多输入多输出的最优功率分配
联合总功率与组内功率约束下的信道

M. Khojastehnia、I. Lambadaris、R.H. Gohary、S. Loyka

arXiv:2305.01106v1 [cs.IT] 1 May 2023

摘要

本文研究一个包含一个发射机和一个接收机的通信系统。发射天线被划分为互不相交的组，每组除了必须满足标准的总功率约束外，还必须满足平均功率约束。本文针对以下情况求得发射天线的最优功率分配（OPA）：（i）固定的多输入多输出（MIMO）正交信道；（ii）独立同分布衰落的 MIMO 正交信道；（iii）独立同分布瑞利衰落的多输入单输出（MISO）和 MIMO 信道。在有利传播条件下，大规模 MIMO 信道这一实际情形会出现信道正交性。对于固定信道，利用 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）条件求得 OPA 的闭式解；该解类似于标准注水过程，同时纳入了组内平均功率约束的影响。对于衰落信道，本文提出一种用于求取 OPA 的算法，并通过主序不等式和 Schur 凹性证明了该算法的收敛性。

一、引言

多输入多输出（MIMO）或多天线系统为无线通信带来了显著优势，包括在带宽和功率使用量不变的情况下提高数据速率并降低干扰 [1]。在工业应用中，MIMO 系统已应用于长期演进（LTE）等无线通信标准 [2]，并被视为第五代移动通信的一项关键技术，以大规模 MIMO 系统的形式实现 [3][4]。

总功率约束（TPC）下固定信道和瑞利衰落信道的容量及最优信号传输方式已为人所知。对于固定信道，最优波束方向位于

Mahdi Khojastehnia、Ioannis Lambadaris 和 Ramy H. Gohary 任职于加拿大安大略省渥太华卡尔顿大学系统与计算机工程系，电子邮箱：khojastehnia.m@gmail.com、{ioannis,gohary}@sce.carleton.ca。Sergey Loyka 任职于加拿大安大略省渥太华渥太华大学电气工程与计算机科学学院，电子邮箱：Sergey.Loyka@uottawa.ca

信道特征模上，最优功率分配则通过注水过程实现 [5]。对于后一种情况，当接收机（Rx）已知信道，且发射机（Tx）已知信道分布时，独立均匀功率分配是最优的 [6]。TPC 的出发点是电源的功率预算有限。TPC 会影响电池寿命 [7][8] ，而且出于环境安全考虑，也应对其加以限制 [9][10]。采用组间功率约束（PGPC）的原因是每组天线都连接到一个功率有限的放大器。考虑总功率约束和组功率约束联合约束后，求解容量的问题会变得更加复杂，因为一般而言，最优 Tx 协方差矩阵与信道格拉姆矩阵不可能具有正交特征向量。一般情况下，联合功率约束下的容量和最优 Tx 协方差矩阵尚无已知解，特殊情况除外，例如固定信道下联合TPC和每根天线功率约束时的 MISO 信道及满秩解[1] ；以及瑞利衰落信道下仅施加每根天线功率约束时的 MISO 信道 [11]。

A. 相关研究

固定信道研究：对于仅受每根天线功率约束（PAPC）的固定 MISO 信道，研究表明，发射端协方差矩阵采用波束成形（即秩一解）是最优的 [11]。对于同时受总功率约束（TPC）和每根天线功率约束（PAPC）的 MISO 信道 [8], 、同时受 TPC、PAPC 和 PGPC 约束的 MISO 信道 [12], ，以及有 2 根发射天线且同时受总功率与每根天线功率联合约束的 MISO 窃听信道 [13], 情况也相同。这些情况的区别在于波束成形向量元素。例如，在 TPC 下，波束成形向量元素取决于信道增益矩阵；此外，在 PAPC 下，它们取决于相应的约束参数。对于两个用户的情况， [14] 使用注水过程研究和容量，并给出了其闭式解。在同时受 TPC 和 PAPC 约束且发射机有两根天线的情况下， [15]求得了最优信号传输的闭式解。参考文献 [11], [8] 分别给出了仅受 PAPC 约束的固定 MISO 信道，以及同时受 TPC 和 PAPC 约束的固定 MISO 信道的最优发射端协方差矩阵。对于同时受 TPC 和 PAPC 约束的固定 MIMO 信道， [16], 求得了满秩解；在该解中，发射天线的最优功率分配（OPA）取 PAPC 下的功率分配与仅受 TPC 约束时的 OPA 中较小者。尽管一般情况下 PGPC 下以及同时受 TPC 和 PGPC 约束时的最优发射端协方差矩阵仍未知， [17] 将 MIMO 信道在 PAPC 下的最优信号传输表示为对偶变量的函数，并采用迭代彩票下载。

[1]每根 功率约束（PAPC）是 PGPC 的一种特殊情况，其中每个组都只有一根天线 a.

提出了一种算法来确定最优值。对于多用户场景，在每根天线功率约束下， [18] 提出了一种数值算法，用于计算加权和速率最大化问题的最优信号传输。此外，对于满足每根天线功率约束的多址 MIMO 信道， [19] 提出了一种数值算法来计算和容量。在总功率约束和每根天线功率约束下， [20] 给出了一种算法，用于计算 MIMO 信道的最优发射端协方差矩阵，其涵盖的情形比 [15] 为 MISO 信道提出的算法更一般。 [12]考虑了总功率约束、每根天线功率约束和 PGPC 相结合的情形。本文研究满秩信道和满秩发射协方差矩阵的情形。最优发射端协方差矩阵的非对角元素以闭式形式给出，并提出了一种算法来计算其对角元素。对于有 2 根发射天线的情形，得到了最优发射端协方差矩阵的闭式表达式，并提出了一种基于投影梯度下降的算法，用于计算一般 MIMO 信道下的最优信号传输。还使用 CVX 工具 [21]验证了所提算法的正确性。

衰落信道研究：在具有独立同分布瑞利衰落信道的 MIMO 信道中，当接收端知道信道且发射端知道统计信道实现时，已证明最优发射协方差为对角矩阵 [5]。在仅受每根天线功率约束限制的瑞利 MISO 信道中，情况也是如此。然而，对于前者，发射天线采用均匀功率分配是最优的；对于后者，发射天线的最优功率分配等于每根天线功率约束 [11]。 [22] 考虑了每根天线功率约束下的高斯衰落 MISO 信道，并且在发射端和接收端均已知完整信道状态信息（CSI）时可实现遍历容量。在这种情况下，波束成形信号传输是最优的。 [8], 考虑了右酉不变衰落信道[2] 在总功率约束和每根天线功率约束联合约束下的情况。结果表明，各向同性信号传输是最优的。在 [23], 中，分析了当发射端和接收端都知道信道分布时每根天线功率约束下的信道容量。对于信道容量，确定了上界和下界。进一步表明，当令每根天线功率约束趋于无穷大时，容量差距趋于零。在 [24] 中研究了莱斯/对数正态衰落分布的 MIMO 信道，其中发射端仅知道信道分布。得到了遍历容量的下界，数值结果表明，对于大多数信噪比值，该下界都很紧。在 [25], 中，研究了每根天线功率约束和下行链路速率约束下的下行链路总功率最小化问题。所考虑的模型是空间相关瑞利衰落无小区大规模

[2]在右酉不变衰落信道模型中，接收端相关性可以存在，而发射端则不存在这种情况。

提出了一种 MIMO 信道和数值算法，用于计算相应优化问题的最优解。

B. 我们工作的贡献

一般而言，联合总功率约束和组级功率约束下，固定信道和衰落信道的最优发射协方差矩阵尚无已知解，某些特殊情况除外 [8][11][13][20][15][16][17][19]。尽管文献中已有一些数值算法用于计算最优发射协方差矩阵 [12][25][17], ，但这些算法通常计算量很大，因为其复杂度随 $O(n^6)$ 增长，其中 n 是发射天线的数量。我们的工作贡献如下：

- 针对正交固定 MIMO 信道，求得了联合 TPC 和 PGPC 下最优发射协方差矩阵的闭式解。
- 通过数学分析，推导出一种有限步数的数值算法，用于求解联合 TPC 和 PGPC 下独立同分布瑞利衰落 MIMO 信道以及正交独立同分布衰落 MIMO 信道的最优发射协方差矩阵。此外，该算法也适用于独立同分布瑞利衰落 MISO 信道，以及具有两根发射天线的独立同分布瑞利衰落 MIMO 信道这一特殊情况。

在我们的第一项工作中，我们依靠 KKT条件来求解优化问题；对于第二项工作，我们依靠目标函数的 Schur凹性。

符号说明：复值矩阵和向量分别用粗体大写字母和粗体小写字母表示； $|\mathbf{H}|$ 和 $\mathbf{H}^+$ 分别表示 H 的行列式和厄米共轭；$\mathbf{R} \succeq 0$ 表示 R 为半正定矩阵；$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ 表示向量 y 被向量 x 主序；$\mathbf{D}(r_i)$为对角矩阵，其对角元素为 r_i；$(\mathbf{R})_{ij}$ 为 R 的第 ij个元素；I 为具有适当维数的单位矩阵；$(x)_+ = \max\{x, 0\}$。

