arXiv:2305.01117v1 [math.NT] 1 May 2023

中间素因子的分布

NATHAN MCNEW、PAUL POLLACK 和 AKASH SINGHA ROY

ABSTRACT. 设 $P_{(1\,2)}(n)$ 表示 n 的中间素因子（计入重数）。更一般地，对于任意 $\alpha \in (0,1)$，可以考虑 n 的 α 位素因子，记作 $P^{(\alpha)}(n)$。此前已有研究表明，$\log\log P_{(\alpha)}(n)$ 的正常阶为 $\alpha\log\log x$，且其取值围绕这一数值呈高斯分布。我们通过求得一个渐近公式，扩展了这项研究：该公式用于计数满足 $P^{(\alpha)}(n) = p$ 的 $n \le x$，其中素数 p 的范围可广至 x。我们给出了这些结果的若干应用，包括探究中间素因子的几何平均数；我们发现，$\frac{1}{x}\sum_{1<n\le x}\log P_{(1\,2)}(n) \sim A(\log x)^{\varphi-1}$，其中 φ 为黄金比例，A 为一个显式常数。在此过程中，我们还将 Lichtman 最近关于“分割版”梅滕斯定理的研究推广到和 $\sum_{P^+(n)\le y}\Omega($

-

$\frac{1}{n}$ 当 k 取较大值时。k

$n)=$

1. INTRODUCTION

自 [8] 起，已有多篇论文研究整数的“中间素因子”的分布性质。设整数 $n > 1$ 的素因数分解写作

$$n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_{\omega(n)}^{a_{\omega(n)}} = p_1 p_2 \cdots p_{\Omega(n)},$$

其中 $q_1 < q_2 < \cdots < q_{\omega(n)}$ 且 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_{\Omega(n)}$。称 $Q^{(\frac{1}{2})}(n) := q_{\lceil \omega(n)/2 \rceil}$ 为不考虑重数时 n 的中间素因子，称 $P_{(1\,2)}(n) := p_{\lceil \Omega(n)/2 \rceil}$ 为考虑重数时 n 的中间素因子。

不考虑重数的中间素因子的研究始于 [8], ，作者在那里得到了不超过 x 的中间素因子的倒数和的渐近式。

$$\sum_{1<n\le x} \frac{1}{Q^{(\frac{1}{2})}(n)} = \frac{x}{\log x} \exp\left((1+o(1))\sqrt{2\log_2 x \log_3 x}\right).$$

在本文中，我们始终用 $\log_k x$ 表示 k重迭代自然对数。Ouellet 在 [17]中显著改进了上述渐近式；该文还考察了推广到第 α位素因子 $Q^{(\alpha)}(n) := q_{\lceil \alpha\omega(n) \rceil}$的问题。在下文中，我们类似地定义[1] $P^{(\alpha)}(n) := p_{\lceil \alpha\Omega(n) \rceil}$。（为方便起见，以下我们将...

2020 年数学主题分类。主要分类：11N37；次要分类：11A51、11N25。关键词与短语：中间素因子、整数的解剖学、梅滕斯定理。P.P. 获 NSF DMS-2001581 号资助。[1]与我们先前的论文 [15], 一样，我们对位于 α 位置的素因子采用了略有不同的定义，这与 De Koninck、Doyon 和 Ouellet 之前给出的定义不同。他们取位于 $\max\{1, \lfloor \alpha\Omega(n) + 1 \rfloor\}$ 位置的素因子，而我们在此取位于 $\lceil \alpha\Omega(n) \rceil$ 位置的素因子。这两种定义通常给出相同的位置，且位置差从不超过 1；此处引用的其他论文中的结果采用任一定义都成立。

定义 $P^{(\alpha)}(1) := 1$。考虑重数的中间素因子的倒数和的渐近公式 [10] 却出人意料地不同，

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{P^{(\frac12)}(n)} = c\frac{x}{\sqrt{\log x}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2 x}\right)\right)$$

对于一个显式常数 $c = \frac{9}{4\sqrt{\pi}}\sum_p \frac{1}{p^2-2p}\prod_{3\le q<p}\frac{1-\frac{1}{2q}}{1-\frac{2}{q}}\prod_q(1-\frac{1}{q})^{\frac12}\sqrt{1-\frac{1}{2q}}$。

尽管它们的倒数和不同，$\log_2 Q^{(\alpha)}(n)$ 和 $\log_2 P^{(\alpha)}(n)$ 的正常阶都是 $\alpha\log_2 x$（见 [7]），且这两个值都服从高斯律。特别是，[6] 表明，对于固定的 $\epsilon\in(0,\frac18)$、$\alpha\in(0,1)$ 和 $|t|\ll(\log_2 x)^{\epsilon}$，有

$$\frac1x\#\left\{n\le x:\frac{\log_2 P^{(\alpha)}(n)-\alpha\log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}}<t\right\} = \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\right)+O_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}\right) \tag{1}$$

其中 $\Phi(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\tau}e^{-v^2/2}dv$ 是高斯概率分布函数。

最近，在 [15], 中，本文作者研究了 $P^{(\alpha)}(n)$ 的值在各种情形下的分布。特别是，这个位于第 α 位的素因子遵循本福特首位数字定律，并且在模 q 的互素剩余类中均匀分布，其中，对于 $c(\alpha) := 1-2^{-\alpha/(1-\alpha)}$，$q$ 可以接近 $(\log x)^{c(\alpha)}$，但不会显著大于该值。

2. Results

本文将对函数 $P^{(\alpha)}(n)$ 的分布性质进行更为深入的研究。特别是，对于范围广泛的素数 p，我们将确定不超过 x 且以 p 作为中间（或第 α 位）素因子的整数个数的渐近公式。我们定义

$$M_p^{(\alpha)}(x) := \#\{n\le x : P^{(\alpha)}(n)=p\}$$

并设置

$$\beta := \frac{\log_2 p}{\log_2 x}$$

（使得 $\log p = (\log x)^{\beta}$）。在本文余下部分中，$p$ 和 β 将通过这一表达式建立联系。我们首先考虑中间素因子（即 $\alpha=\frac12$ 的情形）。

定理 2.1. 设 $\epsilon>0$，并假设 p 是一个素数，$p\to\infty$。那么，若 $\beta<\frac15-\epsilon$ 或 $\frac15+\epsilon<\beta<1-\epsilon$，则有

$$M_p^{(\frac12)}(x) = \begin{cases}\left(1+O_\epsilon\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right)C_\beta\dfrac{x}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta(1-\beta)}}\sqrt{\log_2 x}} & \text{if } \frac15+\epsilon<\beta<1-\epsilon,\\ \left(1+O_\epsilon\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}+\frac{(\log_2 p)^{-1/2}}{(\log p)^{\epsilon^2}}\right)\right)C\dfrac{x}{p(\log x)^{\frac12-\frac32\beta}} & \text{if } 0<\beta<\frac15-\epsilon,\end{cases} \tag{2}$$

其中

$$C_\beta := \frac{\exp\left(\frac{\gamma(1-2\beta)}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}\right)}{\Gamma\left(1+\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)} \frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{1-\beta}}{2\sqrt{\pi}\beta^{1/4}(1-\beta)^{3/4}} \prod_{q\ prime} \left(1-\frac{1}{q}\right)^{\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}} \left(1-\frac{\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}}{q}\right)^{-1} \tag{3}$$

$$C := \frac{3e^{\frac{3\gamma}{2}}}{4\sqrt{\pi}} \prod_{q>2\ prime} \left(1+\frac{1}{q(q-2)}\right) = 1.523555\ldots.$$

虽然常数 C_β above 的表达式以复杂的方式依赖于 β in，但我们观察到 $C_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$。

M（12）$p(x)$ 的渐近公式在上述两种 β 范围内的差异，很大程度上体现了在两种情形下，含有 k 个素因子的 p-光滑数的倒数和的渐近行为差异： $k/\log_2 p$ 小于或大于 2（且与 2 保持一定距离）。对于 $k \le (2-\epsilon)\log_2 p$，Lichtman [14]（定理 5.1）的工作提供了所需信息，而在定理 5.3 中，我们将 Lichtman 的结果扩展到 $k \ge (2+\epsilon)\log_2 p$ 的情形。

类似地，我们可以得到一个适用于一般 α 的定理版本，不过在陈述该定理之前，我们需要引入一些额外的记号。

首先定义常数（依赖于 α 和 β）

$$\chi := \frac{(1-\alpha)\beta}{(1-\beta)\alpha} \qquad \text{and} \qquad \nu := 2^{-\frac{1}{1-\alpha}},$$

这些表达式会频繁出现在下文的陈述中。我们还定义 $\rho_{\chi,\ \alpha}$ 和 $\rho_{\nu,\ \alpha}$，

$$\rho_{c,\alpha} := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c^{\{n(1-\alpha)\}}$$

其中 $\{\theta\} = \theta - \lfloor\theta\rfloor$ 表示实数的小数部分，而 c 取 χ 或 ν。注意，当 $\alpha = \beta$时，$\rho_{\chi,\ \alpha} = 1$，因为此时 $\chi = 1$。

常数 $\rho_{c,\ \alpha}$ 是 c 的长期平均值，其中指数为整数倍 $1-\alpha$的小数部分。因此，这些和的行为取决于 α 是有理数还是无理数。若 $1-\alpha = \frac{a}{b}$ 是有理数，且 $\gcd(a,b) = 1$，则可得

$$\rho_{c,\alpha} = \frac{1}{b}\sum_{i=0}^{b-1} c^{i/b} = \begin{cases} 1 & \text{if } c = 1 \\ \dfrac{c-1}{b(c^{1/b}-1)} & \text{if } c \ne 1. \end{cases}$$

另一方面，若 $\alpha \ne \beta$ 是无理数，根据等分布定理（关于更明确的陈述，参见下文引理 4.7 的证明），可得

$$\rho_{c,\alpha} = \int_0^1 c^t dt = \frac{c-1}{\log c}.$$

最后，我们定义该值

$$\beta_\alpha := \frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-\alpha}}(\alpha^{-1}-1)} = \frac{1}{1+\nu^{-1}(\alpha^{-1}-1)}.$$

正如我们将在下文看到的，对于固定的 α， $M_p^{(\alpha)}(x)$的行为在该值两侧的 β 处发生相变，类似于 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时在$\beta = \frac{1}{5}$ 处的相变。注意，对于所有 $\alpha \in (0,1)$， $\beta_\alpha < \alpha$。

现在我们可以陈述定理 2.1 的以下推广。

定理 2.2。固定 $\epsilon > 0$ 和 $\alpha \in (0,1)$。假设 $\beta \in (0,1)$ 满足 $0 < \beta < \beta_\alpha - \epsilon$ 或 $\beta_\alpha + \epsilon < \beta < 1 - \epsilon$，且 α 为有理数。那么当 x， $p \to \infty$ 时，我们有，

$$M_p^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \left(1 + O_{\alpha,\epsilon}\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right) \dfrac{C_{\beta,\alpha} x}{p(\log x)^{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}} \sqrt{\log_2 x}} & \text{if } \beta_\alpha + \epsilon < \beta < 1-\epsilon, \\ \left(1 + O_{\alpha,\epsilon}\left(\left(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{(\log_2 p)^{-\frac{1}{2}}}{(\log p)^{\epsilon^2}}\right)\right) \dfrac{C_\alpha x}{p(\log x)^{1-2\beta-2\nu(1-\beta)}} & \text{if } 0 < \beta < \beta_\alpha - \epsilon, \end{cases}$$

其中

$$C_{\beta,\alpha} := \frac{e^{\gamma(\chi^{\alpha-1}-\chi^\alpha)}}{\Gamma(1+\chi^\alpha)} \frac{\chi^{\frac{3}{2}\alpha-1}\rho_{\chi,\alpha}}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\beta)}} \prod_{q \text{ prime}} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{\chi^{\alpha-1}} \left(1 - \frac{\chi^{\alpha-1}}{q}\right)^{-1},$$

$$C_\alpha := \frac{\nu^\alpha \rho_{\nu,\alpha} e^{\gamma(2-\nu^\alpha)}}{2(1-\alpha)\Gamma(1+\nu^\alpha)} \prod_{q>2 \text{ prime}} \left(1 + \frac{1}{q(q-2)}\right).$$

隐含常数对 α 的依赖，来自 α 与 0 和 1 的距离，以及 α 的分母大小。

对于每个固定的无理数 α，相同的渐近等式仍然成立（但没有任何有效的误差项）。对于该范围内几乎所有的 α，这些等式均以具有显式乘法误差的形式成立，误差为

$$1 + O_{\alpha,\epsilon}\left(\frac{(\log_3 x)^{3/4}(\log_4 x)^{1+\epsilon}}{(\log_2 x)^{1/4}} + \frac{1}{(\log p)^{\epsilon_0}(\log_2 p)^{1/2}}\right).$$

最后，对于任意满足 $\mathcal{E} = o(1)$ as $x \to \infty$ 的参数，我们在 $\beta \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ 和$\alpha \in (\beta - \mathcal{E}, \beta + \mathcal{E})$ 上一致地有，

$$M_p^{(\alpha)}(x) = \left(1 + O\left(\mathcal{E} + \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right) \frac{C_{\beta,\beta} x}{p(\log x)^{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}} \sqrt{\log_2 x}}.$$

这里的隐含常数与 α 无关。

对于无理数 α，一致性的障碍源于克罗内克序列 $\{(1-\alpha)n\}_{n=1}^N$ 的已知差异界，参见引理 4.7 的证明。不过，借鉴上述结果中的一些论证，我们还可以给出关于 $M_p^{(\alpha)}(x)$ 的以下界，该界对所有 $\alpha \in \in (0,1)$ 以及远离 0 和 1 的 β 都完全一致。

定理 2.3。固定 $\epsilon \in \in (0, 1/2)$。对于 $\alpha \in \in (0,1)$ 和 $\beta \in \in (\epsilon, 1-\epsilon)$，以下结论一致成立：

$$M_p^{(\alpha)}(x) \ll \frac{x}{p\sqrt{\log_2 x}}.$$

值得注意的是，上述界限在其一致性范围内是最佳的，因为在 $\alpha = \beta$ 本身的情形下可以取到等号（如定理 2.2 所示）。此外，作为4

证明将表明，定理 2.3 中的界可以改进为对 $\log x$ 的幂次节省；无论是当 α 接近 0 或 1 时，还是当 β 落在 $(\delta, \beta_\alpha + \delta)$ 中时（其中 δ 是关于 ϵ 足够小的任意固定值）。

由于 $\rho_{c,\alpha}$ 项的存在及其性质，上述常数 C_α 和$C_{\beta,\alpha}$ （后者视为在固定 β时关于 α 的函数）具有这样的性质：在每个无理数处连续，但在 α的每个有理数值处都不连续，惟 $\alpha = \beta$ 处除外（如果 β 是有理数）。在此值处，当 $\alpha = \beta$时，上述常数 $C_{\alpha,\alpha}$ 可化简为

$$C_{\alpha,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)}}$$

无论 α 是否为有理数，皆是如此。由此，(1) 中第 α位素因子的正态分布可作为推论得出。事实上，我们可以将该表达式中的误差项改进为如下形式。

推论 2.4。固定 $\alpha \in (0, 1)$。对于所有实数 t，以下结论一致成立：

$$\frac{1}{x}\#\left\{n \le x : \frac{\log_2 P^{(\alpha)}(n) - \alpha \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} < t\right\} = \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\right) + O_\alpha\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{\sqrt{\log_2 x}}\right). \quad (4)$$

证明通过对 $M_p^{(\alpha)}(x)$ 的素数求部分求和，并结合下文定理 2.5 和 2.6 证明中使用的方法得出。

我们也可以类似地推导出一个推论，用以描述固定素数 p 在可被 p整除的整数的素因子中所处相对位置的分布。对于可被 p整除的整数n，我们记作 $n = p_1 \cdots p_{\Omega(n)}$，其中

$$p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_{k-1} \le p = p_k < p_{k+1} \le \cdots \le p_{\Omega(n)}$$

使得 p 是 n 的第 k 小素因子（如果 n 可被 p^2 整除，则取对应于 p 的因子的最大索引）。对于这样的 n，我们随后将 $R_p(n) = \frac{k}{\Omega(n)}$ 记为 p 在 n 的素因子中的相对位置。易见，$R_p(n)$ 的正常阶是 $\beta = \frac{1}{\log_2 p \log_2 x}$；我们证明，它实际上以该值为中心呈正态分布。

定理 2.5。固定 $\epsilon > 0$。当 $x \to \infty$ 时，我们有

$$\frac{1}{x/p}\#\left\{n \le x : p|n, \frac{R_p(n) - \beta}{(\log_2 x)^{-1/2}} < t\right\} = \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}\right) + O_\epsilon\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\right), \quad (5)$$

对 $\beta \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ 中的元素及所有实数 t 一致成立。

我们以定理 2.1 的又一个应用作为结尾。如果我们用 $P_k(n)$ 表示 n 的第 k 大素因子，Dickman [9], de Bruijn [4] 以及后来 Knuth 和 Trabb-Pardo [13]研究了 $\log P_k(n)$ 的平均值，并发现，对于每个固定的 k，即

$$\frac{1}{x}\sum_{n \le x} \log P_k(n) = (D_k + o(1)) \log x$$

其中 D_k 是常数，特别是 $D_1 = 0.624329\ldots$ 是 Golumb-Dickman 常数。[2]

