arXiv:2305.01192v1 [physics.optics] 2 May 2023

结构光激光器的频率-像散非对称非线性转换

Jing Pan,[1,2] Hao Wang,[1,2] Zijian Shi,[1,2] Yijie Shen,[3,*] Xing Fu,[1,2,†] and Qiang Liu[1,2,‡]

[1]*Key Laboratory of Photonic Control Technology (Tsinghua University), Ministry of Education, Beijing 100084, China*

[2]*State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments,Department of Precision Instrument, Tsinghua University, Beijing 100084, China*[3]*Optoelectronics Research Centre, University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, United Kingdom*

近年来，结构光的非线性光学在光与物质相互作用中揭示了引人入胜的基础物理现象，并推动了从经典成像到量子信息学的先进应用。在这类情形中，自旋、轨道角动量（OAM）与波长之间的相互作用得到了广泛研究。在本研究中，我们不再仅仅考察 OAM 和波长，而是将非线性频率转换与横向模式像散转换作为两个基本模块，研究单一模式和复杂复用模式经过这两个模块后的演变。具体而言，我们通过实验和理论发现了结构光非线性转换的一般规律：转换模式与这两个模块的作用顺序密切相关，并遵循一种内在的（非）交换规则。这种效应不仅能够产生更丰富的结构化激光模式，也为非线性结构光调控提供了新的规则。

当强光与介质相互作用时，最有可能激发出新的频率分量，这一过程被称为非线性光学频率转换，多年来一直受到广泛研究 [1, 2]。然而，直到最近，非线性过程中光的空间结构才开始受到关注 [3, 4]。当基频波（FW）被涡旋光束所携带的轨道角动量（轨道角动量）赋予时 [5–7], , 非线性过程便同时涉及线性动量和角动量。尽管如此，鉴于其在量子信息处理 [8, 9],、超分辨显微术 [10–12]、全息术 [13],等方面的相关应用，如果能够按需扩展光学频率和横模，将更为理想。这一理念自涡旋光束诞生之初便持续推动着人们浓厚的研究兴趣和不断进展。

研究 [14], 旨在主要理解有关涡旋光非线性转换的一些基本未解问题 [15–31], , 这些问题主要与具有奇点的基频波模式相关或以其为基础，例如相位匹配对不同非线性过程中的轨道角动量转移的影响 [19], 第二谐波产生（SHG）过程中的自旋-轨道相互作用 [22], 以及携带横向轨道角动量的时空涡旋的第二谐波产生 [23, 31]。

尽管已有这些成熟研究，但对于超越轨道角动量（OAM）、具有多个受控自由度（DoFs）的复杂结构光，其明确的非线性转换规则仍不明朗 [32]。此外，近期的空间模式整形技术已能驾驭许多典型的复杂结构模式，例如涡旋晶格或奇点阵列 [33, 34], 、SU(2)几何模式 [35, 36],和光学斯格明子 [37, 38], , 由此推动了高容量通信和加密等更广泛的应用 [39–45], , 并为探索涉及一般结构模式变换的非线性光学奠定了基础。

在传统观点中，空间模式变换和非线性频率转换应当是两个

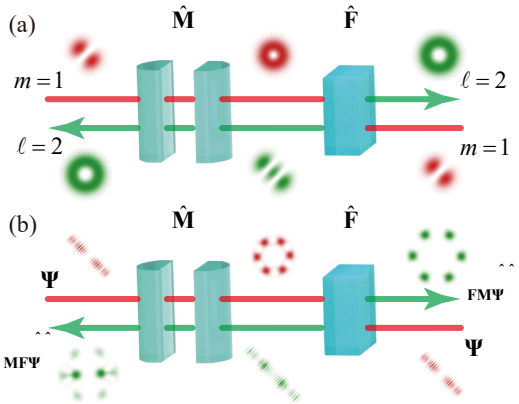

图 1：（a）通常，模式和频率转换（M 和 F）的顺序不会影响转换结果。HG模式首先被转换为具有方位角荷的轨道角动量模式，随后转换为具有双倍频率和轨道角动量的SHG模式。该模式也可以先转换为具有双倍频率和拓扑指标的SHG模式，然后再转换为两个轨道角动量荷。（b）对于一般结构光的频率-像散非对称转换，M 和F 的顺序至关重要；顺序的改变将导致转换后的拓扑结构和指标产生截然不同的结果。

