禁子图复杂性框架 III：次三正则图上的问题何时可解

MatthewJohnson ！杜伦大学，杜伦，英国
Barnaby Martin ✉杜伦大学，杜伦，英国
SukanyaPandey ！乌得勒支大学，乌得勒支，荷兰
Daniël Paulusma ✉杜伦大学，杜伦，英国
Siani Smith ✉
U布里斯托大学和海尔布隆数学研究所，英国布里斯托
Erik Jan vanLeeuwen ！乌得勒支大学，乌得勒支，荷兰

arXiv:2305.01104v1 [cs.DS] 1 May 2023

摘要

对于任意有限图集$\mathcal{H}=\{H_1, \ldots\ldots, H_p\}$，若一个图不包含其中任何一个图作为子图，则称其为$\mathcal{H}$-子图自由图。近期研究中，人们对元分类进行了探讨：这些分类表明，若图问题满足某些预先规定的条件，那么它们在$\mathcal{H}$-子图自由图类上的复杂度便可确定。我们延续这项研究，聚焦于在有界树宽图类或最大度至多为 3 的图类上具有多项式时间解的问题，并考察当 H 为连通图时，这些问题在 H-子图自由图类上的复杂度。通过这一方法，我们对（独立）反馈顶点集、连通顶点覆盖、着色和匹配割给出了全面分类，从而解决了若干开放问题。

值得强调的是，为了证明独立反馈顶点集属于这一类问题，我们首先证明了它可以在最大度为 3 的图上用多项式时间求解。我们进一步证明，除四顶点完全图外，此类中的每个图都存在一个最小规模反馈顶点集，且该集合同时也是独立集。

2012年ACM主题分类 计算数学 → 图论；计算理论 → 图算法分析；计算理论 → 问题、归约与完备性

关键词与短语 禁用子图；独立反馈顶点集；树宽

1 引言

如果 G 可通过顶点删除和边删除从 G 得到，则称图 G 包含图 H 作为子图；否则称 G 为 H-子图自由。如果 H 仅通过仅 顶点删除即可从 G 得到，那么 H 是 G的诱导 子图；否则 G 称为 H-自由。关于 H-子图自由图的图问题复杂性分类，研究还不多（相比之下， H-自由图上的问题受到了更多关注）。独立集、支配集、最长路径 [1], 最大割 [14] 和列表着色 [11] 均已有相关研究。这些论文给出了完整分类，阐明了即使对于$\mathcal{H}$-子图自由图，这些问题的复杂性如何，其中$\mathcal{H}$ 是任意有限图集（对于图集$\mathcal{H}$，若图 G 对于每个 $H \in \mathcal{H}$均为 H-子图自由，则称 G 为$\mathcal{H}$-子图自由）。这类分类似乎很难得到。例如，对于着色，目前只有部分分类[12]。因此——同时也注意到，关于.....的分类。

2 禁用子图的复杂性框架

上述问题均相同——在 [13] 中，随着一种新框架的提出，人们开发出了一种系统性方法；我们将在介绍一些术语后对其进行描述。

对于整数 $k \geq 1$，图的一条边 $e = uv$ 的 k-细分是指将 e 替换为一条长度为 $k+1$、端点为 u 和 v 的路径（以及 k 个新顶点）。图的 k-细分是指在对图 G 的每条边进行 k-细分后得到的图。对于图类 $\mathcal{G}$和整数 k，令 $\mathcal{G}^k$ 表示 $\mathcal{G}$中各图的 k-细分。设 Π 是一个图问题。如果存在整数 $k \geq 1$，使得对于次三正规图类 $\mathcal{G}$满足以下条件：若 Π 对于 $\mathcal{G}$是 NP 完全的，则对于每个整数 $p \geq 1$，Π 对于 $\mathcal{G}^{kp}$ 也是 NP 完全的，那么我们称 Π 在次三正规图的边细分下是 NP 完全的 。如果图问题 Π 满足以下三个条件，则称其为*C123* 问题（属于该框架）：

C1. Π 对于每个有界树宽的图类都可在多项式时间内求解；**C2.** Π 对于次三正规图类是 NP 完全的；以及**C3.** Π 在次三正规图的边细分下是 NP 完全的。

如 [13], 所示，只要 $\mathcal{H}$ 大小有限，[13], C123 问题便可对禁止 $\mathcal{H}$ 子图的图进行完整的复杂性分类。细分爪图 是通过对爪图（四顶点星图）的每条边细分零次或多次得到的图。两个顶点不相交的图 G_1 和 G_2 的不交并 的顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$，边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$。集合 $\mathcal{S}$ 由细分爪图与路径的不交并构成。现在，设 Π 是一个 C123 问题。对于有限集 $\mathcal{H}$，若 $\mathcal{H}$ 包含一个来自 $\mathcal{S}$ 的图，则该问题 Π 在禁止 $\mathcal{H}$ 子图的图上可高效求解；否则，该问题在计算上是困难的。 [13]。

C123 问题的示例包括独立集、支配集、列表着色、奇圈横截集、最大割和斯坦纳树；完整列表请参见 [13] 。因此，我们看到了该框架在推动确定无 $\mathcal{H}$ 子图图类问题的复杂性方面所具有的作用。然而，仍有许多图问题不属于 C123 问题。在 [16], 中，研究人员针对满足 C1 和 C2 但不满足 C3 的问题取得了研究成果。这类问题称为 C12 问题，包括 k-诱导不相交路径、C_5-着色、哈密顿圈和星 3-着色 [16]。此外，在 [3], 中，斯坦纳森林作为一个满足 C2 和 C3 但不满足 C1 的问题得到了研究。我们考虑以下研究问题：

对于H-子图无关图，C13 问题 ——也就是满足 *C1* 和 *C3*、但不满足 *C2* 的问题——表现如何？我们还能对其计算复杂性进行分类吗？

我们先指出，C13 问题的定义中有些冗余：如果一个问题不满足 C2，那么 C3 就自动成立。尽管如此，我们仍保留这一术语，以维持与 [13] 方法的联系。要证明一个问题是 C13 问题，需要满足两个要求：该问题在有界树宽类和次三正则类上都能高效求解。事实上，C123 问题的可解情形依赖于这些问题满足 C1。

▶**定理 1** ([13])。 设 Π 是一个满足 *C1* 的问题。对于有限集 H，如果 H 中包含一个来自 S 的图，那么问题 Π在 H-子图无关图上可以高效求解。

作为实现 C13 问题完整二分定理的重要一步，我们将研究范围限定为 H-子图无关图，其中 H 是连通的。我们重点关注五个著名的 NP 完全问题，后文将看到，它们并非 C123 问题，而是 C13 问题：反馈顶点集、独立反馈顶点集、连通顶点覆盖和匹配割。下面介绍这些问题。除一个例外，我们可以根据已有结果判定它们是 C13 问题。

对于图 $G = (V, E)$，集合 $W \subseteq V$ 是 G 的反馈顶点集，如果G 中的每个环都包含 W中的一个顶点。此外，如果 W 是一个...