这个结果可以理解为："平均而言"，整数 n 的最大素因子位数略少于 $5/8$ 位，与 n相同；而对于任意固定的 k，第 k 大素因子

[2] In fact, $\frac{1}{x}\sum_{n \le x} \log P_1(n) = D_1 \log x + D_1(1-\gamma) + O\left(\exp(-(\log x)^{3/8-\epsilon})\right)$.

n 的位数平均而言，是 n位数的一个固定正比例。Tenenbaum [18, 推论 4] 考察了最小素因子 $P^-(n)$ 的这一相同平均值，并证明（对于一个复杂但显式的常数 A^-）：

$$\frac{1}{x}\sum_{1<n\le x}\log P^-(n) = e^{-\gamma}\log\log x + A^- + O\left(\exp(-(\log x)^{3/8-\epsilon})\right).$$

我们针对 n的中间（或位于 α位置的）素因子研究同一问题。

定理 2.6。设 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为黄金比例，$\varphi' = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180\ldots$ 为其倒数。小于等于 x 的整数的中间素因子的对数平均值满足

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\log P^{(\frac{1}{2})}(n) = A(\log x)^{\varphi'}\left(1 + O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right) \tag{6}$$

其中

$$A := \frac{e^{-\gamma}}{\varphi!}\frac{\varphi+1}{\sqrt{5}}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varphi'}\left(1-\frac{\varphi'}{p}\right)^{-1} = 1.313314\ldots$$

和 $\varphi! := \Gamma(\varphi+1) = \Gamma(\varphi-1) = \Gamma(\varphi')$。

注意，φ 是方程 $\Gamma(x+1) = \Gamma(x-1)$ 的一个解。类似地，可以将此推广到 α 的其他取值。

注 2.7. 利用定理 2.2，可以类似地推出，对于任意固定的 $0<\alpha<1$，有 $\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\log P_{(\alpha)}(n) \sim A_\alpha(\log x)^{B_\alpha}$，其中 $B_\alpha = \max_{0<\beta<1}\{\beta + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} - 1\}$。

记号与约定：我们的大多数记号都是标准的。我们继续使用 $P^+(n)$ 表示 n 的最大素因子（其中 $P^+(1) = 1$），并使用 $P^-(n)$ 表示 n 的最小素因子（取 $P^-(1) = \infty$）。如果 n 满足 $P^+(n) \le y$，我们称 n 是 y-光滑的；当 $P^-(n) > y$ 时，我们称其为 n y-粗糙的。给定素数集合 E，我们使用 $\Omega_E(n)$ 表示 E 中整除 n 的素数个数，并按重数计数；明确地，$\Omega_E(n) := \sum_{p^k\|n,\, p\in E} k$。我们还用 $E(x)$ 表示 E 中不超过 x 的元素的倒数和，即 $E(x) := \sum_{p\le x, p\in E} 1/p$.

\($\ll$ 和 O记号中的隐含常数总是可以依赖于任何声明为“固定”的参数。特别地，除非另有说明，它们依赖于 α 和 ϵ。对于有理数 α，对 α 的依赖来自 α 与 0 和 1 的距离，以及 α的分母大小。对于固定量 δ 和 ϵ，我们用 $\delta \ll_\epsilon 1$ 表示 $\delta \in (0,1)$可以选得足够小，其大小取决于 ϵ（我们还会使用将 δ 和 ϵ 替换为其他固定参数的此记号变体）。我们用 $\log_k x$ 表示自然对数的 k重迭代。

3. The exact middle prime factor

令 $\overline{M}_p(x)$ 表示满足 $\Omega(n) \equiv 1 \pmod 2$、且其中间素因子恰为 p 的整数 $n \le x$ 的个数。为了尽可能简明地阐述我们的论证，我们先证明以下定理；该定理本身或许也颇有意义。

定理 3.1. 令 $\epsilon > 0$，并设 $p \to \infty$, $\beta = \log_2 p \log_2 x$。那么，若 $\beta < \frac{1}{5} - \epsilon$ 或 $\frac{1}{5} + \epsilon < \beta < 1 - \epsilon$，则有

$$\overline{M}_p(x) = \begin{cases} \left(1 + O_\epsilon\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right) \overline{C}_\beta \frac{x}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta(1-\beta)}}\sqrt{\log_2 x}} & \text{if } \frac{1}{5} + \epsilon < \beta < 1 - \epsilon, \\ \left(1 + O_\epsilon\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}} + \frac{(\log_2 p)^{-1/2}}{(\log p)^{\epsilon^2}}\right)\right) \overline{C} \frac{x}{p(\log x)^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\beta}} & \text{if } 0 < \beta < \frac{1}{5} - \epsilon, \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\overline{C}_\beta := \frac{\exp\left(\frac{\gamma(1-2\beta)}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}\right)}{\Gamma\left(1 + \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)} \frac{\beta^{1/4}}{2\sqrt{\pi}(1-\beta)^{3/4}} \prod_{q \text{ prime}} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}} \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}}{q}\right)^{-1},$$

$$\overline{C} := \frac{e^{\frac{3\gamma}{2}}}{4\sqrt{\pi}} \prod_{q>2 \text{ prime}} \left(1 + \frac{1}{q(q-2)}\right) = 0.507851\ldots.$$

类似于 $\overline{M}_p(x)$，我们可以将 $\underline{M}_p(x)$ 定义为具有偶数个素因子且其中间素因子为 p 的整数的计数。$\underline{M}_p(x)$ 满足与上文 (2) 相同的表达式，但常数不同：分别以 $\underline{C}_\beta$ 和 $\underline{C}$ 代替 $\overline{C}_\beta$ 和 $\overline{C}$，即 $\underline{C}_\beta := \overline{C}_\beta\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}$，且 $\underline{C} := 2\overline{C} = 1.015703\ldots$。将 $\overline{M}_p(x)$ 和 $\underline{M}_p(x)$ 的表达式相加，即得定理 2.1 中 $M_p(x)$ 的表达式。

4. 技术准备

在证明主要结果之前，我们先陈述几个将在证明中用到的结果。首先介绍萨特–塞尔伯格和尼古拉关于具有给定数量素因子的数的分布的经典结果所推出的若干结论（参见《整数》第 304 页上的定理 6.5 和 6.6，以及习题 217）。

引理 4.1。固定 $\delta \in (0, 1)$。对于所有充分大的 x,

$$\sum_{\substack{n \le x \\ \Omega(n)=k}} 1 \ll \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

对于正整数 $k \le (2-\delta)\log_2 x$，一致地有,

$$\sum_{\substack{n \le x \\ \Omega(n)=k}} 1 \ll \frac{x \log x}{2^k}$$

对于 $k \ge (2+\delta)\log_2 x$，一致地有。

以下引理属于“整数的解剖学”研究，并精确表述了如下断言：$\Omega_E(n) = \sum_{p^k \| n,\ p \in E} k$ 通常的大小为 $\sum_{p \le x,\ p \in E} 1/p$，且这一结论对所有素数集合 E 都一致成立。尽管下文的陈述比 [15], 中的引理 3.1 稍微一般一些，但同样的证明仍然适用；另请参见 [11]第 5 页上的定理 08。

引理 4.2。固定 $\epsilon_0 \in (0,1)$ $C_0 > 0$。令 $x \geq 3$，并令 E 为一个非空的素数集合，其最小元素为 p_E。对于 $E(x) = \sum_{p \leq x,\ p \in E} 1/p$，当 $1 \leq y \leq \min\{C_0, (1-\epsilon_0)p_E\}$ 时，我们有，

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega_E(n) \geq yE(x)}} 1 \ll x \exp(-E(x) \cdot Q(y)),$$

其中 $Q(y) := y \log y - y + 1$，且所隐含的常数是绝对常数。当 $0 < y \leq 1$ 时，同一不等式仍成立，只需将 $\Omega_E(n)$ 条件替换为 $\Omega_E(n) \leq yE(x)$。

我们用 $\Phi_k(x,y)$ 表示满足以下条件的整数 $n \leq x$ 的个数：其最小素因子为 $P^-(n) \geq y$，且 $\Omega(n) = k$。Alladi 的以下两个结果给出了在 y 的不同范围内 $\Phi_k(x,y)$ 的估计。

定理 4.3（Alladi [1], 定理 7，另见 [2]）。固定 $r > 0$，并令 $u := \log x \log y$, $\xi := \frac{k}{\log u - \gamma}$。则对 $\exp((\log_2 x)^3) \leq y \leq \sqrt{x}$ 且 $1 \leq k \leq r \log u$，一致地有[3]

$$\Phi_k(x,y) = \frac{xe^{-\gamma\xi}}{\log x\ \Gamma(1+\xi)} \cdot \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O_r\left(\frac{1}{\sqrt{\log u}}\right)\right).$$

定理 4.4（Alladi [1], 定理 6）。固定 $\epsilon \in (0,2)$，并令 $\mu := \frac{k-1}{\log_2 x}$。则对 $3 \leq y \leq \exp\left((\log x)^{2/5}\right)$ 且 $1 \leq k \leq (2-\epsilon)\log_2 x$，一致地有

$$\Phi_k(x,y) = \frac{xg(y,\mu)}{\log x\ \Gamma(1+\mu)} \cdot \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O\left(\frac{k(\log_2 y)^2}{(\log_2 x)^2}\right)\right),$$

其中

$$g(y,\mu) := \prod_{p<y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\mu} \prod_{p \geq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\mu} \left(1 - \frac{\mu}{p}\right)^{-1}.$$

指数级数的截断和（及其扭曲形式）将在我们的论证中扮演重要角色。以下技术性结果为估计这类和奠定了基础。

定理 4.5（Norton 引理 4.5 和 4.7）。设 v、θ 为正实数。那么

$$\sum_{k \leq (1-\theta)v} \frac{v^k}{k!} < \frac{1}{\theta\sqrt{v(1-\theta)}} \exp\left((R(-\theta)+1)v\right) \tag{8}$$

and

$$\sum_{k \geq (1+\theta)v} \frac{v^k}{k!} < \frac{\sqrt{1+\theta}}{\theta\sqrt{2\pi v}} \exp\left((R(\theta)+1)v\right) \tag{9}$$

其中 $R(\theta) = \theta - (\theta+1)\log(\theta+1)$】【。

我们将更频繁地使用以下 Norton 的估计的推论。

引理 4.6。假设 $W > 0$ 足够大，且当 $W \to \infty$ 时 $E = o(W^{2/3})$。那么

$$\sum_{0 \leq k \leq W-E} \frac{W^k}{k!} \ll \frac{W^{1/2}}{E} \exp\left(W - \frac{E^2}{2W}\right) \quad \textit{and} \quad \sum_{k \geq W+E} \frac{W^k}{k!} \ll \frac{W^{1/2}}{E} \exp\left(W - \frac{E^2}{2W}\right).$$

[3]请注意，尽管 [1] 的定理 7 仅针对 $k \leq (2-\epsilon)\log u$ 进行了表述，但该论文的结束语指出了如何将这一限制放宽至此处给出的版本。

证明。对于任意参数 $\theta = o(W^{-1/3})$，我们有

$$R(-\theta)+1 = (1-\theta)(1-\log(1-\theta)) = (1-\theta)\left(1+\theta+\frac{\theta^2}{2}+O(\theta^3)\right) = 1-\frac{\theta^2}{2}+O(\theta^3).$$

因此，取 $\theta = E/W = o(W^{-1/3})$，由 (8) 和上述估计可得

$$\sum_{0\le k\le W-E}\frac{W^k}{k!} = \sum_{k\le(1-\theta)W}\frac{W^k}{k!} \ll \frac{e^W}{\theta\sqrt{W}}\exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 W\right) \ll \frac{W^{1/2}}{E}\exp\left(W-\frac{E^2}{2W}\right),$$

从而证明了所述估计中的第一个。第二个估计的证明类似。 □

我们以对指数级数截断和的某些“扭曲”版本的一个估计结束本节；这些版本出现在定理 2.2 的论证中。

引理 4.7. 固定 $\epsilon, \alpha \in (0,1)$，其中 α 为有理数。则对 $\beta \in [\beta_\alpha+\epsilon, 1-\epsilon]$ 以及满足 $V^{1/2} \ll E$ 和 $E = o(V^{2/3})$ 的 $V, E \to \infty$，以下估计一致成立，

$$\sum_{V-E\le k\le V+E}\frac{V^k}{k!}\chi^{\{(1-\alpha)k\}} = \rho_{\chi,\alpha}e^V\left\{1+O\left(e^{-c_\alpha V}+\frac{V^{1/2}}{E}\exp\left(-\frac{E^2}{2V}\right)\right)\right\} \tag{10}$$

其中 $c_\alpha > 0$ 是仅依赖于 α 的常数。在对 α, V 和 E 作相同限制的情况下，

$$\sum_{\frac{V-E}{1-\alpha}\le k\le\frac{V+E}{1-\alpha}}\frac{V^{\lfloor(1-\alpha)k\rfloor}}{\lfloor(1-\alpha)k\rfloor!}\nu^{\{(1-\alpha)k\}} = \frac{\rho_{\nu,\alpha}e^V}{1-\alpha}\left\{1+O\left(\sqrt{\frac{E}{V}}+\frac{V^{1/2}}{E}\exp\left(-\frac{E^2}{2V}\right)\right)\right\}. \tag{11}$$

上述两个公式中的隐含常数至多依赖于 α 到 0 和 1 的距离，以及 α 分母的大小。

上述渐近公式对于固定的无理数 $\alpha \in (0,1)$ 也成立（但没有有效的误差项），且乘法误差为

$$1+O\left(\frac{E^{3/2}}{V}+\frac{\log V(\log_2 V)^{1+\epsilon}}{E^{1/2}}+\frac{V^{1/2}}{E}\exp\left(-\frac{E^2}{2V}\right)\right) \text{ for almost all } \alpha\in(0,1). \tag{12}$$

最后，给定上述的 ϵ、V、E 以及参数 $\mathcal{E} = o(1)$，我们有

$$\sum_{V-E\le k\le V+E}\frac{V^k}{k!}\chi^{\{(1-\alpha)k\}} = e^V\left\{1+O\left(\mathcal{E}+\frac{V^{1/2}}{E}\exp\left(-\frac{E^2}{2V}\right)\right)\right\}, \tag{13}$$

对于 $\beta \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ 和 $\alpha \in (\beta-\mathcal{E}, \beta+\mathcal{E})$，该结果一致成立。

证明。我们首先考虑 $\alpha \in (0,1)$ 为有理数的情况。我们先将 $1-\alpha = a/b$ 写成互质的正整数 a、b 的形式，使得 $b > 1$。然后，(10) 左边的和等于

$$\sum_{V-E\le k\le V+E}\frac{V^k}{k!}\chi^{\{ak/b\}} = \sum_{r \bmod b}\chi^{\{ar/b\}}\sum_{\substack{V-E\le k\le V+E\\ k\equiv r \pmod b}}\frac{V^k}{k!}. \tag{14}$$

根据正交性　加法特征的正交性，关于 k 的内层求和为（记 $e(x) := e^{2\pi i x}$）

$$\frac{1}{b}\sum_{\ell \bmod b} e\left(-\frac{r\ell}{b}\right)\sum_{V-E\le k\le V+E}\frac{(Ve^{2\pi i\ell/b})^k}{k!}$$
$$=\frac{1}{b}\sum_{\ell \bmod b} e\left(-\frac{r\ell}{b}\right)\exp(Ve^{2\pi i\ell/b})+O\left(e^V\frac{V^{1/2}}{E}\exp\left(-\frac{E^2}{2V}\right)\right).$$

将其代回（14）并交换求和次序，得到

$$\sum_{V-E\le k\le V+E}\frac{V^k}{k!}\chi^{\{(1-\alpha)k\}}$$
$$=\frac{e^V}{b}\sum_{r \bmod b}\chi^{\{ar/b\}}+\frac{1}{b}\sum_{\ell=1}^{b-1}\exp(Ve^{2\pi i\ell/b})\sum_{r \bmod b}\chi^{\{ar/b\}}e\left(-\frac{r\ell}{b}\right)+O\left(e^V\frac{V^{1/2}}{E}\exp\left(-\frac{E^2}{2V}\right)\right)$$
$$=\rho_{\chi,\alpha}e^V+\frac{1}{b}\sum_{\ell=1}^{b-1}\exp(Ve^{2\pi i\ell/b})\sum_{j=0}^{b-1}\chi^{j/b}e\left(-\frac{\overline{a}j\ell}{b}\right)+O\left(e^V\frac{V^{1/2}}{E}\exp\left(-\frac{E^2}{2V}\right)\right)$$

其中 $\overline{a}\in\mathbb{Z}$ 表示模 b 的 a 的乘法逆元。我们注意到，当 r 遍历模 b 的不同剩余类时，ar也同样遍历这些剩余类。上式中的内层求和为 $O(1)$，因此上文对 ℓ 的求和为 $\ll e^{(1-c_\alpha)V}$，其中 $c_\alpha := 1-\cos(2\pi/b) > 0$。至此，（10）的证明完成。

