arXiv:2305.01114v1 [quant-ph] 1 May 2023

通过线性光学实现超越阻塞极限的增强光子路由

Harjot Singh,[1], * Jasvith Raj Basani,[1], * 和 Edo Waks[1]
[1]*Institute for Research in Electronics and Applied Physics, and Joint Quantum Institute, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Maryland, College Park, MA, USA*（日期：2023年5月3日）

将来自一个输入端口的不可区分光子分别导向不同的输出端口，是量子信息处理中一项基础操作。实现超越随机概率路由的最简单方案利用了二能级发射体的光子阻塞效应。但这种方法受到时间-能量不确定性关系的限制。我们证明，在原子之后施加线性光学幺正变换，能够使分束效率超越这一时间-能量限制。我们证明，对于非纠缠光子输入，线性光学幺正变换可将分束效率从 67% 提高到 82%；对于纠缠光子输入，则可从 77% 提高到 90%。随后，我们优化纠缠光子波函数的时间模式轮廓，使分束效率达到 92% 的最优值，显著优于此前仅使用二能级原子所推导出的极限。这些结果为优化单光子非线性以及设计可编程、稳健的光子-光子相互作用提供了途径，从而实现实用的高保真量子操作。

I. 引言

光子学为实现可扩展量子技术提供了一种极具前景的途径 [1–5]。光子与其环境的相互作用较弱，因此成为量子信息的理想载体 [6–9]。与此同时，缺乏强相互作用也给实现光子之间的量子操作带来了重大挑战，而这对于许多量子信息处理应用至关重要。

单光子相互作用需要强光学非线性。体光学非线性因有望在室温下运行而颇具吸引力，但现阶段仍然太弱 [10–12]。或者，可以通过将二能级发射体耦合到腔或波导，在单光子层面实现非线性元件 [13–15]。两能级发射体的非线性响应已得到充分研究 [16–18]，并已利用量子点 [19, 20], 原子 [21, 22], 离子 [23] 和超导电路 [24]在实验中实现。但由二能级发射体介导的相互作用受到时间-带宽权衡的限制，这会降低诸如受控相位门 [25], 、光子分选 [26, 27] 和光子路由 [28]等操作的保真度。

一个备受关注的应用是光子路由，其中二能级发射体将两个不可区分光子分束到不同的输出通道 [29]。线性光学幺正变换 [30–32]已被证明只能达到 50% 的峰值分束效率 [33, 34]。二能级发射体可以突破这一限制，但由于时间-带宽权衡，无法实现完美路由。Rosenblum 等人已对双光子路由进行了深入分析等。参见 [28], ，对于洛伦兹和高斯光谱轮廓的脉冲，峰值分束效率分别达到 64% 和 68%。通过在输入光子之间引入纠缠来调控时间-能量关系，可进一步将由三能级原子级联发射产生的纠缠脉冲的效率提高至 77% [28]。

我们证明，在原子之后使用线性光学幺正变换，可以超越阻塞限制的分束效率。我们对该幺正变换进行优化，以使不相关的双光子输入达到最佳分束效率，并证明对于高斯脉冲形状，该效率可超过 82%。随后，我们证明时间-能量纠缠输入可实现超过 90% 的分束效率。最后，我们对纠缠光子波函数进行优化，使分束效率达到最佳值 92%。这一效率显著高于仅由二能级发射体所设定的极限（不使用幺正变换）。在所有情况下，幺正变换都会从根本上改变时间-带宽权衡，使输入脉冲在带宽低于裸二能级发射体对应带宽时达到最佳性能。

本文的组织结构如下：在第 II节中，我们推导出入射到二能级发射体和马赫-曾德干涉仪系统的双光子波包发生散射事件的概率所对应的最一般时域解。在第 III节中，我们找到了能够最大化纠缠光子和非纠缠光子分束效率的最优幺正变换。在第IV节中，我们进一步优化纠缠光子输入的时间波函数，以实现比标准指数时间模式或高斯时间模式更优的分束效率。最后，第 V节通过进一步讨论我们工作的范围和影响，对本文进行了总结。

II. 系统模型与方法

图 1(a) 展示了使用二能级发射体实现单光子路由的标准方法。该系统由一个与波导耦合的二能级发射体组成。该

* 这些作者对本工作作出了同等贡献

ˆ模式 $\hat{a}_{\mathrm{in}}$ 和 b_{in} 是发射体的输入，$\hat{a}_{\mathrm{out}}$ˆ和 b_{out} 是输出模式。在光子路由场景中，两个光子从模式 $\hat{a}_{\mathrm{in}}$ 注入，并ˆ散射到两个输出模式。模式 b_{in} 处于真空态。图1(b) 展示了实现该系统的另一种方式：将二能级发射体与双面腔耦合。在坏腔极限下（$\gamma \ll \kappa$），这两个系统等效，其中 γ 表示二能级发射体的自发辐射率，κ表示腔衰减率。在此极限下，腔原子系统可由一维原子模型取代，其修正后的自发辐射率为 $\Gamma = 4g^2/\kappa$ [35]，其中 g 为原子-腔耦合强度。

由于光子阻塞，两个输入光子可能被路由到空间上可区分的输出模式 $\hat{a}_{\mathrm{out}}$ 和 ˆb_{out}，我们将这一效应称为光子分束。我们将光子分束效率定义为：两个光子从同一输入端口进入后从不同输出端口离开的概率。Rosenblum 等人 [28] 对单个原子的分束效率进行了详尽分析，并表明由于时间-带宽权衡，该效率受限于 77% [28]。

为提高分束效率，我们考虑图1（c）中的系统。我们在原子之后放置一个马赫-曾德尔干涉仪，该干涉仪施加如下所示的一般线性光学幺正变换：

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_{\mathrm{out}} \\ \hat{d}_{\mathrm{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\phi}\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{\mathrm{out}} \\ \hat{b}_{\mathrm{out}} \end{bmatrix} \tag{1}$$

ˆ 在上述方程中，$\hat{c}_{\mathrm{out}}$ 和 d_{out} 是该幺正变换的输出模式，它们通过散射矩阵与输入模式直接相关。散射矩阵具有两个可调参数 θ 和 ϕ，分别表示图中所示的相移。通过调节这两个参数，我们可以实现任意所需的双模幺正变换。我们将利用这两个参数，优化进入输出模式的分束效率。

为计算干涉仪后的分束效率，我们首先定义按时间排序的二阶关联函数：

$$\Gamma^{\mathrm{pq}}(\tau_1,\tau_2) = \langle\psi_o|\,\hat{p}^{\dagger}_{\mathrm{out}}(\tau_1)\hat{q}^{\dagger}_{\mathrm{out}}(\tau_2)\hat{q}_{\mathrm{out}}(\tau_2)\hat{p}_{\mathrm{out}}(\tau_1)\,|\psi_o\rangle \tag{2}$$

ˆ 其中 $\{\hat{p},\ \hat{q}\} \in \{\hat{c},\ d\}$。这些关联表示在时间$\tau_1$探测到一个光子，并在时间 τ_2探测到第二个光子的概率密度。波函数 $|\psi_0\rangle$ 表示系统的初态，假设系统处于两个光子均位于模式$\hat{a}_{\mathrm{in}}$ 且原子处于基态的子空间中。由于这些是按时间排序的关联，

隐含在所有计算中使用 $\tau_2 \geq \tau_1$ 。由于我们仅关注双光子输入，关联可以写成 $\Gamma^{\mathrm{pq}}(\tau_1,\ \tau_2) = |\psi_{\mathrm{pq}}(\tau_1,\ \tau_2)|^2$其中 $\psi_{\mathrm{pq}}(\tau_1,\ \tau_2)$ 是关联振幅，表示为：

$$\psi_{\mathrm{pq}}(\tau_1,\tau_2) = \langle 0|\,\hat{q}_{\mathrm{out}}(\tau_2)\hat{p}_{\mathrm{out}}(\tau_1)\,|\psi_0\rangle \tag{3}$$

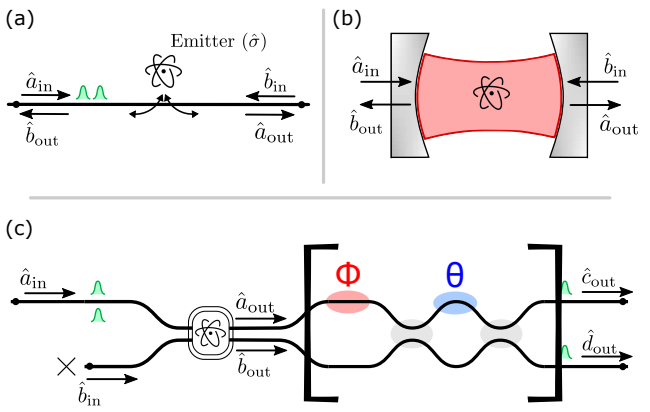

图 1. **光子分束装置示意图 (a)**与波导耦合的二能级发射体示意图，标示了输入模式和输出模式的方向。**(b)** 另一种实现方式：原子与双面腔耦合。**(c)** 光子分束装置示意图，其中，与波导或腔耦合的二能级发射体的输出模式被注入马赫-曾德尔干涉仪。

根据这些关联，我们可以直接计算分束效率 P_S，其表达式为

$$P_S = \int \mathrm{d}\tau_1 \int \mathrm{d}\tau_2 \left[\Gamma^{\mathrm{cd}}(\tau_1,\tau_2) + \Gamma^{\mathrm{dc}}(\tau_1,\tau_2)\right] \tag{4}$$