独立集。我们注意到，G 具有大小为 k 的反馈顶点集，当且仅当 G 的二次细分具有大小为 k的独立反馈顶点集。一个图 G 可能不包含独立反馈顶点集：例如，考虑一个含有四个或更多顶点的完全图。（独立）反馈顶点集问题是：对于某个给定整数 k，判定图 G是否具有大小至多为 k 的（独立）反馈顶点集。

若集合 $W \subseteq V$ 的每条边都与 G 中的某个顶点关联，且 W 所诱导的子图是连通的，则称 $W \subseteq V$ 为 G 的 连通顶点覆盖。连通顶点覆盖问题是判断给定整数 k 时，图 G 是否存在大小至多为 k 的连通顶点覆盖。G 的 k-着色是一个函数 $c\colon V \to \{1,\ldots,k\}$，使得对于每条边$uv \in E$, $c(u) \neq c(v)$。着色问题是判断给定整数 k 时，图 G 是否存在 k-着色。连通图的 匹配割是一个既为匹配（两两不相邻的边集）又为边割的边集，也就是说，移除该边集会使图不连通。匹配割问题是判断一个连通图是否存在匹配割。

1.1 我们的结果

反馈顶点集问题在次三正则图上确实存在多项式时间算法 [22]，因此不满足 C2；然而，此前尚未发现适用于次三正则图上独立反馈顶点集问题的多项式时间算法。在第2节中，我们证明以下结果，以弥补文献中的这一空白。

▶**定理 2**。 每个连通次三正规图 $G \neq K_4$ 的最小独立反馈顶点集同时也是其最小规模反馈顶点集。此外，可以在多项式时间内找到 G 的最小独立反馈顶点集。

因此，反馈顶点集和独立反馈顶点集问题都是 C13。其他问题也都是 C13。具体而言，连通顶点覆盖满足 C1 [2]，且在次三正则图 [22] 上可在多项式时间内求解，因此不满足 C2；而着色也满足 C1 [2]，但由于 Brooks定理 [5]，不满足 C2。最后，匹配割满足 C1 [4]，但由于存在一种针对次三正则图 [6]的多项式时间算法，因此不满足 C2。

星图 $K_{1,\ s}$ 是指包含一个度为 s 的顶点，且其邻点的度均为 1 的图。细分星是通过细分星图的一条或多条边得到的。

▶ **定义 3.** $S_{w,x,y,z}$ 是通过分别将$K_{1,4}$, $w-1$, $x-1$, $y-1$和 $z-1$ 的每条边细分而形成的图。每条细分后的边称为一条触手。度为4 的顶点是中心。

在第3节中，我们研究当 H 为细分星时 H-子图自由图的结构，并在第4节中利用这一点，提出一种适用于 C13 问题的一般方法，该方法还需要一些额外性质（即在可能移除桥之后，问题可以逐个连通分量求解）。这足以得到以下结果。

▶**定理 4.** 设 q 和 r 为正整数。以下问题均可在$S_{1,1,q,r}$-子图自由图上于多项式时间内求解：反馈顶点集、独立反馈顶点集、连通顶点覆盖、着色 和匹配割。

在第5节中，我们得到一个困难性结果。

▶**定理 5.** 反馈顶点集 和 独立反馈顶点集 在最大度为4的 $S_{2,2,2,2}$-子图自由图类上是NP-完全的。

1.2 研究现状综述

现在我们陈述每个问题的复杂性分类。这些在第 6 节中证明的结果，将上述结果与 [6, 8, 9, 10, 12, 15,18, 20, 21] 中的若干其他结果结合起来。上述论文中没有一篇针对 C13 问题提出一般性结果。不过，我们注意到，例如，当 H 包含一个环时，其困难性源自关于有界围长类的既有结果；这些结果针对每个问题分别证明，但通常采用了类似的技术。还有一些结果仅适用于其中一个或两个问题。

▶**定理 6**。设 H 为连通图。对于 H-子图无关图，当且仅当 $H \in S \cup \{S_{1,\,1,\,q,\,r} \mid q \geq r \geq 1\}$ 时，反馈顶点集和独立反馈顶点集可在多项式时间内求解。当 H 包含一个环或多于一个度至少为3 的顶点，或 $H \in \{K_{1,\,5}, S_{2,\,2,\,2,\,2}\}$ 时，它们是NP完全问题。

▶**定理7**。设 H 为一个连通图。在 H-子图自由图上，当 $H \in S \cup \{S_{1,1,q,r} \mid q \geq r \geq 1\}$时，连通顶点覆盖 问题可在多项式时间内求解。如果 H 包含一个环或$H = K_{1,5}$，则该问题是NP-完全的。

以下结果指的是图 1 中定义的树。

▶定理 *8*。设 H 是连通图。在不含 H 子图的图上，若 $H \in S \cup \{S_{1,1,q,r} \mid q \geq r \geq 1$，或若 H 是最大度为4且至多有七个顶点的森林，则着色可在多项式时间内求解。若 H 含有环，或含有 $H \in \{K_1, S_2, 2, 2, 2\}$，或若 H 含有树 T_1 的一个细分作为子图，或 H 含有将树 T_2 的边 $st\ p$ 细分 $0 \leq p \leq 9$ 次后所得的树作为子图，或 H 含有树 $S_2, 2, 2, 2, T_4, T_5$，T_6 之一作为子图，则该问题是 *NP* 完全。

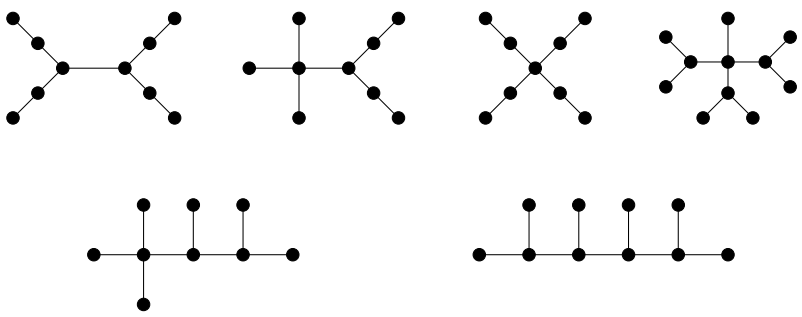


图 1 树 T_1、.....、T_6 的示意图，转载自 [12]；注意 $T_3 = S_{2,\,2,\,2,\,2}$。

▶**定理 9**。设 H 为连通图。在无 H子图的图上，当 $H \in S \cup \{S_{1,\,1,\,q,\,r} \mid q \geq r \geq 1\}$ 时，匹配割 可在多项式时间内求解。当 H 包含一个环或 $H = K_{1,\,5}$ 时，该问题是 NP-完全的。