为证明（11），我们先令 $m=\lfloor(1-\alpha)k\rfloor$，于是 $m\in(V-E-1,V+E]$且 $m/(1-\alpha)\le k<(m+1)/(1-\alpha)$。最后这个条件自动推出$k\in[(V-E)/(1-\alpha),(V+E)/(1-\alpha)]$对所有 $m\in[V-E,V+E-1]$都成立。其余的 m均为某个 $\theta\in\{\pm1\}$对应的 $V+\theta E+O(1)$，因此对于这样的 m，

$$h(m) := m\log V - m\log m + m - \frac{1}{2}\log m = V-\frac{1}{2}\log V-\frac{E^2}{2V}+O(1),$$

并根据斯特林公式，

$$\frac{V^m}{m!}=\exp\left(h(m)-\frac{1}{2}\log(2\pi)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)\ll\frac{e^V}{V^{1/2}}\exp\left(-\frac{E^2}{2V}\right),\tag{15}$$

与（11）中的误差项相比，这一项可以忽略。因此，忽略一个可忽略的误差后，（11）中的求和等于

$$\sum_{V-E\le m\le V+E}\frac{V^m}{m!}\sum_{\frac{m}{1-\alpha}\le k<\frac{m+1}{1-\alpha}}\nu^{\{(1-\alpha)k\}}.\tag{16}$$

现在，对于任意正数 $A<B$，我们可以看到：

$$\sum_{A\le k<B}\nu^{\{(1-\alpha)k\}}=\sum_{r \bmod b}\nu^{\{ar/b\}}\sum_{\substack{A\le k<B\\ k\equiv r \pmod b}}1=(B-A)\rho_{\nu,\alpha}+O(1).\tag{17}$$

定义 $L := \sqrt{V/E}$，我们将区间 $[V-E,V+E]$ 划分为 $\lfloor 2E/L\rfloor$ 个等长子区间 I，使得每个子区间的长度为 $2E(2E/L+O(1))^{-1}=L+O(V/E^2)=$

$L + O(1)$。对于任意长度为 $L + O(1)$ 的子区间 I 以及任意两个整数 $m_1, m_2 \in I$，拉格朗日中值定理表明，存在满足以下条件的 $m' \in [m_1, m_2]$

$$h(m_1) - h(m_2) = (m_1 - m_2)\frac{\partial h}{\partial m}\Big|_{m=m'} \ll L\left\{-\log\left(1 - \frac{E}{V}\right) + \frac{1}{V}\right\} \ll \frac{EL}{V},$$

由此再次应用斯特林公式可得

$$\frac{V^{m_1}}{m_1!} = \frac{V^{m_2}}{m_2!}\left(1 + O\left(\frac{EL}{V}\right)\right) = \frac{V^{m_2}}{m_2!}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{E}{V}}\right)\right). \tag{18}$$

因此，固定一个整数 $m_I \in I$，并令 L_I 和 R_I 分别表示 I 中的最小整数和最大整数，可见所有 $m \in I$ 对和 (16) 的贡献为

$$\begin{aligned}\sum_{m\in I}\frac{V^m}{m!}\sum_{\frac{m}{1-\alpha}\le k<\frac{m+1}{1-\alpha}}\nu^{\{(1-\alpha)k\}} &= \frac{V^{m_I}}{m_I!}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{E}{V}}\right)\right)\sum_{\frac{L_I}{1-\alpha}\le k<\frac{R_I+1}{1-\alpha}}\nu^{\{(1-\alpha)k\}}\\ &\overset{(17)}{=} \frac{\rho_{\nu,\alpha}}{1-\alpha}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{E}{V}}\right)\right)L\frac{V^{m_I}}{m_I!}\\ &\overset{(18)}{=} \frac{\rho_{\nu,\alpha}}{1-\alpha}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{E}{V}}\right)\right)\sum_{m\in I}\frac{V^m}{m!}.\end{aligned}$$

将此式求和 对所有 I求和，并利用引理 4.6 将关于 m的和扩展，我们得到 (11)。

现在，给定参数 $\mathcal{E} = o(1)$，可见对于 $\beta \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ 和 $\alpha \in (\beta - \mathcal{E}, \beta + \mathcal{E})$，$\chi = (1-\alpha)\beta/(1-\beta)\alpha = 1 + O(\mathcal{E})$ 一致成立，因此 $\chi^{\{(1-\alpha)k\}} = \exp(\{(1-\alpha)k\}\log\chi) = 1 + O(\mathcal{E})$，由引理 4.6 即可完成 (13) 的证明。

最后，为了确立与 (10) 和 (11) 对无理数 $\alpha \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ 相对应的两个断言，我们用 $L := E^{1/2}$ 进行上述论证。由 (18)，(10) 和 (16) 中的和分别等于

$$\sum_I \frac{V^{k_I}}{k_I!}\left(1 + O\left(\frac{E^{3/2}}{V}\right)\right)\sum_{k\in I}\chi^{\{(1-\alpha)k\}} \quad \text{and} \quad \sum_I \frac{V^{m_I}}{m_I!}\left(1 + O\left(\frac{E^{3/2}}{V}\right)\right)\sum_{\frac{L_I}{1-\alpha}\le k<\frac{R_I+1}{1-\alpha}}\nu^{\{(1-\alpha)k\}},$$

其中（与之前一样），外层的和是对将 $[V-E, V+E]$ 划分成的 $\lfloor 2E/L\rfloor$ 等长子区间 $I[V-E, V+E]$ 进行的，而 k_I 和 m_I 是从 I 中选取的某些整数。

因此，只需对长度为 $|J| \to \infty$ 的区间 $J \subset [V-E, V+E]$ 上的和 $\sum_{k\in J} c^{\{(1-\alpha)k\}}$ 进行一致估计，其中 $c \in \{\chi, \nu\}$。由于序列 $\{(1-\alpha)k\}_{k=1}^{\infty}$ 模 1 均匀分布，该和为 $\sim \rho_{c,\ \alpha}|J|$。事实上，根据科克斯马不等式（ [12] 中的定理 5.4），我们有

$$\left|\frac{1}{|J| + O(1)}\sum_{k\in J} c^{\{(1-\alpha)k\}} - \int_0^1 c^t\,\mathrm{d}t\right| \le \mathrm{Var}(t \mapsto c^t)\cdot \mathrm{Disc}(\{(1-\alpha)k : k \in J\}),$$

其中，$\mathrm{Var}(t \mapsto c^t)$ 表示函数 $t \mapsto c^t$ on $[0, 1)$ 的总变差，而 $\mathrm{Disc}(\{(1-\alpha)k\colon\ k \in J\})$ 表示序列 $\{(1-\alpha)k\colon\ k \in J\}$ 的偏差。根据欣钦界（ [12] 中的定理 5.15），对于几乎所有$\alpha \in (0, 1)$，上述偏差为 $\ll \log L(\log_2 L)^{1+\epsilon}/L$，而 $\mathrm{Var}(t \mapsto c^t) = |c-1| \ll 1$。将上述化简步骤反向执行，即完成引理的证明。□

5. Mertens' Theorem dissected

我们将需要 Lichtman 的以下结果，该结果估计了具有给定数量素因子的光滑数的倒数之和。

定理 5.1（Lichtman [14], 定理 4.1）。固定 $\epsilon > 0$，并令 $r := {}^{k}\text{对数}_{2}\, y$ 且

$$\eta(z) := e^{\gamma z} \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{z} \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1}.$$

当 $y \to \infty$ 时，我们有，对 $k \le (2-\epsilon)\log_2 y$ 一致成立，

$$\sum_{\substack{P^+(A) \le y \\ \Omega(A) = k}} \frac{1}{A} = \eta(r) \frac{(\log_2 y)^k}{k!} \left(1 + O_\epsilon\left(\frac{k}{(\log_2 y)^2}\right)\right).$$

对于上述和，若要得到一个对 k 的所有取值都有效的上界，也会很有帮助。应用 Rankin 方法即可得到这样的结果。

引理 5.2。对于 $y \ge 3$ 和整数 $J \ge 1$，以下结论一致成立，

$$\sum_{\substack{P^+(A) \le y \\ \Omega(A) = J}} \frac{1}{A} \ll \frac{J}{2^J} \log^2 y. \tag{19}$$

证明。对于任意 $0 < z < 2$，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P^+(A) \le y \\ \Omega(A) = J}} \frac{1}{A} &< z^{-J} \sum_{P^+(A) \le y} \frac{z^{\Omega(A)}}{A} = z^{-J} \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-1} \prod_{3 \le p \le y} \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1} \\ &\ll \frac{z^{-J}}{2 - z} \exp\left(z \sum_{3 \le p \le y} \frac{1}{p}\right) \ll \frac{z^{-J}}{2-z} (\log y)^z. \end{aligned}$$

取 $z = 2 - 1/J$ 并注意到 $(1 - 1/2J)^{-J} \asymp 1$，即可得到所需的估计。 □

我们还需要一个适用于 k 取“较大”值时的 Lichtman 定理（定理 5.1）的版本，也就是说，满足 $k > (2+\epsilon)\log_2 y$ 的情形。事实上，我们证明，对于这样的 k，上文的 (19) 基本上给出了正确的数量级（分子中相差一个 k 因子）。这一结果可视为 Lichtman 关于对极大 k 值下的梅滕斯定理进行剖析的结果的推广。我们定义

$$\eta_o(z) := e^{\gamma z} 2^{-z} \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{z} \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1}$$

使得对所有 $z \ne 2$，均有 $\eta_0(z) = (1 - z/2)\eta(z)$。

定理 5.3。固定 $\epsilon \in (0, 1/2)$ 和 $A > 1$。对于 $y \gg 1$ and $(2+\sqrt{5\epsilon})\log_2 y \le k \le (\log y)^{1/2-\epsilon}$，我们有一致成立的结论：

$$\sum_{\substack{P^+(A) \le y \\ \Omega(A) = k}} \frac{1}{A} = \eta_o(2) \frac{\log^2 y}{2^k} \left(1 + O\left(\frac{1}{(\log y)^\epsilon \sqrt{\log_2 y}}\right)\right). \tag{20}$$

注意，

$$\eta_o(2) = \frac{e^{2\gamma}}{4} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) = 1.201303\ldots.$$

证明。下文中，令 $\epsilon_1 := \sqrt{5\epsilon}$。我们改编 [19, 定理 II.6.6]的证明。(20)式左边的和是函数 z^k 的系数

$$\sum_{n:\, P^+(n)\le y} \frac{z^{\Omega(n)}}{n} = \prod_{p\le y} \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1},$$

该函数在圆盘 $|z| < 2 - \epsilon/2$ 上全纯。因此，(20)式中的和等于

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=2-\epsilon} \prod_{p\le y} \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1} \frac{\mathrm{d}z}{z^{k+1}}.$$

根据素数定理（采用通常的德拉瓦莱·普桑误差项），

$$\prod_{p\le y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{z} = \frac{e^{-\gamma z}}{(\log y)^z} \left(1 + O(\exp(-K\sqrt{\log y}))\right)$$

其中某个绝对常数为 $K > 0$。此外，对于 $|z| \le 2 - \epsilon$，我们有

$$\prod_{p>y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{z} \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1} = \exp\left(\sum_{p>y} \left\{ z \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \log\left(1 - \frac{z}{p}\right) \right\}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{y \log y}\right).$$

因此，

$$\sum_{\substack{P^+(A)\le y \\ \Omega(A)=k}} \frac{1}{A} = I + O\left(\exp(-K\sqrt{\log y}) \int_{|z|=2-\epsilon} \frac{(\log y)^{\Re z}}{|z|^{k+1}} \, |dz|\right), \tag{21}$$

其中

$$I := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=2-\epsilon} \frac{\eta(z)(\log y)^z}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z = \eta_o(2) \frac{\log^2 y}{2^k} - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=2+\epsilon_1} \frac{\eta(z)(\log y)^z}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z \tag{22}$$

因为函数 $\eta(z)(\log y)^z/z^{k+1}$ 在简单极点 $z = 2$ 处的留数恰好是 $-\eta_o(2)\log^2 y/2^k$。(21) 式中的误差项为 $\ll (\log y)^{2-\epsilon} \exp(-K\sqrt{\log y})$，由于 $k \le (\log y)^{1/2-\epsilon}$，与 (20) 式中的误差项相比可以忽略。此外，(22) 式中的最后一个积分为

$$\ll \oint\limits_{|z|=2+\epsilon_1} \frac{(\log y)^{\Re z}}{|z|^{k+1}} \, |\mathrm{d}z| \ll \frac{1}{(2+\epsilon_1)^k} \int_0^{2\pi} \exp((2+\epsilon_1)\log_2 y \cos\theta) \, \mathrm{d}\theta \ll \frac{(\log y)^{2+\epsilon_1}}{(2+\epsilon_1)^k \sqrt{\log_2 y}},$$

其中我们使用了这样的事实：对于所有 $\lambda > 1$，$\int_0^{2\pi} e^{\lambda\cos\theta}\mathrm{d}\theta \ll e^\lambda/\sqrt{\lambda}$（见 [19, 第 302] 页）。最后，由于 $k \geq (2+\epsilon_1)\log_2 y$，上述显示式中的最后一个表达式为

$$= \frac{(\log y)^{2+\epsilon_1}}{2^k\sqrt{\log_2 y}}\left(\frac{2}{2+\epsilon_1}\right)^k \leq \frac{(\log y)^{2+\epsilon_1}}{2^k\sqrt{\log_2 y}}\left(\frac{2}{2+\epsilon_1}\right)^{(2+\epsilon_1)\log_2 y}$$
$$= \frac{\log^2 y}{2^k\sqrt{\log_2 y}}(\log y)^{-\tau(\epsilon_1)} \ll \frac{\log^2 y}{2^k}\frac{1}{(\log y)^\epsilon\sqrt{\log_2 y}},$$

wher我们已经注意到，对于 $\epsilon \in (0, 1/2)$，有 $\epsilon_1 = \sqrt{5\epsilon} \in (0, 1.6)$，因此

$$\tau(\epsilon_1) := 2\left\{\left(1+\frac{\epsilon_1}{2}\right)\log\left(1+\frac{\epsilon_1}{2}\right) - \frac{\epsilon_1}{2}\right\} \geq \frac{\epsilon_1^2}{5} = \epsilon.$$

综合各项估计，即完成定理的证明。 □

注 5.4。虽然这对我们而言并非必要，但值得指出的是，定理 5.3 中 k 的取值范围可以扩展为 $(2+\epsilon_y)\log_2 y \leq k \leq (\log y)^{1/2-\epsilon}$，其中参数 $\epsilon_y < 1.6$ 为任意正数，且依赖于 y：事实上，我们可以证明，在 k 的这一范围内，

$$\sum_{\substack{P^+(A)\leq y\\ \Omega(A)=k}} \frac{1}{A} = \eta_o(2)\frac{\log^2 y}{2^k}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\epsilon_y\sqrt{\log_2 y}}\exp\left(-\frac{\epsilon_y^2}{5}\log_2 y\right)\right)\right\},$$

其中的 $\epsilon_y^2/5$ 可以替换为 $\epsilon_y^2/4$，如果 $\epsilon_y \ll (\log_2 y)^{-1/3}$ 随着 $y \to \infty$ 趋于

为了证明这一点，我们将上述论证进行到式 (22)，并将 ϵ 替换为 ϵ_y。为了估计式 (22) 中最后一个积分的相应类似项，我们注意到，由于$\eta(z)$ 在 $z = 2$ 处有一个简单极点，因此在圆周$|z| = 2+\epsilon_y$上有 $\eta(z) \ll 1/|z-2| \ll 1/||z|-2| = 1/\epsilon_y$。上述计算现在表明，该积分为

$$\ll \frac{\log^2 y}{2^k}\cdot\frac{\exp(-\tau(\epsilon_y)\log_2 y)}{\epsilon_y\sqrt{\log_2 y}} \ll \frac{\log^2 y}{2^k}\frac{1}{\epsilon_y\sqrt{\log_2 y}}\exp\left(-\frac{\epsilon_y^2}{5}\log_2 y\right),$$

若 $\epsilon_y \in (0, 1.6)$。如果 $\epsilon_y \ll (\log_2 y)^{-1/3}$as $y \to \infty$，那么我们可以注意到，$\tau(\epsilon_y) = (2+\epsilon_y)\log(1+\epsilon_y/2) - \epsilon_y = \epsilon_y^2/4 + O(\epsilon_y^3) = \epsilon_y^2/4 + O(1/\log_2 y)$，从而可以在上述显示式的最后一个界中用 $\epsilon_y^2/4$ 替换 $\epsilon_y^2/5$。 □

6. Proof of Theorem 3.1

我们始终假设 $\beta < 1-\epsilon$。首先令 $K := 1.02/\log 2 \approx 1.4715$，并注意到根据引理 4.1 的第二个断言，能被 p 整除且具有超过 $2K\log_2 x$ 个素因子的 $n \leq x$ 的数量为 $\ll x/p(\log x)^{1.04}$，这对于我们的目的而言可以忽略。因此，剩下的工作就是证明，对于具有 $\Omega(n) \equiv 1$ (模 2)、$\Omega(n) \leq 2K\log_2 x$ 且 $p_{(\Omega(n)+1)/2}(n) = p$的正整数 $n \leq x$ 的数量 $N_p(x)$，关于 $\overline{M}_p(x)$ 所声称的渐近公式确实成立。

任意正整数 $n > 1$ 计入 $N_p(x)$ 都可以唯一地写成如下形式 $n = ApB$其中存在某些正整数 $A \leq x/p$和 $B \leq x/Ap$满足 $P^+(A) \leq p \leq P^-(B)$，并且满足14