彼此独立的对称过程，也就是说，模式转换与频率转换的先后顺序不应影响结构光的转换结果。例如，厄米-高斯模式 $HG_{0,1}$（具有单位拓扑指标 $m=1$ 的厄米-高斯模式）可通过像散模式转换（M）转换为 $LG_{0,1}$ 模式（具有单位轨道角动量指标 $\ell=1$ 的拉盖尔-高斯模式），见图 1(a)；随后，在非线性晶体中进行二次谐波产生（F）转换，拓扑荷可增至 2。反过来，若先进行频率转换再进行像散模式（F-M）转换，最终转换模式也会得到频率加倍且轨道角动量荷为 2 的相同结果（有时会考虑两个一般奇点的分裂，但这并不影响结论）。与传统观点相反，本研究揭示了转换顺序

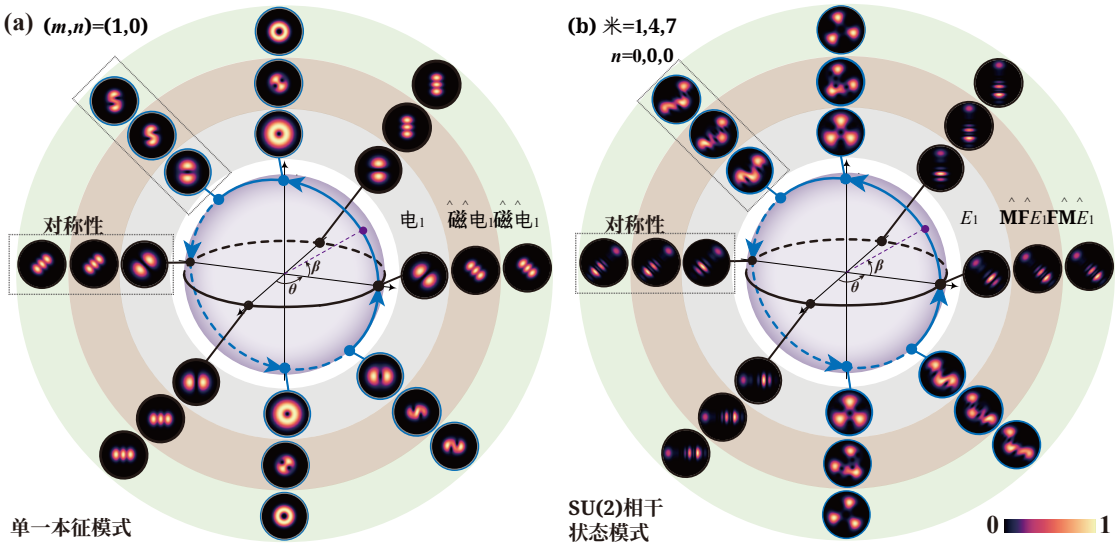

图2：基频波模式的SHG组合庞加莱球的理论结果（E_1，内侧灰色圆），以及经过$\hat{}$**F**-$\hat{}$**M** 转换（中间橙色圆）和$\hat{}$**M**- $\hat{}$**F** 转换（外侧绿色圆）后的模式，分别展示于（a）具有（m,n）=（1,0）的基频HG$_{m,n}$ 模式，以及（b）具有三重对称性的SU(2)几何模式（内侧灰色圆）上。仅位于两条黑色赤道线上的点代表具有对称性**F** 和**M** 转换效果的模式，而球面上的其他点则表示非对称结果。

频率转换与模式转换对于拓扑分布而言并不总是可交换的。具有隐藏空间对称性的复杂结构光 Ψ 的转换可以清楚地说明这一规律，见图 1(b)，其中揭示了频率转换（**F** ）与像散模式转换（**M** ）在转换结果上的显著不对称性。反转这两种转换的顺序，结果的空间对称性和拓扑荷都会发生显著变化。下文将从理论和实验上展示复杂结构光在 **F**-**M** 非对称非线性转换中普遍存在的内在（非）交换规律。

结构光的像散模式转换可以用庞加莱球 [46, 47], 表示， [46, 47], 庞加莱球也可以扩展到复杂结构模式，将其视为多个本征模式的空间波包叠加 [48, 49]。在这里，我们将 SHG 转换与庞加莱球相结合，以涵盖通过 $\hat{}$ $\hat{}$**F** 和 **M** 转换顺序得到的所有广义转换结果，见图 2。转换庞加莱球上的不同位置代表具有不同像散的结构模式，球周围灰色、橙色和绿色的不同圆环分别代表具有不同转换顺序的基频结构光或其对应的 SHG 结构光。