次三正规图的两个独立反馈顶点集

在 [22], Ueno、Kajitani 和 Gotoh 给出了一种用于次三正则图上反馈顶点集问题的多项式时间算法。本节中，我们通过证明独立反馈顶点集问题在次三正则图上也可在多项式时间内求解，来证明定理 2。我们将说明这两个问题十分相似，因为对于任意次三正则图，都可以找到一个大小最小的

同时也是独立集的反馈顶点集（有一个例外情况）。由于这些问题可以逐个连通分量求解，我们只考虑连通图。

事实上，我们将证明一个定理 2 的推广结果，稍后会派上用场。我们需要先给出一些定义。仙人掌图是一种图，其中任意两个环都没有公共边。如果任意两个环都没有公共顶点，则称仙人掌图为良仙人掌图（每个次三次仙人掌图都是良仙人掌图，因为如果两个环共享一个顶点但没有公共边，就能找到一个度为 4 的顶点）。如果每个顶点恰好属于一个环，则称仙人掌图为非常良仙人掌图。

▶**定理 10.** 设 G 是一个连通的次三正规图。那么， G 的最小独立反馈顶点集也是 G 的最小规模反馈顶点集，当且仅当 $G \neq K_4$。此外， $G \neq K_4$ 存在一个仅包含度为3 的顶点的最小独立反馈顶点集，当且仅当 G 不是非常良仙人掌图。存在一种多项式时间算法，可以求出最小独立反馈顶点集；如果 G不是非常良仙人掌图，该算法还会求出一个仅包含度为3的顶点的集合。

证明。 可以看出，该证明蕴含了一种多项式时间算法，用于寻找一个大小不超过给定反馈顶点集的独立反馈顶点集。

K_4 的一个反馈顶点集至少包含两个顶点，因此 K_4 不存在独立反馈顶点集。在非常良仙人掌图中，反馈顶点集的最小大小等于环的数量，并且如果允许包含度为 2 的顶点，就可以很容易地找到这样一个独立集。（例如，任意选取一个顶点 v ，然后在每个环中选取距离 v最远的顶点，从而构造一个独立反馈顶点集。）如果存在 k 个（互不相交的）环，那么考虑到非常良仙人掌图的树状结构，有 2($k-1$) 个度为3的顶点，它们可以视为 $k-1$ 相邻对。因此，不存在由 k 个度为3的顶点组成的独立集。

因此，假设 $G \neq K_4$ 不是非常良仙人掌图。当然，我们也不妨假设 G 不是树。令 F 为 G的一个反馈顶点集。为了证明该定理，我们必须证明可以找到 G 的一个独立反馈顶点集，其大小不超过 F。我们可以假设 F 只包含度为3的顶点，因为任何度为 2 的顶点都可以替换为距离最近的度为3的顶点。由于 G 既不是树也不是环（环是非常良仙人掌图），我们知道 G 有度为3的顶点。

令 $J = \emptyset$。我们的方法是向 J 中添加顶点，直到它构成一个独立反馈顶点集。下面给出一些简单但有用的结论：

1. F 是一个反馈顶点集，且只包含度为3的顶点，**2.** $J \subseteq F$，并且**3.** J 是 的一个非分离独立集；也就是说，<style id='24'}中的任意两个顶点之间都没有边相连，且 $G - J$ 是连通的。

我们将反复修改 F 和 J，使这三个结论始终成立，同时 F 的大小不会增加，并且它仍然是一个反馈顶点集。我们可以进行以下修改，而不与这三个结论相矛盾。

- 如果 x 在 J 中没有邻点，且不是 $G - J$中的割点，我们可以将顶点 $x \in F \setminus J$ 添加到 J 中。如果 $x \in F \setminus J$，那么当 y 是 $G - (F \setminus \{x\})$ 的每个环都包含的顶点，且其度为3时（也就是说， y 属于 G 中所有包含 x、但不包含 F中其他顶点的环），我们可以将 F重新定义为 $F \setminus \{x\} \cup \{y\}$。

我们的首要目标是进行修改，使得 $G - J$ 成为一个任意两个环都没有公共顶点的图；也就是说，它是一个良仙人掌图。

▷ 命题11。我们可以修改 F和 J，直到 $G - J$成为良仙人掌图。

证明。 假设 $G - J$ 包含两个有公共顶点的环，因此，由于 G 是次三次图，这两个环有一条公共边；否则结论已成立。考虑由$G - J$ 中两个有公共边的环所 K 诱导的子图（因此 K 是 2-连通的，且没有割点）。显然， F必须至少包含一个 K的顶点；令 r 为这样一个顶点。

如果 r 在 K中的度为 3，那么我们可以将其加入 J，因为它在 $G - J$中有三个邻点（所以在 J中没有邻点），并且它不是 $G - J$中的割点，因为 $K - \{r\}$ 是连通的。

否则， r 在 K中的度为 2。沿着 K 中远离 r 的边向任一方向前进，令 p 和 q 分别为在 K 中遇到的第一个度为 3 的顶点（根据 K的定义， $p \neq q$ ）。令 r' 为沿着 K 中朝向 p的路径，从 r 出发遇到的第一个度为 3 的顶点。

如果 r 有一个邻点 $j \in J$，那么我们可以将 F 重新定义为 $F \setminus \{r\} \cup \{r'\}$ ，因为 G 中任何包含 r 的环也包含 j 或 r'。反过来，假设 r 在 J中没有邻点。令 r'' 为 r 在 $G - J$中、但不在 K中的邻点。如果 r 不是 $G - J$中的割点，那么我们可以将 r 加入 J。如果 r 是 $G - J$中的割点，那么 $G - J$ 中没有环包含边 rr''。因此，我们同样可以将 F 重新定义为 $F \setminus \{r\} \cup \{r'$</style>}。

因此，我们要么向 J 中添加一个顶点，要么修改 F，用一个在 K 中距离 p 更近的顶点替换其中一个顶点。重复此过程后，我们要么向 J 中添加一个顶点，要么修改 F 使其包含 p；在后一种情况下，如上所述，我们可以将 p 添加到 J 中。因此，如果 $G - J$ 含有两条共用一条边的环，我们就可以增大 J 的大小。由此，最终可以假设 $G - J$ 不含这样的环对，且是一个良仙人掌图。命题11的证明至此完成。

◁

令 $H = G - J$。. 根据命题11， H 中的环两两顶点不相交，并且该图具有树状结构：如果将每个环替换为一个顶点，就会得到一棵树。由于 F 必须包含 H 的每个环中的至少一个顶点，因此，如果我们向 J 中添加从 H 的每个环中任选的一个顶点，所得集合不会比 F 大。如果我们能以某种方式选取这些顶点，使得 J 是一个独立集，且每个顶点的度都为3，那么证明就完成了。因此，我们必须说明如何从 H 的每个环中选取一个度为3的顶点，使这些顶点与 J 的并集成为独立集；必要时可以再做一些小幅调整。要论证这些调整，需要 H 是连通的，因此前面要求 J 非分离是有必要的。

