arXiv:2305.01187v2 [math.CT] 1 Feb 2024

正合函子下 Loewy 图的保持

Matthew Rupert

摘要

我们推导出局部有限阿贝尔范畴上的正合函子保持对象 Loewy 图的充分条件。我们将这些结果应用于确定与顶点代数的单流扩张相关的诱导函子保持 Loewy 图的充分条件。

1 引言

对象的 Loewy 图是一种图示，其各层由 Loewy 级数的半单商构成，并用箭头标示非分裂子商的存在。这类图示是确定诸如射影覆盖等抽象定义对象结构的有用工具。它们已被用于研究许多不同代数上的模的结构，包括但不限于顶点代数 [CCG]，Temperley–Lieb代数 [BRS]，和量子群 [CRR]。对于 Loewy 长度为二的 Loewy 图，有时可以像 [CKL，图 1]中那样，直接证明正合函子保持 Loewy 图。然而，对于长度大于二的 Loewy 图，例如 [CRR]中出现的那些图，这些方法便不再适用。因此，我们希望得到一个一般判据，用以判断对象的 Loewy 图是否在正合函子的作用下保持不变。

作者研究正合函子下 Loewy 图保持性的主要动机源自顶点代数扩张理论。许多有趣的顶点代数扩张都可以实现为单流扩张，也就是说，它们分解为可逆模（或单流）的直和。例如，triplet $W_Q(p)$ 是 singlet $W_Q^0(p)$ 的单流扩张，其中$p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 和 Q 是一个单连通简单有限维复李代数的根格，而 $B_Q(p)$ 顶点算子代数是$W_Q^0(p)\otimes$H 的单流扩张，其中 H 是 Heisenberg顶点代数。将顶点代数中的信息提升到其单流扩张的一种方法是使用诱导函子。特别地，考虑以下强有力的结果：

定理1.1. [CKL，CKM，HKL]
设 $\mathcal{C}$ 是某个顶点算子代数 V 上的模范畴，并具有自然的顶点张量范畴结构。那么以下条件等价：

- 一个顶点算子代数扩张 $V \subset V^e$，其中 $V^e \in \mathcal{C}$ 是一个 V-模。
- 是 $\mathcal{C}$ 中的交换结合代数，具有平凡扭结和单射单位元。

此外，位于 $\mathcal{C}$ 中且作为 V模的 V^e模范畴，与 $\mathrm{Rep}^0 V^e$编织等价；此时将 $V^e \in \mathcal{C}$ 视为交换代数对象。

交换代数对象具有诱导函子（见公式（2.2））， 这些函子保持投射性。因此， 了解此类函子何时保持 Loewy 图， 是将顶点代数上投射模结构的信息推广到其单流扩张的一种便捷判据。

一个特别有趣的单流扩张例子是单仿射顶点算子代数 $L_{-\frac{3}{2}}(\mathfrak{sl}_3)$， 它是 $W^0_{A_2}(2) \otimes \mathrm{H}$的单流扩张， 也是秩 1 之外最容易处理的例子之一。文献 $L_{-\frac{3}{2}}(\mathfrak{sl}_3)$ 中给出了关于射影覆盖的 Loewy 图结构的猜想， 见 [CRR， 图 7]。这些猜想的构造隐含地基于一个假设（以及其他假设）： 相应的诱导函子保持 Loewy 图。我们在第 3节探讨正合函子何时保持 Loewy 图这一一般性问题， 并得到以下结果（定理 3.3 和推论 3.5）：

定理 1.2. 设 $\mathcal{C}$ 是局部有限阿贝尔范畴， 且 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个保持底（或根）滤过（定义 3.2）的强正合函子（定义 3.1）， 则 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持相应的 Loewy 图。

在第 3.1 节中， 我们将此结果应用于与交换代数对象相关的诱导函子； 这些交换代数对象是由一组可逆对象构成的直和 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$:

$$A := \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} U_i.$$

当这一集合 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 在乘积和对偶运算下封闭时， 我们将这类代数对象称为交换单流代数对象（详见小节 2.3 ）。如果集合 A 没有不动点， 我们称其为无不动点（参见定义 2.5）。我们得到以下结果（定理 3.8）：

定理 1.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个编织局部有限阿贝尔范畴， $A \in \mathcal{C}$ 是一个没有不动点且作为左 A-模为单的交换单流代数对象。那么诱导函子 $\mathcal{F}_A\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}\, A$ 保持 Loewy 图。