为研究这两种转换的（非）交换规则，我们定义了两类序列：i）先进行频率转换，再进行像散转换，此时转换后的二次谐波生成模式为 E_2 =**MF**E_1；ii）先进行像散转换，再进行频率转换，此时转换后的二次谐波生成模式分别为 E_2 =**FM**E_1。我们基于耦合波方程 [20], ，从数学上研究 SHG 过程中的结构化模式演化；该方程结合波动方程后可改写为式（1），

结合波动方程。 q

$$\sum_{m,n}\frac{dB_{m,n}(z)}{dz}U_{2_{m,n}}(x,y,z)=-\frac{1}{2}iK_1E_1^2(x,y,z). \quad (1)$$

为 K_1 耦合系数，$U_{2_{m,n}}$ 为二次谐波生成模式中每个本征模式分量的系数，$B_{m,n}$ 为其系数。在一般情况下，基频波光束 E_1 设为SU(2)几何模式，它是由多个自由度控制的多个频率简并本征模式的相干叠加 [35, 36], ，表示为$E_1(x,y,z)=\sum_{k=0}^{N}2^{-\frac{N}{2}}\binom{N}{k}^{1/2}\mathrm{e}^{ik\varphi_0}U_{1_{m,n}}(x,y,z)$，其中$U_{1_{m,n}}$ 表示本征模式，指标 $m = m_0 + qk$、$n = n_0 + pk$、 m_0 和 n_0 为初始阶数， N 与本征模式的数量有关， φ_0 为初始相位，而 p和 q 为互素整数（理论细节见补充材料）。当 N 设为零时，基频波光束 E_1 简化为纯本征模式。因此，以下推导既适用于单一模式，也适用于复用模式。

对于 HG模式基底，$U_{\xi_{m,\,n}}=U^{(0,0)}_{\xi_{m\;n\;\cdot}}$，其中 $\xi=1$ 或 2 分别代表基频波（FW）或二次谐波产生（SHG）。系数 $B_{m,\,n}(z)$，以及 SHG 波的光场分布，可通过对 z 积分获得（计算详情见补充材料）。SHG 过程用算符 $\hat{}$ **F** 表示，因此有 $E_2^{(0,0)}=\hat{}\mathbf{F}E_1^{(0,0)}$。在本研究中，将直接由激光腔发射的 HG 结构模式作为像散转换前的初始模式。为定量评估结果，我们采用通用的厄米-拉盖尔-高斯（HLG）模式，该模式可基于具有不同像散转换相关参数的 HG模式 [50] 生成。所得的 HLG 模式具有可变的 θ和 β，可表示为 $U^{(\beta,\theta)}_{\xi_{m\;n\;\cdot}}$，其中 θ 和 β 为可调像散参数。为简化计算

