arXiv:2305.01158v1 [math.DS] 2 May 2023

线性自同构及其联合可积扰动的余循环稳定性

Ignacio Correa

摘要

我们证明，在满足弱不可约条件时，线性映射及其联合可积扰动具有余循环稳定性。

1 引言

对于动力系统f，我们关注求解如下上同调方程的条件 $\varphi\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$

$$\varphi(x) = u(fx) - u(x) + \text{const.} \qquad (\star)$$

有一个解u （换句话说，我们想知道何时 φ 与某个常数上同调）。

关于这个问题的经典结果是 Livsic 定理：对于双曲系统，平凡的周期数据是存在解的充分必要条件。对于线性遍历自同构，Veech 证明这同样成立[Vee86]。

还可以利用傅里叶级数证明，对于环面上的丢番图平移， φ 能否接受解完全没有任何限制（或许额外的正则性要求除外）。

对于部分双曲系统（先验上可能没有周期点），Katok 和 Kononenko 提出了一个自然的必要条件：具有平凡周期循环泛函，也就是说， φ 沿由稳定段和不稳定段构成的循环具有平凡的整体（详见 §2.3 或 [KK96] ）。

我们将证明，在某些情况下，这一限制条件已经足够，这立即意味着按照 [KK96，定义 1] 中的意义，具有 余循环稳定性 。也就是说，余边界集合是闭集，因为在这种情况下，便会如此。

我们将会有

$$\left\{\varphi : \varphi = u \circ f - u\right\} = \left\{\int \varphi = 0\right\} \cup \bigcup_{\gamma\ su\text{-cycle}} \left\{PCF_\gamma \varphi = 0\right\}.$$

更具体地说，我们将证明这些C^R 函数是C^r-稳定的。

当f 满足某些可达性条件时，沿此方向的结果是已知的 [Wil13；KK96]。因此，在本文中，我们将研究这一情形在概念上的对立面：联合可积 情形（这里是指su-分布$E^s \oplus E^u$ 是可积的，见定义 2.2）。

虽然运用我们技术的“朴素”思想还可以得到一些其他次要结果（见 § A.2），但我们最感兴趣的应用将是针对线性映射及其（联合可积）扰动。

定理 A。 给定所选的正则性 r（以及中心维数 c），存在一个最小正则性 R，使得对于环面的任意部分双曲 $F \in SL(d, \mathbb{Z})$ Katznel- son 不可约且强 R-丛状的自同构，如果联合可积微分同胚 f: $\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 足够接近于 F（即 C^R-接近），那么它是余循环稳定的，并具有以下正则性：

若 φ 是 C^R 且具有 $\mathrm{PCF}_\gamma\, \varphi = 0$，对于任意 su-循环 γ，则上同调方程

$$\varphi(x) = u(fx) - u(x) + \text{const.} \qquad (\star)$$

存在一个 C^r 解 u。

Katznelson 不可约 是应用 Katznelson 引理 [Kat71, 引理 3] 所需的（非常弱的）不可约性条件，并在定义 3.4 中明确定义。我们在那里证明，这一条件实际上是求解 $(\star)$ 的必要条件。

为潜在应用的需要，在 § A.1 中，我们还给出了R 的明确取值。

我们的主要工具将是中心叶上的一种 $\mathbb{Z}^d$ 作用，称为中心平移，由 F. Rodriguez-Hertz 在 [Rod05] 中引入，并在本文 § 2.2 中定义。沿用该论文，目标是证明在线性情形下，这些作用具有丢番图性质（§ 3.2），然后利用 Moser 的技术 [Mos90]，，我们证明在非线性情形下它们可以被线性化（§ 3.3）。

在这里，我们能够以更一般的方式证明这一丢番图性质；由于 [Rod05, § 6.3] 并未使用他们的任何其他假设，因此我们得到以下结果：

推论 B。 如果部分双曲自同构 $F \in SL(d,\mathbb{Z})$ 是 *Katznelson* 不可约的且为$(9c+4)$-聚束，那么任何 C^{9c+4} 联合可积微分同胚 f，只要它在 C^{6c+1}意义下接近 F，就是遍历的，且与 F 拓扑共轭。

其中 c 是部分双曲分裂的中心分布的维数。

在 [Rod05 中，定理 5.1] 表明，在伪阿诺索夫情形（其条件强于Katznelson不可约性）且中心维数为 2 时，可达类存在二分性：要么 $E^s \oplus E^u$ 是可积的，要么 f </style}是可达的[1]。在一般的可达情形下，Wilkinson [Wil13] 证明了余循环稳定性。因此，我们得到这些自同构是“稳定地余循环稳定”的：

推论 C。 若 $F \in SL(d,\mathbb{Z})$ 是伪阿诺索夫的、具有分裂 $S \oplus C \oplus U$ 的部分双曲系统，其中 $\dim C = 2$，并且是强 R 束状的，那么任何 C^R-接近 F 的 f（R 足够大时）都是余循环稳定的。

该定理中的 R 以及方程（$\star$）的解的正则性，均已在 § A.1 中确立。

证明思路是利用中心平移的丢番图性质，沿中心叶求解 $(\star)$（第 4.1 节）。然后，利用第 2.3 节中定义的全纯映射泛函，将这个解扩展到整个环面上（第 4.2 节）。

在 A.2 节中（该节可独立于本文其余部分阅读），我们通过一个较简单的情形，说明如何利用丢番图动力系统沿中心求解 $(\star)$，再利用全纯映射泛函进行扩展。

2 预备知识

2.1 部分双曲性

定义 2.1。 我们称微分同胚 $f : M \to M$ 为部分双曲，如果存在一个不变分裂 $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$，使得（对于某个度量）

$$\begin{aligned} &\|D^s_x f\| < 1, && m(D^u_x f) > 1, \\ &\|D^s_x f\| < m(D^c_x f), && m(D^u_x f) > \|D^c_x f\|, \end{aligned}$$

其中 $m(A)$ 是 A 的余范数，且 $D^\sigma f = Df|_{E^\sigma}$。

[1]对于这一结果而言，他们关于特征值的模为 1 的假设并非必要。

对于一般的部分双曲系统，E^s 和E^u 可积分为不变叶状结构 $\mathcal{W}^{ss}$和 $\mathcal{W}^{uu}$。在我们的情形中，f是对线性映射的扰动，此外E^c、$E^s \oplus E^c$以及$E^c \oplus E^u$ 也可积分为不变叶状结构 $\mathcal{W}^c$、 $\mathcal{W}^{cs}$和 $\mathcal{W}^{cu}$[HPS70]。

定义 2.2。 如果部分双曲微分同胚 f 存在一个与 $E^s \oplus E^u$ 相切的不变叶状结构 $\mathcal{W}^{su}$，我们就称其为联合可积。我们称 $\mathcal{W}^{su}$ 的叶为 su-叶。

