, d\mu_{\partial\Sigma} \\ &= \int_{\partial\Sigma\cap\Sigma_1} |P_1\nu|\, \widetilde{f}^2\, d\mu_{\partial\Sigma} \end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\Sigma_2}\left\langle P_1\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\right\rangle-2H_1H_2\widetilde{f}^2\,d\mu_\Sigma=\int_{\partial\Sigma\cap\Sigma_2}|P_1\nu|\,\widetilde{f}^2\,d\mu_{\partial\Sigma}.$$

因此,

$$\mathcal{I}_1(\widetilde{f},\widetilde{f})=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Sigma_i}\left\langle P_1\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\right\rangle-2H_1H_2\widetilde{f}^2\,d\mu_\Sigma-\int_{\partial\Sigma\cap\Sigma_i}|P_1\nu|\,\widetilde{f}^2\,d\mu_{\partial\Sigma}=0.$$

$\sim$ $\sim$因此，引理 2.2 的第二项表明， f 是 Σ上的雅可比场。但由于 $f\equiv 0$ 在$\sim\Sigma_1\cap\Sigma_2$之外，Aronszajn 唯一延拓原理 [2] 表明 $f\equiv 0$，这就产生了矛盾。

最后，由于 $f\equiv 0$，Killing 场 $p\in\mathbb{R}^3\mapsto p\wedge\eta\ (p_0)\ \in\mathbb{R}^3$ 与 Σ相切。因此， Σ 是绕轴 $\eta\ (p_0)$ 旋转的不动点为 p_0 的旋转曲面，故 Σ 必与圆盘同胚。利用定理 1.1，我们得出 Σ 是全脐的。

非欧几里得情形的论证类似。由于球面情形与双曲情形非常相似，我们仅在 $c=-1$时略述证明。采用 [17, 定理 5.1], 中使用的相同记号，定义 $f\colon\ \Sigma\to\mathbb{R}$ 为

$$f(p)=\langle\varphi(p)\wedge\eta(p_0)\wedge\mathbf{e}_4,\eta(p)\rangle\,.$$

欧几里得情形中使用的相同论证给出 $\nabla f(p_0)=0$ 和

$$\begin{cases}L_1f+2(H_1H_2-1)f=0 & \text{in }\Sigma\\ \dfrac{\partial f}{\partial\nu}-\dfrac{\mathrm{cn}_c(R)}{\mathrm{sn}_c(R)}f=0 & \text{on }\partial\Sigma\end{cases}.$$

还可以证明 $f\equiv 0$ ，为证明这一结论，考虑 γ 的一个连通分支 Γ_i 的正向弧长参数化 $\partial\Sigma$ ，且满足 $\varphi\wedge\eta\wedge\nu=-\gamma'$。恒等式 $f\equiv 0$ 表明， Σ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的旋转曲面，它绕由 $\mathbf{e}_4$ 和 $\eta(p_0)$张成的平面旋转，旋转中心为不动点 p_0，由此证明 Σ 是一个圆盘。

□

5 定理 1.3 的证明

本节将推广 [1, 定理 3.1], 适用于薄层 $\mathbb{R}^3$中的 1稳定 H_2曲面，这些曲面具有自由边界，且亏格为 0。

定理 1.3 的证明。该结果的证明是对定理 3.1] 中所采用论证方法的改编。不失一般性，可以假设 $\Pi_1=\{x_3=0\}$ 和 $\Pi_2=\{x_3=1\}$。设 Γ 是 $\partial\Sigma$ 的一个连通分支，使得 $\varphi(\Gamma)$ 位于 Π_1 上，并考虑该平面内以 $\varphi(\Gamma)$ 为中心的外接圆 $\mathscr{C}$ 。我们将证明， $\varphi(\Sigma)$ 是一个绕经过 $\mathscr{C}$ 中心的竖直轴旋转的旋转曲面。

不失一般性，假设 $\mathscr{C}$ 的中心是 $\mathbb{R}^3$ 的原点，并考虑函数$f(p) = \langle \varphi(p) \wedge \mathbf{e}_3, \eta(p)\rangle$, $p \in \Sigma$, 其中 $\wedge$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的叉积。通过与定理 1.2 中推导式 (16) 类似的计算，可以得到:

$$\begin{cases} L_1 f + 2H_1 H_2 f = 0 & \text{in } \Sigma \\ \dfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}.$$

如果能够证明 $f \equiv 0$，那么证明就完成了。

假设相反， $f \neq 0$。那么，引理 4.2 表明，其节点集 $f^{-1}(\{0\})$ 是一个图，其顶点为 f 的临界点。我们必须证明节点域 $\Sigma\backslash f^{-1}(\{0\})$ 至少具有 3 个连通分支。如果函数 f 在点 $p_0 \in f^{-1}(\{0\})$ 的某个邻域内不改变符号 $\cap \partial\Sigma$，那么，根据 $L_1 f = -2H_1 H_2 f$，强极大值原理 $[9,$ 定理 3.5] 和 Hopf 引理 $[9,$ 引理 3.4] 可推出 $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(p_0) \neq 0$，除非 $f \equiv 0$ 在 p_0 的某个邻域内成立，因此，根据 Aronszajn 唯一延拓原理 $[2]$, $f \equiv 0$。这两种情况都会导致矛盾，因此该节点域至少具有两个连通分支。用于证明节点域具有第三个连通分支的 $[1,$ 定理 3.1] 中的相同论证在此处同样适用。