$\Omega(A) = \Omega(B) = k$，其中 $\Omega(n) = 2k+1 \geq 1$。因此，

$$N_p(x) = 1 + \sum_{k \leq K \log_2 x} \sum_{\substack{A \leq x/p \\ P^+(A) \leq p \\ \Omega(A)=k}} \sum_{\substack{B \leq x/Ap \\ P^-(B) \geq p \\ \Omega(B)=k}} 1 = \sum_{0 \leq k \leq K \log_2 x} \sum_{\substack{A \leq x/p \\ P^+(A) \leq p \\ \Omega(A)=k}} \Phi_k\left(\frac{x}{Ap}, p\right). \tag{23}$$

我们首先考虑 $p > \exp((\log_2 x)^3)$ 的情形，或等价地，$\beta > 3\log_3 x/\log_2 x$。由于 $Ap^3 \leq p^{k+3} \leq \exp(3K \log_2 x (\log x)^{1-\epsilon}) < x^{1/2}$，我们有 $p \leq \sqrt{x/Ap}$，由定理 4.3 得

$$N_p(x) = \sum_{k \leq K \log_2 x} \sum_{\substack{A \leq x/p \\ P^+(A) \leq p \\ \Omega(A)=k}} \frac{x/Ap}{\log(x/Ap)} \frac{e^{-\gamma \xi_A} (\log u_A)^{k-1}}{\Gamma(1+\xi_A)(k-1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log u_A}}\right)\right)$$

其中 $u_A := \frac{\log(x/Ap)}{\log p}$ 且 $\xi_A := \frac{k}{\log u_A} - \gamma$。现在，由于 $\log(Ap) \leq (k+1)\log p \ll \log_2 x \log p$，我们有 $\log\left(\frac{x}{Ap}\right) = \log x \left(1 + O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right)$ $\log p$。因此，回顾 $u = \frac{\log x}{\log p}$，可得

$$u_A = u\left(1 + O\left(\frac{\log_2 x \log p}{\log x}\right)\right) \implies (\log u_A)^{k-1} = (\log u)^{k-1}\left(1 + O\left(\frac{\log_2 x \log p}{\log x}\right)\right),$$

其中，上述蕴含关系利用了 $\log u = (1-\beta)\log_2 x > \epsilon \log_2 x$ 这一事实。同样，$\xi_A = \xi\left(1 + O\left(\frac{\log p}{x}\right)\right)$ $\log p$ 其中 $\xi = \frac{k}{\log u} - \gamma$，从而 $e^{-\gamma \xi_A} = e^{-\gamma\xi}\left(1 + O\left(\frac{\log p}{x}\right)\right)$ $\log p$，根据拉格朗日中值定理，

$$\Gamma(1+\xi_A) = \Gamma(1+\xi) + O\left(\frac{\log p}{\log x}\right) = \Gamma(1+\xi)\left(1 + O\left(\frac{\log p}{\log x}\right)\right).$$

综合各项估计，我们现在得到

$$N_p(x) = \frac{x}{p \log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right) \sum_{k \leq K \log_2 x} \frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{\substack{P^+(A) \leq p \\ \Omega(A)=k}} \frac{1}{A}, \tag{24}$$

这里回顾一下，对于任意 $k \leq K \log_2 x$，当 x 充分大时都有 $p^{k+1} \leq x$，这意味着上述内层求和中计入的任何 A 都自动满足 $\leq x/p$。

现在我们写作 $N_p(x) = N_{p,\ 1}(x) + N_{p,\ 2}(x)$，其中 $N_{p,\ 1}(x)$ 的定义是将 (24) 中的外层求和限制在满足 $k \leq (2-\delta)\log_2 p = (2-\delta)\beta \log_2 x$ 的项上，其中 $\delta \in (0, 1)$ 取充分小，使其仅依赖于 ϵ（下文所有论述对一切 $\delta \ll_\epsilon 1$ 均成立）。

$N_{p,\ 1}(x)$ 的估计：为估计 $N_{p,\ 1}(x)$，我们调用定理 5.1 来估计 A 上的内层求和。这表明 $N_{p,\ 1}(x)$ 为

$$\frac{x}{p \log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} + \frac{1}{\log_2 p}\right)\right) \sum_{k \leq (2-\delta)\log_2 p} \eta\left(\frac{k}{\log_2 p}\right) \frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(\log_2 p)^k}{k!}$$

$$= \frac{x}{p \log x \log u}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} + \frac{1}{\log_2 p}\right)\right) \sum_{k \leq (2-\delta)\log_2 p} \eta\left(\frac{k}{\log_2 p}\right) \frac{k e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \binom{2k}{k} \frac{w^{2k}}{(2k)!}$$

其中我们定义了

$$w := \sqrt{\log u \log_2 p} = \sqrt{\beta(1-\beta)}\log_2 x,$$

$\log u$ 和 $\log_2 p$ 的几何平均数。我们将发现，上述总和中最重要的 k 值是满足 $k \approx w$ 的那些值。

由斯特林估计可知，$\binom{2k}{k} = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$；因此

$$N_{p,1}(x) = \frac{x}{\pi^{1/2} p \log x \log u}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} + \frac{1}{\log_2 p}\right)\right) \sum_{k \le (2-\delta)\log_2 p} \eta\left(\frac{k}{\log_2 p}\right) \frac{k^{1/2} e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{(2w)^{2k}}{(2k)!}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right). \quad (25)$$

现在对 $W = 2w$ 和 $E = 6\sqrt{w}\log w =: 2w'$ 应用引理 4.6，我们看到 that

$$\begin{aligned} \sum_{k \le \min\{w-w', (2-\delta)\log_2 p\}} \eta\left(\frac{k}{\log_2 p}\right) \frac{k^{1/2} e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{(2w)^{2k}}{(2k)!} &\ll w^{1/2} \sum_{m \le 2w - 2w'} \frac{(2w)^m}{m!} \\ &\ll \frac{e^{2w}}{w^8 \sqrt{\log w}} \ll \frac{(\log x)^{2\sqrt{\beta(1-\beta)}}}{(\log_2 x)^4 (\log_3 x)^4} \end{aligned} \quad (26)$$

其中，我们注意到 $w = \sqrt{\beta(1-\beta)}\log_2 x \gg \beta^{1/2}\log_2 x \gg \sqrt{\log_2 x \log_3 x}$，因为 $3\log_3 x/\log_2 x < \beta < 1 - \epsilon$。这表明，从 $k \le \min\{w - w', (2-\delta)\log_2 p\}$ 对 (25) 式右边的总贡献为

$$\ll \frac{1}{(\log_2 x \log_3 x)^4} \frac{x}{p(\log x)^{1 - 2\sqrt{\beta(1-\beta)}} \log_2 x}$$

与两种情况 $\beta < 1/5 - \epsilon$ or $\beta \in (1/5 + \epsilon, 1 - \epsilon)$ 下的误差项相比，这是可忽略的。（对于 $\beta < 1/5 - \epsilon$，我们利用了一个简单的事实：对于所有 $\beta \in (0, 1)$，$1 - 2\sqrt{\beta(1-\beta)} > 1/2 - 3\beta/2$。）特别地，对于 $\beta < 1/5 - \epsilon$，我们有 $(2-\delta)\log_2 p < w - w'$，因此上述论证表明，计数 $N_{p,1}(x)$ 本身已被所声称的误差项吸收。

现在，若 $\beta \in (1/5 + \epsilon, 1 - \epsilon)$，则通过再次应用引理 4.6，$k \in (w + w', (2-\delta)\log_2 p]$ 对 (25) 右边的总贡献为，

$$\begin{aligned} &\ll \frac{x}{p \log x \log u} \sum_{w + w' < k \le (2-\delta)\log_2 p} \eta\left(\frac{k}{\log_2 p}\right) \frac{k^{1/2} e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{(2w)^{2k}}{(2k)!} \\ &\ll \frac{x\sqrt{\log_2 p}}{p \log x \log u} \sum_{m > 2w + 2w'} \frac{(2w)^m}{m!} \ll \frac{1}{(\log_2 x)^9 \sqrt{\log_3 x}} \frac{x}{p(\log x)^{1 - 2\sqrt{\beta(1-\beta)}} \sqrt{\log_2 x}} \end{aligned}$$

这与误差项相比仍然可以忽略不计。（这里我们注意到 $w = \sqrt{\beta(1-\beta)}\log_2 x \asymp \log_2 x$。）

在 β 的相同范围内，我们发现区间 $[w-w', w+w']$ 对 (25) 式中的求和贡献最大。对于该范围内的 k，我们有

$$k = w + O\left(\sqrt{w\log w}\right) = w\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right),$$

因此，在整个这一范围内，我们得到 $\xi = \log u\left(1 - \gamma/\log u\right) = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} + O\left(\sqrt{\log_3 x/\log_2 x}\right)$ 且 $k\log_2 p = \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} + O\left(\sqrt{\log_3 x/\log_2 x}\right)$。由此，通过常规计算可知，对于所有这样的 k，我们可以写成

$$\eta\left(\frac{k}{\log_2 p}\right)\frac{k^{1/2}e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} = \frac{\eta\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}\right)\exp\left(-\gamma\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)\sqrt{w}}{\Gamma\left(1+\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right).$$

因此，对于 $\beta \in (1/5+\epsilon, 1-\epsilon)$，$k \in [w-w', w+w']$ 对 $N_{p,1}(x)$ 的贡献为

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{\sqrt{\pi}p\log x\log u}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right)\sum_{w-w'\le k\le w+w'}\eta\left(\frac{k}{\log_2 p}\right)\frac{k^{1/2}e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)}\frac{(2w)^{2k}}{(2k)!}\\
&\quad= \frac{\eta\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}\right)e^{-\gamma\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)}\frac{x\sqrt{w}}{p\log x\log u}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right)\sum_{w-w'\le k\le w+w'}\frac{(2w)^{2k}}{(2k)!}\\
&\quad= \frac{\overline{C}_\beta x}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta(1-\beta)}}\sqrt{\log_2 x}}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right)
\end{aligned}$$

其中，我们利用引理 4.6 将求和扩展到了 k 的所有取值，并注意到 $\sum_{k=0}^{\infty}(2w)^{2k}/(2k)! = \frac{1}{2}(e^{2w} + e^{-2w}) = \frac{e^{2w}}{2} + O(e^{-2w})$。因此，我们已经证明了

$$N_{p,1}(x) = \begin{cases}\dfrac{\overline{C}_\beta x}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta(1-\beta)}}\sqrt{\log_2 x}}\left(1 + O\left(\sqrt{\dfrac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right) & \text{if } \frac{1}{5}+\epsilon < \beta < 1-\epsilon,\\[2ex] O\left(\dfrac{x}{p(\log x)^{1/2-3\beta/2}(\log_2 x\log_3 x)^4}\right) & \text{if } \frac{3\log_3 x}{\log_2 x} < \beta < \frac{1}{5}-\epsilon.\end{cases} \tag{27}$$

$N_{p,\,2}(x)$ 的估计：我们回顾一下

$$N_{p,2}(x) = \frac{x}{p\log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right)\sum_{(2-\delta)\log_2 p < k \le K\log_2 x}\frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)}\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{\substack{P^+(A)\le p\\ \Omega(A)=k}}\frac{1}{A}.$$

对于 $\beta \in (1/5+\epsilon, 1-\epsilon)$，我们运用引理 5.2 得到

$$N_{p,2}(x) \ll \frac{x}{p\log x}\sum_{(2-\delta)\log_2 p < k \le K\log_2 x}\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{k}{2^k}\log^2 p \ll \frac{x\log_2 x\log^2 p}{p\log x}\sum_{k>(2-\delta)\log_2 p}\frac{v^k}{k!}$$

其中 $v := \frac{1}{2}\log u \asymp \log_2 x$。定义 θ，使得 $v(1+\theta) = (2-\delta)\log_2 p$，我们看到$\theta = 2(2-\delta)\frac{}{1/\beta-1} - 1 \asymp 1$。应用（9）可得

$$\begin{aligned} N_{p,2}(x) &\ll \frac{x\log_2 x\log^2 p}{p\log x}\cdot\frac{\exp\left(v(R(\theta)+1)\right)}{\sqrt{v}} \\ &\ll \frac{x\sqrt{\log_2 x}(\log x)^{2\beta}\exp\left((\frac{1-\beta}{2})(\frac{2(2-\delta)}{1/\beta-1})(1-\log\left(\frac{2(2-\delta)}{1/\beta-1}\right))\log_2 x\right)}{p\log x} \\ &= \frac{x\sqrt{\log_2 x}}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta(1-\beta)}+F(\beta,\delta)}}, \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $F(\beta,\delta) := 2\sqrt{\beta(1-\beta)} - (4-\delta)\beta + (2-\delta)\beta\log\left(\frac{2\beta(2-\delta)}{1-\beta}\right)$。

我们断言，对任意 $\delta \ll_\epsilon 1$, $G(\delta) := \inf_{\beta\in[1/5+\epsilon,1-\epsilon]} F(\beta,\delta) > 0$。事实上，由于 F 在 $[1/5+\epsilon,1-\epsilon]\times[0,1]$上连续，因此 G 在 $[0,1]$上也连续；所以只需证明$G(0) = \inf_{\beta\in[1/5+\epsilon,1-\epsilon]} F(\beta,0) > 0$。而这又直接来自以下观察：$F\left(\frac{1}{5},0\right) = 0$并且

$$F(\beta,0) = 2\sqrt{\beta(1-\beta)} - 4\beta + 2\beta\log\left(\frac{4\beta}{1-\beta}\right)$$

对于 $\beta > \frac{1}{5}$，严格递增。这证明了我们的断言。因此，对于任意固定的 $\delta \ll_\epsilon 1$ and$c = c(\epsilon,\delta) \in (0, G(\delta)/2)$，我们看到对于所有 $\beta\in(1/5+\epsilon,1-\epsilon)$, $F(\beta,\delta) > 2c$，从而得到

$$N_{p,2}(x) \ll \frac{x}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta(1-\beta)}+c}}$$

对于所有这样的 β。

现在假设 $3\log_3 x/\log_2 x < \beta < 1/5-\epsilon$，并令 $v' = 2\sqrt{v\log v}$。我们仿照（26）来估计 $k\in((2-\delta)\log_2 p, v-v']\cup[v+v', K\log_2 x]$ 在 $N_{p,2}(x)$ 中的贡献。事实上，利用（19）来估计 $1/A$ 的和，可得该贡献为

$$\begin{aligned} &\ll \frac{x\log^2 p}{p\log x}\sum_{(2-\delta)\log_2 p\le k\le v-v'}\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{k}{2^k} + \frac{x\log^2 p}{p\log x}\sum_{v+v'\le k\le K\log_2 x}\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{k}{2^k} \\ &\ll \frac{x\log_2 x\log^2 p}{p\log x}\left(\sum_{k\le v-v'}\frac{v^k}{k!} + \sum_{k\ge v+v'}\frac{v^k}{k!}\right) \ll \frac{1}{\log_2 x\sqrt{\log_3 x}}\frac{x}{p(\log x)^{1/2-3\beta/2}} \end{aligned}$$

与误差项相比可以忽略不计。最后，我们利用定理 5.3 估计范围 $(v-v', v+v')$ 对 $N_{p,2}(x)$ 的贡献。为此，我们选择 $\epsilon_0 < \frac{1}{2}$ 足够小，使得 $(2+\sqrt{5\epsilon_0})\log_2 p < v-v'$。当 x 足够大时，取 $\epsilon_0 = \epsilon^2$ 即可。因此，所求贡献为

$$\begin{aligned} &\frac{x}{p\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right)\sum_{v-v'<k<v+v'}\frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)}\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{\substack{P^+(A)\le p\\ \Omega(A)=k}}\frac{1}{A} \\ &= \frac{\eta_o(2)e^{-\frac{\gamma}{2}}}{2\Gamma(3/2)}\frac{x\log^2 p}{p\log x}\left(1+O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}+\frac{1}{(\log p)^{\epsilon_0}\sqrt{\log_2 p}}\right)\right)\sum_{v-v'<k<v+v'}\frac{v^{k-1}}{(k-1)!}, \end{aligned}$$

这里我们注意到，对于上述范围内所有的 k，都有 $\xi = 1/2 + O(\sqrt{\log_3 x/\log_2 x})$，因此 $e^{-\gamma\xi} = e^{-\gamma/2}(1 + O(\sqrt{\log_3 x/\log_2 x}))$，且 $\Gamma(1+\xi) = \Gamma(3/2)(1 + O(\sqrt{\log_3 x/\log_2 x}))$。上面最后一个公式中的常数恰为 $\overline{C}$，而关于 v 的和由引理 4.6 得出为 $e^v(1+O(1/v^2\sqrt{\log v})) = (\log x)^{\frac{1}{2}(1-\beta)}(1 + O(1/(\log_2 x)^2\sqrt{\log_3 x}))$。综合这些估计，我们现在得出

$$N_{p,2}(x) = \begin{cases} O\left(\dfrac{x}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta(1-\beta)}+c}}\right) & \text{if } \frac{1}{5}+\epsilon < \beta < 1-\epsilon, \\ \dfrac{\overline{C}x}{p(\log x)^{(1-3\beta)/2}}\left(1 + O\left(\sqrt{\dfrac{\log_3 x}{\log_2 x}} + \dfrac{(\log_2 p)^{-1/2}}{(\log p)^{\epsilon_0}}\right)\right) & \text{if } \frac{3\log_3 x}{\log_2 x} < \beta < \frac{1}{5}-\epsilon. \end{cases} \tag{29}$$