注 2.3。 该叶状结构 $\mathcal{W}^{su}$（如果存在）具有C^r 叶。事实上，在局部我们可以将叶表示为图，并对给出这些图的函数应用 Journé 引理 [Jou88]，从而证明其正则性。此外，$\mathcal{W}^{su}(x)$ 只需是一个由稳定叶和不稳定叶饱和、且与中心叶横截的集合。但我们不会在任何实质性的地方用到这一事实；唯一重要的是，沿稳定叶和沿不稳定叶的投影彼此可交换。

当然，线性映射 $F \in SL(d,\mathbb{Z})$ （视为环面$\mathbb{T}^d$上的映射）是联合可积的，因为不变分裂应当是由向量子空间构成的分裂$\mathbb{R}^d = S \oplus C \oplus U$。

在我们的定理中，我们要求关于隐式给定的部分双曲分裂对F 作出假设。每当我们要求f 联合可积时，指的是相对于由扰动给定分裂所得到的分裂而言。

在中心方向的支配中要求更强的条件（称为丛化条件）后，已知 [Wil13]相关的全纯映射具有一定程度的正则性。

定义 2.4。 若（对某个度量而言）对每个x都成立，则称f 部分双曲R-丛状。

$$\begin{aligned} &\|D^s_x f\| < m(D^c_x f)^R, && m(D^u_x f) > \|D^c_x f\|^R, \\ &\|D^s_x f\| < m(D^c_x f)\|D^c_x f\|^{-R}, && m(D^u_x f) > \|D^c_x f\| m(D^c_x f)^{-R}. \end{aligned}$$

若进一步

$$\max\{\|D^s_x f\|, m(D^u_x f)^{-1}\} < \min\{m(D^c_x f)^R, \|D^c_x f\|^{-R}\}$$

我们称 f 是强 R 束状。

注意，部分双曲性和丛化条件的界限在 C^1 拓扑下都是开条件，因此，如果 f 足够接近满足这些条件的线性映射 F，那么 f 也满足这些条件。

另一方面，对于线性映射 F，容易证明，部分双曲性条件和挤压条件等价于将范数和余范数分别替换为相应子空间最大和最小特征值（绝对值）后得到的类似条件。在这种情况下，如果 $F|_C$ 只有模为一的特征值，那么对于任意 R，它都是 R-聚束的，且强 R-聚束。

在本笔记中，始终假设部分双曲性和联合可积性成立。

2.2 中心平移

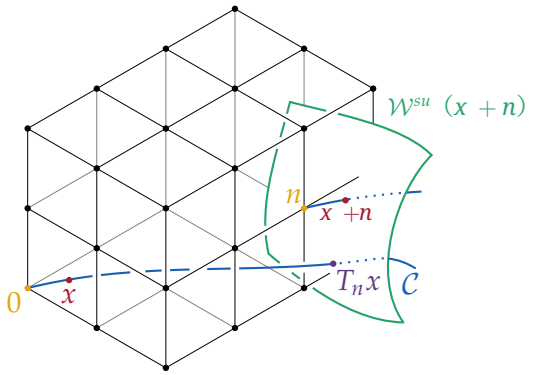
求解 $(\star)$ 而不对 φ 作任何假设，通常需要满足某种丢番图性质。在我们的情形中，这一性质隐藏在一种称为中心平移的辅助构造之后。

很容易看出，在我们的情形（线性映射的联合可积扰动）中，在万有覆盖空间里，每一对 su-叶与中心叶都恰好相交一次。固定一点 0 的“偏好”中心叶 $\mathcal{C} = \mathcal{W}^c(0)$。

我们定义一个作用 $T_n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ of $\mathbb{Z}^d$ in $\mathcal{C}$ by

$$\{T_n x\} = \mathcal{C} \bigcap \mathcal{W}^{su}(x+n)$$

其中，按照惯例，我们将 $\mathcal{C}, \mathcal{W}^{su}(x+n) \subset \mathbb{R}^d$ 视为存在于万有覆盖空间中。



我们将这些称为中心平移。在第 3.2 节中，我们将证明，从某种意义上说，这些平移具有丢番图性质，因此可以将这些扰动线性化（第 3.3 节），并且能够利用这一丢番图性质，在第 4.1 节中沿中心方向求解上同调方程。

由于我们的目的是将这些平移线性化，因此我们首先将它们投影到一个向量空间

$$\tilde{T}_n = \Pi \circ T_n \circ \Pi^{-1} : C \to C$$

其中，$C \subset \mathbb{R}^d$ 是邻近线性映射 F 的中心子空间，而$\Pi : \mathcal{C} \to C$ 是沿着 f 的su-叶投影到该子空间上的投影。参见[Rod05，命题 B.1]，可知 Π 确实定义良好且可逆。

这 Π 不应与 π^c 混淆：$\mathbb{R}^d \to \mathcal{C}$ 投影到我们最喜欢的f中心叶状结构上

$$\{\pi^c x\} = \mathcal{C} \bigcap \mathcal{W}^{su}(x).$$

注意，π^c 和 Π 都是“合理的”全纯映射，并且$T_n(x) = \pi^c(x + n)$。因此，根据 [PSW97]，我们有

引理 2.5。如果 f 是 R-丛状且为 C^R，那么 T_n 和 $\tilde{T}_n$ 是一致 C^R 的，并且 π^c 沿着 $\mathcal{W}^c$ 的叶是一致 C^R 的。

我们将在引理 2.7 之后立即说明什么是统一的 C^R。

2.3 全纯单值泛函

我们来定义全纯映射泛函。考虑x 一个点以及$x^+ \in \mathcal{W}^{ss}(x)$，还有$x^- \in \mathcal{W}^{uu}(x)$。在每种情况下，我们按以下方式定义泛函 Hol

$$\mathrm{Hol}_x^{x^+} \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(f^n x) - \varphi(f^n x^+),$$
$$\mathrm{Hol}_x^{x^-} \varphi = -\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(f^{-n} x) - \varphi(f^{-n} x^-)$$

并且如果 $\gamma = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ 是一个su序列，也就是说 $x_j \in \mathcal{W}^{ss}(x^{j-1})$或$x_j \in \mathcal{W}^{uu}(x^{j-1})$，我们将泛函扩展。

$$\mathrm{Hol}_\gamma \varphi = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Hol}_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi.$$

在 γ 为周期的情况下，即 $x_0 = x_k$，这就是周期轨道泛函 $PCF_\gamma \varphi = \mathrm{Hol}_\gamma \varphi$。

对所有su序列 γ，条件 $PCF_\gamma \varphi = 0$ 是求解上同调方程（$\star$）的一个自然必要条件。在这种情况下，我们称

φ 具有平凡周期循环泛函，在本文中，我们将始终假设 φ 满足此条件。

因此，在这个假设下，如果 $y \in \mathcal{W}^{su}(x)$（回想一下，在这些笔记中，我们假设 f 是联合可积的），我们记作

$$\mathrm{Hol}_x^y \varphi = \mathrm{Hol}_\gamma \varphi$$

其中 $\gamma = (x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y)$ 是一个从 x 到 y 的su序列（平凡周期循环假设使其定义良好，而与 γ 的选择无关）。

