强全局维数与固定大小的复形、导出范畴之间的关系

YOHNY CALDERÓN-HENAO，FELIPE GALLEGO-OLAYA，和HERNÁN GIRALDO

摘要。设 Z 为整数，k 为代数闭域，Λ 为有限维 k-代数，modΛ 为有限生成右模的范畴，projΛ 为 modΛ 的全子范畴，由所有投射 Λ-模组成；C_n(projΛ) 表示对于任意整数 $n \geq 2$，固定大小的投射 Λ-模有界复形。对于当 Λ 具有有限强全局维数且为导出离散时的情形，我们利用范畴 C_n(projΛ) 的 Auslander-Reiten 箭图，找到了一种计算 Λ 的强全局维数的算法。此外，我们还展示了有界导出范畴 $D^b(\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图与 $C_{\eta+1}$(projΛ) 的 Auslander-Reiten 箭图之间的关系，其中 η=s.gl.dim(Λ)（Λ 的强全局维数）。

关键词。 代数的表示 理论、 不可约态射、 复形的 范畴、 导出范畴、 强整体维数。

1。 引言

几乎分裂序列（或 Auslander-Reiten 序列）理论成功地扩展到了对 modΛ 的有界导出范畴的研究，该范畴记为 $D^b(\Lambda)$，其中 Λ 是有限维 k-代数，而 k 是代数闭域。几乎分裂序列的概念由此产生了几乎分裂三角（或 Auslander-Reiten 三角）的概念。在其基础性著作 [18]，中，D. Happel 证明了有限整体维数代数的导出范畴具有几乎分裂三角；他还非常成功地描述了遗传代数情形下的 Auslander-Reiten 箭图。

令 modΛ 为有限生成右 Λ-模的范畴，并令 projΛ 为 modΛ 的全子范畴，由所有投射 Λ-模组成。固定大小的有限生成投射右 Λ-模的所有复形所成的范畴，记为 C_n(projΛ)，其中 $n \geq 2$ 为任意整数；该范畴由 R. Bautista、M.J. Souto Salorio 和 R. Zuazua 引入并进行了研究（见 [6]）。在 [12]，中，C. Chaio、I. Pratti 和 M.J. Souto Salorio 继续研究了这一范畴，并证明 C_n(projΛ) 的 Auslander-Reiten 箭图可以通过著名的编织算法构造，该算法用于构造 modΛ 的 Auslander-Reiten 箭图。此外，在 [3]，中，R. Bautista 研究了所有正整数 $n \geq 2$ 下 C_n(projΛ) 的表示型。最近，在 [11]，中，C. Chaio、A.G. Chaio 和 I. Pratti 证明：如果 Λ 的强全局维数是有限的（η=s.gl.dim(Λ)，其中 $\eta \in$ 为 N），那么，当且仅当对于每个 $n \geq 2$，$C_{\eta+1}$(projΛ) 是有限表示型时，C_n(projΛ) 才是有限表示型。

目前，还没有计算 Λ 的强全局维数的一般方法，但已有一些相关研究，参见 [2] 和 [11]。在第一篇研究中，当 Λ 是分片遗传代数时，E.R. Alvares、P. Le Meur 和 E.N. Marcos 利用导出范畴的结构刻画了 Λ的强全局维数。在第二篇研究中，C. Chaio、A.G. Chaio 和 I. Pratti 考虑其带关系的通常箭图，确定了一些分片遗传有限维代数的强全局维数。

本文提出了一种算法，用于计算Λ 的强全局维数，条件是 Λ 具有有限强全局维数且为导出离散。为此，我们采用了 C. Chaio、I. Pratti 和 M.J. Souto Salorio 在 [12], 中给出的技术，构造范畴 $\mathsf{C}_n(\mathsf{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图，其中 $n \geq 2$（见定理 3.22 和算法 3.24）。此外，我们证明，如果 Λ 是具有有限强全局维数的代数，那么，对于所有 $n \geq 1$，$\mathsf{C}_{\eta+1}(\mathsf{proj}\Lambda)$ 为温和表示型，当且仅当 $\mathsf{C}_n(\mathsf{proj}\Lambda)$ 为温和表示型（见定理 4.4）；进一步地，我们证明，如果 Λ 具有有限强全局维数，那么，在平移意义下，$\mathsf{C}_{\eta+1}(\mathsf{proj}\Lambda)$ 中的所有不可约态射和所有几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，都是 $\mathsf{C}_{\eta+i}(\mathsf{proj}\Lambda)$ 中的不可约态射和几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+i}$-序列，其中 $i \geq 2$（见定理 3.21）。我们还证明，在同构意义下，$\mathsf{C}_{\eta+1}(\mathsf{proj}\Lambda)$ 中的一些不可约态射和一些几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，是 $\mathsf{D}^b(\Lambda)$ 中的不可约态射和 Auslander-Reiten 三角（见定理 4.1）。最后，我们得到 $\mathsf{D}^b(\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图由 $\mathsf{C}_{\eta+1}(\mathsf{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图的一个特殊子箭图（见定义 4.2）的 Z 个副本构成（见定理 4.3）。

本文的结构安排如下：第 2 节回顾一些记号和预备结果。第 3 节说明，当 Λ 具有有限强全局维数时，$i \geq 1$的 $\mathsf{C}_{\eta+i}(\mathsf{proj}\Lambda)$ 中不可分解复形的形态、不可约态射以及几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+i}$-序列（更多细节见 [15] ）。我们给出一种算法，用于计算有限维 k-代数的强全局维数。第 4 节阐明 $\mathsf{C}_{\eta+1}(\mathsf{proj}\Lambda)$ 中不可约态射和几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列与 Auslander-Reiten 三角 $\mathsf{D}^b(\Lambda)$ 之间的关系，并给出两个示例，说明如何应用该算法，以及如何根据 $\mathsf{C}_{\eta+1}(\mathsf{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图，计算有界导出范畴 $\mathsf{D}^b(\Lambda)$ 的强全局维数和 Auslander-Reiten 箭图。

2. 预备结果

我们先介绍一些记号、定义和基本事实，后续章节将会用到。$\mathcal{A}$ 始终表示一个 Krull-Schmidt 加性范畴，而 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 表示从 X 到 Y的态射集合，其中 X和 Y是$\mathcal{A}$中的对象。在不会引起混淆时，我们将使用记号 $\mathsf{Hom}(X,Y)$。若 $X=Y$，则 $\mathsf{Hom}(X,X) := \mathsf{End}(X)$ 和 $\mathsf{Aut}(X)$ 是 $\mathsf{End}(X)$ 中的元素，且均为同构。若态射 $f\colon X \to Y$属于 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$，且存在态射 $h\colon Y \to X$使得 $hf = 1_X$（分别为 $fh = 1_Y$），则称其为截面（分别为收缩）。满足上述任一条件时，称 f 为可裂态射。若态射 f 不可裂，但对其任意分解 $f = hg$，h 是收缩或 g 是截面，则称该态射不可约。若态射 $f\colon X \to Y$属于 $\mathsf{Hom}(X,Y)$，且 f不是收缩；并且对任意不是收缩的 $g\colon Z \to Y$，都存在一个 $s\colon Z \to X$使得 $fs = g$，则称该态射为右几乎分裂态射。若态射 $f\colon X \to Y$属于 $\mathsf{Hom}(X,Y)$，且对满足 $fu = f$的 $u \in \mathsf{End}(X)$，有$u \in \mathsf{Aut}(X)$，则称该态射为极小右态射。若态射 $f\colon X \to Y$属于 $\mathcal{A}$，且 f是右几乎分裂态射、f 是右极小态射，则称其为极小右几乎分裂态射。对偶地，可以定义极小左几乎分裂态射。请注意，若 f是 $\mathcal{A}$中的极小右（或左）几乎分裂态射，则 f 是 $\mathcal{A}$中的不可约态射。

一对 (i,d) 可复合态射 $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$in $\mathcal{A}$称为正合的，如果 (X,i) 是 d的核，且 (Z,d) 是 i的余核。设 $\mathcal{E}$为一个在同构下封闭的正合对类。如果 $(i,d) \in \mathcal{E}$，则态射 i和 d分别称为膨胀和消减，而 $\mathcal{E}$ 中的正合对称为共挠。序列 $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$

$\mathcal{A}$中的序列称为 E-序列，如果（i,d）$\in\mathcal{E}$。若一个 $\mathcal{E}$-序列 $X\xrightarrow{i}Y\xrightarrow{d}Z$满足： i是极小左几乎分裂态射，且 d 是极小右几乎分裂态射，则称其为几乎分裂；在 [[13], 2中。2], P. Dräxler、I. Reiten、S.O. Smalø 和 Ø. Solberg 证明了，X 和 Z 是 $\mathcal{A}$中的不可分解对象。

回顾一下，复形 $X=(X^i,d_X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是由对象族 X^i （属于 $\mathcal{A}$）和态射 d_X^i: $X^i\to X^{i+1}$（属于 $\mathcal{A}$）组成的，其中 $i\in$Z，并且对所有 $i\in$Z都有 $d_X^{i+1}d_X^i=0$。态射 d_X^i:$X^i\to X^{i+1}$称为复形 X的微分映射。若 X和 Y是复形，则复形间的态射 $f=(f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$: $X\to Y$由一族态射 f^i: $X^i\longrightarrow Y^i$（其中 $i\in$Z）给出，并且对所有 $i\in$Z都有 $d_Y^if^i=f^{i+1}d_X^i$。C($\mathcal{A}$)是一个范畴，其对象是 $\mathcal{A}$上的复形，态射是两个复形之间的态射；每个X^i 称为一个胞腔，每个 f^i 称为 f的分量（对每个 $i\in$Z）。令 C$^{-,b}$($\mathcal{A}$) 为 C($\mathcal{A}$) 的全子范畴，其中的复形上有界且上同调有界。C^b($\mathcal{A}$) 是 C($\mathcal{A}$) 中由有界复形构成的全子范畴；K($\mathcal{A}$)、K$^{-,b}$($\mathcal{A}$) 和 K^b($\mathcal{A}$) 分别称为 C($\mathcal{A}$)、C$^{-,b}$($\mathcal{A}$) 和 C^b($\mathcal{A}$) 的同伦范畴；D^b($\mathcal{A}$) 是 $\mathcal{A}$的有界导出范畴。若 X 是一个复形且$p\in$Z，则通过平移函子可得到一个新的 $X[p]$ 复形。对于 C($\mathcal{A}$) 中的态射 f: $X\to Y$，用记号 C$_f$ 表示态射 f的锥。