为了计算分束效率，我们应用幺正变换，推导出关联 ψ_{cd} 与ψ_{dc} 之间的关系，该关系以原子输出端的关联振幅表示：

$$\psi_{\mathrm{lm}} = \langle 0|\,\hat{m}_{\mathrm{out}}(\tau_2)\hat{l}_{\mathrm{out}}(\tau_1)\,|\psi_0\rangle \tag{5}$$

ˆ ˆ 其中，上式中 $\{l,\hat{m}\} \in \{\hat{a},\ b\}$。上述振幅与干涉仪的输出振幅之间满足以下关系：

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{cd}} = {} & e^{-2i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{aa}} - e^{-i\phi}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ab}} \\ & + e^{-i\phi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ba}} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{bb}}\end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{dc}} = {} & e^{-2i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{aa}} + e^{-i\phi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ab}} \\ & - e^{-i\phi}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ba}} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{bb}}\end{aligned} \tag{6b}$$

上述表达式使我们能够直接根据原子输出模式的关联振幅计算干涉仪的输出关联。

为了计算原子输出模式的关联振幅，我们使用原子与

波导相互作用的标准哈密顿量，其形式为 $H = H_0 + H_{\rm int}$ 其中 [16, 36]:

$$\hat{H}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \omega(\hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_\omega + \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega) \tag{7}$$

and

$$\hat{H}_{\rm int} = -i\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, [\hat{\sigma}^\dagger(\hat{a}_\omega + \hat{b}_\omega) - \hat{\sigma}(\hat{a}_\omega^\dagger + \hat{b}_\omega^\dagger)] \tag{8}$$

在上述方程中，$\hat{}\sigma$ 是原子降算符，而 a_ω 是波导的玻色储库模算符。它们通过关系式 $\hat{a}_{\rm in}(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}\int \mathrm{d}t\ a_{\rm in}(t)$ $e^{-i\omega t}$与输入模式相关。一输入端和输出模式还通过输入输出关系 $\hat{a}_{\rm out} = \hat{a}_{\rm in} - \sqrt{2\gamma}\hat{}\sigma$ 和 $\hat{}$ $b_{\rm out} = \hat{b}_{\rm in} - \sqrt{2\gamma}\hat{}\sigma$ [16]直接彼此相关。

$\hat{}$ 当我们将输入脉冲馈入时，$\hat{a}_{\rm in}$, $b_{\rm in}$ 仅为真空噪声输入。由于我们计算的是输出端算符的正规序矩，两个输入端口的真空噪声输入都可以忽略，因此我们可以重写为$\hat{}$ $b_{\rm out} = \sqrt{2\gamma}\hat{}\sigma$。输入通道 $\mathsf{a}_{\rm in}$ 中两个光子的初态可写为：

$$|\psi_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^{\infty} \mathrm{d}t_2\ \xi(t_1,t_2)\hat{a}_{\rm in}^\dagger(t_1)\hat{a}_{\rm in}^\dagger(t_2)\,|0\rangle\,|g\rangle \tag{9}$$

在附录 A 中，我们展示了原子后的输出关联振幅为：

$$\psi_{\rm bb}(\tau_1,\tau_2) = 4\gamma^2 e^{-2\gamma(\tau_1+\tau_2)}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathrm{d}t_2\int_{-\infty}^{\tau_1}\mathrm{d}t_1\ e^{2\gamma(t_1+t_2)}\xi(t_1,t_2)\right) \tag{10a}$$

$$\psi_{\rm ba}(\tau_1,\tau_2) = -2\gamma e^{-2\gamma\tau_1}\left(\int_{-\infty}^{\tau_1}\mathrm{d}t_1\ e^{2\gamma t_1}\xi(t_1,\tau_2)\right) + \psi_{\rm bb}(\tau_1,\tau_2) \tag{10b}$$

$$\psi_{\rm ab}(\tau_1,\tau_2) = -2\gamma e^{-2\gamma\tau_2}\left(\int_{-\infty}^{\tau_1}\mathrm{d}t_1\ e^{2\gamma t_1}\xi(t_1,\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathrm{d}t_2\ e^{2\gamma t_2}\xi(\tau_1,t_2)\right) + \psi_{\rm bb}(\tau_1,\tau_2) \tag{10c}$$

$$\psi_{\rm aa} = \xi(\tau_1,\tau_2) + \psi_{\rm ab}(\tau_1,\tau_2) + \psi_{\rm ba}(\tau_1,\tau_2) - \psi_{\rm bb}(\tau_1,\tau_2) \tag{10d}$$

利用这些关于发射体输出模式中双光子关联振幅的表达式，我们可以直接计算方程（6）和方程（4）中的光子分束效率。这些表达式与文献 [37–40] 中得到的少光子传输时域解一致。

III. 结果

A. 分束未纠缠的光子

我们首先分析两个非纠缠光子作为输入时的分束效率。在这种情况下，我们可以将波函数写为 $\xi(t_1,\ t_2)$ $= \sqrt{2}\ \xi(t_1)\xi(t_2)$。这里，$\xi(t)$ 是归一化的单光子波包，而因子 $\sqrt{2}$ 确保输入态在时间排序 $t_2 \geq t_1$ [11] 下归一化。我们分析单光子输入波包的两种脉冲轮廓。第一种是指数型脉冲轮廓，其形式为 $\xi(t) = \sqrt{2\kappa}e^{-\kappa t}$；第二种是高斯脉冲轮廓，其表达式为 $\xi(t) =$。一$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\kappa\right)^2 e^{-\kappa^2 t^2}$。在这两种情况下，$\kappa$ 均用于表征脉冲的带宽。

我们利用上一节的结果计算分束效率。在附录C中，我们对指数型波包进行了完整计算，并得到了一个解析解。对于高斯脉冲，无法得到解析表达式，因此我们通过数值计算分束效率。图2(a) 和2(b)分别绘出了非关联输入下，高斯脉冲轮廓和指数脉冲轮廓对应的分束效率随 κ 和 θ 的变化情况。由于分束效率关于 θ 的周期为 π，我们只分析并绘制一个周期。对于图中的每个点，我们都会优化干涉仪输入相位 ϕ （见图1），以获得该点对应的 θ 和 κ 取值下的最大分束效率。我们发现，对于所有满足 $\theta \leq \pi/2$ 和 $\phi = \pi$ 的点，$\phi = 0$ 能使分束效率达到最优；而对于 $\theta > \pi/2.$，$\phi = \pi$ 能使分束效率达到最优。这对指数型脉冲和高斯脉冲都成立。此外，ϕ 对应的最优分束效率关于直线 $\theta = \pi/2$对称，因此 θ 处的值与 $\pi - \theta$处的值相同，

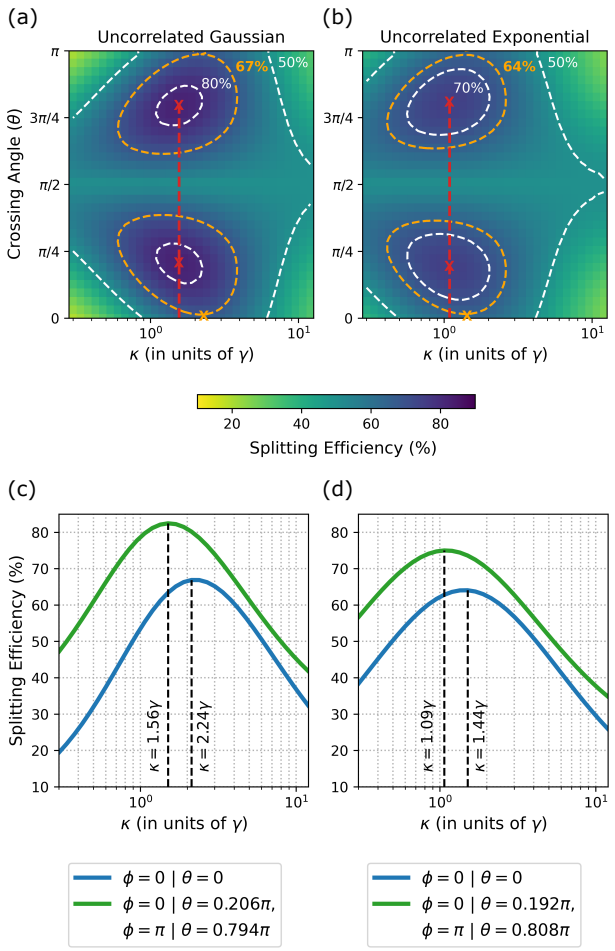

图2. **非纠缠输入光子的分束效率。(a)** 双光子输入采用非纠缠高斯脉冲时，分束效率（以颜色表示）随光子带宽 κ 和交叉角 θ 的变化。红色表示最大分束效率（ 82.5% ），橙色等高线对应阻塞限制的分束效率（67%）。**(b)** 非纠缠指数型输入脉冲的分束效率，标注方式与面板(a)相同。最大效率和阻塞限制效率分别为75%和64%。**(c)** 非纠缠高斯脉冲的分束效率随光子带宽 κ 的变化；绿色和蓝色曲线分别表示经幺正算符增强和未增强的情况。这些曲线的峰值分别对应面板(a)中的最大分束效率和阻塞限制效率。**(d)**非纠缠指数型脉冲的分束效率，标注方式与面板(b)相同。这些曲线的峰值也分别对应面板(b)中的最大分束效率和阻塞限制效率。

其中 $\theta < \pi/2$.