形式上，$-\sum \varphi(f^n x)$ 和 $\sum \varphi(f^{-n} x)$ 满足方程（$\star$），因此，粗略地说，我们可以把“$\mathrm{Hol}_x^y \varphi = u(y) - u(x)$”视为如此。这从某种意义上表明，该泛函沿着 $\mathcal{W}^{su}$ 满足该方程。

下面我们将确立这些泛函的一些平凡性质，以供后文参考（其中一条将形式化上一段的想法）。

引理 2.6. 如果 $y, z \in \mathcal{W}^{su}(x)$，那么 Hol 满足以下性质

动力系统基本定理

$$\mathrm{Hol}_x^y (u \circ f - u) = u(y) - u(x) \tag{FT}$$

或者，等价地，

$$\left(\mathrm{Hol}_{fx}^{fy} - \mathrm{Hol}_x^y\right) \varphi = \varphi(y) - \varphi(x) \tag{FT}$$

可加性

$$\mathrm{Hol}_x^z \varphi = \mathrm{Hol}_x^y \varphi + \mathrm{Hol}_y^z \varphi. \tag{Add.}$$

我们还证明了这些泛函所需的正则性。

引理 2.7。若 f 和 φ 为 C^R，则

$$\mathrm{Hol}_{x_0}^x \varphi : \mathcal{W}^{su}(x_0) \to \mathbb{R}$$

是一致 C^R 的。

若进一步假设 f 是强 R 束状的，则

$$\mathrm{Hol}_x^{\pi^c x} \varphi : \mathcal{W}^c(x_0) \to \mathbb{R}$$

是一致 C^R。

一致 C^R 是指所有偏导数（若R 不是整数，则还包括最高阶导数的赫尔德常数）沿着 $\mathcal{W}^\sigma(x_0)$ 以及随$x_0 \in \mathbb{T}^d$变化时均有界。

证明。 对于第一部分，如果我们只关注 $\mathcal{W}^{ss}(x)$和 $\mathcal{W}_{uu}(x)$，那么这只是一个简单的计算。然后利用 Journé [Jou88]，即可得到结论。

对于第二部分，强聚束的 R 意味着 C^R 余循环~动力系统 $f: M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x,t) = (fx, t + \varphi(x))$$

是部分双曲的 R-聚束（见 [Wil13]）。

若 $y \in \mathcal{W}^{ss}(x)$，我们可以通过一个简单的计算证明，$d(\tilde{f}^n(x,0), \tilde{f}^n(x, \mathrm{Hol}_x^y \varphi))$ 以指数速度趋于 0。对于 $y \in \mathcal{W}^{uu}(x)$，我们也有类似的结果，因此

$$\mathcal{W}^{su}_{\tilde{f}}(x,t) = \left\{ (y, \mathrm{Hol}_x^y \varphi + t) : x \in \mathcal{W}^{su}_f(x) \right\}.$$

因此，由于从 $\mathcal{W}_{cf}(x_0) \times \mathbb{R}$到 $\mathcal{W}^c_f(\pi^c x_0) \times \mathbb{R}$的 C^R全纯映射是

$$(x,t) \mapsto \left(\pi^c x, \mathrm{Hol}_x^{\pi^c x} \varphi + t \right),$$

我们得到 $\mathrm{Hol}^{\pi^c}{}_{xx}\varphi$ 作为从 $\mathcal{W}^c_f(x_0)$到 $\mathbb{R}$的映射是 C^R。 □

3 中心平移是丢番图的

本节大部分内容中，我们将只关注$f = F \in SL(d,\mathbb{Z})$ 为线性自同构的情形。为了强调线性情形与非线性情形之间的区别（因为这两种情形最终会并存），我们将线性映射F 的$S \oplus C \oplus U$ 分裂称为.....，并用a 指代 $\mathbb{T}^d$ 或 $\mathbb{R}^d$ 中的点（当F 是在那里作用的映射时）。

3.1 Katznelson不可约性

定义 3.1. 如果$F \in SL(d,\mathbb{Z})$ 是具有$S \oplus C \oplus U$ 分裂的部分双曲，则称其为 *Katznelson* 不可约，如果$C \cap \mathbb{Z}^d = \{0\}$。

我们要指出，这一定义取决于分裂的选择；在许多情况下，最优的分裂是令C 成为模长为 1 的特征值对应的广义特征子空间。在后一种情况下，Katznelson不可约性就是遍历性（见下文）。

注意，由于部分双曲性，$F|_C$ 和$F^{s\oplus u}$ 没有公共特征值，因此该条件足以应用Katznelson引理 [Kat71，引理 3]。

为了与更代数化的不可约性定义进行比较，我们给出以下等价性：

引理 3.2。部分双曲自同构 $F \in SL(d,\mathbb{Z})$ 是 *Katznelson* 不可约的，当且仅当其特征多项式不存在有理因子 $\eta(x) \in \mathbb{Q}[x]$，使得该因子仅以 $F|_C$ 的特征值作为根。

证明。事实上，如果 $\boldsymbol{p} \in C \cap \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$，那么 $Q = \operatorname{span}\{F^i \boldsymbol{p}\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset C$ 是一个有理子空间，并且 $F|_Q$ 的特征多项式仅以$F|_C$ 的特征值作为根。

另一方面，$\ker \eta(F) \subset C$ 是一个有理子空间，因此其中含有整数向量。 □

由此引理，对于 $F \in SL(d,\mathbb{R})$，以下蕴含关系是显然的：

$$\text{Irreducibility} \implies \text{Katznelson Irreducibility} \implies \text{Ergodicity}.$$

并且反向蕴含均不成立，除非$F|_C$仅有模长为 1 的特征值；在这种情况下，

$$\text{Katznelson Irreducibility} \iff \text{Ergodicity}$$

因为有理多项式只有在其根都是单位根时，才可能所有根的模都为 1。

现在我们证明，在我们的假设下，这个条件实际上是解上同调方程的必要条件。

定理 3.3. 若对于 $F \in SL(d,\mathbb{Z})$ 方程 $(\star)$ 对任意具有平凡周期循环泛函的 φ 都有解，则 F 是 *Katznelson* 不可约的。

证明. 若 F 不是 Katznelson 不可约的，则取 $\eta(x) \in \mathbb{Q}[x]$，它是特征多项式 $\chi_F(x)$ 中仅以 $F|_C$ 的特征值为根的因子。

于是 $V = \ker \eta(F) \subset C$ 和 $W = \ker \frac{\chi_F}{\eta}(F) \supset S \oplus U$ 都是不变子环面。对 V 取商 $\tilde{V} = \mathbb{T}^d/W$，得到一个被 V 有限覆盖的环面。

对 F 取适当的幂后，可以假设 V 中有两个不同的不动点，它们在 V 中的投影也不同。在 $\tilde{V}$ 中定义一个在这两个投影处取值不同的任意函数，然后沿W方向将其延拓为 $\mathbb{T}^d$ 上的常值函数。