在 [6], R. Bautista、M.J. Souto Salorio 和 R. Zuazua 中，考虑了 C($\mathcal{A}$)，以及 $\mathcal{E}$ 在可复合态射的同构下封闭的正合对类 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$，使得对所有 $n\in$Z，序列 $0\to X^n\xrightarrow{f^n}Y^n\xrightarrow{g^n}Z^n\to 0$ 都是分裂正合的。众所周知，(C($\mathcal{A}$),$\mathcal{E}$) 是 D. Quillen 意义下的正合范畴（见 [20]），或者说，是 P. Gabriel 和 A.V. Roiter 意义下的等价范畴（见 [14]）（例如参见 [18]中的例 3.2）。在 [[6], 记号 3.1], 中，对于满足 $m<n$ 的 $m,n\in$Z，C$^{[m,n]}$($\mathcal{A}$) 是 C($\mathcal{A}$) 的全子范畴，其对象为满足以下条件的 $X\in$C($\mathcal{A}$)： $X^i=0$ 若 $i\notin\{m,m+1,...,n\}$。范畴 C$^{[m,n]}$($\mathcal{A}$) 是 C($\mathcal{A}$) 的一个对扩张封闭的子范畴，并且 (C$^{[m,n]}$($\mathcal{A}$),$\mathcal{E}_{[m,n]}$) 是一个正合范畴，其正合结构由 C$^{[m,n]}$($\mathcal{A}$) 中属于 $\mathcal{E}$ 的可复合态射类 $\mathcal{E}_{[m,n]}$ 给出。

特别地，我们使用记号 C$_n$($\mathcal{A}$) := C$^{[1,n]}$($\mathcal{A}$) 和 $\mathcal{E}_n=\mathcal{E}_{[1,n]}$。此外，在 [[6],定理 4.5], R. Bautista、M.J. Souto Salorio 和 R. Zuazua 证明了 C$_n$($\mathcal{A}$) 中几乎分裂 $\mathcal{E}_n$-序列的存在，或称 $\mathcal{E}_n$-几乎分裂序列。他们考虑$P\in\mathcal{A}$ 不可分解对象，并在 C$_n$($\mathcal{A}$) 中定义了以下三个复形。

J$_k$(P) $=(J^i,d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$对于 $k\in\{1,\dots,n-1\}$，其中 $J^i=0$若 $i\neq k$且 $i\neq k+1$, $J^k=J^{k+1}=P$且 $d^k=1_P$并且 $d^i=0$在另一种情况。

S(P) $=(X^i,d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$其中 $X^i=0$对于 $i\neq 1$， $X^1=P$， $d^i=0$对于所有 $i\in\mathbb{Z}$。

T(P) $=(X^i,d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 $X^i=0$对于 $i\neq n$， $X^n=P$， $d^i=0$对于所有 $i\in\mathbb{Z}$。

按照 R. Bautista 在 [4], 中的说法，C$_n$($\mathcal{A}$) 中的一个复形 P 称为 $\mathcal{E}_n$-投射的，如果对于任意消减 f: $Y\to Z$ 以及 C$_n$($\mathcal{A}$) 中的任意态射 u: $P\to Z$，存在 v: $P\to Y$，使得 $fv=u$。对偶地，定义 $\mathcal{E}_n$-内射。R. Bautista、M.J. Souto Salorio 和 R. Zuazua 在 [[6], 推论 3.8 和推论 3.9], 中证明了以下命题。

命题 *2.1*。*C$_n$($\mathcal{A}$)* 中 $\mathcal{E}_n$-投射（分别为 $\mathcal{E}_n$-内射）的不可分解复形是复形 *J$_k$(P)* 和 *T(P)*（分别为 *J$_k$(P)* 和 *S(P)*），其中 $k\in\{1,\dots,n-1\}$ 具有 $P\in\mathcal{A}$ 不可分解性。

令 k 为代数闭域， Λ 为有限维 k-代数。我们分别用 modΛ和 projΛ表示有限生成右 Λ-模的范畴，以及有限生成投射右 Λ-模的全子范畴。

我们回顾 D. Happel 和 D. Zacharia 在 [19], 中的如下结果：若 $X \in \mathrm{K}^b(\mathrm{proj}\Lambda)$是一个复形，我们可以考虑 X 在 $\mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\Lambda)$中的一个原像 $\bar{X}$，它不含不可分解的投射直和项。 X 在 $\mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\Lambda)$中作为有界复形的同构类由 X 唯一确定。因此，下述定义是良定的。若 $0 \neq X \in \mathrm{K}^b(\mathrm{proj}\Lambda)$，则存在 $r \leq s$ 使得 $\bar{X}^r \neq 0 \neq \bar{X}^s$，且对 $i < r$和 $i > s$有 $\bar{X}^i = 0$。于是，根据定义， X的长度定义为 $\ell(X) = s - r$。我们将 Λ的强全局维数定义为

$$\mathrm{s.gl.dim}(\Lambda) \ := \ \sup\{\ell(X) | X \in \mathrm{K}^b(\mathrm{proj}\Lambda) \text{ indecomposable}\}.$$

以下均用 η表示有限的强全局维数 Λ，即， η=s.gl.dim(Λ)，其中 $\eta \geq 1$。

根据 D. Happel 在 [18],中的结果，若存在一个遗传阿贝尔范畴 $\mathcal{H}$，使得 $\mathrm{D}^b(\Lambda)$与 $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ 作为三角范畴等价，则 Λ 是分段遗传的。

以下 定理在 [[19], 定理 3。2], 由 D. Happel 和 D.Zacharia证明。

定理 2.2. 设 Λ 是一个有限维 $\Bbbk$-代数。那么 Λ 是分段遗传当且仅当 $\mathrm{s.gl.dim}(\Lambda) < \infty$。

在这项工作中，我们将注意力集中于 C_n(投射Λ) 范畴，其对象是具有复形 X，其中 $X^i = 0 \ i \notin \{1, \ldots, n\}$，即。

$$X: \cdots \to 0 \to X^1 \to X^2 \to \cdots \to X^{n-1} \to X^n \to 0 \to \cdots.$$

在不会引起混淆时，该复形记作： $X: (X^1 \to X^2 \to \cdots \to X^{n-1} \to X^n)$，其中 X^1 是第一个胞腔， X^2 是第二个胞腔，依此类推； X由这些胞腔确定。若 $X, Y \in \mathrm{C}_n(\mathrm{proj}\Lambda)$，且 f: $X \to Y$ 是 $\mathrm{C}_n(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的一个态射，则 f 记作 $f: (f^1, \ldots, f^n)$，而 f 由这些分量确定。

我们考虑以下函子， $n \geq 1$。

i. $i^n_{-1}: \mathrm{C}_n(\mathrm{proj}\Lambda) \to \mathrm{C}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ given by $i^n_{-1}(X)^1 = 0$, $i^n_{-1}(X)^j = X^{j-1}$ for all $j \in \{2, \ldots, n+1\}$, and $d^1_{i^n_{-1}(X)} = 0$, $d^j_{i^n_{-1}(X)} = d^{j-1}_X$ for all $j \in \{2, \ldots, n\}$. If X, Y, and $f: X \to Y$ are in $\mathrm{C}_n(\mathrm{proj}\Lambda)$, then the morphism $i^n_{-1}(f): i^n_{-1}(X) \to i^n_{-1}(Y)$ in $\mathrm{C}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ is given by $i^n_{-1}(f)^1 = 0$ and $i^n_{-1}(f)^j = f^{j-1}$ for all $j \in \{2, \ldots, n+1\}$.

ii. i^n_0: C_n(投射Λ) $\to \mathrm{C}_{n+1}$(投射Λ) 由 $i^n_0(X)^j = X^j$ 对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$,$i^n_0(X)^{n+1} = 0$ 给出，以及 $d_{i^n_0(}{}^j{}_X = d^j_X$) 对所有 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$。若 X, Y，且 f: $X \to Y$ 属于 C_n(投射Λ)，则 C_{n+1}(投射Λ) 中的态射 $i^n_0(f)$: $i^n_0(X) \to i^n_0(Y)$ 由 $i^n_0(f)^j = f^j$对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 给出。

iii. π^n_1: C_{n+1}(投射Λ) $\to \mathrm{C}_n$(投射Λ) 由 $\pi^n_1(X)^j = X^{j+1}$ 对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$,$d_{\pi^n_1(}{}^j{}_X = d^{j+1}_X$) 对所有 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ 给出。若 X, Y，且 f: $X \to Y$ 属于 C_{n+1}(投射Λ)，则态射 $\pi^n_1(f)$: $\pi^n_1(X) \to \pi^n_1(Y)$ 由 $\pi^n_1(f)^j = f^{j+1}$对所有$j \in \{1, \ldots, n\}$给出。

iv. π^n_0 $_{n+1}$ $\Lambda \to$ $_n$ Λ π^n_0 X $^j = X^j$ $j \in \{1, \ldots, n\}$ $d^j_{\pi^n_0}$ $_X$ =: C（proj）C（d^j_X $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ X, Y f $X \to Y$ $_{n+1}$ Λ proj）由（）对所有给出，（）对所有给出。如果，并且：属于 C（proj），那么态射 π^n_0（f）：π^n_0（X）$\to \pi^n_0$（Y）由 π^n_0（f）$^j = f^j$ 对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 给出。

注记 2.3. 我们 注意到 以下 事实 适用于 $n \geq 1$。

i. i^n_{-1}是平移函子 $[-1]$，但微分映射的符号相反； i^n_0 是包含函子，即 $i^n_0 = [0]$; π^n_1是平移函子 $[1],$，但微分映射的符号相反； π^n_0 是使 X^{n+1}为零的函子。ii. π^n_1 是 i^n_{-1}的左逆函子， π^n_0 是 i^n_0的左逆函子。iii. 设 $\mathsf{C}^{(1)}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 是 $\mathsf{C}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 的全子范畴，满足对所有$X \in \mathsf{C}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$， $X^1 = 0$，因此 π^n_1 限制到 $\mathsf{C}^{(1)}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 后是一个同构，其逆同构为 i^n_{-1}。iv. 设 $\mathsf{C}^{(n+1)}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 是 $\mathsf{C}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 的全子范畴，满足对所有 $X \in \mathsf{C}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$， $X^{n+1} = 0$，因此 π^n_0 限制到 $\mathsf{C}^{(n+1)}_{n+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 后是一个同构，其逆同构为 i^n_0；此外，我们注意到在这种情况下 $\pi^n_0 = [0]$。

引理 *2.4.* 设 Λ 是一个有限维 *k*-代数， X 和 Y 是 $\mathcal{C}_{n+i}$(投射Λ) 中满足 $i \geq 1$ 的复形。若 $f\colon X \to Y$是 $\mathcal{C}_{n+i}$(投射Λ) 中的不可约态射，则有如下结论：

i. 若 $X^1 = 0 = Y^1$，则 $\pi^{n+i}_1(f)\colon \pi^{n+i}_1(X) \to \pi^{n+i}_1(Y)$ 是 $\mathcal{C}_{n+i-1}$(投射Λ) 中的不可约态射。 *ii.* 若 $X^{n+i} = 0 = Y^{n+i}$，则 $\pi^{n+i}_0(f)\colon \pi^{n+i}_0(X) \to \pi^{n+i}_0(Y)$ 是 $\mathcal{C}_{n+i-1}$(投射Λ) 中的不可约态射。

