arXiv:2305.01193v1 [math.CO] 2 May 2023

3-一致超图中的小门结构

JOZSEF SOLYMOSI

Abstract. 在这些笔记中，我们研究超图中的 Tur´án 型问题。如果禁止一个子图，边数最多可以有多少？令 $H_n^{(3)}$为一个三均匀线性超图，即任意两条边至多有一个公共顶点。一个称为 $wicket$ 的特殊超图由一个 3×3 点矩阵的三行两列构成。我们描述了两个线性超图——二者都包含一个三柱门——如果在 $H_n^{(3)}$ 中禁止其中任意一个，那么该超图就是稀疏的，其边数为 $o(n^2)$。这证明了 Gy´arf´as 和 S´ark¨ozy 的一个猜想。

1. Introduction

在本文中，我们回答 Gy´arf´as 和 S´ark¨ozy 提出的一个问题，我们先回顾一些定义、记号以及该问题的简要历史。

定义。如果两条边至多相交于一个顶点，则称该超图为线性的。

我们研究 3-均匀线性超图，即每条边都含有三个顶点的超图。我们用 H_n^3 和 F_n^3 表示顶点数为 n 的 3-均匀超图，用 G_n 表示顶点数为 n 的图。H 中边的数量记作 $e(H)$。

在稠密的 3-均匀线性超图中刻画不可避免子图，是一个众所周知的难题。极值组合学中的一个核心猜想如下：

猜想 1.1 (Brown, Erd˝os, and S´os)**.** 对于每个 $\ell \geq 3$ 和 $c > 0$，都存在一个 $n_0 = n_0(c)$，使得如果 $n > n_0$ 且 $e(H_n^3) \geq cn^2$，那么就存在一个 $F_{\ell+3}^3 \subseteq H_n^3$，使得 $e(F_{\ell+3}^3) \geq \ell$。

尽管该猜想并未指出超图是线性的，但只考虑线性超图就足够了。

Ruzsa 和 Szemer´edi [8], 证明了猜想 1.1 的 $\ell = 3$ 情形，但对于更大的值，该猜想仍未解决。关于部分结果和相关界，我们参考 [9, 10, 1] 中的工作。

在一条密切相关的研究方向中，人们提出了以下问题。对于给定的 3-一致线性超图 F，不含有 F 作为子图的 3-一致线性超图最多可以有多少条边?

定义。 线性 *3*-一致超图 F的 *Tur´án* 数记为$ex_L(n, F)$，它是指不含有与 F同构的子图的 *3*-一致线性超图的最大边数。

在 [6] Gy´arf´as 和 S´ark¨ozy 的研究中，他们考察了 $ex_L(n, F)$，其边数不超过五条。他们对除一种构型之外的情况都得出了良好的估计，而这种构型

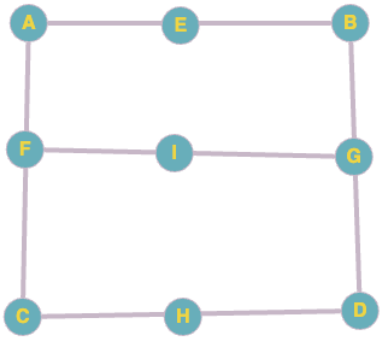


FIGURE 1. 三柱门。如果我们添加由顶点E，I，H张成的边，那么它就是一个网格，GR。

被他们称为三柱门。这个三柱门记作 W，由一个 3×3 点矩阵的三行两列组成（图 1）。

在他们那篇出色的论文中，题为小型三元系统的线性 *Tur´án* 数，或者说，为什么 *wicket* 很有趣？ [6] 他们回顾了相关问题，并解释了判定 $ex_L(n, W) = o(n^2)$ 是否成立的重要性。

如果在三柱门上添加第三列，使九个顶点上共有六条边，那么在稠密线性超图中可以避免这种构型。我们称这种超图为网格，记作 GR （见图 1）。Gishboliner 和 Shapira 的一个构造表明，$ex_L(n, GR) = \Omega(n^2)$ [4]。

2. THE MAIN RESULT

本节中，我们给出 Gy´arf´as 和 S´ark¨ozy 猜想（定理 2.1）的两种证明。第一种证明只使用图正则性引理。第二种则使用超图正则性。我们不知道证明该猜想是否需要如此强大的工具。两种证明都保证存在一个更大的图——其中包含一个作为子图的 wicket——并且已知该图满足 $o(n^2)$ 型下界。对于 wicket，目前尚无类似的下界。Gowers 和 Long 在 [5] 中提出了一个相关猜想，断言存在一个 $c > 0$，使得如果一个 n 顶点的 3-均匀线性超图（如 wicket）中任意九个顶点所张成的边数都不超过四条，那么边数就是 $O(n^{2-c})$。

定理 2.1. 如果一个线性超图不包含三柱门，它就是稀疏的,$ex_L(n, W) = o(n^2)$.