记 Σ_1 和 Σ_2 为其中的两个分支，定义函数

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f & \text{in } \Sigma_1 \\ \alpha f & \text{in } \Sigma_2 \\ 0 & \text{in } \Sigma\backslash(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \end{cases},$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为 ~ ~，满足 $f \in \mathcal{F}$。由于 $\partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma = \partial\Sigma \cap \Sigma_i$ 和 $f \equiv 0$ 位于 Σ_i 外部，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \left\langle P_1 \nabla \widetilde{f}, \nabla \widetilde{f} \right\rangle - 2H_1 H_2 \widetilde{f}^2 \, d\mu_\Sigma &= \int_{\Sigma_1} \left\langle P_1 \nabla \widetilde{f}, \nabla f \right\rangle - 2H_1 H_2 \widetilde{f} f \, d\mu_\Sigma \\ &= -\int_{\Sigma_1} \widetilde{f} \left(L_1 f + 2H_1 H_2 f\right) d\mu_\Sigma + \int_{\partial\Sigma \cap \Sigma_1} |P_1 \nu| \, \widetilde{f} \frac{\partial f}{\partial \nu} \, d\mu_\Sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理， $\int_{\Sigma_2} \left\langle P_1 \nabla \widetilde{f}、 \nabla \widetilde{f} \right\rangle - 2H_1 H_2 \widetilde{f}^2 \, d\mu_\Sigma = 0$。因此,

$$\mathcal{I}_1(\widetilde{f}, \widetilde{f}) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Sigma_i} \left\langle P_1 \nabla \widetilde{f}, \nabla \widetilde{f} \right\rangle - 2H_1 H_2 \widetilde{f}^2 \, d\mu_\Sigma = 0.$$

~ ~由于 Σ 是 r-稳定的，引理 2.2 表明， f 是 Σ上的一个雅可比场。然而，由于 f 在 $\Sigma\backslash(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ 上消失，根据 Aronszajn 唯一延拓原理可知 $f = 0$，这就产生了矛盾。因此， $f \equiv 0$ 且 $\varphi(\Sigma)$ 是绕 x_3-轴旋转的旋转曲面。 □

参考文献

[1] Ainouz, A., and Souam, R. 半空间或薄层中的稳定毛细超曲面。Indiana University Mathematics Journal（2016），813–831。[2] Aronszajn, N. 二阶椭圆型偏微分方程或不等式解的唯一延拓定理。技术报告，堪萨斯大学劳伦斯分校，1956年。[3] Bryant, R. L. 复分析与一类 Weingarten 曲面。arXiv 预印本 arXiv:1105.5589（2011）。[4] Cheng, S.-Y. 特征函数与节点集。Commentarii Mathematici Helvetici 51，1（1976），43–55。[5] Damasceno, L., and Elbert, M. F. 具有常高阶平均曲率的稳定超曲面。arXiv 预印本 arXiv:2212.14130（2022）。[6] Elbert, M. F. 常正 2-平均曲率超曲面。Illinois Journal of Mathematics 46, 1（2002），247–267。[7] Elbert, M. F., and Nelli, B. 关于黎曼流形中常高阶平均曲率超曲面稳定性的注记。arXiv 预印本 arXiv:1912.12103（2019）。[8] Epstein, B. 偏微分方程：导论。McGraw-Hill，1962年。[9] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., Gilbarg, D., and Trudinger, N. 二阶椭圆型偏微分方程，第224卷。Springer，1977年。[10] Hopf, H. 大范围微分几何：纽约大学 1946 年和斯坦福大学 1956 年研讨会讲义，第1000卷。Springer，2003年。[11] Milnor, J., and Weaver, D. W. 从可微观点看拓扑学，第21卷。普林斯顿大学出版社，1997年。[12] Nitsche, J. C. 凸体的平稳划分。Archive for Rational Mechanics and Analysis 89，1（1985），1–19。[13] Nunes, I. 关于具有自由边界的稳定常平均曲率曲面。Mathematische Zeitschrift 287，1-2（2017），473–479。[14] Ros, A., and Souam, R. 关于球中毛细曲面稳定性的研究。Pacific Journal of Mathematics 178，2（1997），345–361。[15] Ros, A., and Vergasta, E. 具有自由边界的常平均曲率超曲面的稳定性。Geometriae Dedicata 56，1（1995），19–33。

[16] Rosenberg, H. 空间形式中的常曲率超曲面。Bull. Sci. Math 117, 2（1993年）， 211–239。

[17] Souam, R. 关于空间形式中球的分割问题的平稳超曲面的稳定性。Mathematische Zeitschrift 224, 2 (1997年), 195–208.