如果 H 不含任何环，那么 J 已经是一个独立反馈顶点集，无需证明。否则，设 C 是 H 的一个环。令 $S(C)$ 为顶点集：对于 H 中除 C之外的每个环 C' ，该集合包含 C' 中距离 C 最近的那个顶点，其中距离是在 H中计算的。见图 2。 $S(C)$中的每个顶点 v 在 H 中的度都为 3，因为它有两个邻点位于环 C' 上，还有一个邻点不在 C' 中，且位于从 v 到 C 的路径上。因此， $S(C)$中没有顶点与 J中的顶点相邻。此外，显然 $S(C)$是一个独立集。因此， $J \cup S(C)$ 是一个独立集，覆盖了 G 中除 C之外的每个环。对于 C中的顶点 v，令 $F(v) = J \cup S(C) \cup \{v\}$。如果我们能找到一个环 C，其中包含一个度为 3 的顶点 v，且该顶点既不与 J 相邻，也不与 H中的其他环相邻，那么 $F(v)$就是一个独立反馈顶点集，证明即告完成。

反之，假设找不到这样的环。注意，这意味着 H 中的每个顶点都属于某个环。（如果存在一个不在任何环中的顶点 w，那么令 v 为环中距离 w 最近的顶点，则 F（v）是度为 3 顶点的独立反馈顶点集；另见图 2。）因此， H 是一个非常良仙人掌图，并且根据假设， $J \neq \emptyset$。

设 j 是 J 中的一个顶点，它在 H 中的邻点为 v_1、 v_2 和 v_3。假设这三个顶点都位于 H 的同一个环 C 上。如果 C 是一个 3-环，那么 {j、 v_1、 v_2、 v_3} 会诱导出 K_4，矛盾。因此，我们可以假设 v_1 和 v_2 不相邻。于是， $J_1 = J \setminus \{j\} \cup \{v_1$、 $v_2\} \cup S(C)$ 是一个由度为3的顶点构成的独立反馈顶点集，并且 $|J_1| = |F|$。简单验证可知： J_1 覆盖了所有环，因为 v_1 和 $S(C)$ 覆盖了 H 的所有环，而每个包含 j 的环都至少包含 v_1 和 v_2 中的一个； J_1 是独立的，因为 v_1 和 v_2 在 H 中的度为 2，所以没有

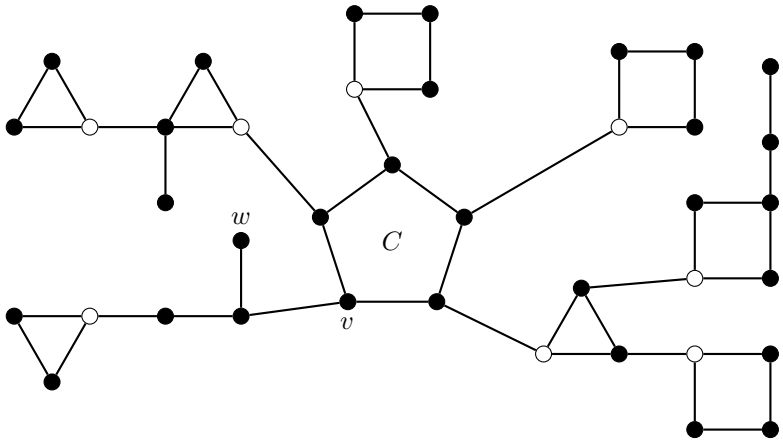


图 2 一个漂亮的次三次仙人掌图。中心的 5-圈记为 C，白色顶点构成集合 $S(C)$。注意，w 不属于任何环，而 v 是环中距离 w 最近的顶点。因此，$S(C) \cup \{v\}$ 是该图的一个独立反馈顶点集。

在 J 中的其他邻点，且与不属于 C 的顶点（例如 $S(C)$ 中的顶点）不相邻；而 $S(C)$ 中的顶点在 H 中的度为3，因此在 J 中没有邻点。

反之，假设 v_1、v_2 和 v_3 并不全部属于同一个环。设 C 为包含 v_1 的环，并假设 v_2 和 v_3 不属于同一个环（其中一个可能属于 C）。那么，$J_2 = J \setminus \{j\} \cup \{v_1\} \cup S(C)$ 是由度为 3 的顶点和 $|J_1| = |F| - 1$组成的一个独立反馈顶点集。快速检查如下：所有环都被 J_2覆盖，因为 v_1 和 $S(C)$覆盖了 H 中的环，而每个包含 j 的环都包含 v_1，或者同时包含 v_2 和 v_3；所有从 v_2 到 v_3 的路径（不包含 j）都经过 J 中的某个顶点或 $S(C)$中的某个顶点，因为它们在 H中的不同环内；J_2 是独立的，因为 v_1在 H 中的度为 2，因此和之前一样，在 J 或 $S(C)$中没有其他邻点；而 $S(C)$中的顶点在 H 中的度为 3，因此在 J中没有邻点。◀

3 排除细分星作为子图的图：结构

回顾一下，图 G 的树深度是满足以下条件的森林 F 的最小高度：对于 G 中的任意一对顶点，其中一个是另一个在 F 中的祖先。众所周知，图的树宽至多为其树深度。本节旨在证明，对于某些 H，H-子图自由图具有有界树深度。由此可知，在树宽有界的图类上易于求解的问题，在这些图类上也易于求解。在介绍我们的结果之前，我们需要引用 [19]中的以下结果。

▶**定理 12** ([19]). 设 G 是一棵树深度至少为 d 的图。那么 G 含有一个同构于长度至少为 d 的路径的子图。

接下来的两个定理讨论图 $S_{w,\,x,\,y,\,z}$。根据定义 3，该图由四条共享一个端点的路径构成。稍微宽泛地使用术语，我们将用 叶 仅指与中心相邻且度为 1 的顶点。

▶**定理 13.** 设 r 为一个正整数。那么，不是次三次的连通 $S_{1,1,1,r}$-子图自由图的子类具有有界树深度。

证明。 设 G 是一个连通的、不含 $S_{1,\,1,\,1,\,r}$ 子图的图，且它不是次三次图，因此含有一个顶点 v_0，其邻点为 v_1，v_2，v_3，v_4。我们将证明 G 的树深度至多为 $2r + 2$。

反设 G 的树深度至少为 $2r+3$。图 $G\setminus\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 的树深度必定至少为 $2r-2$（因为向图中添加一个顶点，树深度至多增加一），因此，根据定理 12，它必定包含一条长度至少为 $2r-2$ 的路径 P。设 Q 是 G 中连接 P 与 v_0 的一条最短路径（这样的路径必定存在，因为 G 是连通的）。设 z 是 P 和 Q 相交的顶点。设 P' 是 P 中以 z 为一个端点的最长子路径。由于 P' 至少是 P 长度的一半，且 Q 至少包含一条边，因此路径 $P'\cup Q$ 至少包含 r 条边。于是，G 中存在一个与 S_1,1,1,$_r$ 同构的子图；中心为 v_0，$P'\cup Q$ 是长度为 r 的触手，而 v_1、v_2、v_3、v_4 中有三个是这三个叶子（因为这四个顶点中至多有一个属于 Q，且没有一个属于 P'）。这一矛盾完成了证明。◀