以下定量版本的 Ruzsa-Szemer´edi 定理 [8] 在两个证明中均有用到：

定理 2.2。对于每个 $c > 0$，都存在一个 $\delta > 0$，使得如果 *3*-均匀超图 H_n^3 中的边数至少为 cn^2，那么就存在 δn^3 个子图$F_6^3 \subseteq H_n^3$，使得 $e(F_6^3) \geq 3$。

由于我们只考虑线性超图，因此可以从 F_6^3if $e(F_6^3) \geq 3$ 中选取一个特定的子图。它是一个有 6 个顶点、3 条边的超图，

其中每条边都有一个度为1的顶点和两个度为2的顶点。我们称之为一个 (6,3)-构型。

第二种是“诱导匹配”变体。图中的匹配 M 若满足： M 的顶点之间除 M 的边以外不存在其他边，则称其为诱导匹配。

定理 2.3。 对于每个 $c > 0$ ，都存在一个 $N(c)$ ，使得如果一个具有 $2n$ 个顶点的二部图是由 n 个诱导匹配的并组成，且至少有 cn^2 条边，那么$n \leq N(c)$。

2.1. 定理 2.1 的第一个证明。

证明。 在第一个证明中，我们只会用到上述两个结果。假设对于某个 $c > 0$，存在无穷多个不含 wicket 的线性 3-均匀超图，且每个超图至少有 cn^2 条边。为避免出现分数，我们假设 n 能被 6 整除。在证明中，我们将使用仅取决于初始 c 的常数 $c_i > 0$。

我们为便于引用，标出证明的主要步骤。

(1) 不妨设该图为具有相等顶点类的三部图V_1， V_2， V_3，其中 $|V_i| = n/3$。定理 2.2 表明，存在 $c_1 n^3$ 个(6，3)-构型，每个构型在各类中包含两个顶点，其中一个的度为 1，另一个的度为 2。在三部图中，三柱门如图 2 所示。

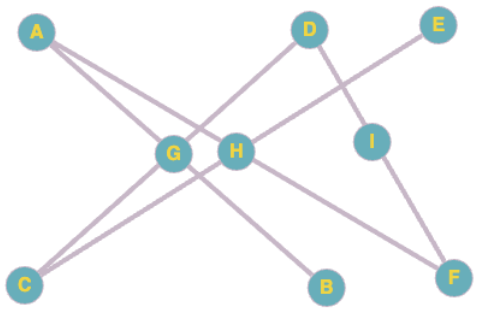


FIGURE 2. 3-部图中的三柱门

(2) 将 V_i-s 随机划分为两个大小相等的部分。划分得到的类记为 V_i'，$V_i'' \subset V_i$，其中 $|V_i'| = |V_i''| = n/6$。从此处开始，我们只考虑(6，3)-构型，其中度为 1 的顶点位于 V_i'-s 中，度为 2 的顶点位于 V_i''-s 中（图 3）。共有 $c_2 n^3$ 个这样的(6，3)-构型。

(3) 从 V_1' 和 V_3' 的顶点之间可能的 $(n/6)!$ 个完美匹配中，随机选取一个完美匹配（每个匹配被选中的概率为 $1/(n/6)!$）。该匹配记为 M，其中各对的索引为 $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$，且 $s = n/6$。对于 V_1' 和 V_3' 的顶点之间大小为 k $(3 \leq k \leq s)$ 的任意匹配，至少有一条边属于 M 的概率可以通过简单计数计算得出。