由于 $N_p(x) = N_{p,1}(x) + N_{p,2}(x)$，(27) 和 (29) 合起来便完成了定理 3.1 在 $3\log_3 x/\log_2 x < \beta < 1/5-\epsilon$ 和 $1/5+\epsilon < \beta < 1-\epsilon$ 情况下的证明。

剩下的是考虑 $\beta \le 3\log_3 x/\log_2 x$ 的情况，也就是 $p \le \exp((\log_2 x)^3)$。在这种情况下，将定理 4.4 应用于 (23) 可得[4]

$$N_p(x) = \frac{x}{p\log x}\left(1 + O\left(\frac{(\log_2 p)^2}{\log_2 x}\right)\right)\sum_{k\le K\log_2 x}\frac{g(p,\mu)}{\Gamma(1+\mu)}\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{\substack{P^+(A)\le p\\ \Omega(A)=k}}\frac{1}{A} \tag{30}$$

这里我们像之前一样注意到，$\log(x/Ap) = \log x(1+O(\log_2 x\log p/\log x))$。仿照 $3\log_3 x/\log_2 x < \beta < 1/5-\epsilon$ 的情形进行推导，可知 $k \le \frac{1}{2}\log_2 x - 3\sqrt{\log_2 x\log_3 x}$ 和 $k \ge \frac{1}{2}\log_2 x + 3\sqrt{\log_2 x\log_3 x}$ 对 (30) 的贡献为 $\ll x/p(\log x)^{1/2-2\beta}(\log_2 x)^8$；由于 $(\log x)^{\beta/2} < (\log x)^{3\log_3 x/2\log^2 x} = (\log_2 x)^{3/2} \ll (\log_2 x)^4$，该项可被误差项吸收。最后，根据定理 5.3，剩余的 k 的贡献等于

$$\begin{aligned} &\frac{\eta_o(2)}{2}\frac{x\log^2 p}{p\log x}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}} + \frac{1}{(\log p)^{\epsilon_0}\sqrt{\log_2 p}}\right)\right) \\ &\qquad\times \sum_{\frac{1}{2}\log_2 x - 3\sqrt{\log_2 x\log_3 x} < k < \frac{1}{2}\log_2 x + 3\sqrt{\log_2 x\log_3 x}}\frac{g(p,\mu)}{\Gamma(1+\mu)}\frac{(\frac{1}{2}\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{\eta_o(2)g(p,1/2)}{2\Gamma(3/2)}\frac{x}{p(\log x)^{1/2-2\beta}}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}} + \frac{1}{(\log p)^{\epsilon_0}\sqrt{\log_2 p}}\right)\right) \end{aligned}$$

最后应用引理 4.6，并注意到 $\mu = 1/2 + O(\sqrt{\log_3 x/\log_2 x})$。根据梅滕斯定理，我们有 $g(p,1/2) = e^{-\gamma/2}(\log p)^{-1/2}(1 + O(1/\log p))$，从而完成了定理 3.1 的证明。

6.1. 当 $\Omega(n)$ 为偶数时的中间素因子。回想一下，对于素因子个数为偶数的那些整数，我们将两个可能选项中较小的一个定义为中间素因子。因此，为了修改定理 3.1 的证明以处理 $\underline{M}_p(x)$，我们注意到，若 $\Omega(n) = 2k$，且 $P_{(\frac{1}{2})}(n) = p$，那么我们可以写成 $n = ApB$，其中 $p = p_k(n)$，

[4]这里需要注意，我们选择的 K 小于 2。

$\Omega(A) = k-1$，$\Omega(B) = k$，且 $P^+(A) \le p \le P^-(B)$。因此，定理 3.1 中的相同论证仍然适用，只需将所有条件 $\Omega(A) = k$ 改为 $\Omega(A) = k-1$。这一改动对论证唯一值得注意的影响是，在 $\beta > 3\log_3 x/\log_2 x$ 的情况下，$N_{p,1}(x)$ 的表达式中有 $(\log_2 p)^{k-1}/(k-1)!$，而非 $(\log_2 p)^k/k!$；因此，通过变量替换 $k \mapsto k-1$，我们得到以下与 (25) 类似的结果：

$$N_{p,1}(x) = \frac{x}{\pi^{1/2} p \log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} + \frac{1}{\log_2 p}\right)\right) \times \sum_{k \le (2-\delta)\log_2 p - 1} \eta\left(\frac{k}{\log_2 p}\right) \frac{k^{-1/2} e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{(2w)^{2k}}{(2k)!}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

这里，$k \le \min\{w-w', (2-\delta)\log_2 p - 1\}$ 和 $k \in (w+w', (2-\delta)\log_2 p - 1]$的贡献可以像之前一样进行界定；从平凡上界 $k^{-1/2} \ll 1$出发，我们得到这一贡献为[5]

$$\ll \frac{1}{(\log_2 x)^4 (\log_3 x)^5} \frac{x}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta(1-\beta)}}\sqrt{\log_2 x}}.$$

其余所有和均按照定理 3.1 的证明完全相同的方式处理，最终结果是：在 $\Omega(A) = k-1$ 处使用 $\Omega(A) = k$，会使我们的常数 $\overline{C}_\beta$ 和 $\overline{C}$（它们是针对精确的中间素因子得出的）在情形 $\beta \in (1/5+\epsilon, 1-\epsilon)$ 和 $\beta \in (0, 1/5-\epsilon)$ 下，分别乘以 $\sqrt{(1-\beta)/\beta}$ 和 2。

7. The α-positioned prime factor

现在我们将定理 2.1 推广，给出更一般的定理 2.2 的证明。证明与定理 3.1 的证明非常相似，因此在许多地方，我们只描述更一般情形所需的额外思路，并仅详述与定理 3.1 论证的不同之处。

定理 2.2 的证明。与前面一样，我们始终假设 $\beta < 1-\epsilon$。这次一开始，我们区分 $\beta > 3\log_3 x/\log_2 x$ 与 $\beta \le 3\log_3 x/\log_2 x$ 两种情形，先考虑前者。令 $K_0 := 2.04/\log 2$，引理 4.1 表明，满足 $p|n$ 且 $\Omega(n) \le k_\alpha := \max\{2/\alpha, 2/(1-\alpha)\}$ 或 $\Omega(n) > K_0 \log_2 x$ 的 $n \le x$ 对计数的贡献可以忽略；因此，只需证明关于满足 $\Omega(n) \in (k_\alpha, K_0\log_2 x]$ 且 $P(\alpha)(n) = p$ 的 $n \le x$ 的数量 $N_p^{(\alpha)}(x)$ 的所述公式。我们将每个满足 $\Omega(n) = k \in (k_\alpha, K_0\log_2 x]$ 的此类 n 唯一地分解为 $n = ApB$，其中 $P^+(A) \le p \le P^-(B)$，$\Omega(A) = \lceil \alpha k \rceil - 1$，且 $\Omega(B) = k - \lceil \alpha k \rceil = \lfloor (1-\alpha)k \rfloor$，并利用定理 4.3 估计给定$A$时 B 的数量。由此得到

$$N_p^{(\alpha)}(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right) \frac{x}{p\log x} \sum_{k_\alpha < k \le K_0 \log_2 x} \frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{(\log u)^{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor - 1}}{(\lfloor (1-\alpha)k \rfloor - 1)!} \sum_{\substack{P^+(A) \le p \\ \Omega(A) = \lceil \alpha k \rceil - 1}} \frac{1}{A} \tag{31}$$

[5]为了在偶数 $\Omega(n)$ 的情形下获得正确的 $\log_2 x$ 幂次节省，重要的是将 k 上的求和截断在 $[w - a\sqrt{w}\log w$ 与 $w + a\sqrt{w}\log w]$ 之间，其中 $a \ge 2$ 为某个固定值。定义 w' 时采用的选择 $a := 3$ 虽然方便，但取更大的 a 也同样可行。

其中 $\xi = \lfloor(1-\alpha)k\rfloor/(\log u - \gamma)$。与前面一样，我们写作 $N_p^{(\alpha)}(x) = N_{p\,1}^{(\alpha)},(x) + N_{(\alpha)\ p,\ 2}(x)$，其中$N_{(\alpha)\ p,\ 1}(x)$ 定义为将上述求和限制在某个 $\delta > 0$ 所对应的 $k_\alpha < k \le \left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)\log_2 p$ 上，其中 $\delta > 0$ 将选取得足够小，具体取决于 ϵ。

对 $N_{p\,1}^{(\alpha)},(x)$ 的估计：由定理 5.1，

$$N_{p,1}^{(\alpha)}(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} + \frac{1}{\log_2 p}\right)\right)\frac{x}{p\log x\log u\log_2 p}$$
$$\times \sum_{k_\alpha < k \le \left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)\log_2 p} \eta\left(\frac{\lceil\alpha k\rceil - 1}{\log_2 p}\right)\frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)}\lceil\alpha k\rceil\lfloor(1-\alpha)k\rfloor\binom{k}{\lceil\alpha k\rceil}\frac{(\log u)^{\lfloor(1-\alpha)k\rfloor}(\log_2 p)^{\lceil\alpha k\rceil}}{k!}. \tag{32}$$

现在，由于 $k \ge k_\alpha$，我们看到 $0 \le \frac{\lceil\alpha k\rceil - \alpha k}{\alpha k} \le \frac{1}{2}$。因此，

$$\lceil\alpha k\rceil\log\lceil\alpha k\rceil - \lceil\alpha k\rceil\log(\alpha k)$$
$$= \alpha k\left(1 + \frac{\lceil\alpha k\rceil - \alpha k}{\alpha k}\right)\log\left(1 + \frac{\lceil\alpha k\rceil - \alpha k}{\alpha k}\right) = \lceil\alpha k\rceil - \alpha k + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

同理，

$$\lfloor(1-\alpha)k\rfloor\log\lfloor(1-\alpha)k\rfloor - \lfloor(1-\alpha)k\rfloor\log((1-\alpha)k) = \lfloor(1-\alpha)k\rfloor - (1-\alpha)k + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

因此，根据斯特林估计，

$$\binom{k}{\lceil\alpha k\rceil} = \frac{k^k\left(2\pi\alpha(1-\alpha)k\right)^{-1/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)}{\lceil\alpha k\rceil^{\lceil\alpha k\rceil}\lfloor(1-\alpha)k\rfloor^{\lfloor(1-\alpha)k\rfloor}} = \frac{\left(2\pi\alpha(1-\alpha)k\right)^{-1/2}}{\alpha^{\lceil\alpha k\rceil}(1-\alpha)^{\lfloor(1-\alpha)k\rfloor}}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

因此，由 (32) 得

$$N_{p,1}^{(\alpha)}(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} + \frac{1}{\log_2 p}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)}}\frac{x}{p\log x\log u\log_2 p}$$
$$\sum_{k_\alpha < k \le \left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)\log_2 p} \eta\left(\frac{\lceil\alpha k\rceil - 1}{\log_2 p}\right)\frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)}\frac{\lceil\alpha k\rceil\lfloor(1-\alpha)k\rfloor}{k^{1/2}}\frac{w^k}{k!}\chi^{\{(1-\alpha)k\}}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \tag{33}$$

其中设 $w := Q_{\alpha,\beta}\log_2 x$，且 $Q_{\alpha,\beta} := \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$。注意 $w \gg \beta^\alpha\log_2 x \gg \log_2 p$。

令 $E_w := 6\sqrt{w}\log w$，由引理 4.6 可知，项 $k \le \min\left\{w - E_w, \left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)\log_2 p\right\}$ 对式 (33) 的总贡献为

$$\ll \frac{x\sqrt{\log_2 p}}{p\log x\log u}\sum_{k < w - E_w}\frac{w^k}{k!} \ll \frac{x\sqrt{\log_2 p}}{p(\log x)^{1-Q_{\alpha,\beta}}\log_2 x}\frac{1}{(\log_2 p)^{18}} \tag{34}$$

与所有声称的误差项相比，这是可忽略的，因为 $1-Q_{\alpha,\beta} \geq 1-2\beta-\nu^{\alpha}(1-\beta)$ 对所有 α, $\beta \in (0,1)$ 均成立。[6] 特别地，对于 $\beta < \beta_\alpha - \epsilon$，这表明 $N_{p\,1}^{(\alpha)}(x)$ 可并入误差项。另一方面，在 $\beta \in (\beta_\alpha+\epsilon, 1-\epsilon)$ 的情形下，$k \in (w+E_w, \left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)\log_2 p]$ 的贡献由与式 (34) 相同的表达式控制，因此同样可以忽略。最后，在 β 的相同范围内，对任意 $k \in [w-E_w, w+E_w]$，都有 $k = w + O(E_w)$；因此，进行与精确中间素因子情形类似的计算可知，所有这类 k 对式 (33) 中总和的贡献为

$$\left(1+O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right)\frac{C_{\beta,\alpha}}{\rho_{\chi,\alpha}}\frac{x}{p\log x\sqrt{\log_2 x}}\sum_{w-E_w\leq k\leq w+E_w}\frac{w^k}{k!}\chi^{\{(1-\alpha)k\}}. \tag{35}$$

引理 4.7 的相应断言现在表明，在 $\beta \in (\beta_\alpha+\epsilon, 1-\epsilon)$、$N(\alpha)_p$、$1(x)$ 的情况下，$N_p^{(\alpha)}(x)$ 满足所声称的渐近公式。对于 $\beta \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ 和 $\alpha \in (\beta-\mathcal{E}, \beta+\mathcal{E})$，关于 $N(\alpha)_p(x)$ 的相同估计一致成立；在此情况下，对于所有充分大的 x，我们有 $\alpha > \epsilon/2$ 和 $\beta > \beta_\alpha + \epsilon_1/2$，其中某个 $\epsilon_1 > 0$ 仅取决于 ϵ。此外，在此情况下，我们看到 $C_{\beta,\alpha}/\rho_{\chi,\alpha} = C_{\beta,\beta}(1+O(\mathcal{E}))$，因为对于某个函数 $H(\alpha,\beta)$，其在紧集 $[\epsilon/2, 1-\epsilon/2]\times[\epsilon, 1-\epsilon]$ 上可微，$C_{\beta,\alpha} = \rho_{\chi,\alpha}H(\alpha,\beta)$。

估计 $N_{p\,2}^{(\alpha)}(x)$：为了完成 $\beta > 3\log_3 x/\log_2 x$ 的情形，还需证明 $N_{p\,2}^{(\alpha)}(x)$ 对 $\beta > \beta_\alpha+\epsilon$ 可忽略，并且当 $\beta \in (3\log_3 x/\log_2 x, \beta_\alpha-\epsilon)$ 时，它满足关于 $M_p^{(\alpha)}(x)$ 的所述渐近公式。事实上，对于 $\beta > \beta_\alpha+\epsilon$，由 (19) 可知

$$\begin{aligned}
N_{p,2}^{(\alpha)}(x) &\ll \frac{x\log^2 p}{p\log x}\sum_{\left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)\log_2 p<k\leq K_0\log_2 x}\frac{k}{2^{\alpha k}}\cdot\frac{(\log u)^{\lfloor(1-\alpha)k\rfloor-1}}{(\lfloor(1-\alpha)k\rfloor-1)!}\\
&\ll \frac{x\log_2 x}{p(\log x)^{1-2\beta}}\sum_{\left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)\log_2 p<k\leq K_0\log_2 x}\frac{1}{2^{\alpha k}}\cdot\frac{(\log u)^{\lfloor(1-\alpha)k\rfloor+1}}{(\lfloor(1-\alpha)k\rfloor+1)!}\\
&\ll \frac{x\log_2 x}{p(\log x)^{1-2\beta}}\sum_{m>\left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)(1-\alpha)\log_2 p}\frac{v^m}{m!}
\end{aligned}$$

其中我们定义 $v := \nu^{\alpha}\log u = \nu^{\alpha}(1-\beta)\log_2 x$，并在上面的最后一个等式中令 $m = \lfloor(1-\alpha)k\rfloor+1$。（这里重要的是，有 $\leq 1/(1-\alpha) \ll 1$ 个值 k 会产生一个值 m。）考虑满足 $(1+\theta)v := \left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)(1-\alpha)\log_2 p$ 的 $\theta \in (0,1)$，应用（9）可知（通过与（28）类似的计算）$N_{p\,2}^{(\alpha)}(x) \ll x\sqrt{\log_2 x}/p(\log x)^{1-Q_{\alpha,\beta}+F(\alpha,\beta,\delta)}$，其中

$$\begin{aligned}
F(\alpha,\beta,\delta) := &\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}-2\beta\\
&-(2-\delta)\beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left\{1-\log\left(\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\frac{2^{1/(1-\alpha)}(1/\alpha-1)}{1/\beta-1}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

[6] 这可由以下观察得出：对于 $\alpha \in (0,1)$ 的每个取值，函数 $H_\alpha(\beta) := 2\beta + \nu^{\alpha}(1-\beta) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \geq 0$ 对所有 $\beta \in (0,1)$ 都成立。事实上，对于所有这样的 β，$\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial\beta^2} > 0$，因此 $H_\alpha(\beta)$ 在 $(0,1)$ 上是凸函数，并且在 $(0,1)$ 内有唯一的最小值。由于 $\frac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}\big|_{\beta=\beta_\alpha} = 0 = H_\alpha(\beta_\alpha)$，可得 $H_\alpha(\beta) \geq H_\alpha(\beta_\alpha) = 0$。