图是连通的这一假设是必要的：由一条路径和一个 $K_{1、4}$ 的不交并构成的所有图组成的类并非次三次，但其树深度无界。

现在考虑所有这样的连通图类：每个图都是一条路径和一个 $K_{1,4}$ 的并，其中 $K_{1,4}$ 的一个叶子与路径的端顶点重合。这是一个连通、非次三次、无 $S_{1,1,q,r}$-子图的图类，而且其树深度仍无界。因此，在下面这个定理 13 的类比中，我们需要增加一个性质。如果桥的两个关联顶点的度都不为 1，则称该桥为真桥。如果一个图不含真桥，则称其为准无桥。

▶**定理 14**。令 q 和 r 为正整数。则不含连通 $S_{1,\ 1,\ q,\ r}$-子图、非次三次且准无桥的图的子类具有有界树深度。

证明。设 G 是一个连通的准无桥 S_1,1,$_{q,r}$-子图自由图，且不是次三次图，因此含有一个顶点 v_0，其邻点为 v_1,v_2,v_3,v_4。我们将证明 G 的树深度至多为 $2(q+r+3)^2+6$。反设 G 的树深度至少为 $2(q+r+3)^2+7$。图 $J=G\setminus\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 的树深度必须至少为 $2(q+r+3)^2+2$，因此根据定理 12，它必定包含一条长度至少为 $2(q+r+3)^2+2$ 的路径 P。令 z 为 P 的中间顶点。我们证明以下断言。

▷ 断言 15. 若 G 中存在一个环 C，它包含 z，且还包含一个顶点 $v\neq z$，该顶点有两个邻点 a 和 b 不在 C 上，则 G 包含一个与 $S_{1,1,q,r}$ 同构的子图。

证明。大型装饰环是这样一种图：包含一个至少有 $q+r+1$ 条边的环，以及另外两个顶点，这两个顶点分别通过一条边连接到环上的同一个顶点；后一个顶点称为中心。如果我们在 G 中找到一个大型装饰环，那么问题就解决了，因为它包含一个与 $S_{1,1,q,r}$ 同构的子图（中心相同，并且该子图是通过删除环的一条或多条边得到的）。令 C^+ 为 C、顶点 a 和 b 以及边va 和 vb的并。如果 $|C|\geq q+r+1$，那么 C^+ 就是一个大型装饰环。

因此，设 $|C|\leq q+r$。考虑 P与 V（C^+）的交集。 P的一个极大子路径，如果其内部顶点不属于 V（C^+），则称为 P的一个区间 。注意， P至多有 $|C^+|+1\leq q+r+3$ 个区间。如果 P的所有区间长度均至多为$q+r-1$，那么 P自身的长度至多为（$q+r+3$）（$q+r-1$） $<$（$q+r+3$）^{2},，矛盾。因此，至少有一个区间的长度至少为 $q+r$；我们称这样的区间为长区间。图 3对此作了说明。

假设存在一个长区间 L，其两个端点 x 和 y 都在 $V(C^+)$ 中。那么，在 C^+ 上存在从 v 分别到 x 和 y 的最短（可能是平凡的）路径 S 和 T，除 v外，它们顶点不相交。由于 x 和 y 不同， L、 S 和 T 的并构成一个至少有 $q+r+1$ 条边的环。由于 v 在 C^+中有四个邻点，其中两个不属于这个环；将这两个邻点（以及连接它们与v的关联边）与该环一起考虑，就得到一个以 v为中心的大型装饰环。

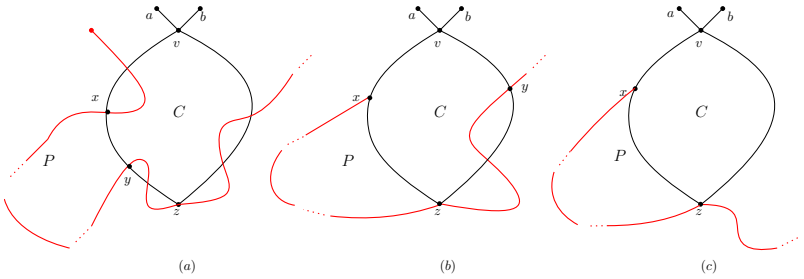


图 3 断言 15 的证明中的环 C 和路径 P，展示了三种情况：(a) 存在一个长区间，其两个端点都在 P中；(b) 存在两个顶点不相交的长区间；(c) 存在两个仅交于一个顶点的长区间。

因此，不存在两个端点都在 $V(C^+)$ 中的长区间，我们可以假设任意长区间都只有一个端点在 $V(C^+)$ 中。假设有两个长区间L_1 和 L_2，它们在 C^+ 中的端点分别为 x 和 y。如果 $x = y$，那么 L_1 和 L_2 是仅有的区间，且它们的并为 P。这意味着 P 仅在 x 处与 C^+ 相交，因此必有 $x = z$。于是， G 中存在一个子图，它同构于一个以z 为中心的 S_1,1,q,r ，其中 z 在 C 上的邻点为叶子， L_1 和 L_2 的子路径为触手。如果 $x \neq y$，那么在 C^+ 上存在从 v 分别到 x 和 y 的最短路径 S和 T，除 v外，它们顶点不相交。于是， G 中存在一个子图，它同构于一个以 v 为中心的S_1,1,q,r ，其中路径 S 和 T（可能由 L_1 和 L_2的子路径延伸）为触手，而 v 在 C^+ 中不属于 S 或 T 的两个邻点为叶子。

因此，只有一个长区间 L。由于其他区间都很短，它们的总长度至多为 $|C^+| \cdot (q + r) < (q + r + 3)^2$。因此， L 的长度至少为 $(q + r + 3)^2 + 2$。由于 L 包含了 P中超过一半的顶点， P 的中间顶点是 L 的内部顶点，因此不属于 C^+。这与 z 是 P 的中间顶点相矛盾，由此完成该断言的证明。◁

现在应用该断言。注意， v_0 和 z 不同，因为 z 属于 J，而 v_0 不属于 J。由于 G 是准无桥的，且 v_0 和 z 的度都不为 1，根据门格尔定理 [17]，存在两条从 v_0 到 z的边不相交路径 S、 T。如果 S 和 T 是内部顶点不相交的路径，那么它们的并构成一个包含 z 的环。我们可以假设 S 和 T 各自只包含 v_0 的一个邻点，否则我们就能找到捷径并重新定义它们。因此， v_0 有两个不在该环上的邻点，于是可以应用断言 15。如果 S和 T不是内部顶点不相交的，令 v' 为 $(V(S) \cap V(T)) \setminus \{z\}$ 中距 v 在 T上最远的顶点。考虑 T 中从 v' 到 z 的子路径 T'，以及 S中从 v'到 z的子路径 S'。根据定义， T'与 S不相交，因此 S'和 T'内部顶点不相交。于是，它们的并构成一个包含 z的环。此外， v' 的度至少为四，其中有两个邻点不在 S' 或 T'上。因此，我们可以应用断言 15。◀