证明。这是 一项简单的验证。 □

C. Chaio，A.G. Chaio，和I. Pratti 给出了 如下定义，可 见于 [[10], 定义4.1], 更确切地说：

定义 2.5. 设 $X = (X^i, d^i_X)_{i \in \mathbb{Z}}$ 是 一个 不可分解对象 复形 中的 C_n(投射Λ)。

i. 若存在一个投射的 Λ-模 X'^0和一个非零态射 $d'^0\colon X'^0 \to X^1$，使得 $d^1_X d'^0 = 0$, 则称 X 可在$\mathcal{C}_{n+1}$(投射Λ)中向左扩张。我们将$\mathcal{C}_{n+1}$(投射Λ)中 X 左侧的扩张复形记作 ${}_EX$，其中${}_EX^1 = X'^0$， ${}_EX^i = X^{i-1}$对所有 $i \in \{2, \ldots, n+1\}$均成立， $d^1_{{}_EX} = d'^0$, $d^i_{{}_EX} = d^{i-1}_X$对所有$i \in \{2, \ldots, n\}$均成立。*ii.* 若存在一个投射的 Λ-模 X'^{n+1}和一个非零态射 $d'^n\colon X^n \to X'^{n+1}$，使得$d'^n d^{n-1}_X = 0$，则称 X 可在$\mathcal{C}_{n+1}$(投射Λ)中向右扩张。我们将$\mathcal{C}_{n+1}$(投射Λ)中 X右侧的扩张复形记作 X_E，其中 $X^i_E = X^i$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$均成立， $X^{n+1}_E = X'^{n+1}$， $d^i_{X_E} = d^i_X$对所有 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$均成立， $d^n_{X_E} = d'^n$。

注记 2.6. 设 X 是一个 不可分解对象 复形 属于 C_n(投射Λ)。

i. 我们注意到，如果 X 能在 C_{n+1}(投射Λ) 中向左延拓（分别地，如果 X 能在 C_{n+1}(投射Λ) 中向右延拓），那么我们可以将 X'^0取为一个不可分解对象投射 Λ-模（分别地，我们可以将 X'^{n+1}取为一个不可分解对象投射 Λ-模）。

ii. 如果 X 能在 C_{n+1}(投射Λ) 中向左延拓，且 X'^0 是一个不可分解对象投射 Λ-模，那么 ${}_EX$ 是 C_{n+1}(投射Λ) 中的一个不可分解复形。事实上，存在一个不可分解对象投射 Λ-模 X'^0 以及一个非零态射 d'^0: $X'^0 \to X^1$，使得 $d_X^1 d'^0 = 0$。

1. 若 $X^2 \neq 0$，则我们考虑以下态射 f 于K^b(投射Λ)

$$\begin{array}{ccccccccccccc} X' \cdots \longrightarrow 0: & \longrightarrow & X'^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow f & & \downarrow d'^0 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ X \cdots \longrightarrow 0: & \longrightarrow & X^1 & \xrightarrow{d_X^1} & X^2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

注意到 f 非零，且由于 X 是一个不可分解复形，因此 f不可逆。由于 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^b(\text{投射}\Lambda)}(X, X'[1]) = 0$，并且 X'是一个不可分解复形，D. Happel 和 D. Zacharia 在 [[19], 推论 1.4], 中证明了 C_f是一个不可分解复形，其中 C_f: $\cdots \to 0 \to X'^0 \to X^1 \to \cdots \to X^n \to 0 \to \cdots$。最后，我们注意到 $\mathsf{C}_f[-1] \cong_E X$。

2. 若 $X^2 = 0$，则 $X^3 = \cdots = X^n = 0$。现在，若 d'^0是一个同构，则${}_E\mathsf{S}(X^1) \cong \mathsf{J}_1(X^1)$。若 d'^0不是同构，则采用与 1 类似的论证，因此 ${}_E\mathsf{S}(X^1) \cong \mathsf{C}_f[-1] = \cdots 0 \to X'^0 \to X^1 \to 0 \to \cdots$是一个不可分解复形。

iii. 若 X 可在 C_{n+1}(投射Λ) 中向右延拓，且 X'^{n+1} 是不可分解的投射 Λ-模，则 X_E 是 C_{n+1}(投射Λ) 中的不可分解复形。该结论的证明与 ii 类似。

iv. C. Chaio、A.G. Chaio 和 I. Pratti 在 [[10], 引理 4.2], 中证明， X 可在 C_{n+1}(投射Λ) 中向左延拓，当且仅当 d_X^1不是单射；而 X 可在 C_{n+1}(投射Λ) 中向右延拓，当且仅当 $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{coker} d_X^{n-1}, \Lambda) \neq 0$。

此外在 [10], C中，Chaio、A.G. Chaio和以及 I. Pratti，证明了以下结果，该结果已使用此前定义的函子进行了修改。注记 2.3

命题 *2.7.* *[[10], 引理 4.3]* 设 X 和 Y 是 $\mathcal{C}_n$(投射Λ) 中的复形。若 $f: X \to Y$ 是 $\mathcal{C}_n$(投射Λ) 中的不可约态射，且 $n \geq 2$，则有如下结论。

i. 若 X 是不可分解对象，且它不能在 $\mathcal{C}_{n+1}$(投射Λ) 中向左延拓，则 $i^n_{-1}(f)$: $i^n_{-1}(X) \to i^n_{-1}(Y)$ 是 $\mathcal{C}_{n+1}$(投射Λ) 中的不可约态射。 *ii.* 若 Y 是不可分解对象，且它不能在 $\mathcal{C}_{n+1}$(投射Λ) 中向右延拓，则 $i^n_0(f)$: $i^n_0(X) \to i^n_0(Y)$ 是 $\mathcal{C}_{n+1}$(投射Λ) 中的不可约态射。

以下命题 命题，其是将结果由结合推论 2 和命题3 得出，由H. Giraldo 和H. Merklen 在 [16]中证明。

命题 *2.8*。设 X 和 Y 是 $\mathcal{C}_n$(投射Λ) 中的复形。若 $f: X \to Y$ 是 $\mathcal{C}_n$(投射Λ) 中的不可约态射，则以下条件之一成立：

i. f^j是一个截面，对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$都成立。
ii. f^j是一个收缩，对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$都成立。

iii. 存在一个 $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ 使得 f^{i_0} 是不可约的，态射 f^j 是截面，对所有 $j > i_0$ 并且态射 f^j 是收缩，对所有 $j < i_0$ 且 $j \in \{1, \dots, n\}$。

现在，我们将给出一些关于不可分解复形的基本结果和注记，其中复形属于 K^b（投射 Λ）。

引理 *2.9.* 设 X 和 Y 是 C_n(投射Λ) 中的不可分解复形，其中 X 和 Y 对于所有 $k \in \{1, \dots, n-1\}$ 均不是 $J_k(P)$，且形式为某个不可分解投射Λ-模。若 $f\colon X \to Y$ 是 C_n(投射Λ) 中的不可约态射，且 $X^1, Y^n \neq 0$，则 Cf 是 K^b(投射Λ) 中的不可分解对象，并且 $\ell(Cf) = n$。

证明. 根据 H. Giraldo 和 H. Merklen 在 [16], 中陈述的定理 5，我们有X 和 Y 是极小投射复形；根据 [16]中陈述的定理 6， f 是 K^b(投射Λ) 中的不可约态射。因此，根据 E.R. Alvares、S.M. Fernandes 和 H. Giraldo 在 [1], 第 5.1 节中陈述的第一个命题， f 的锥在 K^b(投射Λ) 中是不可分解的，因为 $X^1 \neq 0$ 且 $Y^n \neq 0$，于是 $\ell(\mathrm{C}f) = n$。□

从此以后， Λ 表示一个分段遗传代数或者 Λ 表示一个具有有限强全局维数的代数（根据定理 2.2）。

注记 2.10.

i. 如果 $X \in \mathrm{K}^b$(投射Λ) 是一个不可分解复形，且 $\ell(X) = \eta$，那么 X（不计平移）既不是不可分解的 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-投射对象，也不是不可分解的 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-内射对象。

事实上，假设 X 是不可分解对象 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-投射或不可分解对象 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-内射，那么根据命题2.1 X 是以下某个复形复形在$\mathrm{C}_{\eta+1}$(投射Λ)：

$$(1) \quad \mathrm{T}(P), \quad (2) \quad \mathrm{S}(P), \quad \text{or} \quad (3) \quad \mathrm{J}_k(P) \text{ con } k \in \{1, \dots, \eta\},$$

为一个不可分解对象投射 Λ-模。对于复形 $\mathrm{T}(P)$ 和 $\mathrm{S}(P)$，我们有 $\ell(\mathrm{T}(P)) = 0 = \ell(\mathrm{S}(P))$，并且作为复形 $\mathrm{J}_k(P)$，由于 $k \in \{1, \dots, \eta\}$ 在 K^b(投射Λ) 中为零，因此 $\ell(\mathrm{J}_k(P)) = 0$。因此，$\ell(X) = 0$。

ii. 如果 X 是 K^b(投射Λ) 中的非零不可分解复形，且满足 $\ell(X) = \eta$，那么存在 $r, s \in \mathrm{Z}$，使得 $r < s$，并且 $X^r \neq 0$ 和 $X^s \neq 0$， $X^i = 0$ 对于 $i > s$ 和 $i < r$，且 $X^j \neq 0$ 对于 $j \in \{r, r+1, \dots, s\}$。因此，对于某个 $p \in \mathrm{Z}$， $X[p] \in \mathrm{C}_{\eta+1}$(投射$\Lambda$)。

iii. 如果 X 是 K^b(投射Λ) 中的不可分解复形，且满足 $\ell(X) = \eta$，那么有以下结论：对于某个 $p \in \mathrm{Z}$， $X[p] \in \mathrm{C}_{\eta+i}$(投射$\Lambda$)，且 $i \geq 1$；并且 $X[p] \notin \mathrm{C}_{\eta}$(投射$\Lambda$)。

3. 主要结果

在本节的第一部分，我们将考察关于带有 $i \geq 2$ 的 $\mathrm{C}_{\eta+i}$(projΛ) 中不可分解复形的形状以及几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+i}$-序列的一些结果。在第二部分，我们将证明，对于 $i \geq 2$，$\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中所有不可约态射和几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，除平移外，分别都是 $\mathrm{C}_{\eta+i}$(projΛ) 中的不可约态射和几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+i}$-序列（见定理 3.21）。最后，定理 3.22 和算法 3.24 使我们能够求出有限强全局维数。

引理 3.1. 每个 不可分解 复形中 $\mathrm{C}^{\eta+2}$(投射Λ) 是 一个 复形 满足 以下条件：要么 胞腔 一 或 胞腔 $\eta+2$为 零。

证明。设 X 是 $\mathrm{C}^{\eta+2}$(projΛ) 中的不可分解复形，则 $X=\mathrm{J}_k(P)$，其中 P 是 $k\in\{1,\dots,\eta+1\}$ 或 $X=/\mathrm{J}_k(P)$ 的不可分解投射 Λ-模。