这样的函数显然具有平凡的周期循环泛函，但由于它在两个不同的不动点处取值不同，因此不可能与常数共边缘同构。 □

3.2 使用Katznelson证明丢番图性质

对于 $v \in \mathbb{R}^d = S \oplus C \oplus U$，我们称 $v^c \in C$ 为沿着 $S \oplus U$的投影。若 $\dim C = c$，则经过可能的基向量重新排列后，e_1^c、.....、e_c^c 是C的一组基。

利用此基将C 与 $\mathbb{R}^c$ 等同，我们可以把到C的投影写成线性映射P：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^c$，其中$P(e_i) = e_i$，对$i = 1, \ldots, c$成立。采用这些记号，我们可以将 § 2.2 中定义的中心平移（在线性情形下）写为$T_n a = a + Pn$，并可证明它们满足以下丢番图条件：

定义 3.4. 设线性映射P： $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^c$ 通过平移诱导一个 $\mathbb{Z}^d$-作用（$n \cdot a = a + Pn$）。若存在某些常数$K > 0$ 和 $\tau > 0$，使得对任意整数向量$q \in \mathbb{Z}^c \setminus \{0\}$，都存在某个$i = 1, \ldots, d$，从而对任意$p \in \mathbb{Z}$，则称这样的$P$ 是丢番图的。

$$|Pe_i \cdot q - p| > \frac{K}{|q|^\tau}.$$

证明这一点之后，我们将于 § 3.3 使用 Moser 证明，一般的中心平移（由映射f 给出；该映射是线性映射F 的联合可积扰动，而非线性映射本身）与邻近线性映射的丢番图平移共轭。

定理 3.5. 对于 *Katznelson* 不可约自同构 $F \in SL(d, \mathbb{Z})$，将其中心平移写作 $T_n a = a + Pn$，如前所述，我们有 P 是丢番图的，其丢番图常数为 $\tau = c$，即部分双曲分裂的中心分布维数。也就是说

$$|Pe_i \cdot q - p| > \frac{K}{|q|^c}$$

其中存在量词采用定义 *3.4* 中的形式。

在证明过程中，我们实际上会对F^t使用 Katznelson 引理。

引理 3.6. 若 $F \in SL(d, \mathbb{Z}^d)$ 是 *Katznelson* 不可约的，那么对任意整数向量 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^d$

$$d(\boldsymbol{p}, (S \oplus U)^\perp) > \frac{\hat{K}}{|\boldsymbol{p}|^c}.$$

证明. 当然，我们只需证明可以应用 Katznelson 引理 .
也就是说，我们需要证明$(S \oplus U)^\perp \cap \mathbb{Z}^d = \{0\}$，并且$F^t|_{(S \oplus U)^\perp}$与$F^t|_{C^\perp}$没有共同的特征值。

由引理 3.2 中多项式刻画的结果，以及$F^t|_{(S\oplus U)^\perp}$ 与$F|_C$、还有$F^t|_{C^\perp}$ 与$F|_{S\oplus U}$ 具有相同特征值这一事实可知，这一点显然成立。

□

定理 *3.5* 的证明。 丢番图条件等价于存在一个i 使得

$$|e_i \cdot P^t q - p| > \frac{K}{|q|^\tau}$$

这又等价于

$$\|P^t q - \boldsymbol{p}\| > \frac{K}{|q|^\tau}$$

对于任意$\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^d$ （事实上，将$\boldsymbol{p}$ 的每个坐标取为$P^t q$ 相应坐标的最近整数，即可容易推出前一个不等式）。

但是（最后一个不等式使用引理 3.6）

$$\|P^t q - \boldsymbol{p}\| \geq d(\boldsymbol{p}, \operatorname{Im} P^t) = d(\boldsymbol{p}, (\operatorname{Ker} P)^\perp) = d(\boldsymbol{p}, (S \oplus U)^\perp)) > \frac{\hat{K}}{|\boldsymbol{p}|^c}.$$

总而言之

$$\|P^t q - \boldsymbol{p}\| > \frac{\hat{K}}{|\boldsymbol{p}|^c}.$$

现在我们需要将右侧表达式中的$\boldsymbol{p}$ 换成q 。如果 $\|P^t q - \boldsymbol{p}\| > 0.5$，我们只需将$K$ 调小至 0.5 以下（注意q{v20>）；否则，$P^t q$ 与$\boldsymbol{p}$ 的范数不会相差太远，因此 $|\boldsymbol{p}| < 2|P^t q| < 2\|P^t\||q|$，最终得到

$$\|P^t q - \boldsymbol{p}\| > \frac{\hat{K}}{(2\|P^t\|)^c} \frac{1}{|\boldsymbol{q}|^c}.$$

□

3.3 使用 Moser 将中心平移线性化

定理 3.7。 对于选定的整数正则性^$k \in \mathbb{N}$，如果$f \in C^R$ 在 C^{6c+1}意义下^接近 F，且 F 是 R-丛状的，其中 $R \geq 3k + 3c + 2$ 且 $R \geq 9c + 4$，则存在^$h\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^c$，其为 C^k，使得

$$h \circ T_n \circ h^{-1}(x) = x + Pn$$

其中 $P\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^c$ 的定义与 *§ 3.2* 中邻近线性映射 F 的定义完全相同。

这基本上已在 [Rod05], 中完成，下面我们概述该构造并说明其正则性。

回想一下，在 §2.2 中，我们将 T_n 投影为向量空间 $C \to C$ 上的映射 $\tilde{T}_n$。我们也按照 § 3.2 中的做法，作出恰当的识别 $C = \mathbb{R}^c$。

借助鼓包函数，我们可以构造 $h\colon \mathbb{R}^c \to \mathbb{R}^c$ 使得

$$\tilde{h} \circ \tilde{T}_\ell \circ \tilde{h}^{-1} = R_\ell$$

对于 $\ell \in \mathbb{Z}^c \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^d$，其中 $R_\alpha = x \mapsto x + \alpha$，以及对于一般的 $n \in \mathbb{Z}^d$

$$\tilde{h} \circ \tilde{T}_n \circ \tilde{h}^{-1} \approx_{C^{6c+1}} R_{Pn}$$

（与线性映射相应平移的接近性来自[Rod05，推论 2.4]）。

为了将这一结果进一步改进为h 的同时线性化，我们遵循 Moser[Mos90]的方法。Moser 展示了如何利用某些 KAM 类型的论证，同时线性化满足与我们的条件类似的丢番图条件的圆周旋转的交换扰动。

将其推广到一般维数时，几乎所有困难都已经由 F. Rodriguez-Hertz 解决（唯一一个细微之处在于，在证明 [Rod05, Lemma B.3] 中，使用了 $F|_C$ 是一个等距变换这一事实，但实际上，只需假设其具有部分双曲性，该论证同样成立）。

这里我们将沿用 Moser 中的常数，看看它们能在多大程度上得到优化。显然，在我们的情形下 $\tau = c$。Moser 的引理 3.1 中有一个关于 $\mathbb{Z}^c$ 的收敛条件；在我们的情形下，这意味着我们需要$\sigma > 2\tau + c = 3c$。