II. System Model and Capacity

离散时间固定无记忆高斯多输入多输出信道的输出建模如下：

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{x}_{m\times 1}$ 和 $\mathbf{y}_{n\times 1}$ 分别为发送和接收的复信号向量； $\boldsymbol{\xi}_{n\times 1}$ 为独立同分布的加性白高斯噪声；$\mathbf{H}_{n\times m}$ 为从发射天线到接收天线的信道增益矩阵； n、m 分别为接收机和发射机的天线数量。

A. 固定 MIMO 信道

当 MIMO 信道 H 固定且发射机和接收机都完全已知该信道时，信道容量 C^* [nat/s/Hz] 由下式给出 [1][6]:

$$C^* = \max_{\mathbf{R}\in S_R} \ln |\mathbf{I} + \mathbf{WR}| \tag{2}$$

其中，R $= \mathbb{E}\{\mathrm{xx}^+\}$ 是发射端（Tx）协方差矩阵，W $= \mathrm{H}^+\mathrm{H}$ 是信道格拉姆矩阵，S_R 是包含发射端协方差矩阵约束的可行集。

仅考虑总功率约束时，约束集为 $S_R = \{\mathrm{R} : \mathrm{R} \geq 0, \mathrm{tr\ R} \leq P_T\}$，其中 $P_T > 0$ 是最大发射端总功率。最优发射协方差矩阵由信道格拉姆矩阵 W 的特征向量构成，即最优发射协方差矩阵的特征向量与信道格拉姆矩阵的特征向量正交。此外，这些波束向量的最优功率分配可通过注水法求得 [5], ，即:

$$p^*_{i,WF} = \left(\mu^{-1}_{WF} - \lambda_i^{-1}(\mathbf{W})\right)_+, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

其中，$p^*_{i,WF}$ 是第 i 个波束向量的最优功率分配（OPA），λ_i(W) 是信道格拉姆矩阵 W 的第 i 个特征值。$p^*_{i,WF}$和 λ_i(W) 均按降序排列，μ_{WF}是水位，可由总功率约束 P_T 求得。

在联合总功率约束（TPC）和组功率约束（PGPC）下，可行集变为:

$$S_R = \left\{\mathbf{R} : \mathbf{R} \geq 0,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{R} \leq P_T,\ \sum_{i\in I(j)} (\mathbf{R})_{ii} \leq P_j,\ j = 1, \ldots, s\right\}, \tag{4}$$

其中，$(\mathrm{R})_{ii}$ 是 R 的第 i 个对角元素，表示分配给第 i 根发射天线的相应功率；$I(j)$ 是第 j 组中的天线集合；$P_j > 0$ 是第 j 个组级功率约束（ PGPC ）；对于所有 $i \neq j$ 和 I，集合 $I(i)$ 与 $I(j)$ 互不相交，$I(1) \cup \ldots \cup I(s) = \{1, \ldots, m\}$；$s$ 是天线组的数量。一般而言，这种情况下的最优发射协方差矩阵尚不可知，只有一些特殊情形例外（例如，在联合总功率和每根天线功率约束 [26][8]下的 MIMO 正交信道和 MISO 信道）。本文针对固定正交信道，给出了在联合TPC和PGPC约束集合 (4) 下问题 (2) 的解。与以往研究 [8][11] [13][20][15][16][17][19]相比，我们的方法有两点不同：a) 我们在联合TPC和组级功率约束下考虑该优化问题，而以往研究仅关注TPC和每根天线功率约束；b) 我们推导出了联合TPC和PGPC约束下 R^* 的闭式解，因此无需采用计算量大的算法来求解 R^*。

B. 衰落 MIMO 信道

在本部分工作中，我们假设接收机完全知道信道，而发射机只知道信道的统计分布。信道容量 C^*由 [1][6]给出：

$$C^* = \max_{\mathbf{R}\in S_R} \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \ln |\mathbf{I} + \mathbf{HRH}^+| \right\} \tag{5}$$

仅在 TPC 约束下，对于瑞利分布情形，可以证明各向同性信号传输能够使遍历速率最大化，即最优发射协方差矩阵 R* 为对角矩阵，且功率均等分配给所有发射天线 [5], ，即 $\mathrm{R}^* = \frac{P_T}{m}\mathrm{I}$。

在总功率约束与组级功率约束的联合约束下，发射协方差矩阵的最优解通常是未知的，只有少数特殊情况例外：(i) 受每根天线功率约束（PAPC）的 MISO 信道 [11], ；(ii) 受联合 TPC 和 PAPC 约束的 MISO 信道，其中所有发射天线的 PAPC 相同 [8]。对于这两种情况，均已证明最优发射协方差为对角矩阵。对于前一种情况，发射天线的最优功率分配（即最优发射协方差矩阵的对角元素）等于 PAPC 值；对于后一种情况，则等于 PAPC 值与 $\frac{P_T}{m}$中的最小值。因此，独立信号传输对于这两种情况都是最优的。在我们的工作中，我们考虑正交衰落信道，并提出用于求得 R*的算法。在有利传播信道条件下对实际大规模 MIMO 信道的研究中，观察到了 MIMO 信道的正交性 [27]。基于理论和基于测量的结果均验证了大规模MIMO信道中的信道正交性 [28][29][30][31][32][33][34][35]。此外，这类正交模型还可用于 OFDM 通信，其中针对正交窄带频率音调考虑了功率约束 [36]。随后，我们将该方法扩展到求得瑞利衰落MIMO信道的 R^* 。该方法基于问题（5）中最优发射协方差矩阵 R^* 的理论解。

III. 恒定MIMO正交信道的容量推导

本节考虑正交 MIMO 信道，其中 H 的列向量彼此正交，即 $\mathrm{HH}^+ = \mathrm{W} = \mathrm{D}(g_i)$，且 g_i 是 W 的第 i 个对角元素。下一个定理给出了总功率约束和组功率约束联合约束下式 (2) 的闭式解。为此，令 p_i 为 R 的第 i 个对角元素。

定理1. 考虑式 (4) 中的可行集，并令第 i 根发射天线属于第 j 组。对于正交 MIMO 信道，在总功率约束和组功率约束联合约束下，式 (2) 中的最优发射协方差矩阵 $\mathbf{R}^*$ 为对角矩阵，即 $\mathbf{R}^* = \mathbf{D}(p_i^*)$，其中 p_i^* 是属于第 j 组的第 i 根发射天线的最优功率分配，其表达式为：

$$p_i^* = \left((\mu + \lambda_j)^{-1} - g_i^{-1}\right)_+ \tag{6}$$

其中，$\mu \geq 0$ 和 $\lambda_j \geq 0$ 分别是对应总功率约束和第 j组功率约束的拉格朗日对偶变量（有关 μ、λ_j的详细信息，请参见命题1）。

由于$\mathbf{R}^*$ 和$\mathbf{W}$均为对角矩阵，因此信道容量可表示为：

$$C^* = \sum_{i=1}^{m} \ln(1 + g_i p_i^*). \tag{7}$$

证明。证明见附录A。 □

根据该定理，我们得出结论：在总功率约束和组功率约束联合约束下，独立信号传输是正交信道的最优方案。此外，组功率约束对最优功率分配 p_i^* 的影响由 λ_j决定。移除组功率约束后，即仅考虑总功率约束时，p_i 的解与式（3）中的注水解一致。与注水解类似，较强的数据流（即对应较大的 g_i）比弱数据流分配到更多功率，也就是说，$g_i \geq g_j$ 意味着 $p_i^* \geq p_j^*$。

下一个命题说明如何推导对偶变量 μ, λ_j 。

命题 1. 若 $\sum_{j=1}^{s} P_j \leq P_T$，则总功率约束不活跃，且 $\mu = 0$。否则，对偶变量μ 满足以下非线性方程：

$$\sum_{j=1}^{s} \min\left\{P_j, \sum_{i \in I(j)} (\mu^{-1} - g_i^{-1})_+\right\} = P_T. \tag{8}$$

确定 μ 后，可通过以下非线性方程推导对偶变量 λ_j ：

$$\sum_{i \in I(j)} \left((\mu + \lambda_j)^{-1} - g_i^{-1}\right)_+ = \min\left\{P_j, \sum_{i \in I(j)} (\mu^{-1} - g_i^{-1})_+\right\}, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{9}$$

证明。证明见附录 B。 □

由该命题可知，第 j 组的总最优功率分配（OPA）为 $\min\left\{P_j, \sum_{i \in I(j)} (\mu^{-1} - g_i^{-1})_+\right\}$。此表达式由两项组成：第一项是

第 j 个 PGPC，而第二项是通过注水过程得到的最优功率分配。然而，在总功率约束和组功率约束联合约束下，对应于 TPC 的对偶变量可能与仅有 TPC 约束时的对偶变量不同。