因此，只需证明：对于任意固定的 $\epsilon_1 > 0$，存在 $\epsilon_2 > 0$（至多依赖于 ϵ 和 ϵ_1），使得对所有 $\delta \ll_{\epsilon,\ \epsilon_1} 1$，都有 $G(\delta) := \inf_{(\alpha,\ \beta)\in[\epsilon_1,1-\epsilon_1]\times[\beta_\alpha+\epsilon,1-\epsilon]} F(\alpha,\beta,\delta) > 2\epsilon_2$。[7] 但是，由于 F 在 $[\epsilon_1,1-\epsilon_1]\times[\beta_\alpha+\epsilon,1-\epsilon]\times[0,1]$ 上连续，G 也连续，因此只需证明 $G(0) > 0$，或者（由紧致性）证明对每个 $(\alpha,\beta) \in [\epsilon_1,1-\epsilon_1]\times[\beta_\alpha+\epsilon,1-\epsilon]$，都有 $F(\alpha,\beta,0) > 0$。这又可由分析 F 关于 β 在区间 $(\beta_\alpha, 1)$ 上的前两个偏导数得出。[8]

考虑 $\beta \in (3\log_3 x/\log_2 x, \beta_\alpha - \epsilon)$ 的情形，对先前计算的直接调整（调用引理 5.2 和 4.6）表明，令 $E_v := 6\sqrt{v}\log v$，$k \in \left(\left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)\log_2 p, \frac{v-E_v}{1-\alpha}\right) \cup \left(\frac{v+E_v}{1-\alpha}, K_0\log_2 x\right]$ 对 $N(\alpha)_{p,2}(x)$ 的贡献为 $\ll x/p(\log x)^{1-2\beta-\nu^\alpha}(\log_2 x)^{17}$，与所声称的误差相比可以忽略不计（此处我们注意到 $v \asymp \log_2 x$）。另一方面，由于 $\beta < \beta_\alpha - \epsilon$，对于任意 $\epsilon_1 \ll_\epsilon 1$，我们有 $\frac{v-E_v}{1-\alpha} > \left(\frac{2+\epsilon_1}{\alpha}\right)\log_2 p$。因此，(20) 表明，来自 $k \in \left[\frac{v-E_v}{1-\alpha}, \frac{v+E_v}{1-\alpha}\right]$ 的对 $N(\alpha)_{p,2}(x)$ 的贡献是

$$\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}} + \frac{(\log_2 p)^{-1/2}}{(\log p)^{\epsilon^2}}\right)\right)\frac{2\eta_o(2)\nu^\alpha\exp(-\gamma\nu^\alpha)}{\Gamma(1+\nu^\alpha)}\frac{x}{p(\log x)^{1-2\beta}}\cdot S(v), \tag{36}$$

其中的和 $S(v) := \sum_{\frac{v-E_v}{1-\alpha}\le k\le\frac{v+E_v}{1-\alpha}} \frac{v^{\lfloor(1-\alpha)k\rfloor}}{\lfloor 1-\alpha\ k\rfloor!}\nu^{\{(1-\alpha)k\}}$ 由引理 4.7 中相应的结论估计。至此，定理关于 $\beta > 3\log_3 x/\log_2 x$ 的证明完成。

剩下需要考虑的是 $\beta \le 3\log_3 x/\log_2 x$ 的情形。这次我们先固定满足 $(2-\epsilon_1)/(1-\alpha) > 2+\epsilon_2$,[9] 的 $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, 1/2)$，并去除那些被 p 整除且 $\Omega(n) > K_\alpha\log_2 x$、其中 $K_\alpha := (2-\epsilon_1)/(1-\alpha)$ 的 $n \le x$；这样的 n 数量为 $\ll x/p(\log x)^{K_\alpha}\log_{2-1}$，与针对 $\beta < \beta_\alpha - \epsilon$ 所声称的误差项相比可以忽略（此处，约束 $\epsilon_1 < 1/2$ 确保对于某个 $\epsilon' \ll_\epsilon 1$，有 $K_\alpha\log 2 - 1 - (1-2\beta-2\nu(1-\beta)) > \epsilon'$）。因此，只需证明满足 $\Omega(n) \le K_\alpha\log_2 x$ 且 $P^{(\alpha)}(n) = p$ 的 $n \le x$ 的数量 $\widetilde{N}_p^{(\alpha)}(x)$ 具有所声称的渐近式。将每个这样的 n 写成 ApB，与之前完全相同，定理 4.4 允许我们估计给定 A 时 B 的数量（为了应用该定理，关键在于 $(1-\alpha)K_\alpha$ 小于 2 且与 2 保持一定距离）。我们推得

$$\widetilde{N}_p^{(\alpha)}(x) = \left(1 + O\left(\frac{(\log_2 p)^2}{\log_2 x}\right)\right)\frac{x}{p\log x}\sum_{k\le K_\alpha\log_2 x}\frac{g(p,\mu)}{\Gamma(1+\mu)}\frac{(\log_2 x)^{\lfloor(1-\alpha)k\rfloor-1}}{(\lfloor(1-\alpha)k\rfloor-1)!}\sum_{\substack{P^+(A)\le p\\ \Omega(A)=\lceil\alpha k\rceil-1}}\frac{1}{A} \tag{37}$$

其中 $\mu := (\lfloor(1-\alpha)k\rfloor - 1)/\log_2 x$。令 $v' := \nu^\alpha\log_2 x \asymp \log_2 x$，并令 $E' := 6\sqrt{v'}\log v'$，类似于前面的计算表明，$k < (v'-E')/(1-\alpha)$ 和 $k > (v'+E')/(1-\alpha)$ 对 (37) 中的和贡献 $\ll x/p(\log x)^{1-2\beta-\nu^\alpha}(\log_2 x)^{17}$，由于 $(\log x)^{\nu^\alpha\beta} < (\log x)^3\log_3 x/\log^2 x = (\log_2 x)^3 \ll (\log_2 x)^5$，该项可并入误差项。最后，由于 $\beta = o(1)$，对所有 $k \in \left[\frac{v'-E'}{1-\alpha}, \frac{v'+E'}{1-\alpha}\right]$，都有 $\alpha k > (2+\epsilon_1)\log_2 p$。应用定理

[7] 注意，这涵盖了定理 2.2 中考虑的固定和变化的 α 两种情形。[8] 事实上，容易看出，对于每个 $\alpha \in (0,1)$ 中的值，我们对所有 $\beta \in (\beta_\alpha, 1)$ 都有 $\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2} > 0$。因此，$\frac{\partial F}{\partial\beta}$ 是 β 在 $(\beta_\alpha, 1)$ 上的递增函数。由于 $\frac{\partial F}{\partial\beta}\big|_{\beta=\beta_\alpha} = 0$，可知 $F(\alpha,\beta,0)$ 本身是 β 在 $(\beta_\alpha, 1)$ 上的递增函数。特别地，我们有 $F(\alpha,\beta,0) > F(\alpha,\beta_\alpha,0) = 0$，如所求。[9] 显然，只有在 α 本身固定时，这样的 $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ 才能仅依赖于 α 来确定；或者在 $\alpha \in (\epsilon/2, 1-\epsilon/2)$ 时，仅依赖于 ϵ 来确定。

5.3 可知，这类 k 对和 (37) 的贡献为

$$= \left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}} + \frac{(\log_2 p)^{-1/2}}{(\log p)^{\epsilon^2}}\right)\right) \frac{2\eta_o(2)\nu^\alpha g(p,\nu^\alpha)}{\Gamma(1+\nu^\alpha)} \frac{x}{p(\log x)^{1-2\beta}} \cdot S(v'),$$

其中，总和 $S(v') := \sum_{\frac{v'-E'}{1-\alpha} \le k \le \frac{v'+E'}{1-\alpha}} \frac{v'^{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor}}{\lfloor 1-\alpha\ k \rfloor\ ()!} \nu^{\{(1-\alpha)k\}}$ 由引理 4.7 估计。此

由此得出定理 2.2 的证明，只需注意到 $g(p,\nu^\alpha) = \exp(-\gamma\nu^\alpha)\,(\log p)^{\nu^\alpha} \underline{\left(1 + O\left(\ {}^{1}{}_{\log p}\right)\right)}$.□

8. Proof of Theorem 2.3

我们声称以下界，这些界合在一起即可推出该定理的断言。

(i) 固定 $\delta \in (0,\epsilon)$。对于 $\beta \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ 和 $\alpha \in (0, \epsilon-\delta)$，我们一致地有 $\cup (1-\epsilon+\delta, 1)$,

$$M_p^{(\alpha)}(x) \ll \frac{x}{p(\log x)^c} \tag{38}$$

对于某个常数 $c = c(\epsilon,\delta) > 0$.[10]

(ii) 固定满足以下条件的 $\delta, \delta_0 > 0$

$$0 < \delta \le \frac{1}{2}\left(1 - \beta_{\epsilon/8} - \frac{1}{2-2\nu_{\epsilon/8}}\right) < \epsilon \text{ and } 0 < \delta_0 \le 1 - 2\nu_{\epsilon/8} - (\beta_{\epsilon/8}+\delta)(2-2\nu_{\epsilon/8}),$$

其中 $\nu_{\epsilon/8} := 2^{-\frac{1}{1-\frac{\epsilon}{8}}} = 2^{-\frac{8}{8-\epsilon}}$。那么，对于 $\alpha \in \left(\frac{\epsilon}{4}, 1-\frac{\epsilon}{4}\right)$，我们有一致成立的

$$M_p^{(\alpha)}(x) \ll \begin{cases} \dfrac{x}{p(\log x)^{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}} \sqrt{\log_2 x}} & \text{uniformly in } \beta \in (\beta_\alpha + \delta, 1-\delta)\,, \\ \dfrac{x \log_2 x}{p(\log x)^{\delta_0}} & \text{uniformly in } \beta \in (\delta, \beta_\alpha + \delta]. \end{cases} \tag{39}$$

对 $\alpha \in (0, \frac{\epsilon}{3}) \cup (1-\frac{\epsilon}{3}, 1)$ 应用（i），并结合对 $\alpha \in (\frac{\epsilon}{4}, 1-\frac{\epsilon}{4})$ 应用（ii），即可得出定理 2.3。因此，剩下只需证明（i）和（ii）。

为证明断言（i），我们首先去除所有满足 $\Omega(n) \le (1-\delta/4)\log_2 x$ 或 $\Omega(n) \ge (1+\delta/4)\log_2 x$ 的 n，注意到这类 n 的数量为 $\ll x/p(\log x)^{c_1}$，其中 $c_1 = c_1(\delta) > 0$ 是某个常数。事实上，令 E_0 表示所有素数构成的集合，梅滕斯第二定理表明，对于某个绝对常数 $C_0 > 0$，有 $E_0(x/p) = \sum_{\ell \le x/p} 1/\ell = \log_2 x + C_0 + o(1)$。因此，任何满足 $\Omega(n) \le (1-\delta/4)\log_2 x$ 或 $\Omega(n) \ge (1+\delta/4)\log_2 x$ 的 n，都可写成 $n = mp$，其中某个 $m \le x/p$ 满足 $\Omega(m) \le (1-\delta/4)E_0(x/p)$，或满足 $\Omega(m) \ge (1+\delta/5)E_0(x/p)$；由此，引理 4.2 表明

$$\sum_{\substack{n \le x : p \mid n \\ \Omega(n) \le (1-\delta/4)\log_2 x}} 1 + \sum_{\substack{n \le x : p \mid n \\ \Omega(n) \ge (1+\delta/4)\log_2 x}} 1 \le \sum_{\substack{m \le x/p \\ \Omega(m) \le (1-\delta/4)E_0(x/p)}} 1 + \sum_{\substack{m \le x/p \\ \Omega(m) \ge (1+\delta/5)E_0(x/p)}} 1 \ll \frac{x}{p(\log x)^{c_1}}.$$

因此，仍需证明，对于满足 $P^{(\alpha)}(n) = p$ 且 $(1-\delta/4)\log_2 x < \Omega(n) < (1+\delta/4)\log_2 x$ 的 $n \le x$ 的计数，式（38）成立；在断言（i）的证明余下部分中，我们只考虑这样的 n。

[10] 在本节余下部分中，我们将用 $C(\epsilon,\delta)$ 表示一个依赖于 ϵ 和 δ 的常数 C。

首先，假设 $\alpha \in (0, \epsilon - \delta)$成立。那么，由于 $p > \exp((\log x)^\epsilon)$，任意这样的 n 至少有$\lfloor (1-\alpha)\Omega(n) \rfloor + 1 > (1-\alpha)\Omega(n) > (1-\epsilon+\delta)(1-\delta/4)\log_2 x > (1-\epsilon+\delta)(1-\delta/2)\log_2 x + 1$ 个大于 $\exp((\log x)^\epsilon)$ 的素因子（按重数计）。因此，任意这样的 n 都可以写成 $n = mp$，其中某个 $m \le x/p$ 满足 $\Omega_E(m) > (1-\epsilon+\delta)(1-\delta/2)\log_2 x$，这里 E表示大于 $\exp((\log x)^\epsilon)$ 的素数集合。由于 $E(x/p) = \sum_{\exp((\log x)^\epsilon) < \ell \le x/p} 1/\ell = (1-\epsilon)\log_2 x + o(1) < (1-\epsilon+\delta/4)\log_2 x$，通过定义 $\mu_\epsilon := \frac{(1-\epsilon+\delta)(1-\delta/2)}{1-\epsilon+\delta/4} > 1$ 并再次应用引理 4.2，

$$\sum_{\substack{n \le x : P^{(\alpha)}(n) = p \\ \Omega(n) > (1-\delta/4)\log_2 x}} 1 \le \sum_{\substack{m \le x/p \\ \Omega_E(m) > \mu_\epsilon E(x/p)}} 1 \ll \frac{x}{p(\log x)^{c_1}}$$

对于某个常数 $c_1 = c_1(\epsilon, \delta) > 0$。这说明对于所有 $\alpha \in (0, \epsilon - \delta)$，断言（i）均成立。

同样地，对于 $\alpha \in (1-\epsilon+\delta, 1)$，由于 $p < \exp((\log x)^{1-\epsilon})$，任何满足 $\Omega(n) < (1+\delta/4)\log_2 x$ 且被计入 $M_p^{(\alpha)}(x)$ 的 n，其大于 $\exp((\log x)^{1-\epsilon})$ 的素因子（按重数计）至多有 $\lfloor (1-\alpha)\Omega(n) \rfloor < (\epsilon - \delta)(1+\delta/4)\log_2 x$ 个。记这些素数的集合为 E'，则可得 $E'(x/p) > (\epsilon - \delta/4)\log_2 x$。因此，对于 $\nu_\epsilon := \frac{(\epsilon-\delta)(1+\delta/4)}{\epsilon - \delta/4} \in (0, 1)$，由引理 4.2 可得

$$\sum_{\substack{n \le x : P^{(\alpha)}(n) = p \\ \Omega(n) < (1+\delta/4)\log_2 x}} 1 \le \sum_{\substack{m \le x/p \\ \Omega_{E'}(m) < \nu_\epsilon E'(x/p)}} 1 \ll \frac{x}{p(\log x)^{c_2}}$$

对于某个常数 $c_2 = c_2(\epsilon, \delta) > 0$。这就完成了断言（i）的证明。

我们现在通过紧密遵循定理 2.2 的证明来证明断言（ii）。首先，定义 $K_0 := 2.04/\log 2$ 和 $k_\epsilon := 8/\epsilon = \max\{8/\epsilon, 8/(4-\epsilon)\}$，引理 4.1 再次表明，来自满足 $\Omega(n) \le k_\epsilon$ 或 $\Omega(n) > K_0 \log_2 x$ 的 n 的贡献都可以忽略，因此只需证明将 $M_p^{(\alpha)}(x)$ 替换为满足 $P_{(\alpha)}(n) = p$ 且 $\Omega(n) \in (k_\epsilon, K_0 \log_2 x]$ 的 $n \le x$ 的计数 $N_{(\alpha)p}(x)$ 所构成的断言。由于 $\alpha \in (\frac{\epsilon}{4}, 1 - \frac{\epsilon}{4})$，按照定理 2.2 的方法继续推导，我们得到

$$N_p^{(\alpha)}(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right) \frac{x}{p \log x} \sum_{k_\epsilon < k \le K_0 \log_2 x} \frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{(\log u)^{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor - 1}}{(\lfloor (1-\alpha)k \rfloor - 1)!} \sum_{\substack{P^+(A) \le p \\ \Omega(A) = \lceil \alpha k \rceil - 1}} \frac{1}{A}.$$

利用引理 5.2 对 A 上的和进行估计，并按照前述方法继续推导，可知对于$\alpha \in (\frac{\epsilon}{4}, 1 - \frac{\epsilon}{4})$ 和 $\beta \in (\epsilon, 1 - \epsilon)$，一致地有

$$\begin{aligned} N_p^{(\alpha)}(x) &\ll \frac{x}{p \log x} \sum_{k_\epsilon < k \le K_0 \log_2 x} \frac{k}{2^{\alpha k}} \log^2 p \cdot \frac{(\log u)^{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor - 1}}{(\lfloor (1-\alpha)k \rfloor - 1)!} \\ &\ll \frac{x \log_2 x}{p(\log x)^{1-2\beta}} \sum_{k_\epsilon < k \le K_0 \log_2 x} \frac{1}{2^{\alpha k}} \cdot \frac{(\log u)^{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor}}{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor !} \\ &\ll \frac{x \log_2 x}{p(\log x)^{1-2\beta}} \sum_{m \ge 1} \frac{(2\nu_\alpha \log u)^m}{m!} \ll \frac{x \log_2 x}{p(\log x)^{1-2\beta-2\nu_\alpha(1-\beta)}}, \end{aligned}$$