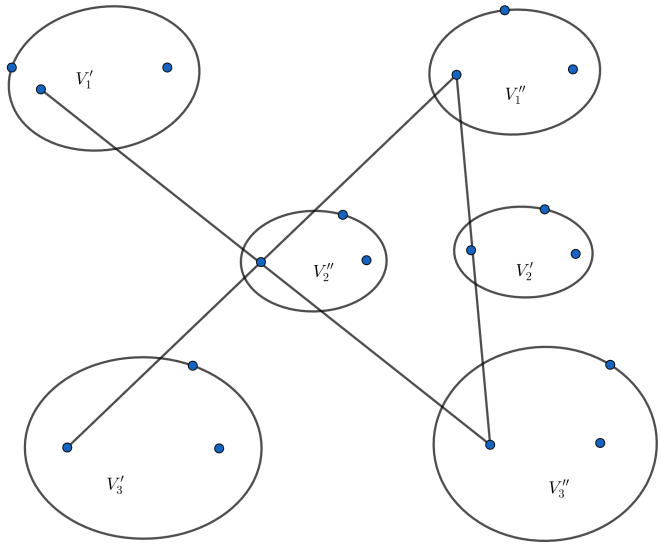


FIGURE 3. 划分 (6，3)-构型的顶点

容斥公式给出了包含至少一条边的完美匹配数量。

$$k(s-1)! - \binom{k}{2}(s-2)! + \binom{k}{3}(s-3)! - \ldots \geq \frac{k(s-1)!}{2}.$$

至少有一条边属于 M 的概率至少为 $k/(2s)$。

(4) 定义 G_M 与 V_1'' 和 V_3'' 之间的辅助二分图如下：如果存在一对 $m_i \in M$，使得四个顶点集合 $\{\{v_1, v_2\} \cup m_i\}$ 来自一个 (6，3)-构型，则两个顶点 $v_1 \in V_1''$ 和 $v_3 \in V_3''$ 之间由一条边相连。

(5) 对于任意一对 $v_1 \in V_1''$，$v_3 \in V_3''$，$(v_1, v_3) \in E(G_M)$ 的概率取决于包含这两个顶点的 (6，3)-构型的数量。这个数量记为 $M(v_1, v_3)$，其介于 0 和 s 之间。注意，与 v_1，v_3 一起构成一个 (6，3)-构型的其他顶点对，在 V_1' 和 V_3' 的顶点之间给出一个匹配。$(v_1, v_3) \in E(G_M)$ 的概率至少为 $M(v_1, v_3)/2s$。

根据期望的线性性，G_M 中边的期望数量至少为

$$\sum_{v_1 \in V_1'', v_3 \in V_3''} \frac{M(v_1, v_3)}{2s} = c_3 n^2.$$

让我们选取一个匹配，M^* 其中 G_{M^*} 至少有 $c_3 n^2$ 条边。这些对的索引为 $M^* = \{m_1, m_2, \ldots, m_{s'}\}$。

(6) 最后一步，我们将 G_{M^*} 划分为若干匹配。对于每一对 $m_i \in M^*$，我们按照 m_i的索引顺序，从 G_{M^*} 中选取一组边。首先，选取所有满足 $\{\{v,w\} \cup m_1\}$ 来自某个 (6,3)-构形的 $(v,w) \in E(G_{M^*})$。所选边集构成一个匹配，记为 GM_1。我们移除这些边，并继续选取匹配。在第 i 步，通过从剩余边中选取所有的对，得到匹配 GM_i

$$(v,w) \in \{G_{M^*} \setminus \{\cup_{1 \le j < i} GM_j\}\}$$

其中 $\{\{v,w\} \cup m_i\}$ 中的点来自一个 (6，3)-构形。

现在我们可以完成证明了。G_{M^*} 的边集是若干两两不相交的匹配之并，GM_i $(1 \le i \le s')$。如果 n 足够大，那么根据定理 2.3，存在一个匹配 GM_i，它不是诱导匹配；其边张成了另一条边 e。现在，m_i 与 M_i 中张成 e 的两条边，再加上 e，共同张成一个三柱门（图 4）

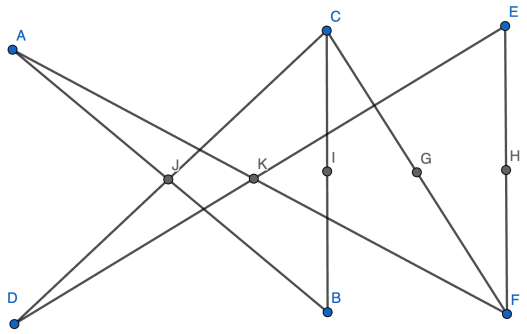


FIGURE 4. $m_i = \{A, D\}$、$\{(C, B), (E, F) \in GM_i\}$ 和 $e = (C, F)$ 的顶点与额外顶点 J，K，G 一起张成一个三柱门。