致谢

作者感谢 Thomas Creutzig 提供的宝贵意见。作者获得太平洋数学科学研究所（PIMS）博士后奖学金项目的资助。

2 预备知识

全文中我们假设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴。给定 $\mathcal{C}$中的单态射 $f:X \to Y$，我们采用标准记号 $Y/X:=\mathrm{Coker}(f)$。阿贝尔范畴中余核总是存在，且正合函子会保留余核。若 $\mathcal{F}:\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是正合的，则 $\mathcal{F}(\mathrm{Coker}(f)) \cong \mathrm{Coker}(\mathcal{F}(f))$，用商记号可表示为$\mathcal{F}(Y/X) \cong \mathcal{F}(Y)/\mathcal{F}(X)$。

2.1 Loewy 图

回顾一下，对象 $M \in \mathcal{C}$ 的级数是按包含关系排列的严格递增的子对象族:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M \qquad \text{or} \qquad 0 = M_n \subset M_{n-1} \subset \ldots M_0 = M.$$

这种级数的相继商对象是商对象 $M_1/M_0, M_2/M_1$, ..., M/M_{n-1} 或 M_0/M_1,..., M_{n-1}/M_n ，整数 n 称为级数长度。

定义 2.1。 $M \in \mathcal{C}$ 的 Loewy 级数是在具有半单相继商对象的级数中长度最小的级数。

给定对象 $M \in \mathcal{C}$， M 的底 $\mathrm{Soc}(M)$ 是 M 的最大半单子对象。也就是说，它是 M 的所有单子对象的直和。 M 的根 $\mathrm{Rad}(M)$ 是 M 的所有极大子对象的交。Loewy 级数有两个标准例子，分别称为 $M \in \mathcal{C}$ 的底级数和根级数。 $M \in \mathcal{C}$ 的根级数

$$0 = \mathrm{rad}_n(M) \subset \mathrm{rad}_{n-1}(M) \subset \ldots \subset \mathrm{rad}_1(M) \subset \mathrm{rad}_0(M) = M$$

通过归纳定义为 $\mathrm{rad}_0(M) = M$ and $\mathrm{rad}_k(M) = \mathrm{Rad}(\mathrm{rad}_{k-1}(M))$。 $M \in \mathcal{C}$的底级数

$$0 = \mathrm{soc}_0(M) \subset \mathrm{soc}_1(M) \subset \ldots \subset \mathrm{soc}_{n-1}(M) \subset \mathrm{soc}_n(M) = M$$

通过归纳定义为 $\mathrm{soc}_1(M) = \mathrm{Soc}(M)$，并令 $\mathrm{soc}_k(M)$ 为 M 的唯一子对象，使得

$$\mathrm{Soc}(M/\mathrm{soc}_{k-1}(M)) \cong \mathrm{soc}_k(M)/\mathrm{soc}_{k-1}(M). \tag{2.1}$$

定义 2.2. 给定 $M \in \mathcal{C}$ 的固定 Loewy 级数 $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$，相应的 Loewy 图是由水平层构成的图，其中从底部数起的第 k 层由 M_k/M_{k-1} 中的单因子组成。若存在 M_k/M_{k-2} 的一个子商 X，使得存在一个非分裂短正合列，则 Loewy 图中会标注竖直箭头，从第 k 层的不可约因子 X_k 指向第 $k-1$ 层的 X_{k-1}。

$$0 \to X_{k-1} \to X \to X_k \to 0.$$

注 2.3. 底层过滤的定义隐含地表明，M 的子对象 $\mathrm{soc}_k(M)$ 在 M 中的嵌入是唯一的，具体而言，若 $f, g\colon \mathrm{soc}_k(M) \to M$ 是任意两个单态射，则 $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$，因此 $\mathrm{Coker}(f) \cong \mathrm{Coker}(g)$。对于 $\mathrm{soc}_1(M) = \mathrm{Soc}(M)$，这显然成立；对于 $k > 1$，则可通过归纳法看出：若 $\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Im}(g)$，那么存在一个典范态射 $\phi\colon \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) \to M$，其像 $\mathrm{Im}(\phi)$ 是 M 的一个子对象，包含作为子对象的 M_{k-1}，且它对 M_{k-1} 取商所得的（唯一）商对象是半单的，这与公式 (2.1) 矛盾。

2.2 代数对象

现在我们介绍编织范畴中交换代数对象所需的背景知识。更详细的论述请参见 [CKM, KO]。下文中，设 $\mathcal{C}$ 为一个编织范畴，其编织为 $c_{-,-}$，结合子同构为 $a_{-,-,-}$，左单位同构为 ℓ_-。

定义 2.4. $\mathcal{C}$ 中的结合代数是一个对象 $A \in \mathcal{C}$，配备映射 $\mu\colon A \otimes A \to A$ 和 $\iota\colon \mathbb{1} \to A$，使得