4 排除细分星作为子图的图：算法

我们介绍前一节结构性结果的若干应用。

注意，反馈顶点集、独立反馈顶点集和着色问题可以逐个连通分量求解。从某种意义上说，连通顶点覆盖和匹配割也可以如此处理，因为非连通图都不是问题实例（但连通顶点覆盖的实例可能包含无边连通分量，不过这些分量可以忽略）。

10 禁用子图的复杂性框架

▶**定理 16.** 设 r 为正整数。如果满足以下条件，则问题 Π 可以在多项式时间内求解于 $S_{1,1,1,r}$-子图自由图上：

i) Π 可在次三正则图上用多项式时间求解，**ii)** Π 可在有界树深度图上用多项式时间求解，且**iii)** Π 可在非连通图上逐个连通分量求解。

证明。 </style}令 为一个 ,$1,1,r$-禁用子图图 G的连通分量。若 C 是次三正规图，则该问题可在多项式时间内求解。否则，根据定理 13， C 具有有界树深度，因此同样可在多项式时间内求解。最后，其各连通分量的解可在多项式时间内合并。◄

▶**定理 17。 </style}令 和 为正整数。若满足以下条件，则问题 可在 ,**$1,q,r$-禁用子图图上用多项式时间求解：

i) Π 可在次三正则图上用多项式时间求解，**ii)** Π 可在有界树深度图上用多项式时间求解，且**iii)** Π 可在具有真桥的图上求解，方法是通过多项式时间归约，将其转化为一族图实例，这些图要么具有有界树深度，要么是次三正则图。

证明。 令 H 是从实例 G 中得到的实例族之一，该实例属于 Π。由于 H 要么具有有界树深度，要么是次三正则图，因此该问题可以在多项式时间内求解。由于我们有一个归约，在求解该实例族中的所有实例后，就可以在 G上求解 Π 。◄

应用定理 17 最简单的方式是证明：如果可以在删除某个实例的真桥后得到的各个连通分量组成的族中的每个连通分量上求解 Π，那么这些解就能组合起来，为初始实例提供一个解（因为这些连通分量都是准无桥的，因此根据定理 14，它们必然具有有界树深度或是次三正则图。）

现在我们使用定理 17 来证明定理 4。本文中我们不应用定理 16，因为它所能得到的结果不过是我们通过定理 17 已经获得的结果的特例。尽管如此，定理 16 仍有潜在的应用，因为可能存在一些 C13 问题，可以逐个连通分量地求解，却无法通过找到定理 17 所要求的归约来求解。我们将在下面的证明中看到，通过归约求解独立反馈顶点集需要一番精细的论证，并需要仔细分析次三正则图上的可能解；定理 10 已提供了这方面的分析。

定理 4（重述）。设 q 和 r 为正整数。以下问题在 $S_{1,\ 1,\ q,\ r}$-子图无关图上可在多项式时间内求解：反馈顶点集、独立反馈顶点集、连通顶点覆盖、着色 和匹配割。

定理 4 的证明。为了说明该结果可由定理 17 立即推出，我们可以证明这些问题能够通过删除桥并逐个连通分量地考虑所得图来求解；对于某些问题，这显而易见，但对于另一些问题，我们需要找到不同的归约。

对于反馈顶点集，由于桥不属于环，删除桥后问题不会改变。

对于独立反馈顶点集问题，无法采用如此直接的方法：如果我们只是删除桥并在各个连通分量上求解，那么合并后的解可能不再独立（因为我们可能会同时选中已删除桥的两个端点）。我们必须更谨慎地论证。设 G 是一个 $S_{1,\ 1,\ q,\ r}$-子图自由图；考虑 G 的树状结构，并着眼于它的块——即删除桥后得到的连通分量。事实上，考虑 G 的一个子图：它由一个块及其所有

关联桥组成。其中一些子图可能是次三次的；我们称之为 *C* 型。对于其余子图，根据定理 14，我们可以假设存在一个常数 c，使得它们的树宽至多为 c；我们称这些子图为 *T* 型（请注意，这比定理 14 给出的结论更弱，因为我们可以假设其树深度有界）。如果这样的子图既是次三次的，树宽又至多为 c，我们就将其视为 T 型。我们可以假设 $c \geq 3$，因此非常良仙人掌图属于 T 型。如果同一类型的子图彼此重叠（因为它们由一条桥相连），那么它们的并也属于该类型（因为它们的并也分别是次三次的，或树宽至多为 c）。因此，尽可能合并同类型的重叠子图后，我们可以将 G 视为由 C 型和 T 型子图，以及连接一个 C 型子图与一个 T 型子图的桥组成。由于独立反馈顶点集是一个 C13 问题，我们可以在这些子图上求解。对 C 型子图求解之前，我们可以删除悬挂桥（这些桥在 G 中连接到 T 型子图），这样其关联顶点的度就至多为 2。由于非常良仙人掌图被视为 T 型子图，根据定理 10，我们知道在 C 型子图上找到的解不会包含与桥关联的顶点。因此，可以将这些解合并，得到 G 的一个同样独立的解。

对于连通顶点覆盖，设 G 是一个无 $S_{1,1,q,r}$-子图的图。显然，我们可以假设 G 是连通的，否则它没有连通顶点覆盖。对于独立反馈顶点集，考虑每个作为 G 的块的子图 J，并且也包括与该块关联的 G 的桥。注意到 J 是准无桥的，并且是无 $S_{1,1,q,r}$-子图的。注意到 W 的连通顶点覆盖必须包含与任意真桥关联的两个顶点，我们可知 W 在 J 的顶点上的限制是 J 的连通顶点覆盖，并且包含与 G 的桥关联的顶点。构造 J 意味着其连通顶点覆盖会包含 G 中与桥相邻的这些顶点。因此，我们可知存在一个归约，并且可以在 G 上求解该问题。

对于着色，若我们对删除桥后得到的图 G 的各个连通分量进行着色，就可以将这些着色合并为 G 的一种着色。如果桥的两个端点被赋予了相同的颜色，我们只需置换其中一个连通分量上的颜色。这可能会产生新的冲突，但我们可以转向相邻的连通分量，并在那里置换颜色。根据桥的定义，我们永远不必对同一个连通分量上的颜色置换多于一次，因此这一过程会终止。

对于匹配割，如果一个图包含一条桥，那么我们可以立即得出它是一个肯定实例。◀

5 排除细分星作为子图的图：困难性

我们证明定理 5。

定理 5（重述）。反馈顶点集和独立反馈顶点集在具有最大度4的 $S_{2,2,2,2}$-子图自由图类上是 NP-完全的。

证明。 这两个问题都属于 NP。我们将从以下 NP- 完全问题 2P1N-3SAT [7]进行归约。

2P1N-3SAT	
实例：	一个合取范式公式 Φ，其中每个子句至多包含三个文字，并且每个变量正出现两次、负出现一次。
问题：	Φ 是否存在满足赋值?