红点表示两幅图中的最大分束效率。对于高斯波包，该最大值在（θ，ϕ）取值为（0.206π，0）时达到；对于指数型波包，则在（0.192π，0）时达到。正如上一段所述，某些 $\theta > \pi/2$ 取值会导致当相位差 ϕ 设为以下数值时，干涉仪两输入臂之间的 π. 橙色等高线表示参考文献中计算的裸原子分束效率。[28] 对于高斯波包，该效率为 67%；对于指数型波包，该效率为 64%。可以看出，两种情况下的红点都位于这些橙色等高线范围内，因此达到了更高的分束效率。

接下来，我们将比较使用马赫-曾德尔干涉仪获得的最优分束效率与裸原子的分束效率。我们可以从图 $\theta = 0$ 2**2**(a) 和2(b) 中曲线的截面提取裸原子的分束效率。在这种情况下，幺正变换实现了恒等变换，因此我们得到裸原子响应。图 2(c) 和 2(d) 展示了这两种幺正变换下，分束效率随输入脉冲带宽的变化关系。蓝色曲线对应于未对原子的输出施加幺正变换的情况，给出了阻塞限制效率。绿色曲线对应于使分束效率达到最优的幺正变换。对于指数脉冲，阻塞限制效率为 65%，出现在 $\kappa = 1.44\gamma$。相比之下，施加幺正变换后的最优分束效率为 75%。实现这一全局最大值的带宽κ 为 1.09γ，因此小于实现阻塞限制效率时的最优带宽。对于高斯脉冲，最优带宽 κ 为 1.57γ，对应的最优分束效率为 82%。这一效率高于 67% 的阻塞限制效率。我们在一个小于裸原子所实现的带宽处达到了这一最优效率；对于高斯输入脉冲，裸原子对应的带宽为 2.24γ 。因此，幺正变换从根本上改变了实现最优分束效率所需的时间-带宽权衡关系。

B. 时间-能量纠缠光子的分束

现在，我们分析系统对时间-能量纠缠输入的响应。这些输入具有与非关联输入从根本上不同的时间-能量不确定关系。因此，它们与二能级原子的相互作用也有所不同。时间-能量纠缠光子态的一种表示方式如下：

$$|\psi\rangle = \int \mathrm{d}\omega_0 \; G(\omega_0) \int \mathrm{d}\omega \; F(\omega) \, |\omega, \omega_0 - \omega\rangle \qquad (11)$$

其中， $G(\omega_0)$ 和 $F(\omega)$ 是一般波函数，仅受态整体归一化要求的约束。上述波函数可在时域中表示为：

$$|\psi\rangle = \int \mathrm{d}t_1 \; g(t_1) \int \mathrm{d}t_2 \; f(t_2 - t_1) a^\dagger(t_1) a^\dagger(t_2) \, |0\rangle \quad (12)$$

其中， $g(t_1)$ 和 $f(t_2 - t_1)$ 是 $G(\omega_0)$ 和 $F(\omega)$ 的傅里叶变换。在 $G(\omega_0) = \delta(\omega_0)$ 的极限下，当则

具有 $g(t_1) = \frac{1}{2\pi}$，可实现完美的时间关联纠缠态，且仅取决于时间差 $t_2 - t_1$。我们将此类状态称为稳态，因为关联仅取决于到达时间差，而与各个独立时间变量的取值无关。更一般的纠缠态可能表现出非稳态行为，此时关联随时间变化，其依赖关系由函数 $g(t_1)$ 量化。

我们首先考虑这一特定情形：$g(t_1) = \sqrt{2\kappa}e^{-\kappa t_1}$ 和 $f(t_2 - t_1) = \sqrt{2\delta}e^{-\delta(t_2-t_1)}$。这里的两个波函数均为指数形式，其中 κ 和 δ 分别表示相应分布的带宽。当 $\kappa \to 0$时，我们达到稳态极限。由此状态可得以下归一化输入波函数：

$$\xi(t_1, t_2) = 2\sqrt{\kappa\delta}\, e^{-\kappa t_1} e^{-\delta(t_2-t_1)} \tag{13}$$

其中 $\xi(t_1, t_2)$ 在方程 (9) 中定义。我们从上述输入波函数入手，因为它可以得到解析解。完整的解析解见附录C。我们只关注稳态极限，可通过令 $\kappa \to \infty$求得。在此极限下，分束效率的表达式与三级原子级联产生的最大纠缠态所得表达式相同 [28]。分别在有线性光学幺正变换和无该变换的情况下，对该表达式关于带宽 δ 进行最大化，得到的分束效率分别为 90% 和 77%。

我们对方程（13）所给输入态的分析表明，稳态时间-能量关联输入$\xi_s(|t_2 - t_1|)$ 相较于非关联输入，能够显著提高分束效率。采用不同脉冲轮廓的稳态输入或可进一步提高效率。在上一节中，与指数脉冲相比，采用高斯脉冲轮廓的非关联输入所达到的分束效率最大值更高。因此，我们考虑以下输入态：

$$|\Psi_{\text{in}}\rangle = \int_{-L}^{L} \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^{\infty} \mathrm{d}t_2 \sqrt{\frac{\delta}{\pi L}} e^{-\frac{\delta}{2}(t_2-t_1)^2} \hat{a}^\dagger_{\text{in}}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\text{in}}(t_2)\,|0\rangle \tag{14}$$

注意，该状态对应于在方程 12 中代入高斯 $F(\omega_1) = e^{-2\omega_1^2/\delta^2}$。这里，$\delta \geq 0$ 表示高斯脉冲的带宽，因此也表示输入脉冲的带宽。我们注意到，在这种情况下，稳态极限对应于 $L \to \infty$. 对于该输入态，分束效率通过数值积分计算。

图 3(a) 和图 3(b) 展示了稳态纠缠输入采用高斯和指数脉冲轮廓时，所得分束效率随 δ 和 θ 的变化情况，

分别。由于分束效率关于 θ具有周期性，我们仅绘制一个周期。这些图上的每个点都对应于相对于 ϕ优化分束效率。我们得到的 ϕ 依赖关系与非关联输入时相同，因此针对 ϕ 优化的分束效率关于 $\theta = \pi/2$. 呈镜像对称。红点对应于通过优化得到的分束效率】【。

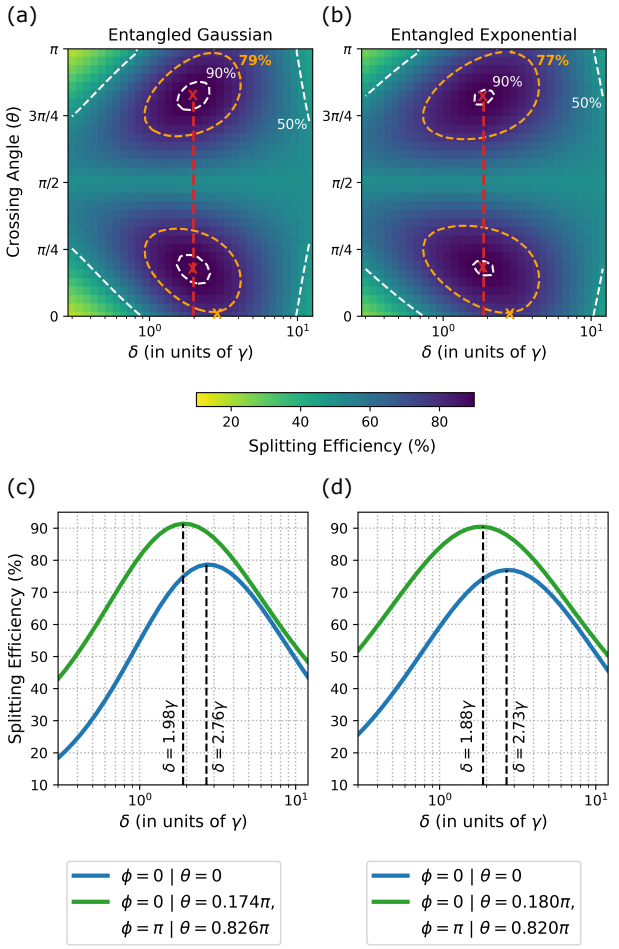

图 3. **纠缠输入光子的分束效率。(a)** 对于输入纠缠高斯脉冲的两个光子，分束效率（以颜色表示）随光子带宽 κ 和交叉角 θ 的变化。最高分束效率以红色表示（ 91.5% ），橙色等高线对应阻塞限制分束效率（79%）。**(b)**纠缠指数型输入脉冲的分束效率，标注方式与面板 (a) 相同。最高效率和阻塞限制效率分别为 90% 和 77%。**(c)** 纠缠高斯脉冲的分束效率随光子带宽 κ 的变化，分别绘制了经幺正算符增强和未经增强的情况，颜色依次为绿色和蓝色。这些曲线的峰值对应面板 (a) 中的最高分束效率和阻塞限制效率。**(d)** 纠缠指数型脉冲的分束效率，标注方式与面板 (b) 相同。这些曲线的峰值同样对应面板 (b) 中的最高分束效率和阻塞限制效率。

线性光学幺正变换，对于纠缠高斯脉冲和指数型脉冲，其效率分别为 91.5% 和 90%。这些数值位于表示阻塞限制的分束效率的橙色等高线内。我们注意到，77% 的阻塞限制分束效率对应于参考文献 [28] 中输入光子 gen-得出的数值。