其中 $\nu_\alpha := 2^{-1/(1-\alpha)}$，并且我们令 $m := \lfloor (1-\alpha)k \rfloor$。注意，对于给定的 m 值，与之对应的 k 有 $\le 1/(1-\alpha) \ll_\epsilon 1$ 个可能值。现在令 δ 如

主张的陈述中所取的值，我们看到 $\delta < \frac{\epsilon}{8} < \frac{1}{16}$，因此函数 $\alpha \mapsto 1-2\nu_\alpha - (\beta_\alpha+\delta)(2-2\nu_\alpha)$ 在 $(\frac{\epsilon}{8}, 1-\frac{\epsilon}{8})$ 上单调递增。[11]因此，对所有 $\beta \le \beta_\alpha + \delta$，上式中 $\log x$ 的指数为 $1-2\nu_\alpha-\beta(2-2\nu_\alpha) \ge 1-2\nu_\alpha-(\beta_\alpha+\delta)(2-2\nu_\alpha) > 1-2\nu_{\epsilon/8}-(\beta_{\epsilon/8}+\delta)(2-2\nu_{\epsilon/8}) \ge \delta_0$，这证明了主张 (ii) 的第二个断言。

最后，在 $\alpha \in (\frac{\epsilon}{4}, 1-\frac{\epsilon}{4})$、$\beta \in (\beta_\alpha+\delta, 1-\delta)$ 的情形下，我们可以更紧密地沿用定理 2.2 的证明（在 $\beta > \beta_\alpha+\epsilon$ 的情形下）：写作 $N_{(\alpha)p}(x) = N^{(\alpha)}_{p\,1,}(x) + N^{(\alpha)}_{p\,2,}(x)$，其中两个加数以类似方式定义，我们再次看到，与误差项相比，$N^{(\alpha)}_{p\,2,}(x)$ 可忽略，而对应的 (33) 类比式对 $N^{(\alpha)}_{p\,1,}(x)$ 仍然成立。然而此时，调用平凡上界

$$\sum_{k_\alpha < k \le \left(\frac{2-\delta}{\alpha}\right)\log_2 p} \eta\left(\frac{\lceil \alpha k\rceil - 1}{\log_2 p}\right)\frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)}\frac{\lceil \alpha k\rceil \lfloor (1-\alpha)k\rfloor}{k^{1/2}}\frac{w^k}{k!}\chi^{\{(1-\alpha)k\}}$$

$$\ll (\log_2 x)^{3/2}\sum_{k\ge 1}\frac{w^k}{k!} \ll e^w(\log_2 x)^{3/2}$$

表明，

$$N^{(\alpha)}_{p,1}(x) \ll \frac{x}{p(\log x)^{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}}\sqrt{\log_2 x}},$$

对 $\alpha \in (\frac{\epsilon}{4}, 1-\frac{\epsilon}{4})$ 和 $\beta \in (\beta_\alpha+\delta, 1-\delta)$ 一致成立。因此，对于 $N_{(\alpha)p}(x)$，同样的界也成立。这就证明了我们的断言，并完成了该定理的证明。

9. Proof of Theorem 2.5

我们先观察高斯积分尾部的一个简单而有用的界：对所有 $X > 0$，都有

$$\int_{-\infty}^{-X} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_X^\infty e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \le \frac{1}{X}\int_X^\infty u e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \ll \frac{1}{X}e^{-X^2/2}. \tag{40}$$

我们先对 $-\sqrt{\log_3 x} \le t \le \sqrt{\log_3 x}$ 证明该定理。我们断言，取

$$\lambda := \beta + \frac{t}{\sqrt{\log_2 x}},$$

(5) 的左边是[12]

$$\frac{p}{x}\sum_{\substack{n\le x:\, p\mid n\\ R_p(n)<\lambda}} 1 = \frac{p\log_2 x}{x}\int_0^\lambda M_p^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}\alpha + O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\right). \tag{41}$$

[11]事实上，对每个固定的 $\delta \in (0, 1/16)$，函数 $\alpha \mapsto 1-2\nu_\alpha-(\beta_\alpha+\delta)(2-2\nu_\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上递增。[12]事实上，证明中的论证表明，这个恒等式对所有实数 t都一致成立，但我们不需要这一点。

为此，我们将经常使用以下估计式

$$\sum_{\substack{n\le x:\, p\mid n\\ \Omega(n)\le \frac{1}{3}\log_2 x}} 1 \ll \frac{x}{p(\log x)^{0.15}}, \tag{42}$$

$$\sum_{\substack{n\le x:\, p\mid n\\ |\Omega(n)-\log_2 x|\ge(\log_2 x)^{2/3}}} 1 \ll \frac{x}{p(\log_2 x)^{1/3}}. \tag{43}$$

估计式 (42) 是引理 4.2 的直接推论，因为任何可被 p 整除且 $\Omega(n)\le \frac{1}{3}\log_2 x$ 的 $n\le x$ 都具有 $n=mp$ 的形式，其中 $m\le x/p$ 满足 $\Omega(m)\le \frac{1}{2}\log_2(x/p)$（对所有充分大的 x）。(43) 中的估计由以如下形式写出的 Hardy-Ramanujan 定理得出：$\sum_{m\le x/p}\left(\Omega(m)-\log_2(x/p)\right)^2 \ll x\log_2 x/p$，因为这两个和中计入的任何 n 都具有 mp 的形式，其中某个 $m\le x/p$ 满足 $|\Omega(m)-\log_2(x/p)|\gg(\log_2 x)^{2/3}$。

现在转向估计式 (41) 的证明。首先注意到，被 p^2 整除的 $n\le x$ 的个数为 $O(x/p^2)$，因此只需证明：将 (41) 中的 $M_p^{(\alpha)}(x)$ 替换为 $n\le x$ 中恰好被 p 整除（即 $p\mid n$ 但 $p^2\nmid n$）、且满足 $P^{(\alpha)}(n)=p$ 的 $M_p^{(\alpha)*}(x)$ 的个数后，(41) 仍成立。任意这样的 n 都有 $R_p(n)=\lceil\alpha\Omega(n)\rceil/\Omega(n)$，也就是说，$R_p(n)-1/\Omega(n)<\alpha\le R_p(n)$。因此，

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda M_p^{(\alpha)*}(x)\,\mathrm{d}\alpha &= \sum_{\substack{n\le x:\, p\|n\\ R_p(n)<\lambda+1/\Omega(n)}} \int_{R_p(n)-1/\Omega(n)}^{\min\{\lambda,R_p(n)\}} \mathrm{d}\alpha\\ &= \sum_{\substack{n\le x:\, p\|n\\ R_p(n)<\lambda}} \frac{1}{\Omega(n)} + \sum_{\substack{n\le x:\, p\|n\\ \lambda\le R_p(n)<\lambda+1/\Omega(n)}} \left(\lambda-R_p(n)+\frac{1}{\Omega(n)}\right).\end{aligned} \tag{44}$$

对于上方第二个求和中计入的任意 n，我们有 $|R_p(n)-\lambda|<1/\Omega(n)$，这表明该和为

$$\ll \sum_{\substack{n\le x:\, p\|n\\ \lambda\le R_p(n)<\lambda+1/\Omega(n)}} \frac{1}{\Omega(n)} \ll \sum_{\substack{n\le x:\, p\mid n\\ \Omega(n)\le\frac{1}{3}\log_2 x}} 1+\frac{1}{\log_2 x} \sum_{\substack{n\le x:\, p\|n\\ \lambda\le R_p(n)<\lambda+1/\Omega(n)}} 1. \tag{45}$$

由 (42) 可知，两个和中的第一个为 $\ll x/p(\log x)^{0.15}$。第二个和中计入的任何 n 都满足$P_{(\lambda)}(n)=p$，因此，由于 $|\lambda-\beta|\le\sqrt{\log_3 x\log_2 x}$，由定理 2.2 的最后一个断言（对于 $\alpha\in(\beta-\mathcal{E},\beta+\mathcal{E})$），或由定理 2.3，可得 $M_{(\lambda)p}(x)\ll x/p\sqrt{\log_2 x}$.。因此，(45) 中的最后一个表达式为 $\ll x/p(\log_2 x)^{3/2}$，而 (44) 给出

$$\int_0^\lambda M_p^{(\alpha)*}(x)\,\mathrm{d}\alpha = \sum_{\substack{n\le x:\, p\|n\\ R_p(n)<\lambda}} \frac{1}{\Omega(n)} + O\left(\frac{x}{p(\log_2 x)^{3/2}}\right) = \sum_{\substack{n\le x:\, p\|n\\ \Omega(n)\in\mathcal{W}\\ R_p(n)<\lambda}} \frac{1}{\Omega(n)} + O\left(\frac{x}{p(\log_2 x)^{4/3}}\right), \tag{46}$$

其中 $\mathcal{W}:=(\log_2 x-(\log_2 x)^{2/3},\log_2 x+(\log_2 x)^{2/3})$，且在上面的最后一个等式中，我们使用了 (42) 和 (43)。

最后，由于(46)中最后一个求和式所计数的任意 n 都具有 $\Omega(n) = \log_2 x(1+O((\log_2 x)^{-1/3}))$，因此可知该和为

$$= \frac{1}{\log_2 x}\left(1+O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\right)\right)\sum_{\substack{n\le x:\, p\| n\\ \Omega(n)\in\mathcal{W}\\ R_p(n)<\lambda}} 1 = \frac{1}{\log_2 x}\sum_{\substack{n\le x:\, p\mid n\\ R_p(n)<\lambda}} 1+O\left(\frac{x}{p(\log_2 x)^{4/3}}\right)$$

通过反向执行我们之前的化简。因此，由 (46) 可得

$$\int_0^\lambda M_p^{(\alpha)*}(x)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\log_2 x}\sum_{\substack{n\le x:\, p\mid n\\ R_p(n)<\lambda}} 1+O\left(\frac{x}{p(\log_2 x)^{4/3}}\right),$$

从而对所有 $t\in[-\sqrt{\log_3 x},\sqrt{\log_3 x}]$ 一致地证明了我们的断言 (41)。因此，为了完成该定理在此范围内对所有 t 的证明，只需证明

$$\int_0^\lambda M_p^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{x}{p\log_2 x}\left\{\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}\right)+O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\right)\right\} \tag{47}$$

对所有此类 t 一致成立。

现在，对于 $t\in[-\sqrt{\log_3 x},\sqrt{\log_3 x}]$，有 $\beta-\mathcal{E}\le\lambda\le\beta+\mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}:=\sqrt{\log_3 x/\log_2 x}$。此外，对所有 $\alpha\in(\beta-\mathcal{E},\beta+\mathcal{E})$，我们再次处于定理 2.2 的最后一种情形；应用该定理可得，

$$\int_{\beta-\mathcal{E}}^\lambda M_p^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}\alpha = \left(1+O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right)\frac{C_{\beta,\beta}x}{p\log x\sqrt{\log_2 x}}\int_{\beta-\mathcal{E}}^\lambda (\log x)^{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}\alpha.$$

To a分析上面的积分时，我们注意到，对所有 $\alpha =: \beta+\eta\in[\beta-\mathcal{E},\beta+\mathcal{E}]$,

$$\alpha\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+(1-\alpha)\log\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right) = -(\beta+\eta)\log\left(1+\frac{\eta}{\beta}\right)-(1-\beta-\eta)\log\left(1-\frac{\eta}{1-\beta}\right)$$
$$= -\frac{\eta^2}{2\beta(1-\beta)}+O(\eta^3),$$

因此 $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} = 1-\frac{\eta^2}{2\beta(1-\beta)}+O(\eta^3)$，从而得到

$$(\log x)^{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}} = (\log x)\exp\left(-\frac{\eta^2\log_2 x}{2\beta(1-\beta)}\right)\left(1+O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\right)\right). \tag{48}$$

因此,

$$\int_{\beta-\mathcal{E}}^\lambda M_p^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}\alpha = \left(1+O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\right)\right)\frac{C_{\beta,\beta}x}{p\sqrt{\log_2 x}}\int_{-\mathcal{E}}^{\lambda-\beta}\exp\left(-\frac{\eta^2\log_2 x}{2\beta(1-\beta)}\right)\mathrm{d}\eta$$
$$= \left(1+O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\right)\right)\frac{x}{p\log_2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{\frac{\log_3 x}{\beta(1-\beta)}}}^{\frac{t}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau.$$

应用界（40），可得，对 $t\in[-\sqrt{\log_3 x},\sqrt{\log_3 x}]$ 一致成立,

$$\int_{\beta-\mathcal{E}}^{\beta+t/\sqrt{\log_2 x}} M_p^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{x}{p\log_2 x}\left\{\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}\right)+O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\right)\right\}, \tag{49}$$

其中我们注意到，$\exp\left(-\frac{x}{\text{对数}2\beta\ 1-\beta()}\right) \ll \frac{1}{(\text{对数}_2 x)^2}$，因为 $\beta(1-\beta) \le 1/4$。

现在我们证明，来自 α outside $[\beta-\mathcal{E}, \beta+t/\sqrt{\log_2 x}]$ 的部分对 (47) 中积分的贡献可以忽略不计。为此，我们首先注意到，通过与上述类似的论证，我们有

$$\int_0^1 M_p^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{x}{p\log_2 x} + O\left(\frac{x}{p(\log_2 x)^2}\right) \tag{50}$$

对 $\beta \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ 一致成立。事实上，只需再次证明将 $M_{(\alpha)p}(x)$ 替换为 $M_p^{(\alpha)*}(x)$ 后上述结论仍然成立；通过类似于 (44) 的计算，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 M_p^{(\alpha)*}(x)\,\mathrm{d}\alpha &= \sum_{\substack{n\le x\\ p\|n}} \frac{1}{\Omega(n)} = \sum_{\substack{n\le x\\ p|n}} \frac{1}{\Omega(n)} + O\left(\frac{x}{p^2}\right) = \sum_{m\le x/p} \frac{1}{\Omega(m)+1} + O\left(\frac{x}{p^2}\right)\\ &= \sum_{1<m\le x/p} \frac{1}{\Omega(m)} + O\left(\sum_{1<m\le x/p} \frac{1}{\Omega(m)^2} + \frac{x}{p^2}\right) = \frac{x}{p\log_2 x} + O\left(\frac{x}{p(\log_2 x)^2}\right)\end{aligned}$$

其中在最后一个等式中，我们分别以弱形式 Ω( ) log( ) 和 Ω( )(log) 调用了 [5], 中的定理 5 和定理 14$\sum_{1<n\le x} 1/n = x/_2 x + Ox/_2 x^2 \sum_{1<n\le x} 1/n^2 \ll x/_2 x^2$。[13]

将（49）与（50）比较并取 $t=\sqrt{\log_3 x}$，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^{\beta-\mathcal{E}} M_p^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}\alpha + \int_{\beta+\mathcal{E}}^1 M_p^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}\alpha\\ &\quad= \frac{x}{p\log_2 x}\left\{1-\Phi\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\beta(1-\beta)}}\right)\right\} + O\left(\frac{x(\log_3 x)^{3/2}}{p(\log_2 x)^{3/2}}\right) \ll \frac{x(\log_3 x)^{3/2}}{p(\log_2 x)^{3/2}},\end{aligned}$$

其中在最后一个等式中，我们再次应用了 (40)。将 (49) 与上面对 $\int_0^{\beta-\mathcal{E}} M_p^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}\alpha$ 的界结合，即可得到所需的关系 (47)，对所有 $t\in[-\sqrt{\log_3 x}、\sqrt{\log_3 x}]$ 均成立，从而证明了该范围内的 t 定理。

现在设 $t \le -\sqrt{\log_3 x}$。我们声称，(5) 两边都被误差项 $O(1/(\log_2 x)^{1/3})$ 吸收。对于右边，这显然成立，因为由 (40) 可知

$$\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}\right) \le \Phi\left(-\sqrt{\frac{\log_3 x}{\beta(1-\beta)}}\right) \ll \frac{1}{(\log_2 x)^2\sqrt{\log_3 x}}.$$

另一方面，(5) 式的左边是

$$\frac{p}{x}\sum_{\substack{n\le x:\, p|n\\ R_p(n)<\beta+\frac{t}{\sqrt{\log_2 x}}}} 1 \le \frac{p}{x}\sum_{\substack{n\le x:\, p|n\\ R_p(n)<\beta-\frac{\sqrt{\log_3 x}}{\sqrt{\log_2 x}}}} 1 = \Phi\left(-\sqrt{\frac{\log_3 x}{\beta(1-\beta)}}\right) + O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\right) \ll \frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}},$$

[13] 或者，我们也可以重复处理和式 $\sum_{n\le x:\ R_p\ n}^{p\|n}{}_{()<\lambda}\ {}^{1}_{n}\Omega()$ 时所用的论证 (44)；这会得到一个 $O(x/p(\log_2 x)^{4/3})$ 的误差项，足以证明该定理。