在第 119 页，我们暂时保留变量 κ 和 ℓ 为自由变量，并令 $N_s = \varepsilon_s^{-\xi}$，其中 ξ 为自由变量。要使本页其余部分成立，所需条件为

$$\begin{aligned} \xi\sigma + 1 &> \kappa, \\ -\xi + 2 - \frac{2}{\ell} &> \kappa, \\ \ell\xi - 1 &> \kappa. \end{aligned}$$

在下一页中，我们将变量 m 保持为自由变量，并且需要论证对k 一直到 $\hat{k}$ 都成立，因此论证成立的条件应为

$$-\xi\sigma + 1 - \frac{\hat{r}}{m} - \frac{\hat{r}}{m}\frac{\xi\sigma + \kappa - 1}{\kappa - 1} > 0.$$

为了使论证成立，我们需要存在至$\ell + \sigma$ 阶的导数以及$m + \sigma$，并控制至 ℓ阶的导数。因此，我们需要对这些数值进行优化。

当 κ 足够接近 **1** 且 ξ 足够接近 $\frac{\kappa-1}{\sigma}$ 时，这些条件得到满足。

$$\ell > 2\sigma,$$
$$m > 3\hat{k}.$$

由于 σ、 ℓ 和 m 需要为整数，因此我们可以通过 $\hat{}\sigma = 3c + 1$、 $\ell = 6c + 3$ 和 $m = 3k + 1$ 来求解该问题。

3.4 利用傅里叶方法求解中心平移的上同调方程

到目前为止，我们已经说明，从某种意义上说，中心平移是丢番图的。现在我们将说明，丢番图平移在求解某些上同调方程时不受任何限制。

定理 3.8. 设线性映射 $P\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^c$，通过平移诱导一个 $\mathbb{Z}^d$-作用，且为丢番图（见定义 *3.4*）。进一步假设，对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}^c \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^d$，$P\ell = \ell$。

那么，对于诱导作用的任意 $C^{r+2c+Hölder}$ 余循环 $\Phi\colon \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^c \to \mathbb{R}$，它在 C^r意义下与一个群态射 $\lambda\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$上同调等价；也就是说，存在 $u \in C^r(\mathbb{R}^c, \mathbb{R})$，使得

$$\Phi(n, a) = u(a + Pn) - u(a) + \lambda(n).$$

此外 $\lambda(n) = \int_{[0,1]^c} \Phi(n, a)da$。

我们指出，条件 $P\ell = \ell$ 可以替换为定义在环面 $\mathbb{T}^c$上。

证明。 在此证明中，我们记 $\mathbb{Z}^c = \mathbb{Z}^c \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^d$，使得对$\ell \in \mathbb{Z}^c$有 $P\ell = \ell$。此外，我们将不同的常数称为“K”。

首先，通过构造 $v\colon \mathbb{R}^c \to \mathbb{R}$，将其投影到环面 $\mathbb{T}^c = \mathbb{R}^c/\mathbb{Z}^c$ 上，使得 $\tilde{\Phi}(n, a) = \Phi(n, a) + v(a + Pn) - v(a)$ 满足 $\tilde{\Phi}(n, a + \ell) = \tilde{\Phi}(n, a)$对 $\ell \in \mathbb{Z}^c$成立。

接下来我们将定义 v 对于$a \in [0, 1)^c$，之后再将其推广到$a + \ell \in \mathbb{R}^c$，$\ell \in \mathbb{Z}^c$，方法是

$$v(a + \ell) = v(a) - \Phi(\ell, a)$$

这样我们就得到 $\ell \in \mathbb{Z}^c$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(n, a+\ell) &= \underbrace{\Phi(n, a+\ell)}_{\Phi(n+\ell,a)-\cancel{\Phi(\ell,a)}} + \underbrace{v(a+\ell+Pn)}_{v(a+Pn)-\Phi(\ell,a+Pn)} \underbrace{-v(a+\ell)}_{-v(a)+\cancel{\Phi(\ell,a)}} \\ &= \underbrace{\Phi(n+\ell, a) - \Phi(\ell, a+Pn)}_{\Phi(n,a)} + v(a+Pn) - v(a) \\ &= \tilde{\Phi}(n, a).\end{aligned}$$

我们只需选取一个光滑的 v： $[0,1)^c \to \mathbb{R}$，使其延拓到$\mathbb{R}^c$ 后在 $[0,1]^c$ 的边界处光滑。为此，取一个b： $[0,1] \to [0,1]$ 光滑隆起函数（C^∞，在 0 附近恒为 0，在 1 附近恒为 1），并直接定义

$$v(a) = -\sum b(a_i)\Phi(e_i, a - e_i)$$

其中，$e_i \in \mathbb{Z}^c$ 是标准基元素，a_i 是a的第i个坐标。根据这个定义可以验证，当某个a_i 趋近于 1 时，v与延拓给出的定义一致，因此光滑性显而易见。

现在可以认为，P 在环面 $\mathbb{T}^c$ 上诱导了一个作用，其余循环 Φ 与 $\mathbb{R}^c$中的原余循环上同于~。因此，我们实际上已将问题“投影”到了环面上，在那里可以使用傅里叶方法：

$$\tilde{\Phi}(n, a) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^c} \hat{\Phi}_{n,\ell} e^{2\pi i \ell \cdot a}.$$

余循环条件（$\tilde{\Phi}(n+m, a) = \tilde{\Phi}(n, a) + \tilde{\Phi}(m, a+Pn)$）现在变为

$$\hat{\Phi}_{n+m,\ell} = \hat{\Phi}_{n,\ell} + \hat{\Phi}_{m,\ell} e^{2\pi i \ell \cdot Pn}$$

这意味着 $\hat{\Phi}_{n,\ell} + \hat{\Phi}_{m,\ell} e^{2\pi i \ell \cdot Pn} = \hat{\Phi}_{m,\ell} + \hat{\Phi}_{n,\ell} e^{2\pi i \ell \cdot Pm}$，因为我们可以交换$n$和$m$的角色。由此

$$\frac{\hat{\Phi}_{n,\ell}}{e^{2\pi i \ell \cdot Pn} - 1} = \frac{\hat{\Phi}_{m,\ell}}{e^{2\pi i \ell \cdot Pm} - 1}. \tag{1}$$

现在我们想在此背景下解决原问题：也就是求w 和 λ，使得

$$\tilde{\Phi}(n, a) = w(a+Pn) - w(a) + \lambda(n).$$

当然 $\lambda(n) = \int \tilde{\Phi}(n, a) da$（余循环条件对于 $\tilde{\Phi}$ 就转化为 λ 的群态射条件）。由于平移保持体积不变，我们有 $\int \tilde{\Phi}(n, a) da = \int_{[0,1]^c} \Phi(n, a)\, da$。