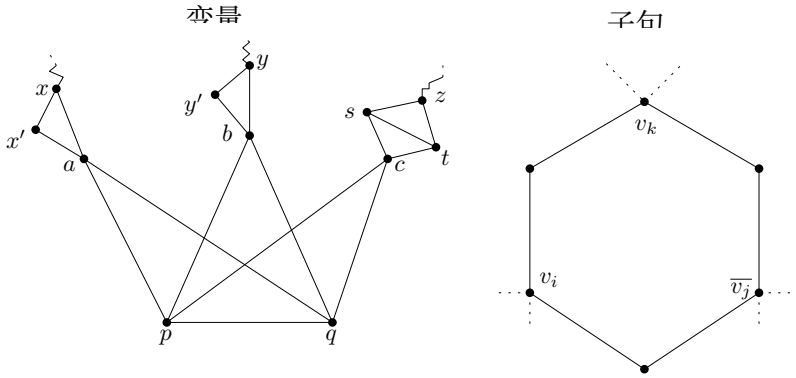


图 4 定理 5 的证明中使用的变量构件和子句构件（适用于大小为 3 的子句）。变量构件的顶点 x、y 和 z 将与子句构件中带标号的顶点对应并合并。

给定一个包含 个变量$\{v_1, \ldots, v_n\}$的 2P1N-3SAT 实例，我们按如下方式构造一个图 G。对于每个变量 v_i，我们构造图 4 所示的构件。三角形$xx'a$ 和 $yy'b$ 表示该变量的正出现，而菱形 $zstc$表示其负出现。对于每个子句 C_j，若子句大小为 3，则构造一个六边形；若子句大小为 2，则构造一个正方形（我们可以假设不存在大小为 1 的子句）。该子句构件中交替出现的顶点表示文字，并与相应变量构件中的一个顶点 x、 y或 z 重合。显然，可以采用这样的方式进行构造：每个变量构件中的顶点x 和 y 都恰好与子句构件中表示正文字的一个顶点重合，而每个变量构件中的顶点 z 都恰好与子句构件中表示负文字的一个顶点重合。注意， G 的最大度为 4。

▷ 断言 18。 G 不包含 $S_{2,\,2,\,2,\,2}$ 作为子图。

证明。考虑一下，我们可能会在 G 中的 S_2,2,2,2 中找到中心顶点的位置。显然，如果顶点 v 在 G 中的二邻域包含一个大小为 3 的割（也就是说，如果有 3 个与 v 的距离至多为 2 的顶点构成 G 中的一个割），那么它就不可能是中心顶点。中心顶点不可能是变量构件中的顶点 p 或 q，因为同一构件中的集合 $\{a, b, c\}$ 在 p 和 q 的二邻域中构成大小为 3 的割。中心顶点也不可能是变量构件中的顶点 a、 b 或 c，因为 $\{x, p, q\}$、$\{y, p, q\}$ 和 $\{z, p, q\}$ 分别在它们的二邻域中构成大小为 3 的割。顶点 x、 y 和 z 不可能是中心顶点，因为它们的二邻域中存在一个大小为 3 的割，该割包含它们在子句构件中的两个邻点，以及分别对应的 a、 b 和 c。 G 的其余顶点的度小于 4。断言得证。◁

任何变量构件的反馈顶点集大小至少为 4，因为它包含四个互不相交的环。因此， G 的任何反馈顶点集都必须至少包含 $4n$ 个顶点。只需证明， G 有一个大小至多为 $4n$ 的（独立）反馈顶点集，当且仅当 Φ 可满足。

假设 Φ 有一个满足赋值。我们构造 G的反馈顶点集 F。如果某个变量为真，那么变量构件中的顶点 x、 y、 p 和 t 属于 F。如果某个变量为假，那么属于 F的则是顶点 z、 a、 b 和 c。因此， F 是一个独立集（不同变量构件中的顶点彼此不相邻），其大小恰为 $4n$。

▷ 断言 19。 F 是一个反馈顶点集。

证明。注意，如果一个子句中的文字得到满足，那么在子句构件中，对应的顶点属于 F。因此，由于子句得到满足，每个包含在单个变量构件或子句构件中的环都包含一个属于 F 的顶点。考虑一个不包含在单个构件内的 G 环。它必须包含某个变量构件的一条非平凡路径，其端点是 {x、 y、 z} 中的两个。如果它包含 x，则还必须包含 a；如果它包含 y，则还必须包含 b。但是， F 包含 {x 、 a} 中的一个和 {y 、 b} 中的一个，因此这样的环也会与 F 相交。因此， F 与 G 的所有环相交。◁

反过来，假设 G 有一个大小至多为 $4n$的反馈顶点集 F。同样，每个变量构件至少包含 F 中的四个顶点，因此恰好包含 F中的四个顶点。注意， F 不能包含 $\{x, z\}$ 或 $\{y, z\}$ ，因为在这两种情况下，该构件都有三个互不相交的环，而仅用两个顶点无法覆盖它们。

我们来描述 Φ的一个满足赋值。对于一个变量构件，如果 x 或 y 属于 F，我们就将该变量设为真。如果 z属于 F，我们就将其设为假。根据前面的论证，不可能出现必须同时将某个变量设为真和假的情况。如果 $\{x, y, z\}$ 中没有任何顶点属于 F，我们就任意设定该变量的值。这样得到的就是一个满足赋值，因为每个子句构件（它是一个环）都必须在 F 中至少包含一个顶点，且对应的变量满足该子句。◀

6 分类证明

我们证明定理 6–9。注意到这些定理包含一些类似的结果，为避免重复，我们先给出几条适用于所有证明的一般说明。

我们再次指出，所讨论的五个问题都是 C13 问题。因此，当$H \in \mathcal{S}$时，每个定理都可由定理 1 推出。当$H = S_{1,\ 1,\ q,\ r}$时，我们应用定理 4。因此，除了关于着色的定理 8，以下证明只需涵盖 NP 完全的情形。

定理 6 的证明。 我们再次指出，反馈顶点集 可归约为独立反馈顶点集 ，方法是细分每条边，因此这里我们只考虑前者。

根据 Poljak 的构造， [20], 对于每个整数 $g \geq 3$，周长至少为 g 的图上的反馈顶点集问题都是 NP 完全的（图的周长是其最短环的长度）。因此，只要H 包含一个环，反馈顶点集问题在 H-子图自由图上就是 NP 完全的。