- $\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_A) \circ a_{A,A,A} = \mu \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \mu)$. Associativity
- $\mu \circ (\iota \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \ell_A^{-1} = \mathrm{Id}_A$. Unit

如果 $\mu \circ c_{A,A} = \mu$，则称这样的代数为交换的。

我们将范畴 $\mathrm{Rep}A$ 定义为由对象 (M, μ_M) 组成，其中 $M \in \mathcal{C}$ 且 $\mu_M\colon A \otimes M \to M$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，使得

- $\mu_M \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_M) \circ a_{A,A,M} = \mu_M \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \mu_M)$ Associativity
- $\mu_M \circ (\iota \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \ell_M^{-1} = \mathrm{Id}_M$ Unit

$\mathrm{Rep}A$ 中的态射 $f\colon (M, \mu_M) \to (N, \mu_N)$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射 $f\colon M \to N$，满足 $f \circ \mu_M = \mu_N \circ (\mathrm{Id}_A \otimes f)$，也就是说，$f$ 交织了 A 在 M 和 N 上的作用。存在一个函子 $\mathcal{F}_A\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}A$，定义为

$$\mathcal{F}_A(M) = (A \otimes M, (\mu \otimes \mathrm{Id}_M) \circ a_{A,A,M}), \qquad \mathcal{F}_A(f) = \mathrm{Id}_A \otimes f \tag{2.2}$$

称为诱导函子。如果 $\mathcal{G}\colon \mathrm{Rep}A \to \mathcal{C}, (M, \mu_M) \mapsto M$ 是遗忘函子，那么存在一个自然同构 [EGNO，引理 7.8。12]

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}A}(\mathcal{F}_A(M), N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \mathcal{G}(N)) \tag{2.3}$$

这通常称为弗罗贝尼乌斯互反律。

2.3 可逆对象

在第3.1 节中，我们将推导出充分条件，使由可逆对象直和构成的交换代数对象的诱导函子能够保留 Loewy 图。此处我们汇总所需的可逆对象的性质。给定一个幺半范畴 $\mathcal{C}$ ，其单位对象为$\mathbb{1}$，若对象 $U \in \mathcal{C}$ 是刚性的（有时称为可对偶），且（余）求值态射

$$\mathrm{ev}_U : U^* \otimes U \to \mathbb{1}, \qquad \mathrm{coev}_U : \mathbb{1} \to U \otimes U^*,$$

是同构。可逆对象构成的子范畴在对偶和张量积下封闭 [EGNO，命题 2.11。3]。给定一个可逆对象族 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，若该族在张量积和逆对象（对偶）下封闭，我们就称其为封闭的。也就是说，对于所有 i， $j \in \mathcal{I}$， $U_i \otimes U_j \cong U_k$ 存在某个 $k \in \mathcal{I}$，且 $U_{-i} \cong U_s$ 存在某个 $s \in \mathcal{I}$其中我们现在用 U_i 表示 U_{-i} 的逆对象：$= U_i^*$。

定义 2.5。可逆对象 $U \in \mathcal{C}$ 的不动点是满足$U \otimes N \cong N$ 的对象 $N \in \mathcal{C}$ 。若可逆对象族 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 中除幺半群单位对象外的任何成员都没有不动点，我们就称该族没有不动点。

我们在下面的引理中汇集可逆对象的一些众所周知的性质，后文将会用到这些性质。

引理 2.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。那么有以下结论：

(1) 若 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{C}$ 中一个没有不动点的闭可逆对象族，则对所有 i、$j \in \mathcal{I}$ 和 $N \in \mathcal{C}$，有$U_i \otimes N \ncong U_j \otimes N$。(2) 若 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔的，且 M、$U \in \mathcal{C}$，其中 M 是单对象而 U 可逆，则 $U \otimes M$ 和 $M \otimes U$ 是单对象。

(1) 的证明是一个直接的反证法证明。为说明 (2) 成立，首先注意到，对于任意可逆对象 $U \in \mathcal{C}$，若函子 $(U \otimes -)$ 和 $(- \otimes U)$ 都是正合的，则结论很容易得出。事实上，若 $U \otimes M$ 不是单对象，则它有某个真子对象 N，使得存在正合列

$$0 \to N \to U \otimes M.$$

于是， $U^* \otimes -$ 的正合性给出一个正合列

$$0 \to U^* \otimes N \to U^* \otimes U \otimes M \cong M.$$

简单性 M现在给出$U^* \otimes N \cong M$因此$N \cong U \otimes M$由 U的可逆性可知。现在我们只需验证，与可逆对象作张量积所定义的函子总是正合的。首先，回顾 [EGNO命题 2.11。3] 可逆对象的左对偶与右对偶同构（因此可逆对象同时具有左对偶与右对偶）。由此，根据 [EGNO命题 2.10，8] 对于任意可逆对象 $U \in \mathcal{C}$，函子 $(U \otimes -)$ 和 $(- \otimes U)$ 都有左伴随函子和右伴随函子，且这些伴随函子由与相应对偶作张量积给出。阿贝尔范畴之间任何具有左伴随函子和右伴随函子的函子都是正合的，因此结论成立。