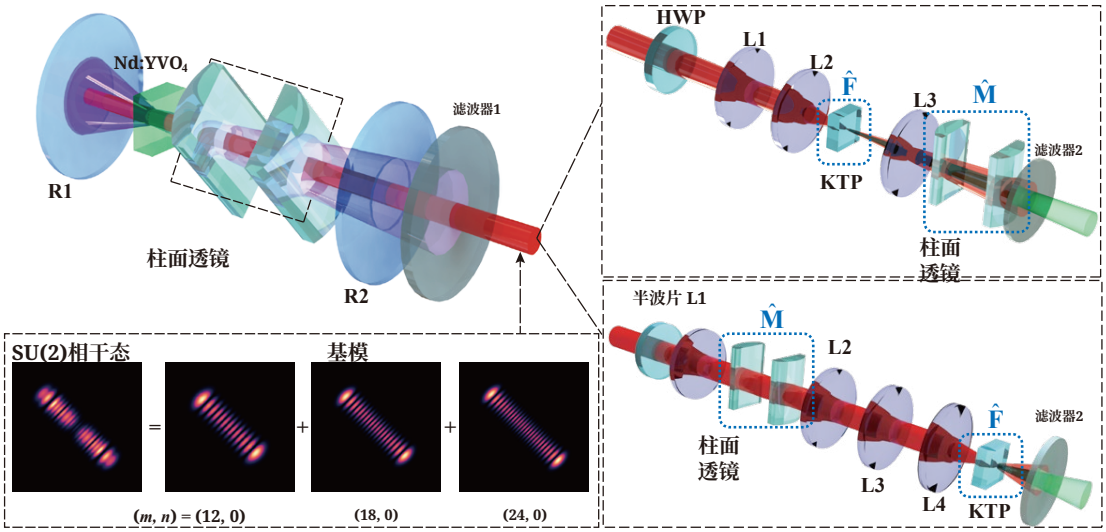

图 3：实验装置。基频波光束由一台以 Nd:YVO$_4$ 作为增益介质的固体激光器产生（左侧）。右侧展示了两种转换过程。左下角插图示意了 SU(2)几何模式的分解。对于右侧的 $\hat{}$**F**- $\hat{}$**M** 部分，上图对应第一种情况（$\hat{}$**F** 优先），下图对应第二种情况（$\hat{}$**M** 优先）。R1：凹面二向色镜（808 nm处增透（AR），1064 nm处高反（HR），曲率半径 R_1：206.3 mm）；R2：输出耦合镜（1064 nm处透射率为40%，曲率半径 R_2：1000 mm）；滤波器1：1000至1400 nm范围内增透，用于滤除泵浦光；半波片（HWP），用于调节所产生光束的偏振，以提高非线性转换效率；滤波器2：532 nm处增透，用于滤除1064 nm基频波光束；柱面透镜：焦距为 f_0=25 mm；透镜组：L1、L2、L3、L4；KTP：倍频晶体。

描述，像散转换过程用算符 $\hat{}$**M**表示，因此有 $E^{(\beta,\theta)}_{\xi_m} = \hat{}\mathbf{M}E^{(0,0)}_{\xi_{m,n}}$.

首先，以图 2(a) 所示的 HG$_{1,0}$ 为例。灰色圆圈对应具有不同角参数（θ、 β）的基频波模式的像散转换，其第一类和第二类转换模式分别显示在橙色和绿色圆圈中。在黑色赤道线上，第一类和第二类转换模式具有相同的分量，且$B_{m,\ n}(z)$ 相同。这意味着，数学上，单个本征模式的对称性可以通过 $\beta = 0$ 实现，

$$\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{F}}E_1 - \hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{M}}E_1 = [\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{F}}]E_1 = 0. \quad (2)$$

当 $\beta \neq 0$ 时，证明庞加莱 ́球上的模式经过两次转换后呈现非对称性，这表现为每个基模具有不同的 $B_{m,n}(z)$，

$$\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{F}}E_1 - \hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{M}}E_1 = [\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{F}}]E_1 \neq 0. \quad (3)$$

因此，第一类和第二类转换模式的强度分布不同，如图 2(a) 所示。对于 SU(2)几何模式的结果，如图 2(b) 所示，也可以从其对应的 Poincar ́e 球上更直观地观察到这种对称性和不对称性。例如，灰色圆圈中的模式表示参数为$N = 2$、$q = 3$、$p = 0$、$m_0 = 1$、$n_0 = 0$ 的 FW SU(2)几何模式。橙色和绿色圆圈分别表示对应的第一类和第二类转换 SHG 模式。在黑色赤道线上，每种模式分量的第一类和第二类转换 SHG 模式具有相同的 $B_{m,\ n}(z)$，并且具有相同的强度分布。对于 $\beta \neq 0$ 的情况，如蓝色点所示，**F**-**M** 转换呈现这些 SHG 模式呈现不对称性。**F**-**M** 转换的不对称性也意味着可以获得更多非线性波长简并模式，从而为转换后的结构光提供一个新的可控维度。

在实验中，我们生成庞加莱球极点上的模式，其角参数为 $\theta = \pi/2$ 和$\beta = \pi/2$，以展示上述理论发现。该装置包括腔内基频波模式生成部分和腔外转换部分。反射镜 R1 和 R2 构成激光腔，Nd:YVO$_4$ 由 808 nm 激光二极管泵浦。通过使 R1 离轴，可直接从腔中生成具有一个可调谐指标的厄米-高斯模式。为了在横向平面生成具有两个可调谐指标的二维HG模式，我们在腔内引入两个柱面透镜，通过使第一个柱面透镜 [51] 离轴来控制模式的第二个指标。此外，通过精确控制腔元件之间的距离，腔内HG模式可以实现所谓的频率简并，因此可从腔中生成 SU(2) 几何模式，如图 3 左侧面板下方的子图所示。随后，基频波光束进入模式转换部分，其中包括前文所述的两种转换：频率转换和像散转换。**F** 转换由 KTP晶体实现，而**M** 转换则由一个由两个柱面透镜组成的模式转换器实现。图 3 右侧面板的上、下部分分别展示了第一类和第二类转换（更多实验细节请参见补充材料）。