若 $X=\mathrm{J}_k(P)$，则 X满足 该 条件。

若 $X=/\mathrm{J}_k(P)$，则 X 没有形如 $\mathrm{J}_k(P)$ 的直和项。因此，根据 H. Giraldo 和 H. Merklen 的 [[16], 定理 5] （另见 [[6], 命题 6.6）， X在 K^b(projΛ) 中也是不可分解的。若假设 $X^1=/0$ 且 $X^{\eta+2}=/0$，则$\ell(X)=\eta+1$，这与 $\eta=$s.gl.dim(Λ) 的事实矛盾。□

推论 3.2. 每个不可分解对象复形属于$\mathrm{C}^{\eta+i}$(投射Λ) 都是一个复形，满足以下条件：要么第个胞腔一为个胞腔 $\eta+i$ 为零对 $i\geq 2$成立。

命题 *3.3.* 设 X 和 Y是 $\mathcal{C}^{\eta+i}$*(*投射Λ*)* 中的不可分解复形，且满足$i\geq 2$。若 $f\colon X\to Y$ 是 $\mathcal{C}^{\eta+i}$*(*投射Λ*)* 中的不可约态射，则 $X^1=0=Y^1$ 或$X^{\eta+i}=0=Y^{\eta+i}$。

证明. 设 $f\colon X\to Y$是 一个 不可约 态射，位于 $\mathrm{C}^{\eta+i}$(投射Λ)中。 假'设 $X^1=/0$或 $Y^1=/0$， 那么 我们 将 证明 $X^{\eta+i}=0=Y^{\eta+i}$。

$X^1=/0$. 若 $X^{\eta+i}=/0$，则 $X^1=0$，因为 $\ell(X)<\eta$; 因此， $X^{\eta+i}=0$。另一方面，若 $Y^{\eta+i}=/0$，则 X和 Y不能对所有满足 P的 $k\in\{1,\dots,\eta+i-1\}$写成 $\mathrm{J}_k(P)$ 的形式，其中 P是某个不可分解投射 Λ-模，否则 $f=0$。由引理 2.9 可得 $\ell(\mathrm{C}f)\geq\eta+2$, 这与 $\eta=$s.gl.dim(Λ) 的事实矛盾，因此 $Y^{\eta+i}=0$。

$Y^1=/0$。若 $Y^{\eta+i}=/0$，则 $Y^1=0$，因为 $\ell(Y)<\eta$; 因此， $Y^{\eta+i}=0$。现在，若 $X^{\eta+i}=/0$，则态射 $f^{\eta+i}\colon X^{\eta+i}\to 0$不是 proj$\Lambda$ 中的截面，而态射$f^1\colon 0\to Y^1$不是 projΛ 中的收缩，这与命题 2.8 矛盾。 □

推论 *3.4.* 设 X和 Y是 $\mathcal{C}^{\eta+i}$*(proj*Λ*)* 中的不可分解复形，且 $i\geq 2$， $f\colon X\to Y$是 $\mathcal{C}^{\eta+i}$ *(proj*Λ*)* 中的不可约态射。以下条件成立：

i. If $\ell(X)=l-j=\eta$, *then* $Y^{j-r}=Y^{l+r}=0$ *for all* $r\geq 1$.

ii. If $\ell(Y)=l-j=\eta$, *then* $X^{j-r}=X^{l+r}=0$ *for all* $r\geq 1$.

也就是说， 在 $\eta=l-j$的条件下，因此若 $\ell(X)=\eta$或 $\ell(Y)=\eta$，则 f具有如下形式：

$$\begin{array}{lccccccccccc} X\colon & 0\longrightarrow\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow & X^j & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & X^l & \longrightarrow 0\longrightarrow\cdots\longrightarrow 0\to 0\to\cdots \\ & \downarrow f & \downarrow f^j & & \downarrow f^l & & & & & & \\ Y\colon & 0\longrightarrow\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow & Y^j & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & Y^l & \longrightarrow 0\longrightarrow\cdots\longrightarrow 0\to 0\to\cdots. \end{array}$$

证明。 我们 以 a) 和 b) 的 方式 进行，与 命题3.3的 证明中 所做的 类似。 □

推论 *3.5.* 设 X和 Y是 $\mathcal{C}^{\eta+2}$*(*投射Λ*)* 中的不可分解复形。若 $f\colon X\to Y$是 $\mathcal{C}^{\eta+2}$*(*投射Λ*)* 中的不可约态射，则存在一个不可约态射 g，属于 $\mathcal{C}^{\eta+1}$*(*投射Λ*)*，使得 $i_{-1}^{\eta+1}(g)=f$ 或 $i_0^{\eta+1}(g)=f$。

证明。 根据 命题 3。3 $X^1=0=Y^1$或 $X^{\eta+2}=0=Y^{\eta+2}$。

若 $X^1=0=Y^1$，则我们考虑 $g=\pi_1^{\eta+1}(f)$，由引理 2.4， g 是 C$\eta+1$(投射Λ) 中的不可约态射，并由注 2.3 ii. $i_{-1}^{\eta+1}(g)=f$。

若 $X^{\eta+2}=0=Y^{\eta+2}$，则我们根据引理 2.4 考虑 $g=\pi_0^{\eta+1}(f)$， g 是 C$\eta+1$(投射Λ) 中的一个不可约态射，并且根据注 2.3 iii. $i_0^{\eta+1}(g)=f$。□

注 3.6. 由推论 3.5 可知，若 X 和 Y 是 C$\eta+2$(projΛ) 中的不可分解复形，且 $f: X\to Y$ 是 C$\eta+2$(projΛ) 中的一个不可约态射，那么在函子 $i_{-1}^{\eta+1}$ 或 $i_0^{\eta+1}$ ——根据注 2.3，它们是平移和同构——的意义下，我们可以说，在平移的意义下， f 是 C$\eta+1$(projΛ) 中的一个不可约态射。

引理 3.7. 如果 $\delta: X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是 一个 几乎 分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列 于 C$\eta+2$(投射Λ)；那么我们 有如下：

i. 若 $X^1=0=Y^1$ 和 $Z^1=0$，则 $\pi_1^{\eta+1}(\delta)$: $\pi_1^{\eta+1}(X)\to\pi_1^{\eta+1}(Y)\to\pi_1^{\eta+1}(Z)$ 是 *C$\eta+1$(projΛ)* 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列。*ii.* 若 $X^{\eta+2}=0=Y^{\eta+2}$ 和 $Z^{\eta+2}=0$，则 $\pi_0^{\eta+1}$: $\pi_0^{\eta+1}(X)\to\pi_0^{\eta+1}(Y)\to\pi_0^{\eta+1}(Z)$ 是 *C$\eta+1$(projΛ)* 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列。

证明。 令 δ: $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是 一个 几乎 分裂 序列，位于 C$\eta+2$(投射Λ)。

i. 假设 $X^1=0=Y^1$ 和 $Z^1=0$，由于 f 是 C$\eta+2$(projΛ) 中的极小左几乎分裂态射，因此 f 是 C$\eta+2$(projΛ) 中的不可约态射。根据引理 2.4， $\pi_1^{\eta+1}(f)$: $\pi_1^{\eta+1}(X)\to\pi_1^{\eta+1}(Y)$ 是 C$\eta+1$(projΛ) 中的不可约态射。

我们将证明， $\pi_1^{\eta+1}(f)$: $\pi_1^{\eta+1}(X)\to\pi_1^{\eta+1}(Y)$ 和 $\pi_1^{\eta+1}($ g $\pi_1^{\eta+1}$ Z $\eta+1$ $\to$ Λ): $\pi_1^{\eta+1}(Y)$ ( ) 分别是 C (proj) 中的极小左、右几乎分裂态射。

1. 由于 $\pi_1^{\eta+1}(f)$: $\pi_1^{\eta+1}(X)\to\pi_1^{\eta+1}(Y)$ 是 C$\eta+1$(projΛ) 中的不可约态射，因此 $\pi_1^{\eta+1}(f)$ 不是 C$\eta+1$(projΛ) 中的截面。

2. 设 u: $\pi_1^{\eta+1}(X)\to U$ 是 C$\eta+1$(projΛ) 中的一个态射，且 u 不是 C$\eta+1$(projΛ) 中的截面。我们将证明存在 v: $\pi_1^{\eta+1}(Y)\to U$，它是 C$\eta+1$(projΛ) 中的一个态射，满足 $v\pi_1^{\eta+1}(f)=u$。我们考察了复形 $i_{-1}^{\eta+1}(U)$ 以及 C$\eta+2$(projΛ) 中的态射 $i_{-1}^{\eta+1}(u)$，并发现 $i_{-1}^{\eta+1}(u)$ 不是 C$\eta+2$(projΛ) 中的截面，因为 u 不是 C$\eta+1$(projΛ) 中的截面。由于 f 是 C$\eta+2$(projΛ) 中的极小左几乎分裂态射，存在 h: $Y\to i_{-1}^{\eta+1}(U)$，它是 C$\eta+2$(projΛ) 中的一个态射，满足 $hf=i_1^{\eta+1}(u)$。由于 $Y^1=0=i_{-1}^{\eta+1}(U)^1$,，我们有 $\pi_1^{\eta+1}(h)\pi_1^{\eta+1}(f)=u$，且该关系成立于 C$\eta+1$(projΛ) 中。

3. 设 $r\in\mathrm{End}(\pi_1^{\eta+1}(Y))$，使得 $r\pi_1^{\eta+1}(f)=\pi_1^{\eta+1}(f)$ 在 C$\eta+1$(projΛ) 中，因此我们有 $i_{-1}^{\eta+1}(r)$ 2 End(Y)，且 $i_{-1}^{\eta+1}(r)f=f$ 在 C$\eta+2$(projΛ) 中。由于 f 在 C$\eta+2$(projΛ) 中是极小的，于是 $i_{-1}^{\eta+1}(r)$ 2 Aut(Y) 在 C$\eta+2$(projΛ) 中，因此 $r\in\mathrm{Aut}(\pi_1^{\eta+1}(Y))$ 在 C$\eta+1$(projΛ) 中。