至于其余的傅里叶系数，它们应满足

$$\hat{w}_\ell = \frac{\hat{\Phi}_{m,\ell}}{e^{2\pi i \ell \cdot Pm} - 1}$$

鉴于（1），该表达式定义良好。此外，为丢番图条件 3.4 选取正确的 i，使得 $|e^{2\pi i \ell \cdot Pm - 1}| \geq Kd(\ell \cdot Pm, \mathbb{Z}) > K|\ell|^{-c}$，并利用 $|\hat{\Phi}_{e_i,\ell}| \leq K\|\hat{\Phi}_{e_i}\||\ell|^{-r-2c-\varepsilon}$，我们有

$$|\hat{w}_\ell| \leq K\left|\hat{\Phi}_{e_i,\ell}\right||\ell|^c \leq K\|\hat{\Phi}_{e_i}\||\ell|^{-r-2c-\varepsilon}|\ell|^c \leq K|\ell|^{-r-c-\varepsilon}$$

因此，\(\hat{w}\) 的傅里叶级数收敛于一个 \(C^{r+\text{Hölder}}\) 函数。

现在我们将这个w 视为在 $\mathbb{R}^c$ 中定义，并令$u = v + w$. □

3.5 中心平移的极小性

下面是一个稍后会用到的小引理：

引理 3.9。 中心平移 T_n： $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 的任意轨道（当 n 沿$\mathbb{Z}^d$变化时）都是稠密的。

证明。 根据引理 3.7，我们只需在线性情形下证明这一点，其中T_n： $\mathbb{R}^c \to \mathbb{R}^c$ 具有$T_n a = a + Pn$的形式，其中P 满足定义 3.4 中的丢番图条件，且$P\ell = \ell$ 对 $\ell \in \mathbb{Z}^c \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^d$成立。

由于$P\ell = \ell$ 条件，我们可以将T_n 视为作用在环面$\mathbb{T}^c$ 上，因此只需证明集合 $\{Pn\}_{n\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{T}^c$ 是稠密的。

根据闭李群的分类，很容易看出，对于某个子环面$V \subset \mathbb{T}^c$ 和有限子群$Q \subset \mathbb{T}^c$,

$$\overline{\{Pn\}} = V + Q.$$

如果$V \subsetneq \mathbb{T}^d$，那么我们可以取一个与$V$ 垂直的整数向量$p \in \mathbb{Z}^c$，并且（例如，乘以Q中所有元素的所有坐标的分母的最小公倍数），使得对每个Q中的$q \in$，都有$p \cdot q \in \mathbb{Z}$。

因此，现在对每个$n \in \mathbb{Z}^d$，我们都有$Pn = v + q$，其中某些$v \in V$ 和$q \in Q$满足条件；但这样一来，$Pn \cdot p = q \cdot p \in \mathbb{Z}$，这与丢番图条件矛盾，因此$V = \mathbb{T}^d$，而 0 的轨道（从而任意轨道）都是稠密的。 □

4 定理 A 的证明

4.1 沿中心叶求解上同调方程

4.1.1 构造解

到目前为止，我们的工作使我们能够求解中心平移T_n对应的上同调方程。这不禁让人想问：这与原始动力系统f有什么关系?

现在的思路是将全纯单值泛函的信息捕捉到一个关于中心平移的余循环中:

$$\mathrm{Hol}(n,x)=\mathrm{Hol}_{x+n}^{T_n x}\,\varphi.$$

事实上，这是关于T_n 的一个余循环（下文将用到su-叶状结构和 φ 是 $\mathbb{Z}^d$-不变的这一事实，以及（附加条件））:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hol}(n+m,x)&=\mathrm{Hol}_{x+n+m}^{T_{n+m}x}\,\varphi\\&=\left(\mathrm{Hol}_{x+n+m}^{T_m x+n}+\mathrm{Hol}_{T_m x+n}^{T_{n+m}x}\right)\varphi\\&=\left(\mathrm{Hol}_{x+m}^{T_m x}+\mathrm{Hol}_{(T_m x)+n}^{T_n(T_m x)}\right)\varphi\\&=\mathrm{Hol}(m,x)+\mathrm{Hol}(n,T_m x).\end{aligned}$$

根据定理 3.7，存在h 使得$h(T_n x)\ =h(x)+Pn$，其中P按照定义 3.4 的意义是丢番图的。因此

$$\widehat{\mathrm{Hol}}(n,a)=\mathrm{Hol}\left(n,h^{-1}(a)\right)$$

是平移作用下的 P 余循环。因此，我们可以应用定理 3.8，得到:

$$\widehat{\mathrm{Hol}}(n,a)=\hat{u}(a+Pn)-\hat{u}(a)+\lambda(n)$$

这进而为 T_n-余循环给出了一个类似的结果:

$$\mathrm{Hol}(n,x)=u(T_n x)-u(x)+\lambda(n)\tag{2}$$

其中 $u\ =\hat{}u\circ h$。

就正则性而言，这个 u 来自定理 3.8，因此如果 $\widehat{\ }\mathrm{Hol}$ 和 h 是 $C^{k+2c+\text{Hölder}}$，它将是$C^{k+\text{Hölder}}$ 。根据引理 2.7，我们需要 F 是$(k\ +2c\ +\varepsilon)$-强聚束的，使 $\mathrm{Hol}^{T_n}{}_{xx+n}\ \varphi=\mathrm{Hol}_{\pi^c(x+n)\ x+n}\varphi$ 具有这种正则性（此外，其自身也具有这种正则性）。

另一方面，h 来自定理 3.7，因此我们需要f 与F 之间的距离为C^{6c+1}，并且 F 既是$(3k\ +9c\ +3)$ 聚束的，也是$(9c\ +4)$聚束的。

4.1.2 解的性质

本笔记其余部分所需的几项显然计算会涉及一个“麻烦的” λ，因此我们先证明它等于 0，以免后续再处理。

引理 4.1。在方程(2) 中，我们有 $\lambda = 0$。
证明。 由引理 3.8 可知 $\lambda(n) = \int \widehat{\mathrm{Hol}}^{[0,1]^c}(n, a)\, da$。因此，我们的策略是证明 $\mathrm{Hol}^{T_n x}_{x+n}$ 关于 n 的增长是次线性的（且对 x 一致），这意味着要使 λ 为线性，它别无选择，只能为 0。

我们称 $S_n x = \mathcal{W}^s(x+n) \cap \mathcal{W}^u(T_n x)$，即满足以下条件的点

$$\mathrm{Hol}^{T_n x}_{x+n}\, \varphi = \left(\sum_0^\infty \varphi(f^i(x+n)) - \varphi(f^i S_n x) \right) - \left(\sum_1^\infty \varphi(f^{-i}(S_n x)) - \varphi(f^{-i} T_n x) \right).$$