3 Loewy 图的保持

现在我们考虑正合函子 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其中假设 $\mathcal{C}$ 局部有限，即它是阿贝尔且 k-线性的，并且态射空间均为有限维，且每个对象都有有限长度。为了确定这样的函子何时保持与 $X \in \mathcal{C}$ 的底滤过或根基滤过相关联的 Loewy 图，我们必须先确定该函子在某种适当意义下何时保持底滤过或根基滤过。为明确这一点，我们引入以下定义。

定义 3.1. 我们称函子 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持 $X \in \mathcal{C}$ 的底层过滤，若 X 与 $\mathcal{F}(X)$ 的 Loewy 长度相同，并且

$$\mathcal{F}(\mathrm{soc}_k(X)) \cong \mathrm{soc}_k(\mathcal{F}(X))$$

对于 $k = 1,...,n$，其中 n 是 X 的 Loewy 长度。类似地，我们称 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持根基滤过，若对于任意 $X \in \mathcal{C}$，X 与 $\mathcal{F}(X)$ 的 Loewy 长度相同，并且

$$\mathcal{F}(\mathrm{rad}_k(X)) \cong \mathrm{rad}_k(\mathcal{F}(X))$$

对于 $k = 1, ..., n$。我们称 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持底层（分别地，根基）滤过，若它保持 $\mathcal{C}$ 中每个对象的底层（分别地，根基）过滤。

显然，若 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持 $X \in \mathcal{C}$ 的底层过滤，那么对每个 $k = 1,..., n$

$$\mathrm{soc}_k(\mathcal{F}(X))/\mathrm{soc}_{k-1}(\mathcal{F}(X)) \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(\mathrm{soc}_k(X)/\mathrm{soc}_{k-1}(X)) \cong \mathcal{F}(\mathrm{soc}_k(X))/\mathcal{F}(\mathrm{soc}_{k-1}(X))$$

它们是半单的，且具有相同的单因子，因此同构；对于根基滤过，也有类似的结论。因此，该函子保留了相应 Loewy 图的各层，但未必保留箭头。

定义 3.2. 记 $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = X$ 为 $X \in \mathcal{C}$ 的一个固定底或根基过滤，并设 X_k 是 M_k/M_{k-1}的一个单因子。给定一个函子$\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，它保留底或根基过滤；若在 X的 Loewy 图中，存在一条从第 k 层的 X_k 指向第 $k-1$ 层的 X_{k-1} 的箭头（回顾定义 2.2），则在 $\mathcal{F}$（X）的 Loewy 图中也存在一条从第 k层的 $\mathcal{F}$（X_k）指向第 $k-1$层的 $\mathcal{F}$（X_{k-1}）的箭头。此时称该函子保留相应的 Loewy 图。

因此，函子保留 Loewy 图，当且仅当它同时保留图中的层和箭头。我们可以根据函子与底运算和根运算的相互作用，刻画保留底层过滤和根基过滤的函子。

定理 3.3. 设 $\mathcal{C}$ 为局部有限的，且 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为正合函子。那么，

- $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保留底滤过，当且仅当对所有 $X \in \mathcal{C}$，$\mathcal{F}$(Socle(X)) $\cong$ Socle($\mathcal{F}(X)$)
- $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持根基滤过，当且仅当对所有 $X \in \mathcal{C}$，$\mathcal{F}$(Rad(X)) $\cong$ Rad($\mathcal{F}(X)$)

证明。我们首先证明关于根基滤过的陈述。显然，若 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$保持根基滤过，则对于所有 $X\in\mathcal{C}$， $\mathcal{F}$(根(X)) $\cong$ 根($\mathcal{F}(X)$)。现在假设对于所有 $X\in\mathcal{C}$， $\mathcal{F}$(根(X)) $\cong$ 根($\mathcal{F}(X)$)，并令

$$0=M_t\subset M_{t-1}\subset\dots M_1\subset M_0=X,\quad\text{and}\quad 0=N_s\subset N_{s-1}\subset\dots\subset N_1\subset N_0=\mathcal{F}(X)$$