要从上述非线性单调方程 (8)、(9) 中求得对偶变量 μ、$\{\lambda_j\}$，可以使用二分算法。在该迭代算法的每一步中，问题解的界都会逐渐收紧，直到达到问题解 [37] 所需的区间宽度。要使用该算法，需要对偶变量的下界和上界。下一命题将给出这些界。注意，$\{\lambda_j\}$ 彼此不耦合。

命题2. 对偶变量 μ 满足：

$$0 \le \mu \le \max_i g_i. \tag{10}$$

一旦确定 μ，如果 $\min\left\{P_j, \sum_{i\in I(j)}(\mu^{-1}-g_i^{-1})_+\right\}=0$，那么 $\lambda_j = \max_i g_i$。否则，

$$0 \le \lambda_j \le \max_{i\in I(j)} g_i. \tag{11}$$

证明。对于 μ，下界源于对偶可行约束 $\mu \ge 0$。上界则由以下事实得出：在 (8) 中至少有一个数据流处于激活状态，即对于至少一个 i，$(\mu^{-1}-g_i^{-1})_+$ 为正。

对于 λ_j，若 $\min\left\{P_j, \sum_{i\in I(j)}(\mu^{-1}-g_i^{-1})_+\right\}=0$，则由 (9) 可知，$\lambda_j$ 可以取满足

$$\lambda_j \ge g_i-\mu \qquad i\, g_i \qquad \left\{P_j \sum_{i\in I\ j} \mu^{-1}-g_i^{-1}{}_+\right\} > \text{的任意值},$$

$$0 \qquad \mu^{-1}-g_i^{-1}{}_+ \qquad i\in I\ j \qquad \lambda_j$$

其中 max 在此区间内。否则，若 min ,()( ) ,, 则 ( ) 至少对一个 ( ) 为正，此时它给出了 的上界。λ_j 的下界源于对偶可行约束 $\lambda_j \ge 0$ □

IV. 定理E 衰落MIMO正交信道的容量推导

现在我们考虑衰落MIMO正交信道的情形，并采用与定理1中类似的论证。可以直接得出，最优发射协方差 $\mathbf{R}^*$ 为对角矩阵。因此，式 (5) 中的信道容量可表示如下：

$$C^* = \max_{p_i\in S_P} C(\{p_i\}) \tag{12}$$

其中

$$C(\{p_i\}_{i=1,2,\ldots,m}) = \mathbb{E}_{g_i}\left\{\sum_{i=1}^{m}\ln(1+g_i p_i)\right\}, \tag{13}$$

其中，$\{g_i\}$ 是正的独立同分布随机变量（本节不对 g_i的分布作任何假设）。可行集 S_P 由式（4）中的 S_R 得到，具体如下:

$$S_P = \left\{ \{p_i\} : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} p_i \leq P_T, \sum_{i \in I(j)} p_i \leq P_j, j = 1, \ldots, s \right\}. \tag{14}$$

目标函数 $C(\{p_i\})$ 是对称的，这一点可由 $\{g_i\}$ 是独立同分布随机变量这一事实得出。此外，该函数是凹函数。在和约束（即 TPC）下，当所有参数都相同为 [6] 时，该函数取得最大值。由于 $C(\{p_i\})$ 关于 p_i 单调递增，因此 p_i 的最优功率分配为 $p_1^* = p_2^* = ... = p_m^* = \frac{P_T}{m}$。依据这一论证，对于总功率约束和组功率约束联合约束下的最优功率分配，我们可以轻易证明，属于同一组的天线会被分配相同的功率。

在总功率约束和组功率约束联合约束下，最优发射协方差矩阵 $\mathbf{R}^*$ 通常未知。由于最优发射协方差矩阵是对角矩阵，我们提出算法1来求得最优功率分配，进而得到 $\mathbf{R}^*$。值得一提的是，该算法能在有限步内得出精确的功率分配（见命题3）。这种方法的核心思路是找出所有活跃组约束（详见下文）。为此，我们将总功率约束对应的平均功率与每个组功率约束对应的平均功率进行比较。在活跃组中，后者小于前者。此外，某个活跃组内的天线将获得相同的功率。找出所有活跃组约束后，其余组功率约束均不活跃，因此剩余各组中的天线将获得相同的功率。

算法1：联合TPC和PGPC约束下独立同分布衰落正交信道的最优功率分配

要求： S_P中的所有已知变量，见（1）、（4）。

% 初始化

$I = \{1, 2, ..., m\}$：所有发射天线索引， $I(j)$：第 j组中的发射天线索引集合

组， $P = P_T, L = m$

% 通过比较$\frac{P}{L}$ （平均功率与

相对于总功率约束）和 $\frac{P_j}{|I(j)|}$ （相对于第 j 个 PGPC 的平均功率），适用于所有 $I(j) \in I$。

当 $\frac{P}{L} \geq \frac{P_j}{|I(j)|}$ 对于至少一个 $I(j) \in I$ 个do

对于每个 $I(j) \in I$，执行

if $\frac{P}{L} \geq \frac{P_j}{|I(j)|}$ **then**

% 对属于第 j 个活跃组的发射天线进行最优功率分配

$p_i^* = \frac{P_j}{|I(j)|}$ 对于 $i \in I(j)$

% 更新剩余总功率、天线数量和组数量

$P \leftarrow P - P_j$

$L \leftarrow L - |I(j)|$

$I \leftarrow I \setminus I(j)$

结束条件

结束循环

结束 while 循环

对于每个 $I(j) \in I$ 执行

% 所有非活动组中发射天线的最优功率分配

$p_i^* = \frac{P}{L}$ 用于 $i \in I$

结束循环

♀♀♀

令 $|I(j)|$ 表示第 j 组中的天线（元素）数量。若 $\sum_{i \in I(j)} p_i = P_j$ （即该组天线获得允许的最大功率），则第 j 组的组功率约束为活跃约束；若 $\sum_{i \in I(j)} p_i < P_j$，则该约束为非活跃约束。此外， P 和 L （在下文的算法1中引入）分别表示每一步剩余的总功率和剩余天线数。在该算法中，首先通过比较 $\frac{P}{L}$ （相对于P_T的平均功率）与$\frac{P_j}{|I(j)|}$（相对于第 j 个 PGPC 的平均功率）来找出活跃组。如果前者大于后者，则算法将第 j 个 PGPC 视为活跃约束。随后确定活跃组的数量，并将功率均匀分配给每个活跃组中的天线

组。对于其余天线，将持续进行这种比较，直到发现更多活跃的 PGPC。这些迭代会在 $\frac{P}{L}$ 小于 $\frac{P_j}{|I\ j\ ()|}$时终止。此时，所有其余 PGPC 均处于非活动状态，剩余功率将均匀分配给其余天线。通过该算法可以看出，活跃组中的天线获得的功率少于非活动组中的天线。

在下一个命题中，我们将证明该算法为问题(12)提供了最优解。

命题3. 考虑受联合TPC和PGPC约束的衰落正交 MIMO 信道。当信道格拉姆矩阵的对角元素为独立同分布随机变量时，算法1给出 p_i 的最优功率分配。

证明。证明见附录C。 □

现在，我们介绍独立同分布衰落正交信道在联合约束下的两种特殊最优功率分配情形：

情形1：对于所有 j，相对于总功率约束的平均功率小于相对于PGPC的平均功率，即 $\frac{P_T}{m} \leq \frac{P_j}{|I\ j\ ()|}$。那么：

$$\begin{aligned} C^* &\leq C_{TPC} \\ &= C\Big(\{p_i = \frac{P_T}{m}\}\Big), \end{aligned} \tag{15}$$

其中， C_{TPC}是仅受总功率约束（TPC）限制时的容量；第一个不等式是因为 C^*的约束集是 C_{TPC}约束集的子集。对于 $p_i^* = \frac{P_T}{m}$，可达到该上界。注意，此最优功率分配（OPA）属于可行集，因为对所有 j，$\frac{P_T}{m} \leq \frac{P_j}{|I\ j\ ()|}$。

情况 2：总功率约束大于 PGPC 之和，即 $P_T \geq \sum_{j=1}^{s} P_j$。因此：

$$C^* \leq C_{PGPC}, \tag{16}$$

其中， C_{PGPC}是仅受 PGPC 约束时的容量。第一个不等式是由于扩大了 C_{PGPC} 的可行集。对于 $p_i^* = \frac{P_j}{|I\ j\ ()|}$ 和 $i \in |I(j)|$，可达到该上界；这也是仅受 PGPC 约束时的最优功率分配。

A. 瑞利衰落 MISO 信道的容量

在 MISO 信道中，接收机只有一根天线，因此信道增益矩阵变为行向量，即 $\mathrm{H}_{1\times m} = \mathrm{h}$。在这种情况下，式 (5) 中的容量优化问题可表示如下：

$$C^* = \max_{\mathbf{R}\in S_R} \mathbb{E}_{\mathbf{h}} \left\{ \ln(1 + \mathbf{hRh}^+) \right\} \tag{17}$$