由三级原子级联产生。

现在，我们比较指数型和高斯纠缠脉冲在裸原子和最优线性光学幺正变换下所得到的分束效率。为进行比较，我们分别在图 3(c) 和 3(d) 中绘制了高斯脉冲和指数脉冲对应的这两种情况。蓝色曲线表示原子的输出端未施加幺正变换，对应阻塞限制效率。绿色曲线表示用于优化分束效率的幺正变换。对于指数型纠缠脉冲，阻塞限制效率在带宽 $\delta = 2.73\gamma$处达到 77%。若要通过优化的线性光学幺正变换获得最大分束效率，则需要将带宽 δ 减小至 1.88γ 。对于高斯脉冲，我们也观察到，从裸原子过渡到在原子后加入优化的线性光学幺正变换时，输入脉冲的最优带宽会降低。两种情况下的最优带宽分别为 2.76γ和 1.98γ 。因此，对于指数型和高斯纠缠输入，线性光学幺正变换改变了优化分束效率所需的时间-带宽权衡。这与我们在上一节对非关联输入的发现一致。

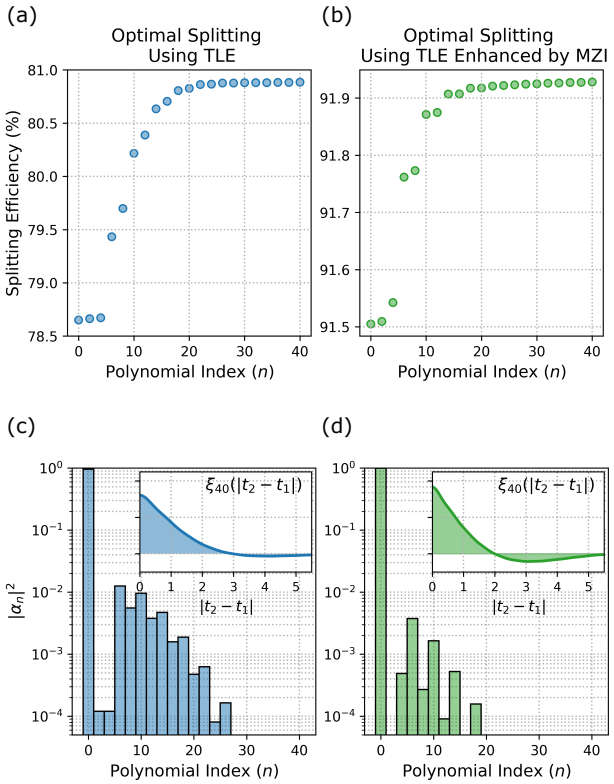

图 4. **采用时间整形输入脉冲时的最优分束效率。(a)** 裸二能级发射体的分束效率随构成最优脉冲轮廓的高斯-厄米多项式数量的变化。**(b)** 经干涉仪增强的发射体的分束效率随构成最优脉冲轮廓的高斯-厄米多项式数量的变化。**(c)**裸二能级发射体的最优脉冲轮廓中各项的贡献，以使分束效率最大化。柱状图展示了系数 α_n 的绝对值平方，其中第一个多项式（高斯分量）的贡献最大。插图显示了最优脉冲轮廓。**(d)** 经干涉仪增强的发射体的最优脉冲轮廓中各项的贡献，以使分束效率最大化。标签与面板 (c) 相同，其中第一个多项式（高斯分量）的贡献最大。插图显示了最优脉冲轮廓。

IV. 通过时间整形光子实现最佳分束

在上一节中，我们假设稳态纠缠光子波函数采用高斯或指数函数的特定形式。本节中，我们采用优化方法，获得能够实现全局最优分束效率的最优脉冲形状。该最优波形代表了分束效率的一个严格上限。

为了优化纠缠光子脉冲的形状，我们将稳态波函数 $\xi_s(|t_2 - t_1|)$ 在一个完备的展开基中进行展开。通常，可以通过修改脉冲 [41]的有限个傅里叶分量来实现这种脉冲整形。我们不采用傅里叶基，而是选择用高斯-埃尔米特基展开脉冲轮廓，其定义如下：

$$\xi_s(\tau) = \sum_{n=0}^{N/2} \alpha_n \mathrm{H}_{2n}(\tau), \qquad \text{for even } N \tag{15}$$

其中，\(H_{ n }(x)\) 为归一化的高斯–厄米特多项式，$\sum_{n=0}^{N/2} |\alpha_n|^2 = 1$ 和 $N/2$ 给出了基展开中的项数。项 α_n 是相应多项式的系数，以确保函数 $\xi_s(\tau)$ 归一化。我们选择高斯–厄米特多项式基，是因为该集合中的第一项是纯高斯函数，而已有研究表明，这种函数能够.....

使我们的分束效率达到 91.5%。因此，我们预计高阶项只会带来较小的修正，只需保留其中几项，就能接近全局极限。请注意，我们仅保留了】【。

方程（15）的求和中的偶数项，这相当于仅用偶数阶厄米-高斯函数展开 $\xi_s(\tau)$ 。我们可以不失一般性地忽略奇数阶厄米-高斯函数，因为 $\tau \geq 0$，因此在满足 L^2 收敛性的前提下，任意正时间轴上的函数都可以仅用时间的偶函数表示。

由于散射振幅 ψ_{pq} 和 ψ_{lm} 分别来自方程（3）和方程（5），且它们对输入脉冲呈线性，因此任意输入脉冲 ξ（τ'）对应的输出双光子波函数（记作 ψ_{pq}（ξ））可写为：

$$\psi_{\mathrm{pq}}(\xi)=\sum_{n=0}^{N/2}\alpha_n\psi_{\mathrm{pq}}(\mathrm{H}_{2n}) \tag{16}$$

对输出光子的产生时间 τ_1 和 τ_2 积分，即可得到分束效率$|\psi_{\mathrm{cd}}|^2+|\psi_{\mathrm{dc}}|^2$。例如，$\Gamma^{\mathrm{cd}}(\xi)=|\psi_{\mathrm{cd}}(\xi)|^2$ 为:

$$\Gamma^{\mathrm{cd}}(\xi)=\sum_{m=0}^{N/2}\sum_{n=0}^{N/2}\alpha_m^*\alpha_n\psi_{\mathrm{cd}}(\mathrm{H}_{2m})\psi_{\mathrm{dc}}(\mathrm{H}_{2n}) \tag{17}$$

这里我们利用了实值输入态的散射振幅为实数这一事实（参见方程（10））。这可以改写为:

$$\Gamma^{\mathrm{cd}}(\xi)=\vec{\alpha}^{\dagger}\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{cd}}(\mathrm{H}_{2n})\vec{\alpha} \tag{18}$$

其中，$\vec{\alpha}$ 是一个列向量，其元素从 α_1 到$\alpha_{N/2}$，而 $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{cd}}(\mathrm{H}_{2n})$是概率密度矩阵，其元素由基的选择决定，即（17）中的(H_{2n})。我们注意到，$\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{cd}}$ 是一个对称矩阵，因为从（17）可以看出，$\psi_{\mathrm{cd}}(\mathrm{H}_{2m})\psi_{\mathrm{dc}}(\mathrm{H}_{2n})$具有交换性。对 ρ^{dc}也可以作类似论证，因此，将光子分束至输出端口 c 和d 的概率密度 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{s}}(\xi)=\Gamma^{\mathrm{cd}}(\xi)+\Gamma^{\mathrm{dc}}(\xi)$具有类似形式:

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{s}}(\xi)=\vec{\alpha}^{\dagger}\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{s}}(\mathrm{H}_{2n})\vec{\alpha} \tag{19}$$

对 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{s}}(\xi)$在 τ_1 和 τ_2 上的积分，等价于对19)按元素在 τ_1 和 τ_2上积分，这会得到另一个对称矩阵，我们将其记为 $\boldsymbol{R}$。注意，$\boldsymbol{R}$ 的对角元素就是不同基元素对应的分束效率。因此，输入态 $\xi(\tau)$的分束效率可写为:

$$P_{\mathrm{S}}(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}^{\dagger}\boldsymbol{R}\vec{\alpha} \tag{20}$$

注意，$\mathbf{R}$ 是一个对称半正定矩阵，因为根据定义，$P_{\mathrm{S}}(\vec{\alpha})\geq 0$。

我们断言，最大 $P_{\mathrm{S}}(\vec{\alpha})$在$\vec{\alpha}_{\max}$ 时取得；它是 $\boldsymbol{R}$ 对应于其最大特征值的特征向量。为此，我们首先利用对称矩阵的谱定理对$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$ 进行对角化。由于 $\boldsymbol{R}$ 是半正定的，对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的所有元素均为正。分束效率可改写为:

$$P_{\mathrm{S}}(\vec{\beta})=\vec{\beta}^{\dagger}\boldsymbol{D}\vec{\beta} \tag{21}$$

其中 $\vec{\beta}=\boldsymbol{U}\vec{\alpha}$ 以及归一化约束 $\vec{\alpha}^{\dagger}\vec{\alpha}$等价于约束 $\vec{\beta}^{\dagger}\vec{\beta}$。因此，$P_S(\vec{\beta})$

显然在向量 $\beta_{\max}$ 除对应于 $\boldsymbol{D}$最大对角元素的位置外其他位置的元素均为零时达到最大值，而该最大对角元素即为 $\boldsymbol{R}$ 的最大特征值。因此，向量 $\vec{\alpha}_{\max}=\boldsymbol{U}\beta_{\max}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 对应最大特征值的特征向量。