假设 H 有 m 个顶点，且有多个顶点的度至少为 3。对于任意图 G，如果将每条边细分 m 次，就会得到一个图 J ，该图不含 H子图，因为任意两个度大于 2 的顶点之间的距离至少为 $m + 1$。在求解 J的最小规模反馈顶点集时，我们只需考虑选择 G中的顶点。这意味着，对于不含 H子图的图，反馈顶点集问题是 NP 完全的。

该问题在最大度为 4 [21] 的平面图上是 NP 完全的（因此也适用于不含 $K_{1,\ 5}$-子图的图）。

定理 5 完成了证明。 ◀

定理7的证明。 对于每个整数 $g \geq 3$，当图的围长至少为 g [18] 时，连通顶点覆盖问题是 NP 完全的；因此，只要 H 包含一个环，该问题对于 H-子图自由图也同样是 NP 完全的。对于最大度为 4 [9], 的图，该问题也是 NP 完全的，因此对于$K_{1,\ 5}$-子图自由图亦然。◀

定理8的证明。 对于每个整数 $g \geq 3$，当图的围长至少为 g [15] 时，着色问题是 NP 完全的；因此，只要 H 包含一个环，该问题对于 H-子图自由图也同样是 NP 完全的。文献 [10],证明了着色问题在最大度为4的（平面）图上是 NP 完全的，因此对于$K_{1,\ 5}$-子图自由图亦然。其余情形均在 [12] ◀中得到证明

定理 9 的证明。对于每个整数 $g \geq 3$，当图的围长至少为 g [8] 时，匹配割是 NP 完全的，因此只要 H 包含一个环，对于 H-子图无图也成立。对于最大度为 4 [6]，的图，它是 NP 完全的，因此对于 $K_{1,\ 5}$-子图无图也成立。◀

7 结论

我们在分类五个著名的 C13 问题在 H-子图无图上的复杂性方面取得了重大进展，并扩展了此前已知的结果。特别是，我们发现了文献中的一个空白，并为次三正则图上的独立反馈顶点集问题给出了一个多项式时间算法。

如果 H 连通，那么我们将这些问题的差距缩小到了这样一个未解情形：$H = S_{1,\ p,\ q,\ r}$，因此 H 是一个细分星，其中一条支腿较短，另外三条支腿长度任意。要为连通的 $S_{1,\ p,\ q,\ r}$-子图无图得到类似于我们先前结果的结论，就需要这些图是 3-边连通的。事实上，如果没有这一假设，该陈述便不成立。考虑由一条路径和一个$K_{1,\ 4}$组成的所有图构成的类，其中K_1的两个叶子分别与路径的两个不同端点重合，而另外两个叶子彼此相邻。这个图类中的图均无桥、不是次三正则图，且$S_{1,\ p,\ q,\ r}$-子图无图，并且其树深度仍然无界。目前尚不清楚经过适当修改的定理表述是否确实成立。此外，也不清楚这能否导出一个可以像上述定理 13 和定理 14 那样应用的结果。我们将$H = S_{1,\ p,\ q,\ r}$ 留作未来研究。

最后，我们也将确定在 $S_{2、\ 2、\ 2、\ 2}$-子图无关图上连通顶点覆盖和匹配割的复杂度留作一个开放问题。

参考文献

1 Vladimir E. Alekseev 和 Dmitry V. Korobitsyn。遗传图类上若干问题的复杂性。*Diskretnaya Matematika*，2:90–96，1990年。2 Stefan Arnborg、Jens Lagergren 和 Detlef Seese。树分解图上的简单问题。*Journal of Algorithms*，12:308–340，1991年。3 Hans L. Bodlaender、Matthew Johnson、Barnaby Martin、Jelle J. Oostveen、Sukanya Pandey、Daniël Paulusma、Siani Smith 和 Erik Jan van Leeuwen。禁用子图的复杂性框架 IV：斯坦纳森林问题。手稿，2023年。4 Paul S. Bonsma。平面图及其他图类上的匹配割问题的复杂性。*Journal of Graph Theory*，62:109–126，2009年。5 R. L. Brooks。网络节点的着色。*Mathematical Proceedings of the CambridgePhilosophical Society*，37(2):194–197，1941年。doi:10.1017/S030500410002168X。6 Vasek Chvátal。识别可分解图。*Journal of Graph Theory*，8:51–53，1984年。7 Elias Dahlhaus、David S. Johnson、Christos H. Papadimitriou、Paul D. Seymour 和 Mihalis Yannakakis。多终端割的复杂性。*SIAM Journal on Computing*，23:864–894，1994年。8 Carl Feghali、Felicia Lucke、Daniel Paulusma 和 Bernard Ries。高围长图及无 h 子图图上的匹配割。*CoRR*，2212.12317，2023年。9 Michael R. Garey 和 David S. Johnson。计算与难解性；*NP* 完全性理论指南。W. H. Freeman & Co.，美国，1979年。

10 Michael R. Garey、David S. Johnson 和 Larry J. Stockmeyer。若干简化的 NP 完全图问题。理论计算机科学，1:237–267，1976年。11 Petr A. Golovach 和 Daniël Paulusma。排除两个子图时的列表着色。离散应用数学，166:123–130，2014年。12 Petr A. Golovach、Daniël Paulusma 和 Bernard Ries。由禁用子图刻画的图的着色。离散应用数学，180:101–110，2015年。13 Matthew Johnson、Barnaby Martin、Jelle J. Oostveen、Sukanya Pandey、Daniël Paulusma、Siani Smith 和 Erik Jan van Leeuwen。禁用子图的复杂性框架。CoRR，2211.12887，2022年。14 Marcin Kamiński。图中的最大割与包含关系。理论计算机科学，438:89–95，2012年。15 Frédéric Maffray 和 Myriam Preissmann。无三角形图的 k-可着色问题的 NP 完全性。离散数学，162:313–317，1996年。16 Barnaby Martin、Sukanya Pandey、Daniel Paulusma、Siani Smith 和 Erik Jan van Leeuwen。禁用子图的复杂性框架：边细分不保留困难性时。CoRR，2022年。 arXiv:2211.14214。17 Karl Menger。关于一般曲线理论。Fund. Math.，10:96–115，1927年。18 Andrea Munaro。涉及非局部性质的图问题的边界类。理论计算机科学，692:46–71，2017年。19 Jaroslav Nesetril 和 Patrice Ossona de Mendez。稀疏性——图、结构与算法，算法与组合学第28卷。施普林格，2012年。20 Svatopluk Poljak。关于图的稳定集与着色的注记。Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae，015(2):307–309，1974年。URL: http://eudml.org/doc/16622。21 Ewald Speckenmeyer。无向图中的反馈顶点集问题研究。博士论文，帕德博恩，1983年。22 Shuichi Ueno、Yoji Kajitani 和 Shin'ya Gotoh。关于最大顶点度不超过三的图上的非分离独立集问题和反馈集问题。离散数学，72(1):355–360，1988年。doi:10.1016/0012-365X(88)90226-9。