我们假设 h 的各个元素均为零均值、单位方差的独立同分布复圆对称高斯随机变量（瑞利衰落）。按照 [11]，附录C中的步骤，可以证明，在总功率约束和 PGPC 约束下，R^* 是一个对角矩阵。该证明依赖于瑞利衰落具有对称分布这一事实。式（17）中的优化问题可写为：

$$C^* = \max_{\mathbf{R}\in S_P} \mathbb{E}_{g_i} \left\{ \ln(1 + \sum_{i=1}^{m} g_i p_i) \right\} \tag{18}$$

其中 $g_i = |h_i|^2$。在下一个命题中，我们将证明算法1给出了该问题的最优功率分配。

命题4. 对于式（18）中的优化问题和独立同分布瑞利衰落信道，算法1给出了 p_i 的最优解。

证明. 采用与引理1类似的论证，可以证明式（18）中的目标函数是 Schur 凹的，因为它既对称又是凹函数。其余证明步骤与命题3中的证明相同。

□

B. 瑞利衰落 $2 \times n$ 信道的容量

考虑具有 2 根发射天线和 n 根接收天线的独立同分布瑞利衰落 MIMO 信道。这意味着 R 是一个 2×2 矩阵。下一个命题给出了问题 (17) 的最优功率分配。

命题5. 对于独立同分布瑞利衰落信道以及式 (5) 中的优化问题，当 R 是一个 2×2 矩阵时，R 为对角矩阵，即 $\mathrm{R} = \mathrm{D}(p1, p2)$，且算法1给出了 p_i 的最优解。

证明。请参阅附录D。 □

C. 瑞利衰落MIMO信道的容量

现在，我们考虑具有任意数量发射天线和接收天线的独立同分布瑞利衰落 MIMO 信道的容量。在以下命题中，我们证明最优发射端协方差矩阵 $\mathbf{R}^*$ 为对角矩阵。

命题 6. 对于式 (5) 中的优化问题，考虑独立同分布瑞利衰落 MIMO 信道时，最优发射协方差 $\mathbf{R}^*$ 为对角矩阵，算法1给出了其对角元素的最优解。

证明。请参阅附录 E。 □

V. 仿真结果

本节将给出固定信道的容量示例，以及衰落信道的遍历容量示例。考虑对角信道格拉姆矩阵 $\mathbf{D}(g_i)$:

$$\{g_i\} = \{1, 10, 3, 0.3, 0.4, 0.6, 0.9, 1, 1\} \tag{19}$$

其中有三个天线组，其对应的组间功率如下:

$$\begin{aligned} I(1) &= \{1, 2, 3\}, P_1 = 2 \\ I(2) &= \{4, 5, 6, 7\}, P_2 = 12 \\ I(3) &= \{8, 9\}, P_3 = 4 \end{aligned} \tag{20}$$

图1展示了联合功率约束下的容量，其中采用了定理1、命题1和命题2以及二分算法的解。结果表明，联合TPC和PGPC下的容量上界为仅有TPC或仅有PGPC时的容量:

$$C^* \leq \min\{C_{TPC}, C_{PGPC}\} \tag{21}$$

该上界在低信噪比和高信噪比条件下分别于 $C = C_{TPC}$ 和 $C = C_{PGPC}$ 处达到紧致。这表明，在低信噪比条件下，总功率约束（TPC）是主导约束，而在高信噪比条件下，PGPC 是主导约束。还可以看出，C_{TPC} 随着 P_T 的增加而无限增长，而联合TPC和PGPC约束下的容量则不具有这一性质。

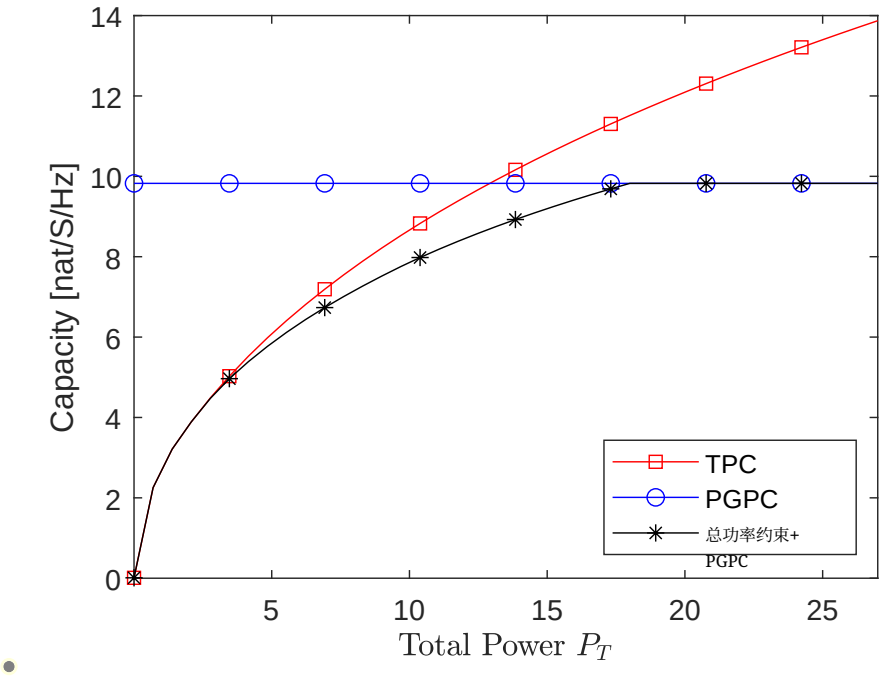


图1。在式（19）中的固定正交信道下，总功率约束、PGPC 以及总功率约束和 PGPC 的组合约束下的容量。

接下来，我们考虑衰落正交信道，其中 $(H)_{ij} = 0$ 对于 $i \neq j$ 和 H_{ii} 是均值为零、方差为单位的独立同分布高斯随机变量。此外，

$$I(1) = \{1, 2, 3\}, P_1 = 15$$
$$I(2) = \{4, 5, 6, 7\}, P_2 = 3$$
$$I(3) = \{8\}, P_3 = 6 \tag{22}$$

图2展示了通过应用算法1获得最优功率分配时的遍历容量。为了在已知最优功率分配的情况下计算遍历容量，注意：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_g\left\{\ln(1+gp)\right\} &= \int_0^{+\infty} \ln(1+gp)e^{-g}dg \\ &= -e^{(1/p)}\,\mathrm{Ei}(-1/p),\end{aligned} \tag{23}$$

其中，Ei(·) 是指数积分（$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}dt$ 对于 $x < 0$）。第一个等式由 $g = |h|^2$ 得出，并且由于 h 是一个零均值、单位方差的高斯随机变量，因此 g 服从均值为 1 的指数分布 [6]。要得到（23），请参阅 [38] 的第 568 页。

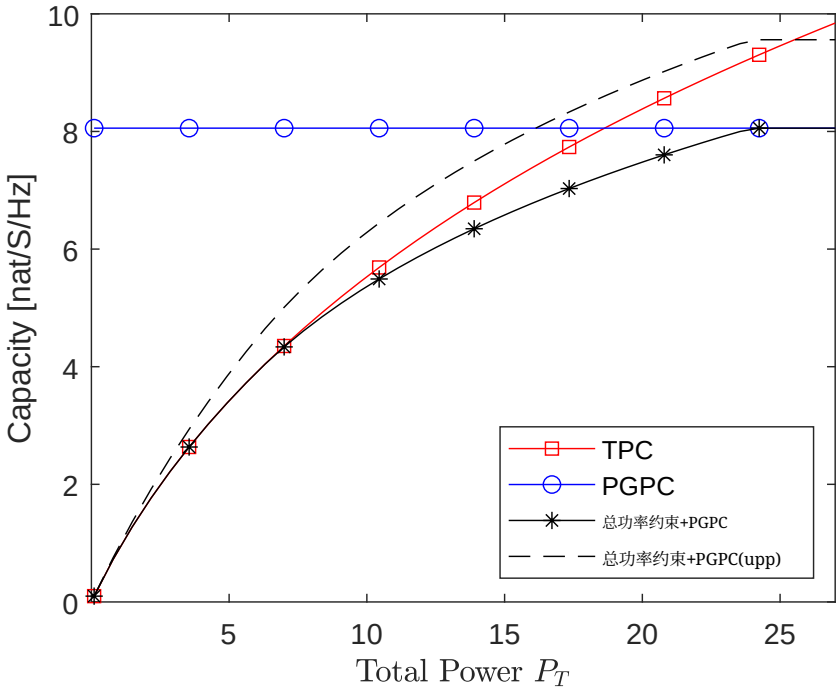


图 2. 在式 (22) 中设定的功率约束下，衰落正交信道在总功率约束、PGPC 以及总功率约束与 PGPC 联合约束下的遍历容量。

同样，我们注意到容量小于 C_{TPC} 和 C_{PGPC}。此外，还给出了 C 的上界，其中使用了以下性质：

$$\mathbb{E}_{g_i}\left\{\sum_{i=1}^{m}\ln(1+g_i p_i)\right\} \le \sum_{i=1}^{m}\ln\left(1+\mathbb{E}_{g_i}\{g_i\}p_i\right). \tag{24}$$