考虑 1、2 和 3，我们得出，$\pi_1^{\eta+1}(f)$ 是 C$\eta+1$(projΛ) 中的极小左几乎分裂态射。类似地，我们可以证明 $\pi_1^{\eta+1}(g)$:$\pi_1^{\eta+1}(Y)\to\pi_1^{\eta+1}(Z)$ 是 C$\eta+1$(projΛ) 中的极小右几乎分裂态射。这证明了 $\pi_1^{\eta+1}(\delta)$: $\pi_1^{\eta+1}(X)\to\pi_1^{\eta+1}(Y)\to\pi_1^{\eta+1}(Z)$ 是 C$\eta+1$(projΛ) 中的一个几乎分裂$\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列。

ii. 该证明 与i相似。 □

推论 3.8. 设 δ: $X\to Y\to Z$ 是一个几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+i}$-序列，其中C$\eta+i$(投射Λ)满足 $i\geq 2$，则我们有如下结论：

i. 若 $X^1=0=Y^1$ 且 $Z^1=0$，则 $\pi_1^{\eta+i}(\delta)$: $\pi_1^{\eta+i}(X)\to\pi_1^{\eta+i}(Y)\to\pi_1^{\eta+i}(Z)$是$C\eta+(i-1)$(投射Λ)中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+(i-1)}$-序列。 *ii.* 若 $X^{\eta+i}=0=Y^{\eta+i}$ 且 $Z^{\eta+i}=0$，则 $\pi_0^{\eta+i}$: $\pi_0^{\eta+i}(X)\to\pi_0^{\eta+i}(Y)\to\pi_0^{\eta+i}(Z)$是C$\eta+(i-1)$(投射Λ)中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+(i-1)}$-序列。

命题 *3.9.* 若 δ: $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是 C$\eta+2$(projΛ) 中的一个几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列，则存在一个几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列 δ'，使得 $i_{-1}^{\eta+1}(\delta')=\delta$ 或 $i_0^{\eta+1}(\delta')=\delta$。

证明。由于 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个 不可约 态射，属于 C$\eta+2$(投射Λ)，根据 命题 3。3，我们 有 $X^1=0=Y^1$ 或 $X^{\eta+2}=0=Y^{\eta+2}$。

若 $X^1=0=Y^1$，则 $Z^1=0$，因为 $0\longrightarrow X^1\longrightarrow Y^1\longrightarrow Z^1\longrightarrow 0$ 是分裂的。考虑 $\delta'=\pi_1^{\eta+1}(\delta)$，根据引理 3.7 $\pi_1^{\eta+1}(\delta)$ 是 C$\eta+1$(projΛ) 中的一个几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列；并且根据注 2.3 ii. $i_{-1}^{\eta+1}(\delta')=\delta$。

如果 $X^{\eta+2}=0=Y^{\eta+2}$ $Z^{\eta+2}=0$ $\delta'=\pi_0^{\eta+1}\ \delta$ 3 7，那么.....。

$\pi_0^{\eta+1}\ \delta$ $\mathcal{E}_{\eta+1}$ $\eta+1$ Λ 2 3

考虑 ( )，由引理可知。( ) 是 C (proj) 中的一个几乎分裂 -序列，并且根据注记.....。iii.$i_0^{\eta+1}(\delta')=\delta$。□

注 3.10. 根据命题 3.9，如果 δ: $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是 C$\eta+2$(projΛ) 中的一个几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，那么在函子 $i_{-1}^{\eta+1}$ 或 $i_0^{\eta+1}$ -的意义下（根据注 2.3，它们是平移和同构），我们可以说，在平移的意义下，δ 是 C$\eta+1$(projΛ) 中的一个几乎分裂$\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列。

引理 *3.11.* 设 X 和 Y 是 $C\eta+1$(投射Λ) 中的不可分解复形。若 f: $X\to Y$ 是 $C\eta+1$(投射Λ) 中的不可约态射，则有如下结论：

i. 若 X 在 $C\eta+2$(投射Λ) 中可向左延拓，则 Y 在 $C\eta+2$(投射Λ) 中不能向右延拓。*ii.* 若 Y 在 $C\eta+2$(投射Λ) 中可向右延拓，则 X 在 $C\eta+2$(投射Λ) 中不能向左延拓。

证明。

i. 若 X 可在 C$\eta+2$(投射Λ) 中向左延拓，则 $X^1=/0$。现在，假设 Y可在 C$\eta+2$(投射Λ) 中向右延拓；因此，$Y^{\eta+1}=/0$，并且对于所有满足 P为某个不可分解投射 Λ-模的 $k\in\{1,\ldots,\eta\}$，X和 Y也不是 $\mathrm{J}_k(P)$ 的形式。由引理 2.9 可得 ℓ(Cf) $=\eta+1$，这与 η=强全局维数(Λ) 的事实矛盾。

ii. 该证明与i中的证明. □

命题 *3.12.* 设 X 和 Y 是 $C^{\eta+1}(proj\Lambda)$ 中的不可分解复形。若 $f:X\to Y$ 是 $C^{\eta+1}(proj\Lambda)$ 中的不可约态射，则存在 $C^{\eta+2}(proj\Lambda)$ 中的不可约态射 g，使得 $\pi_1^{\eta+1}(g)=f$ 或 $\pi_0^{\eta+1}(g)=f$。

证明。

若 X 在 $C^{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中不能向左延拓，则根据命题 2.7，考虑 $g=i_{-1}^{\eta+1}(f)$，$i_{-1}^{\eta+1}(f)$ 是 $C^{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的不可约态射，并且根据注 2.3 ii，$\pi_1^{\eta+1}(g)=f$。

若 X 在 $C^{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中可以向左延拓，则根据引理 3.11，Y 在 $C^{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中不能向右延拓。于是考虑 $g=i_0^{\eta+1}(f)$；根据命题 2.7，$i_0^{\eta+1}(f)$ 是 $C^{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的不可约态射，并且根据注 2.3 iii，$\pi_0^{\eta+1}(g)=f$。□

注 3.13. 根据命题 3.12，如果 X 和 Y 是 $C^{\eta+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的不可分解复形，并且 f: $X\to Y$是 $C^{\eta+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的一个不可约态射，那么根据注 2.3，在函子 $\pi_1^{\eta+1}$ 或 $\pi_0^{\eta+1}$ （它们分别是平移和同构）的意义下，我们可以说，经过平移后，f 是 $C^{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的一个不可约态射。

引理 3.14. 设 $X\in C^{\eta+1}(\text{投射}\Lambda)$ 是 一个 不可分解对象 复形。

i. 如果 X 可以在 $C^{\eta+2}(\text{投射}\Lambda)$ 中向左延拓，则 $X^{\eta+1}=0$。
ii. 如果 X 可以在 $C^{\eta+2}(\text{投射}\Lambda)$ 中向右延拓，则 $X^1=0$。

证明。令 $X\in C^{\eta+1}(\text{投射}\Lambda)$ 为一个不可分解复形。对于情形 i 和 ii，我们注意到 $X\neq J_k(P)$ 与 $k\in\{1,\dots,\eta\}$ and P 是一个不可分解的投射 Λ- 模。

i. 我们假设 $X^{\eta+1}\neq 0$ 且 X 可以在 $C^{\eta+2}(\text{投射}\Lambda)$ 中向左延拓，因此存在 $X'^0\in$ 投射 Λ 和非零态射 d'^0: $X'^0\to X^1$，使得 $d_X^1 d'^0=0$。我们考虑 $K^b(\text{投射}\Lambda)$ 中的如下态射 f：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X': & \cdots\longrightarrow 0: & \longrightarrow & X'^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0\longrightarrow\cdots \\
 & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow d'^0 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
X: & \cdots\longrightarrow 0 & \longrightarrow & X^1 & \xrightarrow{d_X^1} & X^2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X^{\eta} & \xrightarrow{d_X^{\eta}} & X^{\eta+1} & \longrightarrow 0\longrightarrow\cdots
\end{array}$$

我们注意到，由于 X 是不可分解对象，f 非零且不可逆。根据 D. Happel 和 D. Zacharia 在 [[19],推论 1.4], 中的结果，$\mathrm{Hom}^{K(\mathrm{proj}\Lambda)}(X,X'[1])=0$，因此 Cf 是不可分解对象，且 $\ell(Cf)=\eta+1$。但这与 $\eta=$s.gl.dim(Λ) 矛盾。

ii. 类似于 i。 □

引理 3.15. 设 $\delta\colon X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是一个几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，其中$\mathrm{C}_{\eta+1}$(投射Λ)，则我们有如下：

i. 如果 X 可以在 $\mathcal{C}_{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中向左延拓，那么 Z 就不能在 $\mathcal{C}_{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中向右延拓。*ii.* 如果 Z 可以在 $\mathcal{C}_{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中向右延拓，那么 X 就不能在 $\mathcal{C}_{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中向左延拓。

证明。

i. 假设 Z 可以在 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中向右延拓，则对所有满足 P 的 $k\in\{2,\dots,\eta\}$，$Z^{\eta+1}\neq 0$ 且 $Z\neq \mathrm{J}_k(P)$，其中 Λ 是某个不可分解投射模；此外，由引理 3.14，$Z^1=0$。由于 $0\to X^1\to Y^1\to Z^1\to 0$ 是分裂的，因此 $X^1\cong Y^1$。X可以在 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中向左延拓，因此 $X^1\neq 0$，进而 $Y^1\neq 0$，于是存在 $k\in\{1,...,m\}$ 使得 $Y_k^1\neq 0$，其中 $Y=\bigoplus_{i=1}^m Y_i$，且对所有 $i\in\{1,\dots,m\}$，Y_i 都是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的不可分解复形。由 R. Bautista 在 [[4], 注记 2.1], 中的结果，$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的一个几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-列；根据引理 2.16], 态射 $g=[\,g_1\ \cdots\ g_k\ \cdots\ g_m\,]$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的不可约态射，也是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的根态射。因此，由 R. Bautista 和 M.J. Souto Salorio 在 [[5],命题 2.18], 中的结果，对所有 $i\in\{1,\dots,m\}$，g_i 都是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的不可约态射。我们考虑 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的 $g_k\colon Y_k\to Z$，因此

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
Y_k\colon & \cdots\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y_k^1 & \xrightarrow{d_Y^1} & Y_k^2 & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & Y_k^\eta & \xrightarrow{d_Y^\eta} & Y_k^{\eta+1} & \longrightarrow 0\longrightarrow\cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow g_k^2 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
Z\colon & \cdots\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & Z^2 & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & Z^\eta & \xrightarrow{d_Z^\eta} & Z^{\eta+1} & \longrightarrow 0\longrightarrow\cdots
\end{array}$$

1. 令 $Y_k\neq \mathrm{J}_1(Y_k^1)$，由于 $Y_k^1\neq 0$ 且 $Z^{\eta+1}\neq 0$。根据 引理 2。9，我们 得到了即 $\ell(\mathrm{C}_{g_k})=\eta+1$，这与以下事实相 $\eta=$矛：$\mathrm{gl.dim}(\Lambda)$。

2。 令 $Y_k=\mathrm{J}_1(Y_k^1)$。在 这种 情况下 $g_k^2=0$。根据 命题 2.8，g_k^2：$Y_k^1\to Z^2$ 是一个不可约态射在投射Λ；因此，g_k^2 是一个单态射因为 Z^2 是一个投射 Λ-模。因此 $0=\ker g_k^2=Y_k^1$，这与这一事实矛盾 该 $Y_k^1\neq 0$。