我们将证明 $\sum_0^\infty \varphi(f^i(x+n)) - \varphi(f^i S_n x)$ 关于 n 是次线性的（另一半的证明类似）。显然，由于所有叶都靠近线性叶，$x+n$ 与 $S_n x$ 之间的距离关于 n 有线性界；又因为稳定流形以指数速度收缩，所以存在 i(n)（关于 n 对数增长），使得 $f^{i(n)+j}(x+n)$ 与 $f^{i(n)+j} S_n x$ 之间的距离至多为 μ^j，其中 $\mu < 1$ 是部分双曲性的收缩率。所以

$$\sum_{i(n)}^\infty \varphi(f^i(x+n)) - \varphi(f^i S_n x) < K$$

and

$$\mathrm{Hol}^{T_n x}_{x+n}\, \varphi < 2i(n) \max \varphi + K.$$

□

现在我们可以沿中心叶求解上同调方程：

引理 4.2。 方程(2) 的 u 满足

$$\varphi(x) = u(fx) - u(x) + \text{const.}$$

对于任意 $x \in \mathcal{C}$。

证明。 我们将把 $u^f = u \circ f - u$称为（因此目标是证明 $u_f - \varphi$是常数）。

在进行计算之前，注意到$f(x+n) = fx + Fn$，其中 F 是邻近线性映射，并且 f $T_n x = T_{Fn} fx$（因为二者都位于 $\mathcal{W}^{su}(fx+Fn) \cap \mathcal{C}$ 中）。在其中一个步骤中，我们还将使用方程（FT）。

$$\begin{aligned} u_f(T_n x) - u_f(x) &= u(fT_n x) - u(fx) - (u(T_n x) - u(x)) \\ &= u(T_{Fn} fx) - u(fx) - \mathrm{Hol}_{x+n}^{T_n x} \varphi \\ &= \mathrm{Hol}_{fx+Fn}^{T_{Fn} fx} \varphi - \mathrm{Hol}_{x+n}^{T_n x} \varphi \\ &= \left(\mathrm{Hol}_{f(x+n)}^{fT_n x} - \mathrm{Hol}_{x+n}^{T_n x} \right) \varphi \\ &= \varphi(T_n x) - \varphi(x+n) \\ &= \varphi(T_n x) - \varphi(x). \end{aligned}$$

因此，我们得出

$$u_f(x) - \varphi(x) = u_f(T_n x) - \varphi(T_n x),$$

因此，由于 T_n 作用的连续性和极小性（引理 3.9），我们得出确实 $u^f - \varphi$ 为常数。 □

4.2 延拓解

因此，在第 4.1 节之后，我们有满足上同调方程（$\star$）的 $u\colon\ \mathcal{C} \to \mathbb{R}$。我们只需将其延拓，首先延拓到 $\mathbb{R}^d$（因为我们滥用了记号），然后证明它投影到 $\mathbb{T}^d$（并且它确实是一个解）。这样的延拓将是

$$u(x) = u(\pi^c x) - \mathrm{Hol}_x^{\pi^c x} \varphi$$

其中，右端的 u 是定义良好的，因为 $\pi^c x \in \mathcal{C}$。

引理 4.3。 此 u 满足上同调方程$(\star)$。

证明。 首先注意到 $\pi^c fx = f\,\pi^c x$，因为叶层是 f-不变的。下文将使用引理 4.2 和“基本”定理（FT）。

$$\begin{aligned} u(fx) - u(x) &= u(f\pi^c x) - u(\pi^c x) - \left(\mathrm{Hol}_{fx}^{f\pi^c x} - \mathrm{Hol}_x^{\pi^c x} \right) \varphi \\ &= \varphi(\pi^c x) - K - (\varphi(\pi^c x) - \varphi(x)) \\ &= \varphi(x) - K. \end{aligned}$$

□

引理 4.4。 这个 u 在环面 $\mathbb{T}^d$ 上定义良好，也就是说，对于每个 $n \in \mathbb{Z}^d$，$u(x+n) = u(x)$ 。

证明。 首先注意到，由于二者都属于交集 $\mathcal{W}^{su}(x+n) \cap \mathcal{C}$，因此 $\pi^c(x+n) = T_n \pi^c x$ 。我们还将用到 φ 的 $\mathbb{Z}^d$-不变性、§ 4.1 中给出的沿 $\mathcal{C}$ 的 u 的定义（即 $u(T_n x) - u(x) = \mathrm{Hol}^{T_n}_{xx+n} \varphi$），以及（Add.）。

$$\begin{aligned} u(x+n) - u(x) &= u(\pi^c(x+n)) - u(\pi^c x) - \left(\mathrm{Hol}^{\pi^c(x+n)}_{x+n} - \mathrm{Hol}^{\pi^c x}_{x}\right) \varphi \\ &= u(T_n \pi^c x) - u(\pi^c x) - \left(\mathrm{Hol}^{T_n \pi^c x}_{x+n} - \mathrm{Hol}^{\pi^c x+n}_{x+n}\right) \varphi \\ &= \mathrm{Hol}^{T_n \pi^c x}_{\pi^c x+n} \varphi - \mathrm{Hol}^{T_n \pi^c x}_{\pi^c x+n} \varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

我们来说明 u 的正则性。如果满足 § 4.1 中描述的 u 条件：$\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ 为 $C^{r+\text{Hölder}}$，并使用引理 2.7 的第二部分，那么扩展后的 u 沿 $\mathcal{W}^c$ 一致地为 $C^{r+\text{Hölder}}$。

我们的 u 对方向 su 的唯一依赖是 $\mathrm{Hol}^x_{x_0} \varphi$ 中最上方的 x，因此利用引理 2.7 的第一部分，我们就得到了沿该方向所需的正则性。

因此，利用 Journé 引理 [Jou88]，我们得到：如果正则性和丛化条件足够，u 就是 C^r 。

A 附录

A.1 定理 A 的正则性

在尝试应用我们的定理时，需要知道所需的丛化条件程度，因此我们在下文明确说明所需的丛化条件和正则性。

定理 A'。 对于该定理，我们将 c^p 称为部分双曲分裂中中心分布的维数，将 c_1 称为邻近线性映射 F 的模为 1 的特征值所对应的广义特征子空间的维数。

固定所需的整数正则性 $k \in \mathbb{N}$，并将最小正则性界定义为

$$\begin{aligned} R_b &\geq \begin{cases} \max\{3k + 9c_1 + 3, 9c_p + 4\} & \text{if } c_1 \neq 0, \\ \max\{k + \varepsilon, 9c_p + 4\} & \text{if } c_1 = 0 \end{cases}, \\ R_{sb} &> \max\{k + 2c_1, 2c_p\}. \end{aligned}$$

在定理 A 中，如果我们希望 $u \in C^{k+\text{Hölder}}$，所需的确切正则性如下：

一般情形

- F 需要是R_b-聚束的，且f 需要是C_{R_b}，
- F 需要是强R_{sb}-聚束的，且 φ 需要是$C_{R_{sb}}$，并且
- f 需要是$C^{6_{c_p}+1}$-接近F。

线性情形 在$f = F$ 是线性的情况下

- F 需要是强R_{sb}-聚束的，且 φ 需要是$C_{R_{sb}}$。或者

- F 需要是强$(2c_p + \varepsilon)$-聚束，并且
- φ 需要是 C_{k+d+}赫尔德连续的。

低中心维数 如果 $c_p = 1$ 且 $c_1 = 0$

- F 需要是$(4+\varepsilon)$-聚束的，并且f需要在C^{4+}赫尔德意义下接近F，并且

- F 需要是强R_{sb}聚束的，而 φ 需要是$C_{R_{sb}}$。

若$c^p = c_1 = 2$ 且F 不可约，满足$d > 4$（或者包含复特征值的不可约因子的次数大于 4）

- f 需要是 $C^4{}_{k+8+}$赫尔德连续地接近 F，并且
- φ 需要是 C_{k+4+}赫尔德连续的。

证明。 注意，通过先应用带有 $k = 0$的定理，我们总是能够提升解的正则性。在推论 B 和注记2.3之后，对于由 F 的任意部分双曲分裂所产生的任意分裂，我们都具有联合可积性。因此，一旦我们知道 φ 是一个余边界，就可以假设中心方向是模为 1 的特征值的广义特征子空间的（扰动）（或者，如果情形允许，也可以应用 Livsic 或 Veech [Vee86]）。