这是将詹森不等式应用于凹函数 $\sum_{i=1}^{m}\ln(1+g_i p_i)$ [37] 得出的。通过蒙特卡罗仿真验证了图 1 和图 2 中最优功率分配的结果。

VI. 结论

我们研究并推导了以下情况下，在总功率约束和每组天线功率约束下 MIMO 信道的最优发射协方差矩阵和容量：a）固定和独立同分布衰落MIMO正交信道，b）独立同分布瑞利衰落MISO信道，c）具有两根发射天线的独立同分布瑞利衰落MIMO信道，以及d）独立同分布瑞利衰落MIMO信道。对于固定和独立同分布衰落MIMO信道，结果表明，最优发射协方差矩阵为对角矩阵。利用KKT条件，针对发射天线的最优功率分配（OPA），即最优发射协方差矩阵的对角元素，

对于固定MIMO正交信道，可以通过闭式形式求得。该结果类似于注水过程，但有一些显著差异，体现了每组功率约束的影响。对于具有独立同分布信道增益矩阵的衰落MIMO正交信道，我们提出了一种算法来求得发射天线的最优功率分配。该算法收敛至最优解的证明基于主序不等式以及所考虑目标函数的Schur凹性。最后，我们证明，所提出的算法能够为独立同分布瑞利MIMO信道求得发射天线的最优功率分配。我们的方法和技术可扩展用于研究类似问题。

附录A

定理1的证明

首先，我们采用与 [5] 中仅考虑总功率约束时类似的论证，证明对于式（2）中的多输入多输出正交信道，最优发射协方差矩阵 $\mathbf{R}^*$ 为对角矩阵。注意：

$$\begin{aligned}\ln|\mathbf{I}+\mathbf{WR}| &\le \sum_{i=1}^{m}\ln(1+(\mathbf{WR})_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\ln(1+g_i p_i) \\ &= \ln|\mathbf{I}+\mathbf{D}(g_i)\mathbf{D}(p_i)|, \end{aligned} \tag{25}$$

其中，不等式是根据 Hadamard不等式 [39] 得出的，第一个等号则是根据 $\mathbf{W}=\mathbf{D}(g_i)$ 和 $(\mathbf{R})_{ii}=p_i$ 得出的。此外，由于 $\mathbf{R}\in S_R$ 和 $\mathbf{D}(p_i)\in S_R$ 的对角元素相同，因此 $\mathbf{R}\in S_R$ 意味着 $\mathbf{D}(p_i)\in S_R$。上界可由 $\mathbf{R}=\mathbf{D}(p_i)$ 达到，因此最优发射协方差矩阵 $\mathbf{R}^*$ 为对角矩阵。

考虑到 $\mathbf{R}^*$ 和 $\mathbf{W}$ 均为对角矩阵，式（2）中的优化问题可简化如下：

$$C^* = \max_{p_i\in S_P}\sum_{i=1}^{m}\ln(1+g_i p_i) \tag{26}$$

其中，可行集 S_P 由式 (14) 给出。注意，我们假设 $g_i>0$，因为 $g_i=0$ 意味着 $\mathbf{H}$ 的第 i 列为零向量，因此可以不考虑第 i 个发射天线，因为它不会影响速率。式 (26) 中的问题是凸问题，因为目标函数是凹函数，而且 S_P 中的所有不等式约束构成一个凸集 [37]。此外，

Slater 条件成立，因此 KKT条件是最优性的充分必要条件[37]。式 (26) 中优化问题的拉格朗日函数可表示如下：

$$L = -\sum_{i=1}^{m} \ln(1 + g_i p_i) + \mu\Big(\sum_{i=1}^{m} p_i - P_T\Big) + \sum_{j=1}^{s} \Big(\lambda_j\Big(\sum_{i \in I(j)} p_i - P_j\Big)\Big) - \sum_{i=1}^{m} \eta_i p_i \tag{27}$$

其中，$\mu, \lambda_j, \eta_i \geq 0$ 分别是总功率约束、PGPC 和 $p_i \geq 0$约束对应的拉格朗日乘子。利用拉格朗日函数和可行集，最优性条件的 KKT 条件可表示如下：

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = -\frac{g_i}{1 + g_i p_i} + \mu + \lambda_j - \eta_i = 0, \ i \in I(j) \tag{28}$$

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{m} p_i - P_T\Big) = 0, \ \lambda_j\Big(\sum_{i \in I(j)} p_i - P_j\Big) = 0, \ \eta_i p_i = 0 \tag{29}$$

$$\mu, \lambda_j, \eta_i \geq 0 \tag{30}$$

$$p_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} p_i \leq P_T, \ \sum_{i \in I(j)} p_i \leq P_j \tag{31}$$

其中，(28)-(31)分别对应：(i) 驻点条件，(ii) 互补松弛条件，(iii) 对偶可行性约束，以及 (iv) 原始可行性约束。由 (28) 可知：

$$p_i = (\mu + \lambda_j - \eta_i)^{-1} - g_i^{-1} \tag{32}$$

接下来，考虑 $p_i > 0$ 和 $p_i = 0$的两种情况来简化式 (32)。首先，考虑 $p_i > 0$ ，根据 (29) 可得 $\eta_i = 0$ 。在这种情况下，式 (32) 意味着：

$$0 < p_i = (\mu + \lambda_j)^{-1} - g_i^{-1} \tag{33}$$

因此，当满足以下条件时，p_i 如式 (33) 所示：

$$(\mu + \lambda_j)^{-1} > g_i^{-1} \tag{34}$$

对于 $p_i = 0$的情况，由 (30) 和 (32) 可知：

$$0 \leq \eta_i = (\mu + \lambda_j) - g_i \tag{35}$$

因此，$p_i = 0$ 如果：

$$(\mu + \lambda_j)^{-1} \leq g_i^{-1} \tag{36}$$

可以将这两种情况结合起来，得到关于 p_i 的以下表达式。 :

$$p_i = \begin{cases} 0 & (\mu + \lambda_j)^{-1} \leq g_i^{-1} \\ (\mu + \lambda_j)^{-1} - g_i^{-1} & (\mu + \lambda_j)^{-1} > g_i^{-1} \end{cases} \tag{37}$$

该解对于 最优功率分配可表示为 $p_i^* = \left((\mu + \lambda_j)^{-1} - g_i^{-1}\right)_+$。

APPENDIX B
PROOF OF PROPOSITION 1

A. 对偶变量 μ 的计算证明

若 $\sum_{j=1}^{s} P_j \leq P_T$，则 $\sum_{i=1}^{m} p_i \leq P_T$，且总功率约束未激活（$\mu = 0$ 由（29）得出[3]）。否则，$\mu > 0$，且总功率约束处于激活状态 $\sum_{i=1}^{m} p_i = P_T$。在这种情况下，我们考虑 $\lambda_j > 0$ 和 $\lambda_j = 0$ 的两种可能情况。$\lambda_j > 0$ 意味着：

$$P_j = \sum_{i \in I(j)} p_i \tag{38}$$

$$= \sum_{i \in I(j)} \left((\mu + \lambda_j)^{-1} - g_i^{-1}\right)_+ \tag{39}$$

$$\leq \sum_{i \in I(j)} (\mu^{-1} - g_i^{-1})_+ \tag{40}$$

其中，（38）由（29）中的互补松弛条件得出，（39）中的等号源于定理1，（40）中的不等式由 $\lambda_j > 0$ 得出。

对于 $\lambda_j = 0$ 的情况，定理1意味着：

$$\sum_{i \in I(j)} p_i = \sum_{i \in I(j)} (\mu^{-1} - g_i^{-1})_+. \tag{41}$$

注意：

$$P_j \geq \sum_{i \in I(j)} p_i \tag{42}$$

$$= \sum_{i \in I(j)} (\mu^{-1} - g_i^{-1})_+ \tag{43}$$

其中（42）是由 （31）中的原始可行性约束推出的，而（43）则归因于（41）。

[3]在 $\sum_{j=1}^{s} P_j \leq P_T$的情况下，总功率约束变得多余，因为移除该约束，即 $\mu = 0$，并不会改变该问题的可行集。

结合这两种情况可得:

$$\sum_{i\in I(j)} p_i = \begin{cases} P_j, & \sum_{i\in I(j)}(\mu^{-1}-g_i^{-1})_+ \geq P_j \\ \sum_{i\in I(j)}(\mu^{-1}-g_i^{-1})_+, & \sum_{i\in I(j)}(\mu^{-1}-g_i^{-1})_+ \leq P_j \end{cases} \tag{44}$$

因此,

$$\sum_{i\in I(j)} p_i = \min\left\{P_j, \sum_{i\in I(j)}(\mu^{-1}-g_i^{-1})_+\right\} \tag{45}$$

将 (45) 与以下事实结合起来: $\sum_{j=1}^{s}\sum_{i\in I(j)} p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i = P_T$, 即可得到 (8)。

B. 对偶变量 λ_j 的计算证明

得到 μ 后, 可利用 (45) 求得 $\sum_{i\in I(j)} p_i$ 。此外,

$$\sum_{i\in I(j)} p_i = \sum_{i\in I(j)} \left((\mu+\lambda_j)^{-1}-g_i^{-1}\right)_+ \tag{46}$$