为了求得最大分束效率，我们针对基展开中不同的项数构造矩阵 $\boldsymbol{R}$。$\boldsymbol{R}$ 的最大特征值即为最大分束效率。将相应的特征向量 $\vec{\alpha}_{\max}$ 代入 $\boldsymbol{R}$ 中的（方程（15））,即可得到各情况下的最优脉冲形状。

图4(a)和4(b)展示了输入波函数基展开中高斯-埃尔米特多项式数量对最大分束效率的影响。图4(a)绘出了使用裸二能级原子对输入光子进行分束时的情况。最大分束效率从78.5%单调上升，并最终饱和于 $\sim 81\%$。图4(b)展示了最优线性光学幺正变换将最大分束效率从91.5%提高至 $\sim 92\%$。在这两种情况下，当输入脉冲为高斯脉冲（即当$n=0$）时，分束效率已非常接近随着输入波函数基展开中增加更多项而最终达到的饱和值。这表明，高斯脉冲形状非常接近输入波函数的最优脉冲形状。

图4(c) 和4(d) 展示了各个基元素对最优脉冲轮廓的贡献。图4(c) 绘出了多项式的指标与其对应的权重平方（$|\alpha_n|^2$）之间的关系，适用于裸双能级发射体的分束情况。图4(d) 绘出了通过马赫-曾德尔干涉仪增强分束时的相同参数。每幅图中的插图都绘出了由总计 40 个基元素共同构成的最优脉冲。可以看到，第一个多项式（$n=0$，其形状纯粹为高斯）对最优脉冲的权重贡献最大，这表明高斯脉冲非常接近最优脉冲轮廓。对于裸发射体，$|\alpha_0|^2\sim 0.958$；对于由干涉仪增强分束的情况，$|\alpha_0|^2\sim 0.992$。我们将基元素的数量截断为 40 个，因为我们发现高阶基元素的权重显著降低，且对最优脉冲轮廓没有贡献。图 4(a) 和 (b) 中分束效率趋于平稳也表明了这一点。

在本节中，我们的计算基于将脉冲轮廓展开到高斯-埃尔米特基上。这一做法的动机来自第III节的结果：基的第一个元素（纯高斯）实现了较高的分束效率。一般而言，只要某个基在稳态波函数上完备且正交归一，基的选择便可以是任意的。在另一种基下，分束效率矩阵 $\mathbf{R}'$ 将由该基的元素确定。$\mathbf{R}'$ 在新基下仍是一个对称半正定矩阵。基变换意味着 $\mathbf{R}'$ 可以通过幺正算符与 $\mathbf{R}$ 相关联

变换。在新基下，同样可以采用上述求取最大特征值的步骤。我们预计，任何完备基都会收敛到此处给出的相同解。

V. 讨论与结论

总之，我们对使用二能级发射体后接马赫-曾德尔干涉仪，将两个不可区分光子分束到空间上不同的输出通道进行了全面的理论分析。通过优化输入脉冲形状和干涉仪的相位，我们获得了 92% 的分束效率。这比仅使用二能级发射体时接近 81% 的最优分束效率有了显著提高。我们的结果超过了文献 [28]中计算得到的二能级发射体 77% 的最大分束效率。我们的结果还表明，高斯脉冲轮廓能够从二能级原子中提取接近最优的非线性响应。这与我们的直觉一致，因为高斯脉冲具有最小的时间带宽积。

我们分析的一个局限是，该分析是在腔量子电动力学的弱耦合区进行的，在此条件下可以对腔模进行绝热消除。然而，在强耦合区，腔模无法被绝热消除，原子-腔系统的能级结构由 Jaynes-Cummings 阶梯给出。尽管如此，我们预计，在强耦合区也能获得与当前工作相同的最优分束效率。这一假设得到了文献 [28] 中所进行模拟的支持。文中作者表明，在强耦合区，当原子与腔之间的耦合速率 g 足够大，使得入射光子与原子-腔系统之间的相互作用由 Jaynes-Cummings 阶梯的基态和第一激发态决定时，会产生最优的分束效率。因此，我们预计能够恢复当前分析中的相同结果，但将原子带宽 γ 替换为 Jaynes-Cummings 阶梯第一激发态的带宽，即 $\kappa+\gamma$，其中 κ 是腔的带宽。

本研究证明，采用最优干涉方案可以突破光子阻塞所设定的分束效率上限。从硬件角度来看，所提出的模型仅使用一个与波导弱耦合的二能级发射体和一个马赫-曾德尔干涉仪；两者均为无源器件，可利用成熟的光刻技术轻松制造。尽管发射体和干涉仪的非线性效应尚不完美，但控制方案的近期改进，例如动态耦合 [11, 42]和色散工程 [43]，将有助于实现高保真度量子操作。另一种方案是采用主动控制方案，例如引入随时间变化的线性光学幺正变换，或与波导或环境模进行非马尔可夫耦合，这也有望提高分束效率。

由线性光学幺正变换与非线性相互作用构成的网络，因其多功能性而日益受到关注。特别是，已有研究表明，将多个二能级发射体级联 [27]可实现完美的光子分选。人们还研究了这类网络与分束器网格结合的情形，其中以理想化的单模克尔相互作用取代二能级原子作为非线性元件 [44, 45]，用于态制备、量子中继节点和贝尔态分析。对此类网络进行优化，或可提升除本文所研究的光子-光子分裂之外的其他操作的保真度。我们的结果展现了将单光子非线性与线性光学系统相结合、增强量子光学相互作用的潜力，并有望应用于光子量子信息处理和量子模拟。

材料与通信

所有关于代码和数据的请求，请联系 H.S.: hsingh16@umd.edu。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

致谢

作者谨此感谢美国国家科学基金会（资助编号：#OMA1936314、#OMA2120757、#PHYS1915375 和 #ECCS1933546）、美国空军科学研究办公室资助编号 #FA23862014072，以及马里兰大学-陆军研究实验室量子合作伙伴关系（W911NF1920181）提供的经费支持。

[1] A. Aspuru-Guzik 和 P. Walther，光子量子模拟器，《自然·物理》8，285（2012）。[2] J. Wang、F. Sciarrino、A. Laing 和 M. G. Thompson，集成光子量子技术，《自然·光子学》14，273（2020）。

[3]D. E. Chang、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《量子非线性光学——逐个光子》，《自然·光子学》8，685（2014）。

[4] R. Uppu、L. Midolo、X. Zhou、J. Carolan 和 P. Lodahl，基于量子点的确定性光子-发射体接口：实现可扩展光子量子技术，《自然》

《纳米技术》16，1308（2021）。[5] A. W. Elshaari、W. Pernice、K. Srinivasan、O. Benson 和 V. Zwiller，混合集成量子光子电路，《自然·光子学》14，285（2020）。[6] J. Carolan、C. Harrold、C. Sparrow、E. Mart´ín-L´ópez、N. J. Russell、J. W. Silverstone、P. J. Shadbolt、N. Mat-suda、M. Oguma、M. Itoh、 *et al.*，通用线性光学，《科学》349，711（2015）。[7] C. Sparrow、E. Mart´ín-L´ópez、N. Maraviglia、A. Neville、C. Harrold、J. Carolan、Y. N. Joglekar、T. Hashimoto、N. Matsuda、J. L. O'Brien、 *et al.*，利用光子学模拟分子的振动态量子动力学，《自然》557，660（2018）。[8] D. Bunandar、A. Lentine、C. Lee、H. Cai、C. M. Long、N. Boynton、N. Martinez、C. DeRose、C. Chen、M. Grein、*et al.*，基于硅光子学的城域量子密钥分发，《Physical Review X》8，021009（2018）。[9] X. Qiang、X. Zhou、J. Wang、C. M. Wilkes、T. Loke、S. O'Gara、L. Kling、G. D. Marshall、R. Santagati、T. C. Ralph、 *et al.*，实现任意双量子比特处理的大规模硅量子光子学，《自然·光子学》12，534（2018）。[10] H. Choi、M. Heuck 和 D. Englund，为单光子非线性效应设计超小模体积的自相似纳米腔，《物理评论快报》118，223605（2017）。[11] M. Heuck、K. Jacobs 和 D. R. Englund，动态耦合腔中的光子-光子相互作用，《Physical Review A》101，042322（2020）。[12] S. Krastanov、M. Heuck、J. H. Shapiro、P. Narang、D. R. Englund 和 K. Jacobs，利用二阶非线性效应实现室温光子逻辑量子比特，《自然·通讯》12，1（2021）。[13] H. J. Kimble，腔量子电动力学中单原子与光子的强相互作用，《Physica Scripta》1998，127（1998）。[14] A. Javadi、I. S¨ollner、M. Arcari、S. L. Hansen、L. Midolo、S. Mahmoodian、G. Kir˘sansk˙e、T. Pregnolato、E. Lee、J. Song、 *et al.*，波导中量子点的单光子非线性光学，《自然·通讯》6，1 2015( )。[15] H. L. Jeannic、A. Tiranov、J. Carolan、T. Ramos、Y. Wang、M. H. Appel、S. Scholz、A. D. Wieck、A. Lud-wig、N. Rotenberg、 *et al.*，由量子发射体介导的动态光子-光子相互作用，《自然·物理》，1（2022）。[16] S. Fan、S.. E. Kocaba.s 和 J.-T. Shen，单比特耦合一维纳米光子波导中少光子传输的输入-输出形式，Physical Review A 82，063821（2010）。[17] S. Xu 和 S. Fan，少光子传输的输入-输出形式：超越两个光子的系统处理，Physical Review A 91，043845（2015）。[18] E. Rephaeli 和 S. Fan，少光子波导传输中的耗散，光子学研究1，110（2013）。[19] D. Englund、A. Faraon、I. Fushman、N. Stoltz、P. Petroff 和 J. Vu˘ckovi´c，利用单个量子点控制腔反射率，《自然》450，857（2007）。[20] K. Hennessy、A. Badolato、M. Winger、D. Gerace、M. Atat¨ure、S. Gulde、S. F¨alt、E. L. Hu 和 A. Imamo˘glu，强耦合单量子点-腔系统的量子本质，《自然》445，896（2007）。[21] K. M. Birnbaum、A. Boca、R. Miller、A. D. Boozer、T. E. Northup 和 H. J. Kimble，含有一个受困原子的光学腔中的光子阻塞