我们生成 1064 纳米 HG$_{0,8}$ 模式，直接作为图 4(a) 左侧的红色框。当它通过 KTP 晶体时-

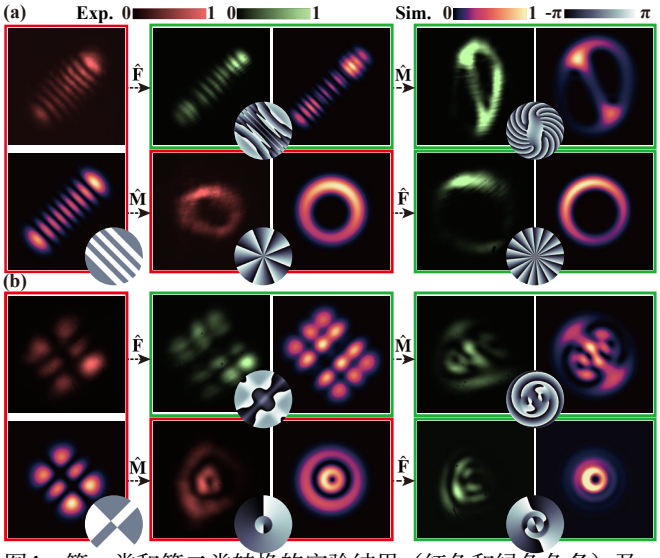

图4：第一类和第二类转换的实验结果（红色和绿色色条）及模拟结果：(a) 具有（m，n）=(0，8)的一维HG模式；(b) 具有（m，n）=(2，1)的二维HG模式。实验和模拟结果吻合良好，均展示了所提出的不对称性，包括本图右下方的那一对结果，其中模拟结果在径向上也有三个圆。对应的相位分布显示在圆形插图中。

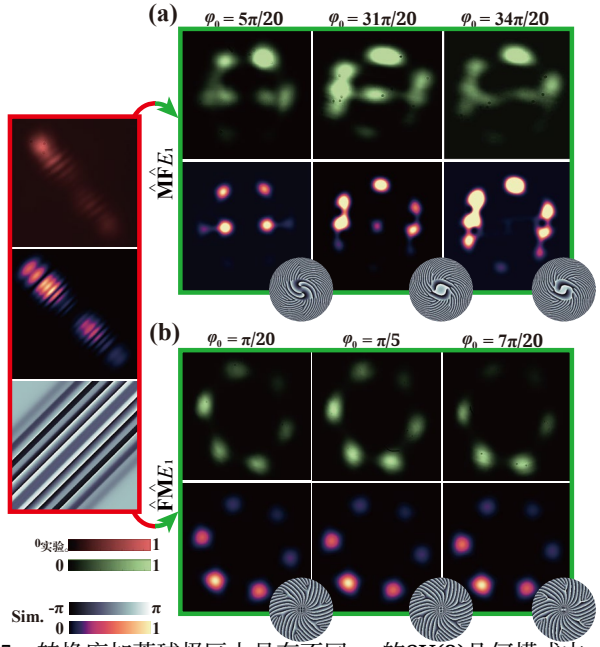

图5：转换庞加莱球极区上具有不同 φ_0的SU(2)几何模式中，(a)第一类和(b)第二类转换的实验结果（红色和绿色色条）及模拟结果。对应的相位分布显示在圆形插图中。

tal，如图 4(a) 中间的绿色框所示，生成了相应的 532纳米二次谐波生成模式，它不是单一的 HG 模式，而是基于 HG 的叠加模式。二次谐波生成HG模式的索引 n 仅包含从 0 到 16 的偶数。实验中的不对称强度分布是由腔产生的基频光束的强度不对称性造成的。