其中我们使用了此前证明的关于 $t = -\sqrt{\log_3 x}$ 的定理断言。

最后，对于 $t \geq \sqrt{\log_3 x}$，推理是类似的：由 (40) 可知，(5) 的右边为

$$1 + O\left(\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{t^2}{2\beta(1-\beta)}\right) + \frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\right)$$
$$= 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}\exp\left(-\frac{\log_3 x}{2\beta(1-\beta)}\right) + \frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\right),$$

而由定理中 $t = \sqrt{\log_3 x}$ 的情形（我们已经证明），

$$1 \geq \frac{p}{x}\sum_{\substack{n\leq x:\, p|n \\ R_p(n)<\beta+\frac{t}{\sqrt{\log_2 x}}}} 1 \geq \frac{p}{x}\sum_{\substack{n\leq x:\, p|n \\ R_p(n)<\beta+\frac{\sqrt{\log_3 x}}{\sqrt{\log_2 x}}}} 1$$
$$= \Phi\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\beta(1-\beta)}}\right) + O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\right)$$

这表明左边也为 $1 + O\left(\frac{1}{{}_2 x^{(\log)^{1/3}}}\right)$。证明至此完成。

10. Proof of Theorem 2.6

我们先写出

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\log P^{\left(\frac{1}{2}\right)}(n) = \frac{1}{x}\sum_{p\leq x} M_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)\log p. \tag{51}$$

平凡上界 $M(\,{}_{1\,2})\,{}_p(x) \leq \frac{x}{p}$ 表明，上述求和中来自 $p \leq \exp\left(\sqrt{\log\ x}\right)$ 的部分为

$$\frac{1}{x}\sum_{p\leq\exp(\sqrt{\log x})} M_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)\log p < \sum_{p\leq\exp(\sqrt{\log x})}\frac{\log p}{p} \ll \sqrt{\log x},$$

对于 $\sqrt{x} < p \leq x$，我们有 $M(\,{}_{1\,2})\,{}_p(x) = 1$，这表明来自此类 p 的部分为 $O(1)$。接下来，我们估计满足 $\exp((\log\ x)^{0.999}) < p \leq \sqrt{x}$ 的那些 p 所贡献的部分。

与定理 2.3 的证明（断言（i））中相同的论证表明，对于 (exp((log)), $M_p(\,{}_2)\ x \ll {}^1$ x/p $x\ {}^{0.42}$ $p \in$ $x\ {}^{0.999}$ $\sqrt{x}]$ n ( ) (log)

一致成立：事实上，再次地，$M(\,{}_{1\,2})\,{}_p(x)$ 中计入的任意一个，要么满足 $\Omega(n) \leq 0.229\log_2 x$，要么具有多于 $0.229\,{}_2\log_2 x$ 个素因子（按重数计），且这些素因子均超过 $\exp((\log\ x)^{0.999})$。因此，分别取全体素数集和大于 $\exp((\log\ x)^{0.999})$ 的素数集作为集合 E，两次应用引理 4.2，可知这两种情况各自的贡献均为 $\ll x/p(\log\ x)^{0.42}$，如所需。于是，素数 $p \in (\exp((\log\ x)^{0.999})\ \sqrt{x}]$ 的总贡献为

$$\frac{1}{x}\sum_{\exp((\log x)^{0.999})<p\leq\sqrt{x}} M_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)\log p \ll \frac{1}{(\log x)^{0.42}}\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} \ll (\log x)^{0.58},$$

这对我们的目的而言也可以忽略不计。

因此，剩下需要考虑的是素数 $\exp\left(\sqrt{\log x}\right) < p \le \exp\left((\log x)^{0.999}\right)$；对此，我们可以用定理 2.1 来估计 $M(\chi_1)\psi(x)$。因此，在此范围内，对 p 求和（51）得

$$\left(1+O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right)\sum_{\exp\left(\sqrt{\log x}\right)<p\le\exp((\log x)^{0.999})} C_\beta \frac{(\log x)^{\beta+2\sqrt{\beta(1-\beta)}-1}}{p\sqrt{\log_2 x}} \tag{52}$$

其中 $\beta = \frac{\log p}{\log x}$ 是 p 的一个函数。将上面的和改写为积分，并利用素数定理，可得

$$\begin{aligned}\sum_{\exp\left(\sqrt{\log x}\right)<p\le\exp((\log x)^{0.999})} C_\beta \frac{(\log x)^{\beta+2\sqrt{\beta(1-\beta)}-1}}{p\sqrt{\log_2 x}} &= \int_{\exp\left(\sqrt{\log x}\right)}^{\exp\left((\log x)^{0.999}\right)} C_\beta \frac{(\log x)^{\beta+2\sqrt{\beta(1-\beta)}-1}}{t\sqrt{\log_2 x}}\mathrm{d}\pi(t)\\ &= \int_{\exp\left(\sqrt{\log x}\right)}^{\exp\left((\log x)^{0.999}\right)} C_\beta \frac{(\log x)^{\beta+2\sqrt{\beta(1-\beta)}-1}}{t\log t\sqrt{\log_2 x}}\mathrm{d}t \;+\; O\left(\exp(-K_0(\log x)^{1/4})\right)\end{aligned} \tag{53}$$

其中 $K_0 > 0$ 是某个绝对常数；在积分中，我们有 $\beta := \log_2 t/\log_2 x$。这里，为了得到上面的第二行，我们注意到，写成 $f(t) := C_\beta (\log x)^{\beta+2\sqrt{\beta(1-\beta)}-1}\sqrt{t\log_2 x}$ 并且 $\mathcal{E}(t) := \pi(t) - \mathrm{li}(t) \ll t\exp(-K\sqrt{\log t})$，函数 $f(t)$ 对所有充分大的 x（以及对于 $t \ge \exp(\sqrt{\log x})$）单调递减，[14] 因此两次应用黎曼–斯蒂尔切斯分部积分可得（其中 $K_0 := K/2$），

$$\begin{aligned}\int_{\exp\left(\sqrt{\log x}\right)}^{\exp\left((\log x)^{0.999}\right)} f(t)\,\mathrm{d}\mathcal{E}(t) &= -\int_{\exp\left(\sqrt{\log x}\right)}^{\exp\left((\log x)^{0.999}\right)} \mathcal{E}(t)f'(t)\,\mathrm{d}t + O\left(\exp(-K_0(\log x)^{1/4})\right)\\ &\ll \int_{\exp\left(\sqrt{\log x}\right)}^{\exp\left((\log x)^{0.999}\right)} t\exp(-K\sqrt{\log t})f'(t)\,\mathrm{d}t + \exp(-K_0(\log x)^{1/4})\\ &\ll \int_{\exp\left(\sqrt{\log x}\right)}^{\exp\left((\log x)^{0.999}\right)} f(t)\exp(-K\sqrt{\log t})\mathrm{d}t + \exp(-K_0(\log x)^{1/4})\\ &\ll \exp(-K_0(\log x)^{1/4}),\end{aligned}$$

由此证明了（53）。继续下去，我们发现（52）中的表达式为

$$\left(1+O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right)\int_{\exp\left(\sqrt{\log x}\right)}^{\exp\left((\log x)^{0.999}\right)} C_\beta \frac{(\log x)^{\beta+2\sqrt{\beta(1-\beta)}-1}}{t\log t\sqrt{\log_2 x}}\mathrm{d}t + O\left(\exp(-K_0(\log x)^{1/4})\right).$$

将积分变量换为 β，利用 $t = \exp\left((\log x)^\beta\right)$，我们得到 $\mathrm{d}t = t\log t\log_2 x\,\mathrm{d}\beta$，因此上面的主项变为

$$\left(\sqrt{\log_2 x}+O\left(\sqrt{\log_3 x}\right)\right)\int_{1/2}^{0.999} C_\beta(\log x)^{\beta+2\sqrt{\beta(1-\beta)}-1}\mathrm{d}\beta. \tag{54}$$

[14] 为此，我们将 $f(t) =: F_1(\beta) + F_2(\beta)\log_2 x - \log t - \frac{1}{2}\log_3 x$ 写成某些可微函数 F_1、F_2 的形式，并对这个恒等式两边关于 t 求导，得到 $f'(t)/f(t) < -1/t + O(1/t\log t) < 0$，该式对所有充分大的 x 均成立，且对 $\beta = \log_2 t/\log_2 x \in [0.5, 0.999]$ 一致成立。

我们发现，上述被积函数中 $\log x$ 的指数在 $B_0 := \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$ 处达到最大值，且该点的取值为 $B_0 + 2\sqrt{B_0(1-B_0)} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi'$。

此外，定义 $\beta' := \beta - B_0$，并在 B_0 处展开为泰勒级数，得到

$$\beta + 2\sqrt{\beta(1-\beta)} - 1 = \varphi' - \frac{5\sqrt{5}}{4}\beta'^2 + O\left(\beta'^3\right). \tag{55}$$

将此代入 (54)，并首先仅考虑范围 $\beta \in \left[B_0 - \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}, B_0 + \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right]$，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_0-\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}}^{B_0+\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}} C_\beta (\log x)^{\beta+2\sqrt{\beta(1-\beta)}-1}\,\mathrm{d}\beta \\
&\quad= \left(C_{B_0} + O\left(\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right)\right) \int_{-\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}}^{\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}} \exp\left(\left(\varphi' - \tfrac{5\sqrt{5}}{4}\beta'^2 + O\left(\beta'^3\right)\right)\log_2 x\right)\mathrm{d}\beta' \\
&\quad= \frac{C_{B_0}(\log x)^{\varphi'}}{\sqrt{\frac{5\sqrt{5}}{4}\log_2 x}}\left(1 + O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right) \int_{-\sqrt{\frac{5\sqrt{5}}{4}\log_3 x}}^{\sqrt{\frac{5\sqrt{5}}{4}\log_3 x}} \exp\left(-\tau^2\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad= C_{B_0}(\log x)^{\varphi'}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{5\sqrt{5}}{4}\log_2 x}}\left(1 + O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{\sqrt{\log_2 x}} + \frac{\exp\left(-\frac{5\sqrt{5}}{4}\log_3 x\right)}{\sqrt{\log_3 x}}\right)\right) \\
&\quad= \left(C_{B_0} + O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right)(\log x)^{\varphi'}\sqrt{\frac{4\pi}{5\sqrt{5}\log_2 x}}.
\end{aligned}$$

将 (3) 中 C_{B_0} 的值代入，我们推得 $\beta \in \left[B_0 - \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}, B_0 + \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right]$ 对表达式 (54) 的贡献为

$$\left(\frac{e^{-\gamma}}{\Gamma(\varphi+1)}\frac{\varphi+1}{\sqrt{5}}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varphi'}\left(1-\frac{\varphi'}{p}\right)^{-1} + O\left(\frac{(\log_3 x)^{3/2}}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right)(\log x)^{\varphi'}.$$

最后，我们通过界定 $\beta \in \left[\frac{1}{2}, B_0 - \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right]$ 以及 $\beta \in \left(B_0 + \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}, 0.999\right]$ 对表达式（54）的贡献来完成证明。注意到函数 $\beta \mapsto \beta + 2\sqrt{\beta(1-\beta)} - 1$ 在 $\left[\frac{1}{2}, B_0 - \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}\right]$ 上递增，再利用展开式（55），我们推得该区间的贡献为

$$\begin{aligned}
&\ll \sqrt{\log_2 x}\int_{1/2}^{B_0-\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}}} C_\beta (\log x)^{\beta+2\sqrt{\beta(1-\beta)}-1}\,\mathrm{d}\beta \\
&\qquad\ll (\log x)^{\varphi'}\exp\left(-\tfrac{5\sqrt{5}}{4}\log_3 x\right)\sqrt{\log_2 x} \;\le\; \frac{(\log x)^{\varphi'}}{(\log_2 x)^2}
\end{aligned}$$

最后，通过注意到函数 $\beta \mapsto \beta + 2\sqrt{\beta(1-\beta)} - 1$ 在区间 $\left(B_0 + \sqrt{\log_3 x \log_2 x}, 0.999\right]$ 上递减，可以类似地界定该区间的贡献。定理的证明至此完成。

11. Concluding Remarks

虽然我们能够针对非常广泛的p 取值范围（取决于 x），得到整数不超过 x 时， p 作为中间位置或第 α位素因子的频率的渐近表达式，但我们的定理并未完全涵盖 p的整个范围。

特别是，对于那些使 β 过于接近 β_α或 1 的素数 p，我们无法进行处理。（我们也不考虑固定为 $x \to \infty$ 的素数 p，不过，在 [10] 中，针对中间素因子的情形对此进行了处理。）

理解这两个剩余区间内行为的障碍有所不同。当 $\beta \approx \beta_\alpha$ 时，复杂性源于在 $k \approx 2\log_2 y$处，和 $\sum_{P^+(n)\le y, \Omega(n)=k} \frac{1}{n}$的渐近式中出现的相变。（参见定理 5.1 和 5.3。）

若要将我们的结果扩展到这一范围内的 β，就需要在这些和的相变附近求得渐近表达式。Balazard、Delange 和 Nicholas [3] 研究了在计数问题 $N(x,k) = \#\{n \le x \mid \Omega(n) = k\}$ 中，当 k 接近 $2\log_2 x$ 时发生的密切相关的相变，并发现对于这样的 k，相变附近正确的渐近表达式是一个“高斯过渡”，连接在这一过渡值两侧、且与该值保持一定距离时适用的渐近表达式。此处似乎也会发生类似的过渡，不过我们不再对此作进一步探讨。当 β 趋近于 1 时，考察 p 的大值似乎更困难。这里的障碍在于 Alladi 的结果（定理 4.3）的适用范围。要扩展我们的结果，就需要为 $\Phi_k(x,y)$ 求得一个渐近表达式，使其对相对于 $\log u$ 较大的 k 也成立，其中 $u = \log x / \log y$。

References

[1] K. Alladi, 《埃拉托色尼筛法中 $\nu(n)$的分布》, 《牛津数学季刊》(2) 33 (1982), 第130期, 129–148页。MR657120[2] M. Balazard, 《整数素因子个数分布的单峰性》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）40 (1990), 第2期, 255–270页。MR1070828[3] M. Balazard、H. Delange 和 J.-L. Nicolas, 《关于整数的素因子个数》, 《巴黎科学院公报：数学辑》306 (1988), 第13期, 511–514页。MR941613[4] N. G. de Bruijn, 《关于不含素因子 $> y$且 $\le x$ 的正整数个数》, 《荷兰皇家艺术与科学学院学报》A辑 54 (1951), 50–60页。MR0046375[5] J.-M. De Koninck, 《一类算术函数》, 《杜克数学杂志》39 (1972), 807–818页。MR311598[6] J.-M. De Koninck、N. Doyon 和 V. Ouellet, 《整数中间素因子的极限分布》, 《整数》19 (2019), 论文编号 A56, 共23页。MR4030537[7] J.-M. De Koninck 和 I. K´atai, 《正规数与整数的中间素因子》, 《数学讨论》135 (2014), 第1期, 69–77页。MR3215369[8] J.-M. De Koninck 和 F. Luca, 《关于整数的中间素因子》, 《整数序列杂志》16 (2013), 第5期, 文章编号 13.5.5, 共10页。MR3065334[9] K. Dickman, 《关于含有相对大小特定的素因子的数的频率》, 《数学、天文学与物理学档案》22 (1930), 第10期, A–10。[10] N. Doyon 和 V. Ouellet, 《关于按重数计数的中间素因子倒数之和》, 《布达佩斯大学科学年刊：计算机科学辑》47 (2018), 249–259页。MR3849207

[11] R. R. Hall 和 G. Tenenbaum，《因子》，剑桥数学丛书，第90卷，剑桥大学出版社，剑桥，1988年。[12] G. Harman，《度量数论》，伦敦数学会专著丛书（新辑），第18卷，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1998年。MR1672558[13] D. E. Knuth 和 L. Trabb Pardo，《一种简单因式分解算法的分析》，《理论计算机科学》3 (1976/77)，第3期，321–348页。MR498355[14] J. D. Lichtman，《默滕斯素数乘积公式详析》，《整数》21A (2021)，罗恩·格雷厄姆纪念文集专辑，论文编号 A17，共15页。MR4304373[15] N. McNew、P. Pollack 和 A. Singha Roy，《特定子集中的中间素因子》，《数学月刊》，15页，即将发表。[16] K. K. Norton，《关于整数的受限素因子个数。I》，《伊利诺伊数学杂志》20 (1976)，第4期，681–705页。MR419382[17] V. Ouellet，《关于整数中间素因子倒数之和》，《整数序列杂志》20 (2017)，第10期，文章编号17.10.1，共16页。MR3745200[18] G. Tenenbaum，《埃拉托色尼筛法与库比利乌斯模型》，《数论进展》第2卷（Zakopane-Ko´scielisko，1997），1999年，第1099–1129页。MR1689563[19] ———，《解析数论与概率数论导论》第三版，《数学研究生丛书》第163卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年。由 Patrick D. F. Ion 根据2008年法文版翻译。MR3363366

电子邮箱地址：nmcnew@towson.eduDepartment of Mathematics,
Towson University, Towson, MD 21252

电子邮箱地址：pollack@uga.edu

电子邮箱地址：akash01s.roy@gmail.comDepartment of Mathematics,
University of Georgia, Athens, GA 30602