，《自然》**436**，87（2005）。

[22] A. Rauschenbeutel、G. Nogues、S. Osnaghi、P. Bertet、M. Brune、J.-M. Raimond 和 S. Haroche，《腔量子电动力学中可调谐量子相位门的相干操作》，《物理评论快报》83，5166（1999）。[23] H. Takahashi、E. Kassa、C. Christoforou 和 M. Keller，《单离子与光学腔的强耦合》，《物理评论快报》124，013602（2020）。[24] A. Wallraff、D. I. Schuster、A. Blais、L. Frunzio、R.-S. Huang、J. Majer、S. Kumar、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf，《利用电路量子电动力学实现单光子与超导量子比特的强耦合》，《自然》431，162（2004）。[25] A. Nysteen、D. P. McCutcheon、M. Heuck、J. Mørk 和 D. R. Englund，《双光子受控相位门中二能级发射体作为非线性的局限》，Physical Review A 95，062304（2017）。[26] T. Ralph、I. S¨ollner、S. Mahmoodian、A. White 和 P. Lodahl，《利用被动二能级非线性实现光子分选、高效贝尔测量和确定性受控Z门》，《物理评论快报》114，173603（2015）。[27] F. Yang、M. M. Lund、T. Pohl、P. Lodahl 和 K. Mølmer，《波导量子电动力学系统中的确定性光子分选》，《物理评论快报》128，213603（2022）。[28] S. Rosenblum、S. Parkins 和 B. Dayan，《腔量子电动力学中的光子路由：超越光子阻塞的基本极限》，Physical Review A 84，033854（2011）。[29] T. Aoki、A. Parkins、D. Alton、C. Regal、B. Dayan、E. Os-tby、K. J. Vahala 和 H. Kimble，《利用单个原子和微环形腔高效路由单光子》，《物理评论快报》102，083601（2009）。[30] M. Reck、A. Zeilinger、H. J. Bernstein 和 P. Bertani，《任意离散幺正算符的实验实现》，《物理评论快报》73，58（1994）。[31] W. R. Clements、P. C. Humphreys、B. J. Metcalf、W. S. Kolthammer 和 I. A. Walmsley，《通用多端口干涉仪的优化设计》，Optica 3，1460（2016）。[32] J. R. Basani、S. K. Vadlamani、S. Bandyopadhyay、D. R. Englund 和 R. Hamerly，《用于多端口干涉仪的自相似正弦—余弦分形架构》，Nanophotonics 10.1515/nanoph-2022-0525（2023）。[33] E. Knill、R. Laflamme 和 G. J. Milburn，《一种利用线性光学实现高效量子计算的方案》，《自然》409，46（2001）。[34] P. Kok、W. J. Munro、K. Nemoto、T. C. Ralph、J. P. Dowling 和 G. J. Milburn，《基于光子量子比特的线性光学量子计算》，Reviews of Modern Physics 79，135（2007）。[35] M. O. Scully 和 M. S. Zubairy，《量子光学》（1999）。[36] H. F. Hofmann、K. Kojima、S. Takeuchi 和 K. Sasaki，《单个原子处两个光子无耗散非线性相互作用中的纠缠与四波混频效应》，Physical Review A 68，043813（2003）。[37] J.-T. Shen 和 S. Fan，《量子杂质中的一维强关联多粒子输运》，Physical Review A 76，062709（2007）。[38] V. I. Yudson 和 P. Reineker，《共振原子一维波导中的多光子散射》，Physical Review A 78，052713（2008）。[39] T. Shi 和 C. Sun，《耦合谐振腔阵列中多光子散射的Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化方法》，Physical Review B 79，205111（2009）。

[40] T. Shi、S. Fan、C. Sun， *et al.*二能级系统中与腔耦合的波导中的双光子传输，Physical Review A **84**，063803（2011）。[41] A. M. Weiner，《超快光脉冲整形：教程综述，Optics Communications **284**，3669（2011）。[42] S. Krastanov、K. Jacobs、G. Gilbert、D. R. Englund 和 M. Heuck，《通过光子与二能级发射体的动态耦合实现受控相位门，npjQuantumInformation **8**，1（2022）。[43] J. Notaros、J. Mower、M. Heuck、C. Lupo、N. C. Har-ris、G. R. Steinbrecher、D. Bunandar、T. Baehr-Jones、M. Hochberg、S. Lloyd， *et al.*《用于经典和量子应用的光子集成电路可编程色散，Optics express **25**，21275（2017）。[44] G. R. Steinbrecher、J. P. Olson、D. Englund 和 J. Carolan，《量子光学神经网络，npj Quantum Information **5**，60（2019）。[45] J. Ewaniuk、J. Carolan、B. J. Shastri 和 N. Rotenberg，《不完美量子光子神经网络，Advanced Quantum Technologies **6**，2200125（2023）。

附录

附录 A：散射振幅的推导

1. 计算散射振幅的理论基础

我们首先介绍推导散射振幅所需的形式体系和公式。为此，我们注意到：

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{pq}}(\tau_1,\tau_2) &= \langle 0|\,\hat{p}_{\mathrm{out}}(\tau_2)\hat{q}_{\mathrm{out}}(\tau_1)\,|\psi_0\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\int_{t_1}^{\infty}\mathrm{d}t_2\;\xi(t_1,t_2)G_{\mathrm{pq}}(\tau_1,\tau_2;t_1,t_2)\end{aligned} \tag{A1}$$

其中 $\{\hat{p}、\hat{q}\}\in\{\hat{c}、\hat{d}\}$ 是裸二能级发射体的输出模式，定义见正文，而$G_{\mathrm{pq}}(\tau_1、\tau_2;t_1、t_2)$ 定义如下：

$$G_{\mathrm{pq}}(\tau_1,\tau_2;t_1,t_2) = \langle 0|\,\hat{p}_{\mathrm{out}}(\tau_2)\hat{q}_{\mathrm{out}}(\tau_1)\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{in}}(t_1)\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{in}}(t_2)\,|0\rangle \tag{A2}$$

因此，为了计算所需的散射振幅 ψ_{pq} G_{pq} ，我们先计算 G_{pq} ，然后使用方程（A1）。为了计算 G_{pq}，我们首先回顾参考文献 [17] 中的结果，本节将反复用到该结果。本节中均假设时间排序 $t_2\geq t_1$和 $\tau_2\geq\tau_1$ 成立。

$$\langle 0|\,\hat{\sigma}(\tau_1)\hat{\sigma}^{\dagger}(t_1)\,|0\rangle = \langle 0|\,\tilde{\sigma}(\tau_1)\tilde{\sigma}^{\dagger}(t_1)\,|0\rangle \tag{A3a}$$

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,\hat{\sigma}(\tau_1)\hat{\sigma}(\tau_2)\hat{\sigma}^{\dagger}(t_2)\hat{\sigma}^{\dagger}(t_1)\,|0\rangle = \\ &\qquad\langle 0|\,\tilde{\sigma}(\tau_1)\tilde{\sigma}(\tau_2)\tilde{\sigma}^{\dagger}(t_2)\tilde{\sigma}^{\dagger}(t_1)\,|0\rangle\end{aligned} \tag{A3b}$$

with

$$\tilde{\sigma}(t) = e^{i\hat{H}_{\mathrm{eff}}t}\hat{\sigma}e^{-i\hat{H}_{\mathrm{eff}}t} \tag{A4}$$

其中

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}} = -2i\gamma\hat{\sigma}^{\dagger}\hat{\sigma} \tag{A5}$$

利用方程（A4）和（A5）以及算符 $\hat{\sigma}$ 和 $\hat{\sigma}^{\dagger}$的性质，我们可以计算与方程（A3）对应的振幅。在方程（A3）（a）中，$\tau_1\geq t_1$ 是唯一可能的时间排序，因为原子必须先被激发到激发态，然后才能降至基态。在方程（A3）（a）中，$\tau_2\geq t_2\geq\tau_1\geq t_1$ 是唯一可能的排序，因为在被 $\hat{\sigma}^{\dagger}(t_2)$ 激发之前，原子必须先降至低态。因此，我们有：

$$\langle 0|\,\hat{\sigma}(\tau_1)\hat{\sigma}^{\dagger}(t_1)\,|0\rangle = e^{-2\gamma(\tau_1-t_1)}\Theta(\tau_1-t_1) \tag{A6a}$$

and

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,\hat{\sigma}(\tau_1)\hat{\sigma}(\tau_2)\hat{\sigma}^{\dagger}(t_2)\hat{\sigma}^{\dagger}(t_1)\,|0\rangle = \\ &\qquad e^{-2\gamma(\tau_2-t_2)}e^{-2\gamma(\tau_1-t_1)} \\ &\qquad\times\Theta(\tau_2-t_2)\Theta(\tau_2-t_1)\Theta(\tau_1-t_1)\end{aligned} \tag{A6b}$$