上述 所有内容 使 我们 得以 得出结论 即，Z 不能 向右扩张 至 范畴 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(投射Λ)。

ii. 证明 与 i 的 证明类似 。 □

引理 3.16. 若 $\delta\colon X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是 一个 几乎 分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列 在 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(投射Λ)，则 我们有如下结论：

i. 如果 X 不能在 $\mathcal{C}_{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中向左延拓，那么 $i_{-1}^{\eta+1}(\delta)$ 是 $\mathcal{C}_{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列。*ii.* 如果 X 可以在 $\mathcal{C}_{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中向左延拓，那么 $i_{0}^{\eta+1}(\delta)$ 是 $\mathcal{C}_{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列。

证明。 设 δ: $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是 一个 几乎 分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列 于 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(投射Λ)。

i. 假设 X 不能在 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中向左延拓。由于 f 是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的不可约态射，根据命题 2.7， $i_{-1}^{\eta+1}(f)$: $i_{-1}^{\eta+1}(X)\to i_{-1}^{\eta+1}(Y)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的不可约态射。我们将证明 $i_{-1}^{\eta+1}(\delta)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列；为此，我们将证明 $i_{-1}^{p}(f)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的极小左几乎分裂态射。事实上，设 v:$i_{-1}^{\eta+1}(X)\to X'$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的态射，且 v 不是截面。我们考虑 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的复形 X'': $(X'^{2}\to X'^{3}\to\cdots\to X'^{\eta+2})$，以及由 v': $(v^{2},\ldots,v^{\eta+2})$ 给出的 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的 v':$X\to X''$。我们注意到， v'不是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的截面，因为 X 不能在 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中向左延拓，且 v 不是截面。由于 f 是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的极小左几乎分裂态射，存在 v'': $Y\to X''$ 使得 $v''f=v'$。若定义 h: $i_{-1}^{\eta+1}(Y)\to X'$，其中 h: $(0,v''^{1},\ldots,v''^{\eta+1})$，则有 $hi_{-1}^{\eta+1}(f)=v$。由于 f是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的左极小态射，我们得出 $i_{-1}^{\eta+1}(f)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的极小左态射。最后， $i_{-1}^{\eta+1}(f)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的极小左几乎分裂态射。类似地，我们可以证明 $i_{-1}^{\eta+1}(g)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的极小右几乎分裂态射。这证明了 $i_{-1}^{\eta+1}(\delta)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列。

ii. 假设 X 可以在 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中向左延拓。根据引理 3，15 Z不能在 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中向右延拓。与 i. 类似，我们证明了 $i_{0}^{\eta+1}(g)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的极小右几乎分裂态射，而 $i_{0}^{\eta+1}(\delta)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列。□

命题 *3.17.* 若 δ*:* $X\to Y\to Z$ 是 $C_{\eta+1}$*(proj*Λ*)* 中的几乎可裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，则 $C_{\eta+2}$*(proj*Λ*)* 中存在一个几乎可裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列 δ'，使得 $\pi_{1}^{\eta+1}(\delta')=\delta$ 或 $\pi_{0}^{\eta+1}(\delta')=\delta$。

证明。 设 δ: $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是一个 几乎可裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，位于 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(投射Λ)。

X 在 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中不能向左延拓。我们考虑了 $\delta'=i_{-1}^{\eta+1}(\delta)$；根据引理 3.16， $i_{-1}^{\eta+1}(\delta)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的一个几乎可裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列；根据注 2.3 ii.， $\pi_{1}^{\eta+1}(\delta')=\delta$。

X可在 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(投射Λ) 中向左延拓。我们考虑 $\delta'=i_{0}^{\eta+1}(\delta)$，由引理 3.16， $i_{0}^{\eta+1}(\delta)$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-列，并且由注 2.3 iii.， $\pi_{0}^{\eta+1}(\delta')=\delta$。□

注 3.18. 根据命题 3.17，如果 δ: $X\to Y\to Z$ 是 $\mathrm{C}_{\eta+1}$(projΛ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，那么根据注 2.3，在函子 $\pi_{1}^{\eta+1}$ 或 $\pi_{0}^{\eta+1}$ 意义下——它们分别是平移和同构——我们可以说，在平移意义下， δ 是 $\mathrm{C}_{\eta+2}$(projΛ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列。

根据 注记3.6，注记3.10，注记3.13，以及注记3.18，我们 可以表述，至 平移，以下命题:

命题 3.19。 以下 条件 成立:

i. 设 X 和 Y 是 $C_{\eta+2}$*(proj*Λ*)* 中的不可分解复形。除平移外，f*:* $X\to Y$是 $C_{\eta+2}$ *(proj*Λ*)* 中的不可约态射，当且仅当 f*:* $X\to Y$是 $C_{\eta+1}$*(proj*Λ*)* 中的不可约态射。

ii. 除平移外， $\delta: X \to Y \to Z$ 是 $\mathcal{C}^{\eta+2}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列，当且仅当 $\delta: X \to Y \to Z$ 是 $\mathcal{C}^{\eta+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$- 序列。

证明。

i. ($\Longrightarrow$) 推论3。5。($\Longleftarrow$) 命题3。12。ii. ($\Longrightarrow$) 命题3。9。($\Longleftarrow$) 命题3。17。 □

注记 3.20。

i. 设 X 和 Y 是 $\mathsf{C}^{\eta+i}$(投射Λ) 中的不可分解复形，且满足 $i \geq 2$。若 $f: X \to Y$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+i}$(投射Λ) 中的不可约态射，则由命题 3.3， $X^1 = 0 = Y^1$ 或 $X^{\eta+i} = 0 = Y^{\eta+i}$。现在，根据引理 2.4，在平移意义下， f: $X \to Y$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+i-1}$(投射Λ) 中的不可约态射。若继续如此，我们可以说，在平移意义下， f:$X \to Y$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 中的不可约态射。ii. 设 X 和 Y 是 $\mathsf{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 中的不可分解复形。若 f: $X \to Y$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+1}$(投射 Λ) 中的不可约态射，由注记 3.13 f ，它是 $\mathsf{C}^{\eta+2}$(投射 Λ) 中的不可约态射。若继续如此，我们可以说，在平移意义下， f: $X \to Y$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+i}$(投射Λ) 中的不可约态射，且满足 $i \geq 2$。iii. 若 δ: $X \to Y \to Z$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+i}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+i}$-序列，且满足 $i \geq 2$，则由推论 3.8，在平移意义下， δ: $X \to Y \to Z$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+(i-1)}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+(i-1)}$-序列。若继续如此，我们可以说，在平移意义下， δ: $X \to Y \to Z$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列。iv. 若 δ: $X \to Y \to Z$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，则由注 3.18，我们可以说，在平移意义下， δ: $X \to Y \to Z$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+2}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+2}$-序列。若继续如此，我们可以说，在平移意义下， δ: $X \to Y \to Z$ 是 $\mathsf{C}^{\eta+i}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+i}$-序列，且满足$i \geq 2$。

根据注记3。20，我们可以表述，在平移意义下，以下定理:

定理3。21。设 Λ 是一个代数，其强整体维数为 $\eta = \mathrm{s。gl。dim}(\Lambda)$。以下条件成立:

i. 设 X 和 Y 是 $\mathcal{C}^{\eta+i}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中满足 $i \geq 2$ 的不可分解复形。在平移意义下，$f: X \to Y$ 是 $\mathcal{C}^{\eta+i}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的不可约态射，当且仅当，$f: X \to Y$ 是 $\mathcal{C}^{\eta+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的不可约态射。 *ii.* 在平移意义下， $\delta: X \to Y \to Z$ 是 $\mathcal{C}^{\eta+i}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中满足 $i \geq 2$ 的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+i}$-序列，当且仅当 $\delta: X \to Y \to Z$ 是 $\mathcal{C}^{\eta+1}(\mathrm{proj}\Lambda)$ 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列。

我们完成本截面并以下述定理定理，它允许我们给出该算法来计算强全局维数。

定理 3.22. 若 Λ 是 一个 有限 维的 $\Bbbk$-代数，则 $\mathrm{s.gl.dim}(\Lambda) = m_0 - 2$其中

$$m_0 : = \text{最小}\{n \geq 2 \,|\, \forall X \in \mathrm{C}_n(\text{投射}\Lambda) \text{ 不可分解对象}, X^1 = 0 \text{ 或 } X^n = 0\}.$$

证明。 我们注意到 以下内容：

i. 若 s.gl.dim(Λ) = ∞，结论显然。ii. 若 s.gl.dim(Λ) = η，则 C$^{\eta+1}$(projΛ) 中存在 X 不可分解复形，使得 $\ell(X) = \eta$。复形 X 满足 $X^1 \neq 0$ 且 $X^{\eta+1} \neq 0$；因此，

$$\eta + 1 \ < \ m_0.$$

并且根据引理3。1，我们得到 $m_0 \leq \eta + 2$；因此， $\eta = m_0 - 2$。 □

注记3。23。在上述的定理中，并不要求必须满足 Λ 具有有限强全局维数。

按照 D. Vossieck 的说法，若 [22], D^b(Λ) 称为离散的，而称为导出离散，如果对于每个自然数向量 $\boldsymbol{n} = (n_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，D^b(Λ) 中具有同调维数向量 $\boldsymbol{n}$ 的不可分解对象的同构类只有有限多个。

根据 R. Bautista 的 [[3], 定理 2.3 (a)], ，若 Λ 是导出离散的，则对所有 $n \geq 1$，C$_n$(projΛ) 都是有限表示型。此外，按定义，若 Λ 是分段遗传的，则存在一个遗传阿贝尔范畴 $\mathcal{H}$，使得 D^b(Λ) ≅D^b($\mathcal{H}$) 作为三角范畴等价。因此，根据 D. Happel 和 D. Zacharia 在 [19], 中的结果，以及 D. Vossieck 在 [22],中的结果，若 Λ 是分段遗传且导出离散的，则 $\mathcal{H}$ 由 Dynkin 型的路径代数给出，并且我们可以通过以下算法明确计算 Λ的强全局维数：

算法 3.24. 设 Λ 是分段遗传且导出离散的。在 [12], 中，C. Chaio、I. Pratti 和 M.J. Souto Salorio 说明了如何构造范畴 C$_n$(projΛ) 的 Auslander-Reiten 箭图，对所有 $n > 1$均成立。

步骤 1. 构造 Auslander-Reiten 箭图的 C$_2$(投射Λ)。

a) 如果所有不可分解复形都满足第一或第二个胞腔为零，则根据定理 3.22，我们有强全局维数(Λ) = 2 − 2 = 0。 b) 否则，转到步骤 2。

步骤2. 构建 Auslander-Reiten 箭图 C$_3$(投射Λ) 并 执行 a) 或b) 步骤1。

步骤 3。 继续 直到 得到 情形 (a)。 该 算法 停止 ，因为 Λ 具有有限的 强 全局 维数 ，根据 定理 2。2。

4. 应用 于 导出 范畴 和例子

本节旨在研究 C$^{\eta+1}$(projΛ) 与有界导出范畴 D^b(Λ) 之间的一些关系；我们注意到，如果 s.gl.dim(Λ) = $\eta < \infty$，那么 Λ 具有有限整体维数，因此我们可以利用这一众所周知的事实：K^b(projΛ) ≅D^b(Λ) 作为三角范畴。