分别表示 X 和 $\mathcal{F}(X)$ 的根基滤过。我们需要证明 $t=s$（回顾一下，由于 $\mathcal{C}$ 是局部有限的， t 是有限的）以及

$$\mathcal{F}(M_k)\cong N_k$$

对于 $k=0$、...、 t。注意， $N_1=$Rad($\mathcal{F}(X)$) $\cong$ $\mathcal{F}$(Rad(X)) $=\mathcal{F}(M_1)$，并且如果 $N_{k-1}\cong\mathcal{F}(M_{k-1})$，那么我们有

$$N_k=\mathrm{Rad}(N_{k-1})\cong\mathrm{Rad}(\mathcal{F}(M_{k-1}))\cong\mathcal{F}(\mathrm{Rad}(M_{k-1}))=\mathcal{F}(M_k).$$

H因此，通过归纳法，对于 $k=1$、...、 t 有 $N_k\cong\mathcal{F}(M_k)$，并且由于 $N_t\cong\mathcal{F}(M_t)=0$，有 $s=t$.

现在我们考虑关于底滤过的陈述。根据定义，任何保持底滤过的函子都满足：对于所有 $X\in\mathcal{C}$，有 $\mathcal{F}$(Socle(X)) $\cong$ Socle($\mathcal{F}(X)$)。令

$$0=M_0\subset M_1\subset\cdots M_t=X\quad\text{and}\quad 0=N_0\subset N_1\subset\cdots N_s=\mathcal{F}(X)$$

分别表示 X 和 $\mathcal{F}(X)$ 的底滤过，即 $M_k=\mathrm{soc}_k(X)$ 以及 $N_k=\mathrm{soc}_k(\mathcal{F}(X))$。我们需要证明 $s=t$ （再次注意，由于 $\mathcal{C}$ 是局部有限的， t 是有限的）以及对于 $k=0$、...、 t，有 $\mathcal{F}(M_k)\cong N_k$。我们通过归纳法证明这一断言， $k=1$ 情形就是假设 $\mathcal{F}$(Socle(X)) $\cong$ Socle($\mathcal{F}(X)$)。首先注意到我们有以下等价关系：

$$\begin{aligned}\mathrm{Soc}(\mathcal{F}(X)/\mathcal{F}(M_{k-1}))&\cong\mathrm{Soc}(\mathcal{F}(X/M_{k-1}))\\&\cong\mathcal{F}(\mathrm{Soc}(X/M_{k-1}))\\&\cong\mathcal{F}(M_k/M_{k-1})\\&\cong\mathcal{F}(M_k)/\mathcal{F}(M_{k-1}).\end{aligned}\tag{3.1}$$

由于 $N_{k-1}\cong\mathcal{F}(M_{k-1})$， N_{k-1} 是 $\mathcal{F}(M_k)$ 的子对象，并由备注 2.3 可得

$$\mathcal{F}(X)/\mathcal{F}(M_{k-1})\cong\mathcal{F}(X)/N_{k-1}\qquad\text{and}\qquad\mathcal{F}(M_k)/N_{k-1}\cong\mathcal{F}(M_k)/\mathcal{F}(M_{k-1}).$$

因此，由等式 (3.1) 可得 Soc($\mathcal{F}(X)/N_{k-1}$) $\cong\mathcal{F}(M_k)/N_{k-1}$，因此由等式 (2.1) 可得 $N_k\cong\mathcal{F}(M_k)$ 若 $N_{k-1}\cong\mathcal{F}(M_{k-1})$，归纳步骤成立。由于 $N_t\cong\mathcal{F}(M_t)\cong\mathcal{F}(X)$，可得 $t=s$。

□

现在我们必须确定正合函子何时保留 $X\in\mathcal{C}$ 的 Loewy 图中的箭头。为此，我们引入以下定义。

定义 3.4. 我们称正合函子 $\mathcal{F}\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为强正合函子，如果 $\mathcal{C}$ 中的任意短正合列 $0\to U\to V\to W\to 0$分裂，当且仅当由 $\mathcal{F}$诱导的短正合列 $0\to\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V)\to\mathcal{F}(W)\to 0$在 $\mathcal{D}$中分裂。

推论 3.5. 设 $\mathcal{C}$ 局部有限，且 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个保持底或根基滤过的正合函子。那么，如果 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是强正合的，它将保持相应的 Loewy 图。

证明。 假设存在一个箭头从 Y的第 k层指向 Y'的第 $k-1$层，该箭头位于 X的 Loewy 图中。根据定义 2.2 ，这意味着存在一个子商 M ，它属于 M_k/M_{k-2} ，使得存在一个非分裂短正合列

$$0 \to Y' \to M \to Y \to 0$$

存在。由正合性， $\mathcal{F}(M)$ 是一个子商。

$$\mathcal{F}(\mathrm{soc}_k(M))/\mathcal{F}(\mathrm{soc}_{k-2}(M)) \cong \mathrm{soc}_k(\mathcal{F}(X))/\mathrm{soc}_{k-2}(\mathcal{F}(X))$$