采用笛卡尔平面中常规光束的复值位移 [52] ，这些位移也纳入了模拟（见补充材料）。经过$\hat{}$M转换后，每个532纳米HG本征模式分量都变为对应的LG本征模式分量，其偶数拓扑荷从 -16 到0。第一类转换二次谐波生成模式显示在图4(a)右上方的绿色框中。相反，对于第二类转换，HG基频模式首先经像散转换，生成具有（p，ℓ）=(0，-8)的LG模式，如图4(a)中间的红色框所示。经过**F** 转换后，对应的二次谐波生成模式是一个具有不同 p 但相同 $\ell = -16$ 的叠加模式，如图4(a)右下方的绿色框所示。从图4(a)右侧两列的对比，以及插图中的相位分布可以明显看出，第一类转换二次谐波生成模式与第二类不同，这清楚地展示了单个HG模式在转换庞加莱球极区上经过$\hat{}$**F**-$\hat{}$**M** 转换时的不对称性。此外，图4(b)展示了二维$HG_{2,1}$ 模式经过这两类转换后的最终模式结果。单个1064 纳米HG模式经过**F** 转换后，在图4(b)中间的绿色框中变为二次谐波生成的HG基模式。指标 n 包括0和2，而指标 m 包括0、2、4。经过M转换后，这个HG基模式变为具有 ℓ （从 -2 到4）的叠加LG基模式，如图4(b)右上方的绿色框所示。然而，当单个HG模式先经过$\hat{}$**M** 转换时，会生成具有（p，ℓ）=(1，1)的LG模式；再经过$\hat{}$**F**转换后，生成的对应二次谐波模式是一个指标 p 不同、但$\ell = 2$ 相同的叠加模式，如图4(b)右下方的绿色框所示。这两种不同转换顺序下的相位分布分别显示在插图中。

根据腔内元件之间设计的距离，我们随后直接利用HG基生成SU(2)几何模式（见图5中的红框）。由 $N = 2$、(q，p) =(6，0)和(m_0，n_0) =(12，0)构成的SU(2)几何模式包含三个HG基。当这一1064 纳米SU(2)几何模式在SU(2)庞加莱球极区进行一级类型转换时，最终得到的532纳米基于LG的SU(2)几何模式如图5(a)所示。只需轻微扰动KTP的空间位置，二次谐波生成模式的初始相位 φ_0 就会改变，而532纳米基于LG的SU(2)几何模式也会随不同的 φ_0 而变化，这体现在旋转角和强度图样上。如果先对1064 纳米HG基模式进行像散M转换，**F**转换，得到的532纳米基于LG的SU(2)几何模式如图5(b)所示。与(a)中的情况不同，随着 φ_0变化，532纳米基于LG的SU(2)几何模式只在旋转角上演化，而全局强度分布保持不变。从图5插图中的相位分布可以看出，轨道角动量分布存在明显差

异，尤其是在中心区域。简言之，本部分阐明了SU(2)几何模式在转换庞加莱球极区的$\hat{}\mathbf{F}$-$\hat{}\mathbf{M}$ 不对称性，并为生成更多可调谐的波长简并模式提供了一个新维度。

总之，我们研究了二次谐波产生（SHG）过程中由倍频和像散模式转换共同引起的拓扑分布演化，并揭示了**F-M** 转换顺序在 SHG 结构光束中的$\hat{}\ \hat{}$（非）对易规律。与传统观点不同，只有像散指数 $\beta = 0$ 对应对易的 **F-M** 转换顺序，而庞加莱球上的其他像散模式对于 **F-M** 转换顺序均呈非对易性。我们的结果适用于单一本征模式，也适用于具有多个自由度的复杂结构光。这种效应不仅能产生扩展的结构化激光模式，还揭示了非线性光场调控中的新物理，并在成像、光学捕获、通信、纠缠光子生成以及非互易器件等领域展现出重要应用前景。

致谢。国家自然科学基金（62275137，61975087）。

* 电子邮箱：y.shen@soton.ac.uk † 电子邮箱：fuxing@mail.tsinghua.edu.cn ‡ 电子邮箱：qiangliu@mail.tsinghua.edu.cn

[1] Fejer, M. M. 非线性光学频率转换。*Physics today* **47**，25–33（1994）。[2] Franken, e. P., Hill, A. E., Peters, C. e. & Weinreich, G. 光学谐波的产生。*Physical Review Letters* **7** 118 1961 , ()。