回顾 P. Grivel 在 [[17], 定理 6.5], 中的结果：D^b(Λ) 是一个三角范畴。若三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 满足以下条件，则称其为 Auslander-Reiten 三角：

（AR1） X, Z 是不可分解对象。

(阿根廷2) $w \neq 0$。

（AR3）如果 $f\colon W\to Z$ 不是收缩，则存在 $f'\colon W\to Y$，使得 $vf'=f$。有关 Auslander-Reiten 三角的更详细说明，请参见 [18]，中的 D. Happel。

我们的第一个结果允许通过不可约态射和Auslander-Reiten 三角形在$\mathrm{D}^b(\Lambda)$ 得到 C 中的不可约态射和几乎裂分 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列以及$\mathrm{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 中的相应概念。

定理 4.1 的第 i 项由 C. Chaio、A.G. Chaio 和 I. Pratti 在 [[10],定理 4.5]，中证明；我们将使用第 2 节中定义的函子来证明这一事实。

定理 4.1. 设 Λ 是一个代数，具有有限强全局维数，其中 $\eta=\mathrm{s.gl.dim}(\Lambda)$.

i. 设 X 和 Y 是 $\mathcal{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 中的不可分解复形，且没有 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-投射和 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-内射直和项。假设 X 不能在 $\mathcal{C}^{\eta+2}$(投射Λ) 中向左延拓，且 Y 不能在 $\mathcal{C}^{\eta+2}$(投射Λ) 中向右延拓。忽略平移，$f\colon X\to Y$是 $\mathcal{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 中的不可约态射，当且仅当 $f\colon X\to Y$ 是 $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ 中的不可约态射。

ii. 令 X,Y和 Z为 复形，属于 $\mathrm{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 且不含 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-投射 和 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-内射直 直和项。 给定

$$X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1] \tag{4.1}$$

$\mathcal{D}^b(\Lambda)$ 中的一个三角。除去平移 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$，它是 $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ 中的 *Auslander-Reiten* 三角，当且仅当 $\mathcal{C}^{\eta+1}(proj\Lambda)$ 中存在一个几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列。

$$X\xrightarrow{\begin{bmatrix}u\\u'\end{bmatrix}}Y\oplus P\xrightarrow{\begin{bmatrix}v & v'\end{bmatrix}}Z, \tag{4.2}$$

使得 P 是一个不可分解对象复形 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-投射-内射并且*(4.2)*诱导出一个 $Auslander\text{-}Reiten$ 三角同构于*(4.1)*。

证明。

i. 假设 $f\colon X\to Y$ 是 $\mathrm{C}^{\eta+1}$(projΛ) 中的一个不可约态射。由于 X 不能在 $\mathrm{C}^{\eta+2}$(projΛ) 中向左延拓，根据命题 2.7 $i.$，$i_{-1}^{\eta+1}(f)$ 是 $\mathrm{C}^{\eta+2}$(projΛ) 中的一个不可约态射。我们注意到 $i_{-1}^{\eta+1}(Y)$ 不能在 $\mathrm{C}^{\eta+3}$(projΛ) 中向右延拓，根据命题 2.7 $ii.$，$i_{0}^{\eta+2}(i_{-1}^{\eta+1}(f))$ 是 $\mathrm{C}^{\eta+3}$(projΛ) 中的一个不可约态射。根据 R. Bautista 和 M.J. Souto Salorio 在 [[5]，中的结果，由推论 4.5]，，我们得到 $i_{0}^{\eta+2}(i_{-1}^{\eta+1}(f))$ 是 $\mathrm{D}^b(\Lambda)$ 中的一个不可约态射，并且根据注 2.3，经过平移后，f 在 $\mathrm{D}^b(\Lambda)$ 中是不可约的。

反之，如果 $f\colon X\to Y$ 是 $\mathrm{D}^b(\Lambda)$ 中的不可约态射，由 H. Giraldo 和 H. Merklen 在 [[16]，定理 6]，中证明 K^b(投射Λ) $\cong\mathrm{D}^b(\Lambda)$（另见 [[5],命题 3.3 (b)]），$f$ 是某个$m,n\in\mathbb{Z}$ 中 $\mathrm{C}^{[m,n]}$(投射Λ) 的不可约态射，且 $m<n$；根据注 2.3，经平移后，f 是某个 $n'\in\mathbb{Z}$ 中 $\mathrm{C}_{n'}$(投射Λ) 的不可约态射，最后，结论由推论 3.4 和定理 3.21 i 得出。

ii. 设 X,Y和 Z是 $\mathrm{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 中的复形。我们注意到，模去平移后，$X\to Y\to Z$ 是 $\mathrm{C}^{\eta+1}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，当且仅当对于某个满足 $m<n$ 的 $m,n\in\mathbb{Z}$，$X\to Y\to Z$ 是 $\mathrm{C}^{[m,n]}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{[m,n]}$-序列。

如果 $X\overset{\begin{bmatrix}u\\u'\end{bmatrix}}{\to}Y\oplus P\overset{\begin{bmatrix}v&v'\end{bmatrix}}{\to}Z$ 是 C$_{[m,n]}$(投射Λ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{[m,n]}$-序列，

那么由 R. Bautista、M.J. Souto Salorio 和 R. Zuazua 在 [[6], 引理 9.1] 中给出的 Auslander-Reiten 三角 $X\overset{u}{\to}Y\overset{v}{\to}Z\to X[1]$ 可由此导出于 D^b(Λ) 中。

反过来，设 $X\overset{u}{\to}Y\overset{v}{\to}Z\overset{w}{\to}X[1]$ 是 D^b(Λ) 中的一个 Auslander-Reiten 三角，那么利用 [[8], 定理 3.1]，（也可参见 [[9], 定理 2.7]），可知存在某个 $m,n\in$ Z，使得在 C$_{[m,n]}$(projΛ) 中有一个几乎分裂的 $\mathcal{E}_{[m,n]}$-序列 $X\overset{\begin{bmatrix}u'\end{bmatrix}}{\longrightarrow}Y\oplus P\overset{\begin{bmatrix}v&v'\end{bmatrix}}{\longrightarrow}Z$，其中$_u$ P是一个不可分解复形 $\mathcal{E}_{[m,n]}$-投射-内射。由注 2.3 可知，经过平移，$X\overset{\begin{bmatrix}u'\end{bmatrix}}{\longrightarrow}Y\oplus P\overset{\begin{bmatrix}v&v'\end{bmatrix}}{\longrightarrow}Z$ 是某个 $n'\in$Z 对应的 C$_{n'}$(projΛ) 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_{n'}$-序列，

最后由推论 3.4 和定理 3.21 ii 得出所述结论。□

我们将定义一个特殊的子箭图，它属于Auslander-Reiten 箭图，属于C$_{\eta+1}$(投射Λ)。

定义 *4.2.* 设 Λ 是一个具有有限强全局维数的代数，其中 $\eta=$*s.gl.dim(*Λ*)*，且 *¡*$_{\mathrm{C}_{\eta+1}}$*(proj*Λ*)* 是 *C*$_{\eta+1}$*(proj*Λ*)* 的 *Auslander-Reiten* 箭图。我们将¯按以下方式定义 *¡*$_{\bar{\mathrm{C}}_{\eta+1}}$*(proj*Λ*)*：由 *¡*$_{\mathrm{C}_{\eta+1}}$*(proj*Λ*)* 得到的箭图中，在每个连通分支内，我们移除同时为 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-投射和 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-内射的不可分解复形，之后考虑由不可分解复形 X 给出的连通分支，使得 X 既不能在 *C*$_{\eta+2}$*(proj*Λ*)* 中向左延拓，也不能在 *C*$_{\eta+2}$*(proj*Λ*)* 中向右延拓。

我们有以下定理，利用上述定义：

定理 *4.3.* 如果 Λ 具有有限强全局维数，且 $\eta=$*s.gl.dim(*Λ*)*，那么 *D*^{b}*(*Λ*)* 的 *Auslander-Reiten* 箭图同构于 *¡*$_{\bar{\mathrm{C}}_{\eta+1}}$*(proj*Λ*)* 的 *Z* 个副本。

证明。经过平移和连接映射（按照 [[18], I.5.5] 的含义），根据定理 4.1 ii 和推论 3.4，我们注意到¯that ¡$_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}$≅ Z¡$_{\bar{\mathrm{C}}_{\eta+1}}$(投射Λ)。□

定理 *4.4*。设 Λ 是一个有限强全局维数的代数，其中 $\eta=$*s.gl.dim(*Λ*)*。当且仅当对于所有 $n\geq 1$，*C*$_{\eta+1}$*(*投射Λ*)* 都是温和表示型时，*C*$_n$*(*投射Λ*)* 也是温和表示型。

<escape>**证明**。 假设 C$_{\eta+1}$(投射Λ) 具有 温和表示 类型。</escape>

i. 根据 R. Bautista 在 [[3], 定理 1.1], C$_n$(projΛ) 属于驯表示型或野表示型。若 C$_n$(projΛ) 属于野表示型，由于 C$_n$(projΛ) ⊆C$_{\eta+1}$(projΛ)，因此 C$_{\eta+1}$(projΛ) 属于野表示型，但这与我们的假设矛盾。

ii. 若 $n>\eta+1$，我们有以下事实：

$$\mathrm{indC}_n(\mathrm{proj}\Lambda)\subseteq \mathrm{indC}_{\eta+1}(\mathrm{proj}\Lambda)\bigcup \mathrm{indC}_{\eta+1}(\mathrm{proj}\Lambda)[1]\bigcup\cdots\bigcup \mathrm{indC}_{\eta+1}(\mathrm{proj}\Lambda)[n-1].$$

其中indC$_n$(projΛ) 表示同构类中不可分解对象复形在C$_n$(projΛ) 中对所有 $n\geq 1$。

因此，该结果是由引理3.1 以及我们的假设得出的。

反过来，这是显然的。 □

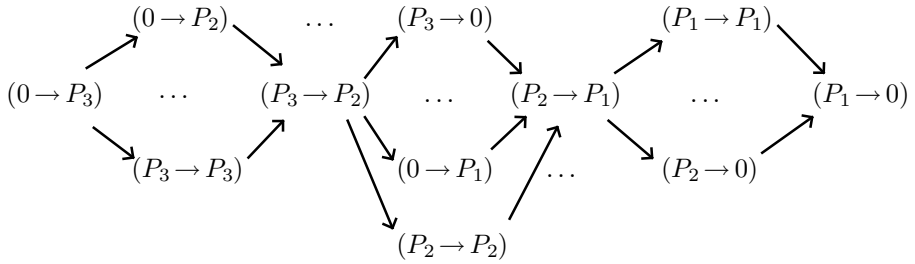
我们通过两个例子来完成本节，展示如何计算满足算法3.24中给定条件的代数的强全局维数。