并且由于 $\mathcal{F}$ 是强正合的，我们有一个非分裂的短正合列。

$$0 \to \mathcal{F}(Y') \to \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(Y) \to 0$$

且 $\mathcal{F}(Y)$ $\mathcal{F}(Y')$ 是单的，因为 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持底（或根）过滤。因此， $\mathcal{F}(X)$ 的 Loewy 图中存在一条箭头，从第 k 层的 $\mathcal{F}(Y)$ 指向第 $k-1$ 层的 $\mathcal{F}(Y')$。 □

3.1 诱导函子

本节的主要结果将给出一些充分条件，在这些条件下，归纳函子（回顾公式 (2.2)） $\mathcal{F}_A\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}\, A$ 对应某个交换代数对象$A \in \mathcal{C}$ ，该对象是由一个闭集中的可逆对象直和而成，并且保持 Loewy 图。也就是说，我们假设

$$A := \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} U_i$$

其中 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的可逆对象的一个闭集，如小节2.3所述。我们将此类交换代数对象称为交换单流代数对象，并称 A 没有不动点（或称为不动点自由），如果所有 U_i, $i \in \mathcal{I}$都没有不动点。我们将首先证明主要结果所需的两个引理。首先，我们通过推广 [CR命题 3.4] 和 [CKM命题 4.4 和 4.5]，确定与交换单流代数对象相关联的诱导函子在何种条件下保持对象的单性：

引理 3.6. 设 $\mathcal{C}$ 为一个编织范畴，$A = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{C}$ 为一个交换的单流代数对象，它作为自身上的左 A-模是单的，且没有不动点。则有如下结论：

- $\mathcal{F}_A : \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}\, A$ preserves simplicity.

- 如果 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都包含一个单子对象，那么 $N \in \mathbf{Rep}\, A$ 是单的，当且仅当 $N \cong \mathcal{F}_A(M)$，其中 $M \in \mathcal{C}$是某个单对象。
- 假设 A 包含 $\mathbf{1}$ 作为一个直和项，并令 M、$N \in \mathcal{C}$ 为单对象，则 $\mathcal{F}_A(M) \cong \mathcal{F}_A(N)$ 当且仅当 $M \cong U_i \otimes N$ 对于某个 $i \in \mathcal{I}$。

证明。令 $M \in \mathcal{C}$ 为单对象，并假设 $\mathcal{F}_A(M) \in \mathbf{Rep}\ A$ 有一个真子对象$X \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{F}_A(M)$。这通过遗忘函子诱导出一个 $\mathcal{C}$-态射：

$$\mathcal{G}(X) \overset{\mathcal{G}(\iota)}{\hookrightarrow} \mathcal{G}(\mathcal{F}_A(M)) \cong \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} U_i \otimes M \in \mathcal{C}.$$

由引理 2.6 可知 $U_i \otimes M$ 对所有 $i \in \mathcal{I}$ 都是单对象，因此必有

$$\mathcal{G}(X) \cong \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} U_j \otimes M$$

对于某个非空子集 $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$。由于 X 是 $\mathcal{F}_A(M)$ 的子对象，因此它必须在 $\mu_{\mathcal{F}_A(M)} = \mu \otimes \mathrm{Id}_M$的作用下闭合。由于我们假设 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$是闭合的，且 A 没有不动点，根据引理 2.6，$U_i \otimes M \ncong U_j \otimes M$ 对所有 i、$j \in \mathcal{I}$ 成立，因此对于所有 $i \in \mathcal{I}$、$j \in \mathcal{J}$，限制 $\mu|_{U_i\otimes U_j}$的像都落在 $A_{\mathcal{J}}$中：$= \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} U_j \subset A$。因此，$A_{\mathcal{J}}$是 $(A, \mu) \in \mathbf{Rep}\ A$的一个真子对象，矛盾。

为证明第二个断言，设 $N \in \mathbf{Rep}\ A$ 是单对象。根据假设，$\mathcal{G}(N) \in \mathcal{C}$ 有一个单子对象 M，因此存在一个非零态射

$$f : M \to \mathcal{G}(N).$$

由弗罗贝尼乌斯互反律（2.3），存在一个非零态射 $g\colon \mathcal{F}(M) \to N$。由于 N和 $\mathcal{F}(M)$ 都是单对象，因此该态射是同构。接下来只需证明第三个断言。首先，假设 $\mathcal{F}_A(M)\cong \mathcal{F}_A(N)$，则

$$\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} U_i \otimes M \cong \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} U_i \otimes N$$