此处等号成立是由定理1得出的。将 (45) 与 (46) 结合起来, 即可得到 (9)。

Appendix C
Proof of Proposition 3

下面给出主序不等式的定义及其在 Schur 凹函数中的应用。

定义1. 设 $\mathbf{x} = [x[1], x[2], ..., x[m]]$ 和 $\mathbf{y} = [y[1], y[2], ..., y[m]]$; 二者均按降序排列。若满足以下条件, 则称 x 被 y 主序:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} x[i] \leq \sum_{i=1}^{k} y[i],\ k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &\sum_{i=1}^{m} x[i] = \sum_{i=1}^{m} y[i]. \end{aligned} \tag{47}$$

其中, 主序不等式记作 $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$。若 $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, 则称 $f(\cdot)$ 为 Schur 凹函数, 并且 $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$ [39] [40]。

为证明该命题, 注意到该算法会收敛, 因为组的数量有限, 并且 S_P 中的值也是有限的。设算法收敛时有 t 个活动组。我们按 $\frac{P_u}{|I u()|}$ 递增的顺序排列它们:

$$\frac{P_{j_1}}{|I(j_1)|} \leq \frac{P_{j_2}}{|I(j_2)|} \leq ... \leq \frac{P_{j_t}}{|I(j_t)|}. \tag{48}$$

注意，在算法中，$\frac{P}{L}$ 在每次迭代中都会增加。这是因为 $\frac{P}{L} \geq \frac{P_u}{|I(u)|}$ 意味着 $\frac{P-P_u}{L-|I(u)|} \geq \frac{P}{L}$（$P \geq P_u \geq 0, L > |I(u)| > 0$）。因此，在最后一步之后：

$$\frac{P_{j_t}}{|I(j_t)|} \leq \frac{P}{L} = \frac{P_T - \sum_{k=1}^{t} P_{j_k}}{m - \sum_{k=1}^{t} |I(j_k)|}. \tag{49}$$

公式（48）和（49）意味着：

$$\frac{P_{j_1}}{|I(j_1)|} \leq ... \leq \frac{P_{j_t}}{|I(j_t)|} \leq \frac{P_T - \sum_{k=1}^{t} P_{j_k}}{m - \sum_{k=1}^{t} |I(j_k)|} \tag{50}$$

在这种情况下，天线的功率分配 $\mathbf{p}^* = \{p_i^*\}$ 如下：

$$\mathbf{p}^* = \Bigg[\underbrace{\frac{P_{j_1}}{|I(j_1)|}, .., \frac{P_{j_1}}{|I(j_1)|}}_{\text{antennas in the 1st active group}} , ..., \underbrace{\frac{P_{j_t}}{|I(j_t)|}, ..., \frac{P_{j_t}}{|I(j_t)|}}_{\text{antennas in the } t\text{-th active group}} , \underbrace{\frac{P_T - \sum_{k=1}^{t} P_{j_k}}{m - \sum_{k=1}^{t} |I(j_k)|}, ..., \frac{P_T - \sum_{k=1}^{t} P_{j_k}}{m - \sum_{k=1}^{t} |I(j_k)|}}_{\text{antennas in the inactive groups}} \Bigg] \tag{51}$$

请注意，功率分配 $\mathbf{p}^*$ 满足总功率约束和组功率约束联合约束，因为它由算法1求得，而该算法同时考虑了总功率约束和PGPC约束。如果功率分配 $\mathbf{p}^*$ 不是最优的，则最优解具有以下一般形式：

(i) 若 $1 \leq k \leq t$，则第 k 组的组功率为 $P_{j_k} - \epsilon_{j_k}$，其中 $\epsilon_{j_k} \geq 0$；

(ii) 若 $k > t$，则其余各组中其余天线可分配的总功率为$P_T - \sum_{k=1}^{t} P_{j_k} + \sum_{k=1}^{t} \epsilon_{j_k}$。

我们需要在这种功率分配设定下求得最大可达速率。在这种情况下，当某一特定组中的所有天线获得相同的功率时，可达到最大可达速率（因为目标函数是对称凹函数 [6]）。因此，在这种设定下，采用以下功率分配可达到最大可达速率：

$$i \in I(j_k), 1 \leq k \leq t : p_i^{**} = \frac{P_{j_k} - \epsilon_{j_k}}{I(j_k)} \tag{52}$$

$$i \in I(j_k), k > t : p_i^{**} = \frac{P_T - \sum_{k=1}^{t} P_{j_k} + \sum_{k=1}^{t} \epsilon_{j_k}}{m - \sum_{k=1}^{t} |I(j_k)|} \tag{53}$$

接下来，我们将 $\mathbf{p}^{**} = \{p_i^{**}\}$ 按升序排列：

$$\mathbf{p}^{**} = \Bigg[\frac{P_{i_1} - \epsilon_{i_1}}{|I(i_1)|}, .., \frac{P_{i_1} - \epsilon_{i_1}}{|I(i_1)|}, ..., \frac{P_{i_t} - \epsilon_{i_t}}{|I(i_t)|}, ..., \frac{P_{i_t} - \epsilon_{i_t}}{|I(i_t)|}, \frac{P_T - \sum_{k=1}^{t} P_{j_k} + \sum_{k=1}^{t} \epsilon_{j_k}}{m - \sum_{k=1}^{t} |I(j_k)|}, ..., \frac{P_T - \sum_{k=1}^{t} P_{j_k} + \sum_{k=1}^{t} \epsilon_{j_k}}{m - \sum_{k=1}^{t} |I(j_k)|} \Bigg] \tag{54}$$

请注意，我们将记号从 P_{j_k} 改为 P_{i_k}[4]。为了求出 p_i的最优解，我们需要比较 C(p*) 和 C(p**)。为进行比较，我们使用以下论据：

1- C(p) 是 Schur 凹函数（见引理1）。

2- p* 被 p** 主序（见引理2）。

因此：

$$\mathbf{p}^{**} \succ \mathbf{p}^{*} \Rightarrow C(\mathbf{p}^{*}) \geq C(\mathbf{p}^{**}) \tag{55}$$

其中表明，p* 为 p_i 的最优功率分配。

引理1。式（13）中的函数 $C(\mathbf{p} = \{p_i\})$ 是 Schur 凹的。

证明。函数 $C(\mathbf{p} = \{p_i\}) = \mathbb{E}_{g_i}\left\{\sum_{i=1}^{m} \ln(1+g_i p_i)\right\}$ 是置换不变（对称）函数

[6] $1+$。此

$g_i p_i$

外，它是凹函数，这是因为 $\left\{\sum_{i=1}^{m} \ln(\,)\right\}$ 是中的凹函数，且期望是线性函数（它保持不等式）。

$\mathbb{E}_{g_i}$

置换不变性和凹性意味着该函数是 Schur 凹函数（见 [40] 中的定理12.27和12.25）。

□

引理2。向量 p* 被 p** 主序。

证明。将 p* 和 p** 按降序重新排列，并将它们表示为更一般的形式：

$$\mathbf{p}^{*\downarrow} = \mathbf{x}_1 = [\underbrace{x, ..., x}_{q \text{ elements of } x}, x_{q+1}, ..., x_m] \tag{56}$$

$$\mathbf{p}^{**\downarrow} = \mathbf{x}_2 = \left[\underbrace{x + \frac{1}{q}\sum_{i=q+1}^{m} \epsilon_i, ..., x + \frac{1}{q}\sum_{i=q+1}^{m} \epsilon_i}_{q \text{ elements of } x + \frac{1}{q}\sum_{i=q+1}^{m} \epsilon_i}, (x-\epsilon)_{q+1}, \ldots, (x-\epsilon)_m\right] \tag{57}$$

其中，对于所有 i 和 $(x-\epsilon)_t \geq (x-\epsilon)_{t+1}$，$\epsilon_i \geq 0$，即我们按降序排列 $\mathbf{x}_2$ 中的 $(x_i - \epsilon_i)$（例如，$(x-\epsilon)_{q+1}$ 和 $(x-\epsilon)_{q+2}$ 分别是 $\{(x_{q+1} - \epsilon_{q+1}) ..., (x_m - \epsilon_m)\}$ 中最大和第二大的元素）。式 (56) 是式 (51) 的一种更一般的表示，其中非活动组中有 q 根天线，天线总数为 m。要得到式 (57)，将活跃组中天线的功率，即 $x_{q+1}, ..., x_m$，减去 ϵ_i，并将 $\frac{1}{q}\sum_{i=q+1}^{m} \epsilon_i$ 加到

[4]在此命题的证明中，我们有两种不同的排序序列：P_{j_k} 和 P_{i_k}。对于前一个序列，$^{P_{j_k}}_{|I\ j_k()|}$ 按升序排列；对~~于后一~~个序列，$\frac{P_{i_k} - \epsilon_{i_k}}{|I\ i_k\ |}()$按升序排列。