例4.5。我们将计算以下有限维k-代数的强全局维数。我们将考虑 Λ 由下列箭图给出的路径代数

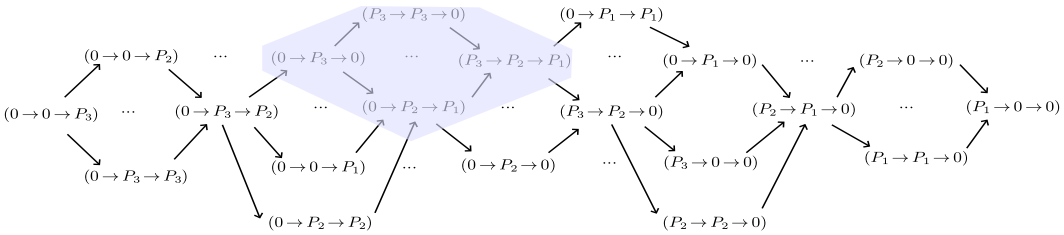
$$Q \ : \ 1 \ \xrightarrow{\alpha} \ 2 \ \xrightarrow{\beta} \ 3$$

，其中 $\alpha\beta = 0$。

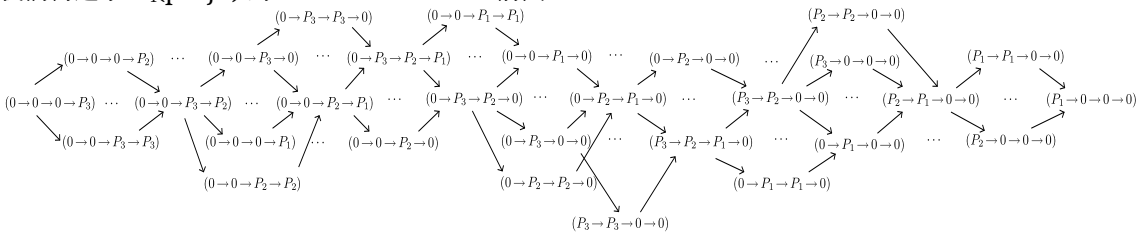
根据 I. Reiten 在 [[21], 定理 4.4], 以及 D. Happel 和 D. Zacharia 在 [[19], 命题 3.3], 中的结果，我们知道 s.gl.dim(Λ) $= 2$。现在，我们应用算法 3.24。首先，我们构造 $C_2(\text{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图：



我们注意到，$C_2(\text{proj}\Lambda)$ 中的复形 $X := P_3 \longrightarrow P_2$ 满足首尾胞腔均非零。因此，我们构造 $C_3(\text{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图：



现在，复形 $X := P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1$ in $C_3(\text{proj}\Lambda)$ 满足首个和最后一个胞腔均非零，因此我们构造了 $C_4(\text{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图



在这一步中，$C_4(\text{proj}\Lambda)$ 中的所有复形都满足首个或最后一个胞腔为零，因此由定理 3.22 可得 s.gl.dim(Λ) $= 2$。

注记 4.6. 在上述例子中

i. $C_4(\text{proj}\Lambda)$ 中的每个不可约态射和每个几乎分裂 $\mathcal{E}_4$-序列，都是 $C_3(\text{proj}\Lambda)$ 中的不可约态射和几乎分裂 $\mathcal{E}_3$-序列，反之亦然，差一个平移。这就是命题 3.19 的结果。

ii. 我们注意到，在上述 $C_3(\text{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图中，阴影标出的几乎分裂 $\mathcal{E}_3$-序列并不是 $C_2(\text{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图中的几乎分裂 $\mathcal{E}_2$-序列，因此可以说，在 $C_3(\text{proj}\Lambda)$ 中存在一个几乎分裂$\mathcal{E}_3$-序列，使其不是 $C_2(\text{proj}\Lambda)$ 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_2$-序列。这一事实可以推广。在 $C_{\eta+1}(\text{proj}\Lambda)$ 中存在一个几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列，使其不是 $C_\eta(\text{proj}\Lambda)$ 中的几乎分裂 $\mathcal{E}_\eta$-序列。由于 $\eta = \text{s.gl.dim}(\Lambda)$，因此存在 $Z \in K^b(\text{proj}\Lambda)$ 中的一个不可分解对象复形，其非零且满足 $\ell(Z) = \eta$。根据注 2.10 iii.， $Z \in C_{\eta+1}(\text{proj}\Lambda)$ 和 $Z \notin C_\eta(\text{proj}\Lambda)$，再次根据注 2.10 i.， Z 不是 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-不可分解对象投射，于是根据 R. Bautista、M.J. Souto Salorio 和 R. Zuazua 在 [[6],定理 8.2] 中的结论，在 $C_{\eta+1}(\text{proj}\Lambda)$ 中只有一个以 Z 结尾的几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列

$$X \to Y \to Z$$

由于 $Z \notin C_\eta(\text{投射}\Lambda)$，因此上述几乎分裂 $\mathcal{E}_{\eta+1}$-序列不属于$C_\eta(\text{投射}\Lambda)$。

例 4.7。在本例中，我们将使用两种技术计算有限维 k-代数的强全局维数。本例还表明，强全局维数并不等同于整体维数。在 [[7], 例 4.2。1],Y. Calderón-Henao 计算了 Λ 的强全局维数和 Λ 的整体维数，其中 Λ 路径代数由以下箭图给出

$$Q \ : \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5 \xrightarrow{\eta} 6$$

其中 $\alpha\beta = \beta\gamma = \delta\eta = 0$。

也就是说，

$$\text{gl.dim}(\Lambda) = 3 \quad \text{and} \quad \text{s.gl.dim}(\Lambda) = 4.$$

实际上，Y. Calderón-Henao 找到了长度最长的不可分解对象，其长度为最长，即为

$$Z\colon P_6 \longrightarrow P_5 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1.$$

我们注意到，该技术也被使用于 [[11], 第 4] 节，作者为C. Chaio、A.G. Chaio、和I. Pratti。

现在，我们可以使用算法 3.24 计算强全局维数。对于这个代数，$C_n(\text{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图极其庞大，因此我们不在此绘制。不过，我们观察到，复形 Z 是 $C_5(\text{proj}\Lambda)$ 中一个首尾两个胞腔均非零的不可分解复形。因此，我们构建了 $C_6(\text{proj}\Lambda)$ 的 Auslander-Reiten 箭图，并注意到 $C_6(\text{proj}\Lambda)$ 中每个不可分解复形的首个或最后一个胞腔都为零，所以根据定理 3.22，我们也有 $\text{s.gl.dim}(\Lambda) = 4$。

致谢

我们感谢 CODI（安蒂奥基亚大学，UdeA）和 Fundación para la Promoción de la Investigación y la Tecnología，这些机构为本研究提供了支持。我们还感谢 Colciencias（2015年第727号征集），该机构资助了本研究的一位作者。

参考文献

[1] Alvares, E.R., Fernandes, S. M., and Giraldo H., Auslander-Reiten 三角的形状，《代数与表示论》，第23卷，第6期，（2020年），2257-2274。

[2] Alvares, E.R., Le Meur, P., Marcos, E.N.: 分段遗传代数的强全局维数，《代数杂志》481，（2017年），36-67。[3] Bautista, R. 关于导出驯性代数，《墨西哥数学会公报》13，（2007年），25-54。[4] Bautista, R. 投射模之间的态射范畴，《代数通信》32（11），4303-4331（2004年）。[5] Bautista, R., Souto Salorio, M.J., 有界导出范畴中的不可约态射，《纯粹与应用杂志》215，866-884（2011年）。[6] Bautista, R., Souto Salorio, M.J. and Zuazua, R., 固定大小复形的几乎分裂序列，《代数杂志》287，（2005年），140-168。[7] Calderón-Henao, Y., 关于分段遗传代数的研究，巴拉那联邦大学，硕士论文，（2013年）。[8] Calderón-Henao, Y., Gallego-Olaya, F., and Giraldo, H., Frobenius范畴中的Auslander-Reiten 三角，预印本。[9] Calderón-Henao, Y., Giraldo, H., and Marulanda-Vélez, J., 关于模的稳定范畴中重复代数上的不可约态射与Auslander-Reiten 三角。《代数与表示论》。https://doi.org/10.1007/s10468-022-10166-x。[10] Chaio, C., Chaio, A.G., and Pratti, I., 关于非齐次管及有界导出范畴中类型为$\mathbb{Z}A_\infty$ 的分支，《代数与表示论》24，327-356（2021年）。[11] Chaio, C., Chaio, A.G., and Pratti, I., 关于固定大小复形范畴的类型与强全局维数，《代数与表示论》22，（2019年），1343-1370。[12] Chaio, C., Pratti, I., and Souto Salorio, M.J., 关于固定大小复形范畴中的截面路径，《代数与表示论》20，（2017年），289-311。[13] Dräxler, P., Reiten, I., Smalø, S.O., Solberg, Ø., 并附有Keller, B.的附录，正合范畴与向量空间范畴，《美国数学会汇刊》第351卷，第2期，（1999年），647-682。[14] Gabriel, P., Roiter, A.V. 有限维代数的表示，载于：Kostrikin, A.I., Shafarevich, I.V（编），《代数 VIII》，载于：《数学科学百科全书》第73卷，施普林格，柏林，1992年。[15] Gallego-Olaya, F., 强全局维数、有限长度复形与导出范畴之间的关系，安蒂奥基亚大学，硕士论文，（2020年）。[16] Giraldo, H. and Merklen, H. 复形范畴的不可约态射，《代数杂志》321，（2009年），2716-2736。[17] Grivel, P 导出范畴与导出函子，载于A. Borel等编，《代数D模》，《数学展望》第2卷，学术出版社，奥兰多，佛罗里达州，（1987年），1-108。[18] Happel, D.《有限维代数表示论中的三角范畴》，伦敦数学会讲义系列119，剑桥大学出版社，（1988年）。[19] Happel, D. and Zacharia, D., 分段遗传代数的同调刻画，《数学杂志》260，（2008年），177-185。[20] Quillen, D. 高阶代数K理论，1，《数学讲义》第341卷，施普林格，柏林，1973年，第85-147页。[21] Reiten, I. 倾斜理论与拟倾斜代数，《国际数学家大会论文集》2，（1998年），109-120。[22] Vossieck, D., 具有离散导出范畴的代数，《代数杂志》243，（2001年），168-176。

安蒂奥基亚大学数学研究所，哥伦比亚麦德林67街53-108号。大都会技术学院（ITM）电子邮箱：yohny.calderon@udea.edu.co 电子邮箱：yohnycalderon8670@correo.itm.edu.co

数学研究所，安蒂奥基亚大学，67街53-108号，麦德林，哥伦比亚。电子邮箱：cristianf.gallego@udea.edu.co

数学研究所，安蒂奥基亚大学，67街53-108号，麦德林，哥伦比亚。电子邮箱：hernan.giraldo@udea.edu.co