[3] Forbes, A., de Oliveira, M. & Dennis, M. R. 结构光。*Nature Photonics* **15**，253–262（2021）。[4] Buono, W. T. & Forbes, A. 结构光的非线性光学。*Opto-Electronic Advances* **5**，210174– 1（2022）。[5] Shen, Y. *et al.* 光学涡旋：30年后——从拓扑荷到多重奇点的轨道角动量操控。*Light: Science & Applications* **8**，1–29（2019）。[6] Naidoo, D. *et al.* 利用激光器受控生成高阶庞加莱球光束。*Nature Photonics* **10** 327 332 2016 , ()。[7] Devlin, R. C., Ambrosio, A., Rubin, N. A., Mueller, J. B. & Capasso, F. 光的任意自旋到轨道角动量转换。*Science* **358**，896–901（2017）。[8] Hu, X.-M. *et al.* 通过多路径下转换高效生成高维纠缠。*Physical Review Letters* **125** 090503 2020 , ()。

[9] Erhard, M., Krenn, M. & Zeilinger, A. 高维量子纠缠的进展。*Nature Reviews Physics* **2** 365 381 2020 , –()。[10] Willig, K. I., Rizzoli, S. O., Westphal, V., Jahn, R. & Hell, S. W. STED显微镜揭示突触小泡胞吐后突触结合蛋白仍保持聚集状态。*Nature* **440**，935–939（2006）。

[11] Vicidomini, G., Bianchini, P. & Diaspro, A. Sted 超分辨显微镜。*Nature Methods* **15**, 173–182 (2018). [12] Casacio, C. A. *et al.* 量子增强非线性显微术。*Nature* **594**, 201–206 (2021). [13] Fang, X. *et al.* 高维轨道角动量复用非线性全息术。*Advanced Photonics* **3** 015001 2021 , ().

[14] Courtial, J., Dholakia, K., Allen, L. & Padgett, M. J. 高阶拉盖尔-高斯模式的二次谐波产生与轨道角动量守恒。*Phys. Rev. A* **56**, 4193–4196 (1997). [15] Shao, G.-h., Wu, Z.-j., Chen, J.-h., Xu, F. & Lu, Y.- q. 利用准相位匹配实现轨道角动量场的非线性频率转换。*Phys. Rev. A* **88** 063827 2013 , ().

[16] Zhou, Z.-Y. *et al.* 利用准相位匹配晶体实现轨道角动量光的频率转换与干涉。*Opt. Express* **22**, 20298–20310 (2014).

[17] Rego, L., Rom´an, J. S., Pic´on, A., Plaja, L. & Hern´andez-Garc´ıa, C. 极紫外涡旋光束产生中的非微扰扭转。*Phys. Rev. Lett.* **117** 163202 2016 , ().

[18] Gauthier, D. *et al.* 高次谐波产生中的可调轨道角动量。*Nature communications* **8**, 1 7 2017– ( ). [19] Chen, Y. *et al.* 周期极化晶体中由相位匹配控制的轨道角动量转换。*Physical Review Letters* **125**, 143901 (2020). [20] Zhao, R.-Z. *et al.* 二次谐波产生过程中径向量子模式的转换与操控。*Physical Review A* **101**, 023834 (2020). [21] Buono, W. T. *et al.* 光学涡旋非线性相互作用中的手性关系与径向-角向耦合。*Phys. Rev. A* **101**, 043821 (2020). [22] Tang, Y. *et al.* 非线性光学晶体中的谐波自旋-轨道角动量级联。*Nature Photonics* **14** 658 662 2020 , – ().

[23] Gui, G., Brooks, N. J., Kapteyn, H. C., Murnane, M. M. & Liao, C.-T. 二次谐波产生与光的时空轨道角动量守恒。*Nature Photonics* **15**, 608–613 (2021). [24] Liu, Z.-F. *et al.* 完美涡旋二次谐波产生中的谐波轨道角动量控制。*Physical Review A* **105**, 063518 (2022). [25] Zhang, Z. *et al.* 横向模式锁定态下激光束的二次谐波产生。*Advanced Photonics* **4** 026002 2022 , ().

[26] Pires, D., Rocha, J., Jesus-Silva, A. & Fonseca, E. 通过非线性双波混频实现光学模式转换。*Physical Review A* **100**, 043819 (2019). [27] Lou, Y.-C. *et al.* 准周期极化晶体中空间结构光的三次谐波产生。*Optica* **9** 183 186 2022 , – ().