所有非活动组中天线的功率上（参见式 (54) 与式 (51) 的关系）。这里，我们将向量 $\mathbf{x}_1$ 的第 i 个元素记为 $\mathbf{x}_1[i]$。注意：

$$\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_2[i]=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_1[i] \tag{58}$$

此外，

$$\text{for}\quad n\le q:\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_2[i]=nx+\frac{n}{q}\sum_{i=q+1}^{m}\epsilon_i\overset{(a)}{\ge}nx=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_1[i] \tag{59}$$

$$\begin{aligned}\text{for}\quad n>q:\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_2[i]&=qx+\sum_{i=q+1}^{m}\epsilon_i+\sum_{i=q+1}^{n}(x-\epsilon)_i\\&\overset{(b)}{\ge}qx+\sum_{i=q+1}^{m}\epsilon_i+\sum_{i=q+1}^{n}(x_i-\epsilon_i)\\&=qx+\sum_{i=q+1}^{n}x_i+\sum_{i=n+1}^{m}\epsilon_i\\&\overset{(c)}{\ge}qx+\sum_{i=q+1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_1[i]\end{aligned} \tag{60}$$

其中，(a) 和 (c) 是因为对所有 i，$\epsilon_i\ge 0$；(b) 则由以下事实得出：$\sum_{i=q+1}^{n}(x-\epsilon)_i$ 是 $\{(x_{q+1}-\epsilon_{q+1})$ 的前 $n-q$ 个最大值之和.....，$(x_m-\epsilon_m)\}$。因此，(59) 和 (60) 意味着 $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}_2[k]\ge\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}_1[k]$。结合 (58)，我们得到 $\mathbf{x}_2\succ\mathbf{x}_1$。

□

Appendix D
Proof of Proposition 5

设 R、W ≥ 0 如下：

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}r_1 & r_3\\ r_3^* & r_2\end{bmatrix},\mathbf{W}=\begin{bmatrix}w_1 & w_3\\ w_3^* & w_2\end{bmatrix}. \tag{61}$$

为证明这一命题，我们需要以下引理。

引理 3. 设 $\mathbf{H}_{n\times 2}$ 的元素服从零均值独立同分布复高斯分布，且 $\mathbf{W}_{2\times 2}=\mathbf{H}^{+}\mathbf{H}$。则，$f_{w_3}(w_3)=f_{w_3}(-w_3)$，其中 $f_{w_3}(w_3)$ 是 w_3 的概率密度函数（概率密度函数）。

证明。注意到 w_3 如下：

$$w_3=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{H})_{1i}^{*}(\mathbf{H})_{2i}. \tag{62}$$

注意，$(\mathrm{H})_{1i}^{*}$ 和 $(\mathrm{H})_{2i}$ 相互独立，且服从相同的零均值复高斯分布。这意味着，对于随机变量 $x_i = (\mathrm{H})_{1i}^{*}(\mathrm{H})_{2i}$（即两个相互独立的零均值复高斯随机变量的乘积），我们有 $f_{x_i}(x_i) = f_{x_i}(-x_i)$，其中 $f_{x_i}(x_i)$ 是 x_i [41][42][43] 的概率密度函数。另外，

$$f_{w_3}(-w_3) = f_{x_1}(-w_3) \circledast f_{x_2}(-w_3) \circledast \ldots \circledast f_{x_n}(-w_3) \tag{63}$$

其中，$\circledast$ 是二维卷积算子，包含实部和虚部，因为所有随机变量都是复数。等式根据以下事实成立：独立随机变量之和的概率密度函数等于这些随机变量的概率密度函数的卷积 [44]，如上所示。因此，(63) 表明 $f_{w_3}(w_3) = f_{w_3}(-w_3)$，因为 $f_{x_i}(w_3) = f_{x_i}(-w_3)$。

□

引理 4. 考虑 $2 \times n$ 多输入多输出信道。(5) 中的优化问题具有如下上界：

$$C^{*} \leq \max_{\boldsymbol{R} \in S_R} \mathbb{E}_{w_i} \left\{ \ln \left(r_1 r_2 (w_1 w_2 - |w_3|^2) + w_1 r_1 + w_2 r_2 + 1 \right) \right\} \tag{64}$$

当 $r_3 = 0$ 时可达到该上界。

证明。对于 $\mathrm{H}_{2\times n}$，(5) 中的目标函数具有如下上界：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_H \left\{ \ln|\mathbf{I} + \mathbf{HRH}^{+}| \right\} \overset{(a)}{=} \mathbb{E}_W \left\{ \ln|\mathbf{I} + \mathbf{WR}| \right\} \\
&\quad = \mathbb{E}_{w_i} \left\{ \ln \left((r_1 r_2 - |r_3|^2)(w_1 w_2 - |w_3|^2) + w_1 r_1 + w_2 r_2 + 1 + 2\Re(w_3 r_3^{*}) \right) \right\} \\
&\quad \overset{(b)}{\leq} \mathbb{E}_{w_i} \left\{ \ln \left(r_1 r_2 (w_1 w_2 - |w_3|^2) + w_1 r_1 + w_2 r_2 + 1 + 2\Re(w_3 r_3^{*}) \right) \right\} \\
&\quad \overset{(c)}{=} \frac{1}{2} \mathbb{E}_{w_i} \left\{ \ln \left(r_1 r_2 (w_1 w_2 - |w_3|^2) + w_1 r_1 + w_2 r_2 + 1 + 2\Re(w_3 r_3^{*}) \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \ln \left(r_1 r_2 (w_1 w_2 - |w_3|^2) + w_1 r_1 + w_2 r_2 + 1 - 2\Re(w_3 r_3^{*}) \right) \right\} \\
&\quad = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{w_i} \left\{ \ln \left(\left(r_1 r_2 (w_1 w_2 - |w_3|^2) + w_1 r_1 + w_2 r_2 + 1 \right)^2 - 4 \left(\Re(w_3 r_3^{*}) \right)^2 \right) \right\} \\
&\quad \overset{(d)}{\leq} \frac{1}{2} \mathbb{E}_{w_i} \left\{ \ln \left(r_1 r_2 (w_1 w_2 - |w_3|^2) + w_1 r_1 + w_2 r_2 + 1 \right)^2 \right\} \\
&\quad = \mathbb{E}_{w_i} \left\{ \ln \left(r_1 r_2 (w_1 w_2 - |w_3|^2) + w_1 r_1 + w_2 r_2 + 1 \right) \right\}
\end{aligned} \tag{65}$$

其中，(a) 是由于 $|\mathbf{I} + \mathbf{AB}| = |\mathbf{I} + \mathbf{BA}|$，(b) 是由于 $r_1 r_2 \geq |r_3|^2$，$w_1 w_2 \geq |w_3|^2$，(c) 根据引理 3 得出，因为改变 w_3 的符号不会影响期望，(d) 是由于

$\left(\Re(w_3 r_3^*)\right)^2 \geq 0$。对两边取最大值可得式 (64)。当 $r_3 = 0$ 时，上界可达。

□

引理 3 表明，当 $r_3 = 0$ 时可以达到信道容量，即 $\mathrm{R}^* = \mathrm{D}(r_1, r_2) \triangleq \mathrm{D}(p_1, p_2)$ 是最优的。(5) 中的目标函数可以简化为 $\mathbb{E}_H \left\{ \ln |\mathrm{I} + \mathrm{HD}(r_i)\mathrm{H}^+| \right\}$。对于独立同分布瑞利衰落，该函数关于 r_i 对称，且联合凹 [6], , 因此是 Schur 凹 [40]。因此，采用命题3证明中的相同论证，可以证明算法1给出了 p_i 的最优功率分配。在这种情况下，要么存在两个天线组，即 $I(1) = 1$ 和 $I(2) = 2$；要么仅存在一个组，即 $I(1) = 1, 2$。对于后一种情况，问题就变成了仅在总功率约束下求 MIMO 信道的容量。

附录 E

命题 6 的证明

考虑联合TPC和PGPC约束下的独立同分布瑞利衰落MIMO信道。我们分别将 R 的第 i 个特征值和第 i 个对角元素记为 λ_i 和 d_i。我们注意到：

$$\mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \ln |\mathbf{I} + \mathbf{HRH}^+| \right\} = \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \ln |\mathbf{I} + \mathbf{HUD}(\lambda_i)\mathbf{U}^+\mathbf{H}^+| \right\} \tag{66}$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \ln |\mathbf{I} + \mathbf{HD}(\lambda_i)\mathbf{H}^+| \right\} \tag{67}$$

$$\leq \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \ln |\mathbf{I} + \mathbf{HD}(d_i)\mathbf{H}^+| \right\} \tag{68}$$