作为 $\mathcal{C}$中的对象。由于 M、N都是单对象，根据引理2.6，对于任意 $j \in \mathcal{I}$，$U_j \otimes N$也是单对象；并且我们可以将这个同构限制到 $M \subset \mathcal{F}_A(M)$，从而得到 $M \cong U_j \otimes N$，其中 $j \in \mathcal{I}$。反过来，若 $M \cong U_j \otimes N$，其中 $j \in \mathcal{I}$，则由弗罗贝尼乌斯互反律（2.3）可得

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}\, A}(\mathcal{F}_A(M), \mathcal{F}_A(N)) &= \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \mathcal{G}(\mathcal{F}_A(N))) \\ &= \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(M, \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} U_i \otimes N\right) > 0\end{aligned}$$

因此，由于它们是单对象，$\mathcal{F}_A(M) \cong \mathcal{F}_A(N)$。 □

除了上述引理之外，我们还需要确定诱导函子何时是强正合的，以下引理给出了这一条件。

引理 3.7. 设 $A \in \mathcal{C}$ 是一个交换代数对象，且包含 $\mathcal{C}$ 的单位对象 $\mathbb{1}$ 作为直和项。那么诱导函子 $\mathcal{F}_A : \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}\, A$ 是强正合的。

证明。 诱导函子总是正合的 [KO，定理 1。6] 因此，我们只需证明短正合列

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0 \tag{3.2}$$

$\mathcal{C}$ 中的对象分裂，当诱导的短正合列彩在线

$$0 \to \mathcal{F}_A(X) \xrightarrow{\mathcal{F}_A(f)} \mathcal{F}_A(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}_A(g)} \mathcal{F}_A(Z) \to 0 \tag{3.3}$$

分裂。假设序列 (3.3) 分裂，因此存在一个映射 $h : \mathcal{F}_A(Y) \to \mathcal{F}_A(X)$，使得 $h \circ \mathcal{F}_A(f) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_A(X)}$。诱导函子作用为 $X \to (A \otimes X, \mathrm{Id}_A \otimes f)$，因此将序列 (3.3) 视为 $\mathcal{C}$中的一个序列，我们有

$$h \circ (\mathrm{Id}_A \otimes f) = \mathrm{Id}_{A \otimes X}.$$

由于 A 将单位对象作为直和项，因此对于某个对象 $A' \in \mathcal{C}$，我们有 $A = \mathbb{1} \oplus A'$。令

$$\iota_{\mathbb{1}} : \mathbb{1} \to A, \quad \iota_{A'} : A' \to A, \qquad p_{\mathbb{1}} : A \to \mathbb{1}, \quad p_{A'} : A \to A'$$

分别为相应的包含映射和投影映射。在左侧作用 $p_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{Id}_X$、在右侧作用 $\iota_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{Id}_X$，并代入 $\mathrm{Id}_A = \iota_{\mathbb{1}} \circ p_{\mathbb{1}} + \iota_{A'} \circ p_{A'}$，我们看到，

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_{\mathbb{1} \otimes X} &= p_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{Id}_X \circ h \circ (\iota_{\mathbb{1}} \circ p_{\mathbb{1}} + \iota_{A'} \circ p_{A'}) \otimes f \circ \iota_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{Id}_X \\ &= p_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{Id}_X \circ h \circ \iota_{\mathbb{1}} \otimes f \\ &= \tilde{h} \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{1}} \otimes f \end{aligned}$$

其中 $h = p_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{Id}_X \circ h \circ \iota_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{Id}_Y$。将此等式与左侧的左单位同构 ℓ_X、右侧的 ℓ_X^{-1} 复合，并应用自然性可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_X &= \ell_X \circ \tilde{h} \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{1}} \otimes f) \circ \ell_X^{-1} \\ &= (\ell_X \circ \tilde{h} \circ \ell_Y^{-1}) \circ f \end{aligned}$$

因此，映射 $\ell_X \circ \tilde{h} \circ \ell_Y^{-1} : Y \to X$ 给出了序列（3.2）的一个分裂。 □

现在我们可以应用这些引理来证明本节的主要定理。

定理 3.8。设 $\mathcal{C}$ 是一个局部有限的编织范畴， $A \in \mathcal{C}$ 是一个交换的单流代数对象，它作为左 A-模是单的，且没有不动点。则诱导函子 $\mathcal{F}_A : \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}\, A$ 保持与底和根基滤过相关的 Loewy 图。

证明。 $\mathcal{F}_A$ 是正合的，并由引理保持简单性 3.6，因此对所有 $X \in \mathcal{C}$，存在嵌入

$$\mathcal{F}_A(\mathrm{Socle}(X)) \hookrightarrow \mathrm{Socle}(\mathcal{F}_A(X)) \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_A(\mathrm{Rad}(X)) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(\mathcal{F}_A(X)).$$