[28] Wu, H.-J. *et al.* 任意矢量结构光的共形频率转换。*Optica* **9**, 187–196 (2022). [29] de Oliveira, A. *et al.* 超越受激参量下转换中的轨道角动量守恒。*Physical Review Applied* **16**, 044019 (2021). [30] Wu, H.-J. *et al.* 参量上转换过程中拉盖尔-高斯模式的径向模式跃迁：迈向空间模式的全场选择定则。*Physical Review A* **101** 063805 2020 , ().

[31] Hancock, S., Zahedpour, S. & Milchberg, H. 二次

谐波产生中的时空光学涡旋与轨道角动量守恒。*Optica* **8** 594 597 2021 , – ( ).

[32] He, C., Shen, Y. & Forbes, A. 迈向更高维结构光。*Light: Science & Applications* **11** 205 2022 , ( ).

[33] Shen, Y., Wan, Z., Fu, X., Liu, Q. & Gong, M. 大孔径离轴泵浦固态激光器中横向模式锁定态切换的涡旋晶格。*JOSA B* **35** 2940 2944 2018 , – ( ).

[34] Piccardo, M. *et al.* 具有拓扑荷控制和缺陷自愈能力的涡旋激光器阵列。*Nature Photonics* **16** 359 365 2022 , – ( ).

[35] Shen, Y., Yang, X., Naidoo, D., Fu, X. & Forbes, A. 激光产生的多自由度结构化射线-波矢量涡旋光束。 *Optica* **7**, 820–831 (2020). [36] Shen, Y. 射线、波、su (2) 对称性与几何：结构光工具箱。 *Journal of Optics* **23**, 124004 (2021). [37] Shen, Y., Mart´ınez, E. C. & Rosales-Guzm´an, C. 生成具有可调拓扑纹理的光学斯格明子。 *ACS Photonics* **9**, 296–303 (2022). [38] Shen, Y. *et al.* 光的拓扑准粒子：光学斯格明子及其他。 *arXiv preprint arXiv:2205.10329* (2022). [39] Wan, Z. *et al.* 面向未来超高容量、低误码率光通信的发散简并空间复用。 *Light: Science & Applications* **11**, 1–11 (2022). [40] Wang, H. *et al.* 通过结构光非正交态识别实现深度学习辅助的通信容量提升。 *Optics Express* **30**, 29781–29795 (2022). [41] Pryamikov, A. oam 光束结构复杂度的提升是实现更高数据容量的一种途径。*Light: Science & Applications* **11** 221 2022 , ( ).

[42] Shen, Y. *et al.* 高维多体经典纠缠光的产生与控制。*Light: Science & Applications* **10** 1 10 2021 , – ( ).

[43] Wan, Z., Shen, Y., Liu, Q. & Fu, X. 多体经典纠缠标量光束。 *Optics Letters* **47**, 2052– 2055 (2022). [44] Shen, Y. & Rosales-Guzm´an, C. 光的不可分离态：从量子到经典。*Laser & Photonics Reviews* **16** 2100533 2022 , ( ).

[45] Wang, H. *et al.* 基于深度学习的多奇点结构光识别。 *Nanophotonics* **11**, 779–786 (2022). [46] Dennis, M. R. & Alonso, M. A. 摇摆与回旋：用于偏振与高斯光束的光学庞加莱球。 *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences* , , ( ). **375** 20150441 2017 [47] Alonso, M. A. & Dennis, M. R. 结构高斯光束的射线光学庞加莱球。 *Optica* **4**, 476–486 (2017). [48] Shen, Y., Wang, Z., Fu, X., Naidoo, D. & Forbes, A. Su (2) 庞加莱球：多维结构光的广义表征。*Physical Review A* **102** 031501 2020 , ( ).

[49] Guti´errez-Cuevas, R., Wadood, S., Vamivakas, A. & Alonso, M. 模态马约拉纳球与结构高斯光束的隐藏对称性。*Physical Review Letters* **125** 123903 2020 , ( ).

[50]Chen, Y. F. 具有 su(2)变换的耦合振子中经典周期轨道与量子相干态的几何。 *Phys. Rev. A* **83**, 032124 (2011)。[51] Pan, J. 利用腔内像散模式转换器实现可调拓扑荷的激光结构光束。*Physical Review Applied* **14**, 044048 (2020)。[52] Kovalev, A., Kotlyar, V. & Porfirev, A. 非对称拉盖尔–高斯光束。 *Physical Review A* **93**, 063858 (2016)。