在式（66）中，我们使用 R 的特征值分解，即 $\mathrm{R} = \mathrm{UD}(\lambda_i)\mathrm{U}^+$，其中对角矩阵 $\mathrm{D}(\lambda_i)$ 的对角元素是 R 的特征值，U 是酉矩阵，其列包含 R 的特征向量；式（67）是因为对于酉矩阵 U 和独立同分布瑞利衰落 MIMO 信道 H [6]，H 与 HU 具有相同的分布；为证明式（68），注意：i) $f(\lambda_i) = \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \ln |\mathrm{I} + \mathrm{HD}(\lambda_i)\mathrm{H}^+| \right\}$ 是舒尔凹函数，因为它是凹函数，且关于 λ_i [6] 对称（另见引理1）；ii) 厄米矩阵的特征值主化其对角元素 [39], , 这意味着 $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m] \succ [d_1, d_2, \ldots, d_m]$。因此，$f(\lambda_i) \leq f(d_i)$，由上述两个事实可得

事实。由于 R 和 D(d_i) 具有相同的对角元素，因此可得 D(d_i) $\in S_R$。所以，R* 必须是对角矩阵[5]。现在，式（5）中的信道容量可写为

$$C^* = \max_{p_i \in S_P} \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \ln |\mathbf{I} + \mathbf{HD}(p_i)\mathbf{H}^+| \right\} \tag{69}$$

这里，目标函数是 Schur 凹的，因此，按照命题3中给出的证明，算法1为 p_i 提供了最优解。

参考文献

[1] E. Biglieri 等，《MIMO无线通信》。剑桥大学出版社，纽约，2007年。[2] C. Cox，《LTE简介：LTE、LTE-Advanced、SAE、VoLTE与4G移动通信》，第2版。约翰·威立父子出版公司，2014年。[3] T. L. Marzetta，“大规模MIMO简介”，贝尔实验室技术期刊，第20卷，第11–22页，2015年3月。[4] M. Shafi 等，“第五代移动通信：标准、试验、挑战、部署与实践教程概述”，IEEE JSAC，第I部分，第35卷，第6期，第1201–1221页，2017年6月。[5] I. E. Telatar，“多天线高斯信道的容量”，AT&T贝尔实验室，内部技术备忘录，1995年6月（《欧洲电信汇刊》，第10卷，第6期，1999年12月）。[6] D. Tse 和 P. Viswanath，《无线通信基础》。剑桥大学出版社，2005年。[7] Z. Wang 和 L. Vandendorpe，“联合总功率与逐天线功率约束下的高能效多天线系统功率分配”，IEEE通信汇刊，第66卷，第10期，第4521–4535页，2019年10月。[8] S. Loyka，“总功率与逐天线功率约束下高斯MIMO信道的容量”，IEEE通信汇刊，第65卷，第3期，第1035–1043页，2017年3月。[9] M. Khoshnevisan 和 J. N. Laneman，“同时功率约束下多天线无线系统中的功率分配”，IEEE通信汇刊，第60卷，第12期，第3855–3864页，2012年12月。[10] M. Khojastehnia，“联合功率约束下的大规模MIMO信道”，应用科学硕士论文，渥太华大学，渥太华，安大略省，加拿大，2019年。[11] M. Vu，“每根天线功率约束下的MISO容量”，IEEE通信汇刊，第59卷，第5期，第1268–1274页，2011年5月。[12] R. Chaluvadi、S. S. Nair 和 S. Bhashyam，“多重功率约束下的最优多天线传输”，IEEE无线通信汇刊，第18卷，第7期，第3382–3394页，2019年4月。[13] P. L. Cao 和 T. J. Oechtering，“高斯MISO窃听信道中传输速率与保密速率之间的最优权衡”，第21届国际ITG智能天线研讨会，柏林，德国，2017年6月。[14] F. Boccardi 和 H. Huang，“每根天线功率约束下MIMO广播信道的迫零预编码”，IEEE信号处理与无线通信进展国际研讨会，戛纳，法国，第1–5页，2006年7月。[15] P. L. Cao 等，“总功率与逐天线功率联合约束下MISO信道的最优发射策略”，IEEE信号处理汇刊，第64卷，第16期，第4296–4306页，2016年8月。[16] S. Loyka，“联合功率约束下高斯MIMO信道容量研究”，IEEE无线通信快报，第8卷，第2期，第332–335页，2019年4月。

[5]注意，(66) 中的 R 与 (68) 中的 D(d_i)具有相同的对角元素。通过对 (68) 中的 d_i 进行适当重排即可实现这一点，因为 $\mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \ln |\mathbf{I} + \mathrm{HD}(d_i)\mathrm{H}^+| \right\}$ 关于 d_i是对称的。

[17] M. Vu，《具有每根天线功率约束的多输入多输出容量》，IEEE Globecom，休斯敦，美国，2011年12月。[18] J. Park、W. Sung 和 T. M. Duman，《具有逐天线功率约束的最优双用户多输入多输出传输的预编码器与容量表达式》，IEEE通信快报，第14卷，第11期，第996–998页，2010年11月。[19] Y. Zhu 和 M. Vu，《具有每根天线功率约束的多输入多输出多址信道和容量的迭代模式丢弃》，IEEE通信汇刊，第60卷，第9期，第2421–2426页，2012年9月。[20] P. L. Cao 和 T. J. Oechtering，《具有总功率与逐天线功率联合约束的多输入多输出信道最优发射策略》，IEEE国际声学、语音与信号处理会议，新奥尔良，美国，第3569–3573页，2017年3月。[21] M. Grant 和 S. Boyd，《CVX：用于规范化凸规划的 Matlab 软件》，2.1版，2014年3月。http://cvxr.com/cvx。[22] D. Maamari、N. Devroye 和 D. Tuninetti，《具有每根天线功率约束的遍历MISO信道容量及其在衰落认知干扰信道中的应用》，IEEE国际信息论研讨会，夏威夷，美国，2014年7月。[23] A. Favano 等，《具有衰落的幅度受限AWGN MIMO信道容量界》，IEEE国际信息论研讨会，洛杉矶，美国，第2032–2037页，2020年8月。[24] Y. Wang，《空间相关莱斯/对数正态衰落下分布式MIMO系统容量的下界》，Physical Communication，第50卷，第101 522–101 527页，2021年2月。[25] J. Qiu 等，《空间相关瑞利衰落信道下无蜂窝大规模MIMO的下行链路功率优化》，IEEE Access，第8卷，第56 214–56 227页，2020年3月。[26] M. Khojastehnia、S. Loyka 和 F. Gagnon，《联合功率约束下的大规模MIMO信道》，加拿大信息论研讨会，汉密尔顿，安大略省，加拿大，2019年6月。[27] T. L. Marzetta 等，《大规模MIMO基础》。剑桥大学出版社，2016年。[28] C. Masouros 和 M. Matthaiou，《空间受限大规模MIMO：有利传播的极限》，IEEE通信快报，第19卷，第5期，第771–774页，2015年5月。[29] Z. Gao 等，《时域稀疏大规模MIMO信道的渐近正交性分析》，IEEE通信快报，第19卷，第10期，第1826–1829页，2015年10月。[30] M. Gauger 等，《大规模MIMO系统不同天线阵列几何结构的信道测量》，国际ITG系统、通信与编码会议，汉堡，德国，第3855–3864页，2015年2月。[31] J. Hoydis 等，《大型天线阵列的信道测量》，国际无线通信系统研讨会，巴黎，法国，第811–815页，2012年8月。[32] X. Gao 等，《基于实测传播数据的大规模MIMO性能评估》，IEEE无线通信汇刊，第14卷，第7期，第3899–3911页，2015年7月。[33] P. Harris 等，《具有视距移动信道的实时大规模MIMO系统性能表征》，IEEE通信选定领域期刊，第35卷，第6期，第1244–1253页，2017年6月。[34] H. Yang 和 T. L. Marzetta，《视距传播环境下具有最大最小功率控制的大规模MIMO》，IEEE通信汇刊，第65卷，第11期，第4685–4693页，2017年11月。[35] A. O. Martinez 等，《第五代移动通信场景下大规模MIMO特性的实验研究》，IEEE天线与传播汇刊，第66卷，第12期，第7206–7215页，2018年12月。[36] R. Gohary 和 T. Willink，《开放频谱通信的鲁棒迭代水填充算法》，IEEE信号处理汇刊，第57卷，第4964–4970页，2009年12月。[37] S. Boyd 和 L. Vandenberghe，《凸优化》。剑桥大学出版社，2004年。[38] I. S. Gradˇstejn 和 I. M. Ryˇzik，《积分、级数与乘积表》，第6版。Academic Press，2000年。

[39] F. Zhang, 《矩阵理论：基本结果与技巧》。Springer，2011。[40] E. Pecaric、F. Proschan 和 Y. L. Tong, 《凸函数、偏序与统计应用》。Academic Press，1992。[41] N. O’Donoughue 和 J. M. F. Moura，“关于独立复高斯变量乘积的研究”，IEEE信号处理汇刊，第60卷，第1050–1063页，2012年3月。[42] M. K. Simon，《涉及高斯随机变量的概率分布：工程师与科学家手册》。Springer，2002。[43] T. Betlehem 和 A.J. Coulson，“复高斯变量与两个复高斯变量乘积之和的分布”，澳大利亚通信理论研讨会，第126–129页，2012年1/2月。[44] A. Papoulis 和 S. U. Pillai，《概率、随机变量与随机过程》，第4版。McGraw-Hill，2001。