其中，Θ 是赫维赛德阶跃函数，用于确保时间排序。在继续计算G_{pq}之前，我们还回顾一下量子因果条件：

$$\left[\hat{\sigma}(t),\hat{I}(\tau)\right] = \left[\hat{\sigma}^{\dagger}(t),\hat{I}(\tau)\right] = 0,\text{for } t\leq\tau \tag{A7a}$$

$$\left[\hat{\sigma}(t),\hat{O}(\tau)\right] = \left[\hat{\sigma}^{\dagger}(t),\hat{O}(\tau)\right] = 0,\text{for } t\geq\tau \tag{A7b}$$

其中 I 表示输入 湮灭或产生算符，而 O 表示输出端 湮灭或产生算符。

2. 散射振幅的精确解

在本节中，我们推导本文正文中方程 (10) 所给散射振幅的精确解析形式。我们首先计算两次反射事件的散射振幅 G_{bb}，得到：

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,\hat{b}_{\mathrm{out}}(\tau_2)\hat{b}_{\mathrm{out}}(\tau_1)\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{in}}(t_1)\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{in}}(t_2)\,|0\rangle = \\ &\qquad 2\gamma\,\langle 0|\,\hat{\sigma}(\tau_2)\hat{\sigma}(\tau_1)\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{in}}(t_1)\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{in}}(t_2)\,|0\rangle\end{aligned} \tag{A8}$$

这里首先注意到，唯一能得到非零结果的时间排序是 $\tau_2\geq t_2\geq\tau_1\geq t_1$。这是因为方程 (A8) 的其他可能时间排序结果均为 0。因此我们有：

$$\begin{aligned}G_{\mathrm{bb}} &= 2\gamma\,\langle 0|\,\hat{\sigma}(t_2)\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{in}}(\tau_2)\hat{\sigma}(t_1)\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{in}}(\tau_1)\,|0\rangle \\ &= 4\gamma^2\,\langle 0|\,\hat{\sigma}(t_2)\hat{\sigma}^{\dagger}(\tau_2)\hat{\sigma}(t_1)\hat{\sigma}^{\dagger}(\tau_1)\,|0\rangle\end{aligned} \tag{A9}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\; G_{\mathrm{bb}} = &\\ &4\gamma^2e^{-2\gamma(t_2-\tau_2)}e^{-2\gamma(t_1-\tau_2)} \\ &\times\Theta(t_2-\tau_2)\Theta(\tau_2-t_1)\Theta(t_1-\tau_1)\end{aligned} \tag{A10}$$

其中第一步是将因果条件（A7）(a) 应用于方程（A8）的结果得出的。第二步是利用输入—输出关系 $\hat{a}^{\dagger}_{\text{输入}}(t) = \hat{a}^{\dagger}_{\text{输出端}}(t) + \sqrt{2\gamma}\hat{\sigma}^{\dagger}(t)$ 以及因果条件（A7）(b) 得出的。

最后一步由方程（A6）(b) 得出。利用方程（ $G_{\rm bb}$ 中A1）的结果，我们得到:

$$\psi_{\rm bb}(\tau_1,\tau_2) = 4\gamma^2 e^{-2\gamma(\tau_1+\tau_2)}\times \int_{\tau_1}^{\tau_2} {\rm d}\tau_2 \int_{-\infty}^{\tau_1} {\rm d}t_1\ e^{2\gamma(t_1+t_2)}\xi(t_1,t_2) \quad \text{(A11)}$$

现在，我们开始计算 $G_{\rm ba}$。为此，我们先观察到:

$$\begin{aligned} G_{\rm ba} &= \langle 0|\, \hat{a}_{\rm out}(\tau_2)\hat{b}_{\rm out}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle \\ &= -\sqrt{2\gamma}\,\langle 0|\, \hat{a}_{\rm in}(t_2)\hat{\sigma}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\tau_2)\,|0\rangle \\ &+ 2\gamma\,\langle 0|\, \hat{\sigma}(t_2)\hat{\sigma}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\tau_2)\,|0\rangle \end{aligned} \quad \text{(A12)}$$

等式成立是因为输入输出关系。我们注意到，等式右侧的第二项为 $G_{\rm bb}$。因此，我们只需计算第一项。利用因果条件（A7）（a）和（A7）（b），以及关系式 $\hat{a}^\dagger{}_{\rm in}(t) = \hat{a}^\dagger{}_{\rm out}(t) + \sqrt{2\gamma}\hat{\sigma}^\dagger(t)$，可得:

$$\langle 0|\, \hat{a}_{\rm in}(t_2)\hat{\sigma}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\tau_2)\,|0\rangle = e^{-2\gamma(t_1-\tau_1)}\Theta(t_1-\tau_1)\delta(t_2-\tau_2) \quad \text{(A13)}$$

将此结果代入方程（A14），可得 $G_{\rm ba}$如下:

$$\begin{aligned} \implies G_{\rm ba} &= -2\gamma e^{-2\gamma(t_1-\tau_1)}\Theta(t_1-\tau_1)\delta(t_2-\tau_2) \\ &+ G_{\rm bb}(\tau_1,\tau_2) \end{aligned} \quad \text{(A14)}$$

如上所述，利用输入输出关系和因果条件，散射振幅 $\psi_{\rm ba}$ 可表示为:

$$\begin{aligned} \psi_{\rm ba}(\tau_1,\tau_2) &= -2\gamma e^{-2\gamma\tau_1}\int_{-\infty}^{\tau_1} {\rm d}t_1\ e^{2\gamma t_1}\xi(t_1,\tau_2) \\ &+ \psi_{\rm bb}(\tau_1,\tau_2) \end{aligned} \quad \text{(A15)}$$

现在我们计算 $G_{\rm ab}$，它对应于第一个光子被透射到输出端口 $\hat{a}_{\rm out}$，而第二个光子被原子反射至 $b_{\rm out}$.

$$\begin{aligned} G_{\rm ab} &= \langle 0|\, \hat{b}_{\rm out}(\tau_2)\hat{a}_{\rm out}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle \\ &= -\sqrt{2\gamma}\,\langle 0|\, \hat{\sigma}(\tau_2)\hat{a}_{\rm in}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle \\ &+ 2\gamma\,\langle 0|\, \hat{\sigma}(\tau_2)\hat{\sigma}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle \end{aligned} \quad \text{(A16)}$$

利用输入输出关系和对易关系 $[\hat{a}_{\rm in}(\tau),\ \hat{a}^\dagger{}_{\rm in}(t)] = \delta(t-\tau)$，可将其简化为:

$$\begin{aligned} G_{\rm ab} = &- \sqrt{2\gamma}\,\langle 0|\, \hat{\sigma}(\tau_2)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle\,\delta(t_1-\tau_1)\Theta(t_2-t_1)\Theta(\tau_2-\tau_1) \\ &- \sqrt{2\gamma}\,\langle 0|\, \hat{\sigma}(\tau_2)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\,|0\rangle\,\delta(t_2-\tau_1)\Theta(t_2-t_1)\Theta(\tau_2-\tau_1) \\ &+ {\rm G_{bb}} \end{aligned} \quad \text{(A17)}$$

利用输入输出关系 $\hat{a}^\dagger{}_{\rm in}(t) = \hat{a}^\dagger{}_{\rm out}(t) + \sqrt{2\gamma}\hat{\sigma}^\dagger(t)$ 以及量子因果条件（A7）（b），可得:

$$\begin{aligned} \implies & G_{\rm ab} \\ &= -2\gamma e^{-2\gamma(\tau_2-t_2)}\Theta(\tau_2-t_2)\Theta(t_2-\tau_1)\delta(t_1-\tau_1) \\ &- 2\gamma e^{-2\gamma(\tau_2-t_1)}\Theta(\tau_1-t_1)\delta(t_2-\tau_1) \\ &+ {\rm G_{bb}} \end{aligned} \quad \text{(A18)}$$

同样，利用输入输出关系和因果条件，可得以下散射振幅:

$$\begin{aligned} \psi_{\rm ab}(\tau_1,\tau_2) = &-2\gamma e^{-2\gamma\tau_2}\int_{-\infty}^{\tau_1} {\rm d}t_1\ e^{2\gamma t_1}\xi(t_1,\tau_1) \\ &- 2\gamma e^{-2\gamma\tau_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} {\rm d}t_2\ e^{2\gamma t_2}\xi(\tau_1,t_2) \\ &+ \psi_{\rm bb}(\tau_1,\tau_2) \end{aligned} \quad \text{(A19)}$$

剩下的唯一可能是两个入射光子都透射到输出端口 $\hat{a}_{\rm out}$.。这对应于 $\rm G_{aa}$，其表达式为:

$$\begin{aligned} G_{\rm aa} &= \langle 0|\, \hat{a}_{\rm out}(\tau_2)\hat{a}_{\rm out}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\, \hat{a}_{\rm in}(\tau_2)\hat{a}_{\rm in}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle \\ &- \sqrt{2\gamma}\,\langle 0|\, \hat{a}_{\rm in}(\tau_2)\hat{\sigma}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle \\ &- \sqrt{2\gamma}\,\langle 0|\, \hat{\sigma}(\tau_2)\hat{a}_{\rm in}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle \\ &+ 2\gamma\,\langle 0|\, \hat{\sigma}(\tau_2)\hat{\sigma}(\tau_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(t_2)\,|0\rangle \end{aligned} \quad \text{(A20)}$$