一般情形下，只需在证明过程中沿着正则性逐步推演即可。

对于线性情形，一方面，我们无需借助 Moser 将中心平移线性化；另一方面，在某些情况下，采用 Veech 的方法进行引导可能更好。

在低维情形中，只需一次平移即可获得丢番图性质（参见 [Rod05，关于 $c = 2$ 情形的引理 A.11]），因此我们可以绕过 Moser，改用更传统的 KAM理论（参见 [Her79 ，§ A.2] 和 [Rod05，§ 6.1]）。 □

我们还可以进一步指出，φ 只需沿中心方向达到$C^{R_{sb}}$ 正则性，而沿su方向只需达到C^k正则性。此外，若要求u 沿中心方向达到C^k 正则性，并沿C^ℓ su方向达到su正则性（其中 $\ell \le k$），则需要 φ 沿中心方向达到$C^{R_{sb}}$ 正则性，并沿C^ℓ su方向达到su正则性。这里要求这些正则性是一致的。

我们指出，根据 [Vee86，命题 1.5]，，至少会损失一定的正则性。我们并未声称正则性的具体损失和丛化条件是最优的，不过，要显著改进这些数值，可能需要更精细的技术。

A.2 两个玩具示例

本节使用第 § 2.3 节中定义的全纯映射泛函。

我们可以独立地沿su-叶和中心叶求解方程，然后将所得解拼接起来的最简单例子是$(x,\ y) \to (x + \alpha,\ Ay)$，其中 α 是丢番图的，而A 是 Anosov 的。为了一般性起见，我们证明一个更强的结论。

定理A.1。 设 $f\colon M \to M$ 是部分双曲的，使得$(\star)$ 对于任意具有平凡周期循环泛函的 φ，都存在一个解$\tilde{}$；并设 $f\colon M \times N \to M \times N$ 且为双曲扩张

$$\tilde{f}(x,y) = (fx, g_x y)$$

从而存在一个概率测度 μ，该测度对 g_x 保持不变，对每个 x 都成立（并且 N 上的扩张和收缩支配 f 的中心方向）。

Then $\tilde{f}$ 是余循环稳定的。

定理 A.2。 设 $f\colon M \to M$ 为余循环稳定的，并考虑悬挂空间 $\tilde{M} = (\mathbb{R} \times M)/f$，其中 $(x,y) \sim (x - 1, fy)$。对于 α 丢番图映射$\tilde{f}\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$

$$\tilde{f}(x,y) = (x + \alpha, y)$$

是余循环稳定的

两个定理的证明相同（这就是第二个定理中采用那种笨拙记法的原因）。

证明。 对于第二个定理，考虑f的一个不变测度 μ。如果 φ 具有平凡周期循环泛函，那么显然它也具有平凡周期循环泛函

$$\varphi_\mu(x) = \int_N \varphi(x,z)\, d\mu(z)$$

因此我们可以求解

$$\varphi_\mu(x) = u_\mu(fx) - u_\mu(x) + K.$$

现在定义

$$u(x,y) = u_\mu(x) + \int_N \mathrm{Hol}_{(x,z)}^{(x,y)}\, \varphi\, d\mu(z).$$

现在，利用 **(FT)**，我们证明

$$\begin{aligned} u(\tilde{f}(x,y)) - u(x,y) &= u_\mu(fx) - u_\mu(x) + \int_N \left(\mathrm{Hol}_{\tilde{f}(x,z)}^{\tilde{f}(x,y)} - \mathrm{Hol}_{(x,z)}^{(x,y)}\right) \varphi\, d\mu(z) \\ &= \int_N \varphi(x,z)\, d\mu(z) - K + \int_N (\varphi(x,y) - \varphi(x,z))\, d\mu(z) \\ &= \varphi(x,y) - K. \end{aligned}$$

□

第一个定理的一个有趣例子是幂零流形 N 上的自同构 F，使得映射 $\pi : N \to \mathbb{T}^a$ 的纤维是双曲的，并且 F 在 $\mathbb{T}^a$ 上的投影是 Katznelson 不可约。这些性质很容易验证：如果

$$DF = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & A_{k-1} \\ & & & & A_k \end{pmatrix}$$

使得对于$i = 1$、.....、$k-1$，A_i是双曲的，并且A_k是 Katznelson 不可约的；相对于部分双曲分裂，其中心方向应位于对应A_k的坐标上。则F 是余循环稳定的。

这个证明实际上适用于任何具有余循环稳定因子、且纤维呈双曲性（支配因子的中心方向），并具有“足够好”横截测度的映射。

例如，“足够好”可以指光滑体积。我们总可以利用选择公理构造横截测度，但在这种情况下，解 u 甚至都不可测。

参考文献

[Her79] Michael R. Herman.《圆周微分同胚与旋转的可微共轭》。载于：*PublicationsMathématiques de l'IHÉS*49（1979），第5–233页。[HPS70] M. W. Hirsch、C. C. Pugh 和 M. Shub.《不变流形》。载于：*Bulletin of the AmericanMathematical Society* 76.5（1970年9月），第1015–1019页。[Jou88] Jean-Lin Journé.《多变量函数的一个正则性引理》。载于：*RevistaMatemática Iberoamericana* 4.2（1988年8月），第187–193页。[Kat71] Yitzhak Katznelson.《Tn 的遍历自同构是伯努利移位》。载于：*Israel Journalof Mathematics* 10.2（1971年6月），第186–195页。[KK96] A. Katok 和 A. Kononenko.《部分双曲系统的余循环稳定性》。载于：*Math. Res. Letters* 3（1996），第191–210页。[Mos90] Jürgen Moser.《关于交换圆映射与同时丢番图逼近》。载于：*Mathematische Zeitschrift*205.1（1990年9月），第105–121页。[PSW97] Charles Pugh、Michael Shub 和 Amie Wilkinson.《赫尔德叶状结构》。载于：*DukeMathematicalJournal* 86.3（1997年1月），第517–546页。[Rod05] Federico Rodriguez Hertz.《环面上某些线性自同构的稳定遍历性》。载于：*Annals of Mathematics*162.1（2005年7月），第65–107页。[Vee86] William A. Veech.《环面自同态的周期点与不变伪测度》。载于：*ErgodicTheoryandDynamicalSystems*6.3（1986年9月），第449–473页。[Wil13] Amie Wilkinson.《部分双曲微分同胚的上同调方程》。载于：*Astérisque* 358（2013），第75–165页。