为了证明该嵌入是同构，只需证明上述每个（半单）模都包含相同数量的单因子。由于第二个嵌入的证明类似，我们仅对第一个嵌入进行证明。只需证明以下等式：

$$\sum_{\mathcal{F}_A(S)\in I(\mathrm{Rep}\,A)} \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_A}(\mathcal{F}_A(S), \mathcal{F}_A(X)) = \sum_{S\in I(C)} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X)$$

其中， $I(\mathcal{C})$ 和 $I(\mathrm{Rep}\,A)$ 分别表示 $\mathcal{C}$ 和 $\mathrm{Rep}\,A$ 中所有单对象同构类的集合。设 $J \subset I(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 中单对象同构类的任意集合，使得对于每个单对象 $\mathcal{F}_A(S) \in I(\mathrm{Rep}\,A)$（回顾引理 3.6，$\mathrm{Rep}\,A$ 中的所有单对象都具有这种形式）， J 恰好包含一个单对象 $S' \in \mathcal{C}$，满足 $\mathcal{F}_A(S') \cong \mathcal{F}_A(S)$。特别地，我们有 $|J| = |I(\mathrm{Rep}\ A)|$和 $J_{\mathcal{I}}$:
$= \{U_{-i} \otimes S \,|\, i \in \mathcal{I},\ S \in J\} = I(\mathcal{C})$，因为根据引理 3.6，两个单对象 S 和 S' 诱导出的对象同构，当且仅当 $S' = U_i \otimes S$ （即 $U_{-i} \otimes S' \cong S$）对某个 $i \in \mathcal{I}$ 成立。由此根据弗罗贝尼乌斯互反律 (2.3) 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{F}_A(S)\in I(\mathrm{Rep}\,A)} \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}\,A}(\mathcal{F}_A(S), \mathcal{F}_A(X)) &= \sum_{S\in J} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, \mathcal{G}(\mathcal{F}_A(X))) \\
&= \sum_{S\in J} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} U_i \otimes X) \\
&= \sum_{S\in J, i\in\mathcal{I}} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, U_i \otimes X) \\
&= \sum_{S\in J, i\in\mathcal{I}} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U_{-i} \otimes S, X) \\
&= \sum_{S\in J_{\mathcal{I}}} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X) \\
&= \sum_{S\in I(\mathcal{C})} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X).
\end{aligned}$$

这里我们用到了以下事实：每个 U_i 都是刚性的，且其对偶为 U_{-i}。因此， $\mathcal{F}_A$: $\mathcal{C} \to \mathrm{Rep}\,A$ 根据定理 3.3 保持底滤过。根据假设， $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是闭的，因此$\mathbb{1} \cong U_i^* \otimes U_i$ 是 A的一个直和项，并且 $\mathcal{F}_A$根据引理3.7保持 Loewy 图。 □

参考文献

[CKM] T. Creutzig、S. Kanade 和 R. McRae，顶点算子超代数扩张的张量范畴， [arXiv:1705.05017]。

[CKL] T. Creutzig、S. Kanade 和 A. Linshaw，超越半单性的单流扩张，《当代数学通讯》，第 22 卷，第 01 期，1950001（2020年）。[CR] T. Creutzig 和 M. Rupert，非展开量子群的展开，《当代数学通讯》，第 24 卷，第 04 期，2150023（2022年）。[CRR] T. Creutzig、D. Ridout 和 M. Rupert，关于 $L_{-\frac{3}{2}}(\mathfrak{sl}_3)$[的 Kazhdan–Lusztig 对应，arXiv:2112.13167].[EGNO] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《张量范畴》，《数学调查与专著》，第 205 卷；2015年；344 页。[HKL] Y. Huang、A. Kirillov Jr 和 J. Lepowsky，编织张量范畴与顶点算子代数的扩张，《数学物理通讯》，第 337 卷，第 1143–1159 页（2015年）[KO] A. Kirillov 和 V. Ostrik，关于 McKay 对应的 q-类比及 $\mathfrak{sl}_2$ 共形场论[的 ADE 分类，《数学进展》，第 171 卷，第 2 期，2002年11月10日，第 183–227 页。] CCG[K. Costello、T. Creutzig 和 D. Gaitotto，从顶点算子代数得到 Higgs 分支和 Coulomb 分支，《高能物理学杂志》，第 2019年 卷，文章编号：66（2019年）] BRSJ. Belletete、D. Ridout 和 Y. Saint-Aubin，Temperley–Lieb 代数上不可分解模的限制与归纳法，《物理学杂志 A：数学与理论》，第 51卷，第 4 期