利用方程式（A10）、（A14）和（A18），$G_{\rm aa}$ 可以用 $G_{\rm ab}$、$G_{\rm ba}$ 和 $G_{\rm bb}$表示:

$$\implies G_{\rm aa} = \delta(\tau_2-t_2)\delta(\tau_1-t_1) + G_{\rm ab} + G_{\rm ba} - G_{\rm bb} \quad \text{(A21)}$$

同样地，如上所述，我们得到散射振幅:

$$\psi_{\rm aa} = \xi(\tau_1,\tau_2) + \psi_{\rm ab}(\tau_1,\tau_2) + \psi_{\rm ba}(\tau_1,\tau_2) - \psi_{\rm bb}(\tau_1,\tau_2) \quad \text{(A22)}$$

附录B：分束效率的推导

分束效率可以根据上一节推导出的散射振幅计算。为此，我们首先计算马赫-曾德尔干涉仪输出端的ˆ端口ˆ $c_{\rm out}$ and $d_{\rm out}$处的散射振幅。下面给出这些散射振幅的解析解 $\psi_{\rm cc}$, $\psi_{\rm cd}$, $\psi_{\rm dc}$, $\psi_{\rm dd}$ be- low。随后，分束的概率密度可表示为$\rho_s = |\psi_{\rm cd}|^2 + |\psi_{\rm dc}|^2$。

为了计算干涉仪输出端的散射振幅，我们使用方程 1）中马赫-曾德尔干涉仪的输入输出关系

将它们表示为二能级发射体输出端的散射振幅。我们通过明确展示计算 ψ_{cd} 的步骤来说明这一过-程：

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{cd}} &= \langle 0|\, \hat{d}_{\mathrm{out}}(\tau_2)\hat{c}_{\mathrm{out}}(\tau_1)\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\left(e^{i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{a}_{\mathrm{out}}(\tau_2) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{b}_{\mathrm{out}}(\tau_2)\right)\left(e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{a}_{\mathrm{out}}(\tau_1) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{b}_{\mathrm{out}}(\tau_1)\right)|0\rangle \\ &= -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{bb}} + e^{i\phi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ba}} - e^{i\phi}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ab}} + e^{2i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{aa}} \end{aligned} \tag{B1}$$

其中，第一步由 ψ_{cd} 的定义得出。第二步依据干涉仪的输入输出关系（见式 (1)）。第三步使用

二能级发射体输出端的散射振幅定义。按照上述步骤，我们得到：

$$\psi_{\mathrm{dc}} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{bb}} - e^{i\phi}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ba}} + e^{i\phi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ab}} + e^{2i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{aa}} \tag{B2}$$

$$\psi_{\mathrm{cc}} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{bb}} + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ba}} + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ab}} + e^{2i\phi}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{aa}} \tag{B3}$$

$$\psi_{\mathrm{dd}} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{bb}} - e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ba}} - e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{ab}} + e^{2i\phi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi_{\mathrm{aa}} \tag{B4}$$

我们注意到 $|\psi_{\mathrm{cc}}|^2+|\psi_{\mathrm{cd}}|^2+|\psi_{\mathrm{dc}}|^2+|\psi_{\mathrm{dd}}|^2 = |\psi_{\mathrm{bb}}|^2+|\psi_{\mathrm{ba}}|^2+|\psi_{\mathrm{ab}}|^2+|\psi_{\mathrm{aa}}|^2$. 由于该等式右侧对输出时刻 τ_1 和 τ_2 的积分为 1，左侧也如此，从而确保输出光子波函数正确归一化。这种保持

概率的性质由式 (1) 中马赫-曾德尔干涉仪变换的幺正性确保。

我们得到两个输入光子被分配到 MZI 的不同输出模式的概率密度$\rho_s = |\psi_{\mathrm{cd}}|^2 + |\psi_{\mathrm{dc}}|^2$，其表达式为：

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{s}} = \frac{1}{4}(&2\psi_{\mathrm{bb}}\left(-\sin(2\theta)\cos(\phi)(\psi_{\mathrm{ba}}+\psi_{\mathrm{ab}}) - 8\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)\cos(2\phi)\psi_{\mathrm{aa}}\right)+2\sin^2(\theta)\psi_{\mathrm{bb}}^2+2\psi_{\mathrm{ba}}((\cos(2\theta)-1)\psi_{\mathrm{ab}}+ \\ &\sin(2\theta)\cos(\phi)\psi_{\mathrm{aa}}) + (\cos(2\theta)+3)\psi_{\mathrm{ba}}^2 + 2\,\text{正弦}(2\theta)\,\text{余弦}(\phi)\psi_{\mathrm{ab}}\psi_{\mathrm{aa}} + (\text{余弦}(2\theta)+3)\psi_{\mathrm{ab}}^2 + 2\sin^2(\theta/2)\psi_{\mathrm{aa}}^2)\end{aligned} \tag{B5}$$

路由效率由 ρ_s 对 t 的积分和 τ.给出。

效率必须通过数值计算得出。然而，对于指数轮廓，分束效率可以解析计算。本节给出非关联和纠缠指数输入情况下分束效率的解析结果。

附录 C：分裂效率的解析解

在正文中，我们给出了高斯和指数脉冲轮廓的分束效率结果。对于高斯脉冲，分束

指数脉冲轮廓下两个非关联光子的输入态为 $\xi(t_1, t_2) = \sqrt{2}\xi(t_1)\xi(t_2)$，其中 $\xi(t) = \sqrt{2\kappa}e^{-\kappa t}$。将该输入态代入方程（10），可得以下表达式：

二能级原子输出端 a_{out} 和 b_{out} 处的双光子波函数:

$$\psi_{\mathrm{bb}}(\tau_1,\tau_2) = -\frac{8\sqrt{2}\gamma^2\kappa\left(e^{2\gamma\tau_1}-e^{\kappa\tau_1}\right)e^{-2\tau_1(\gamma+\kappa)-\tau_2(2\gamma+\kappa)}\left(e^{2\gamma\tau_1+\kappa\tau_2}-e^{\kappa\tau_1+2\gamma\tau_2}\right)}{(\kappa-2\gamma)^2} \tag{C1a}$$

$$\psi_{\mathrm{ba}}(\tau_1,\tau_2) = -\frac{4\sqrt{2}\gamma\kappa\left(e^{2\gamma\tau_1}-e^{\kappa\tau_1}\right)e^{-2\tau_1(\gamma+\kappa)-\tau_2(2\gamma+\kappa)}\left(2\gamma e^{2\gamma\tau_1+\kappa\tau_2}-\kappa e^{\kappa\tau_1+2\gamma\tau_2}\right)}{(\kappa-2\gamma)^2} \tag{C1b}$$

$$\psi_{\mathrm{ab}}(\tau_1,\tau_2) = \frac{4\sqrt{2}\gamma\kappa e^{-2\tau_1(\gamma+\kappa)-\tau_2(4\gamma+\kappa)}\left(-2\gamma e^{2\kappa\tau_1+4\gamma\tau_2}-2\gamma e^{4\gamma\tau_1+2\gamma\tau_2+\kappa\tau_2}+(4\gamma-\kappa)e^{(2\gamma+\kappa)(\tau_1+\tau_2)}+\kappa e^{2\gamma\tau_1+\kappa\tau_1+4\gamma\tau_2}\right)}{(\kappa-2\gamma)^2} \tag{C1c}$$

$$\psi_{\mathrm{aa}} = \xi(\tau_1,\tau_2)+\psi_{\mathrm{ab}}(\tau_1,\tau_2)+\psi_{\mathrm{ba}}(\tau_1,\tau_2)-\psi_{\mathrm{bb}}(\tau_1,\tau_2) \tag{C1d}$$

将这些表达式代入方程（B5），即可计算两个输入光子被路由至不同端口的概率密度到干涉仪的不同输出端口 c_{out} 和 d_{out}。对所得表达式关于 τ_1 和 τ_2积分，可得以下分束效率:

$$P_{\mathrm{S}} = \frac{(\kappa(\kappa(10-3\kappa)+20)-8)\cos(2\theta)+16\kappa\sin^2(\theta)\cos(2\phi)+32\kappa\sin(2\theta)\cos(\phi)+\kappa(\kappa(3\kappa+38)+44)+8}{4(\kappa+2)^2(3\kappa+2)} \tag{C2}$$

此处，我们令原子带宽为 $\gamma=1$。请注意，这相当于用原子带宽 γ.作为单位来表示脉冲带宽 κ

具有指数脉冲轮廓的两个纠缠光子的输入态为 $\xi(t_1,\ t_2)\ =2\sqrt{\kappa\delta}\ e^{-\kappa t_1}e^{-\delta(t_2-t_1)}$。我们按照上一节的相同步骤，求得二能级原子输出端的双光子波函数。由此得到的稳态极限下的分束效率为:

$$P_{\mathrm{S}} = \frac{-(\delta((\delta-10)\delta-12)+8)\cos(2\theta)+16\delta\sin^2(\theta)\cos(2\phi)+32\delta\sin(2\theta)\cos(\phi)+\delta(\delta(\delta+22)+20)+8}{4(\delta+2)^3} \tag{C3}$$

其中，稳态极限对应于取极限 $\kappa\to 0.$。另请注意，我们令原子带宽为 $\gamma=1$，这仅相当于用原子带宽表示脉冲带宽 δ。