我们找到的三柱门是一个较大超图的子图，该超图有 11 个或 10 个顶点（取决于 I 和 H 是否是不相交的顶点）以及七条边。我们的第二个证明得到的则是一个更大的图，有 13 个或 12 个顶点以及九条边。□

2.2. **定理 2.1 的第二个证明**。在此证明中，我们使用 Frankl 和 R¨odl [3] 的超图正则性引理。

定理 2.4。对于任意 $c > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得当 n 足够大时，以下结论成立：如果 H_n^3 包含至少 cn^3 个两两边不相交的完全子图 K_4^3，那么它至少包含 δn^4 个完全子图 K_4^3。

证明。我们沿用前一个证明的前两步。定义一个 4 部 3-一致超图，H_m^3 其顶点集为 V_1'，V_1''，V_3'，V_3''。边由 (6，3)-构形定义；这四个顶点中的每个三元组都张成一条边。每个 (6，3)-构形都会在 H_m^3中张成一个 K_4^3 团。由于每条边唯一确定一个 (6，3)-构形，H_m^3 包含至少 $c_2 n^3$ 个两两边不相交、由 $m = 4n/6$ 个顶点构成的 K_4^3 团。根据定理 2.4，我们知道图中的 K_4^3 团数量至少为 $c_4 n^4$。如果一个 K_4^3 中的两条边来自同一个 (6，3)-构形，那么另外两条边也来自该构形，因为任意一对边都能确定这四个顶点。

如果 $c_4n^4 > c_2n^3$，那么存在一个 K_4^3，其中每条边都来自不同的 (6，3)-构形。我们将这样的一个 K_4^4的顶点记为 w_1'，w_1''，w_3'，w_3''，其中$w_1' \in V_1'$，$w_1'' \in V_1''$，$w_3' \in V_3'$，$w_3'' \in V_3''$。

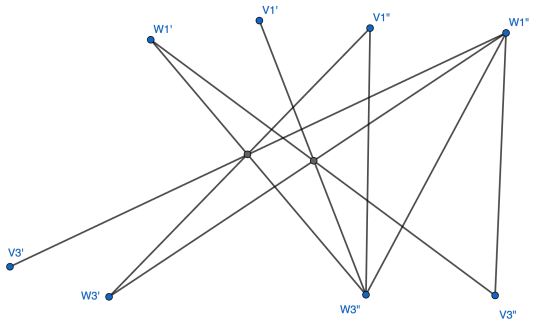


FIGURE 5.由这些顶点张成的边$W1'$，$W1''$，$W3'$，$W3''$，$V1''$，$V3''$包含一个三柱门。

对于每个三元组，(6，3)-构形中的第四个顶点记作 $v_1' \in V_1'$，$v_1'' \in V_1''$，$v_3' \in V_3'$，$v_3'' \in V_3''$。例如，四个顶点 w_1'，w_1''，v_3'，w_3''张成一个 (6，3)-构形。这八个顶点，即 w-s 和 v-s，彼此互不相交。六个顶点 w_1'，w_1''，w_3'，w_3''，v_1''，v_3''张成三柱门的边，另外两条边分别由 v_1''，w_3'' 和 w_1''，v_3''张成（图 5）。□

3. FURTHER REMARKS

在这两个证明中，我们确实找到了两个在稠密三均匀超图中不可避免的超图。这两个图如图 6 和图 7 所示。

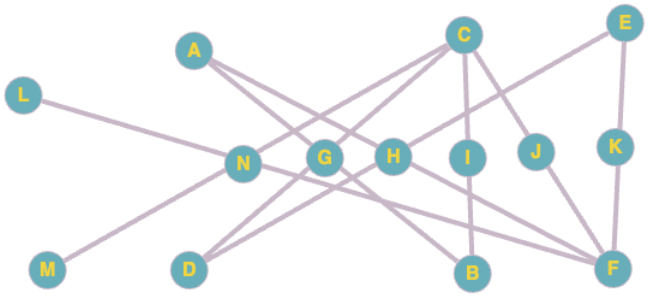


FIGURE 6. 第一个在稠密超图中不可避免的超图有 14 个顶点和 9 条边；若 I 和 K 是同一个顶点，则有 13 个顶点和 9 条边

主要问题仍然是确定三一致线性超图中三柱门的实际 Tur´an 数。本文证明，如果 $H_n^{(3)}$不包含三柱门，那么它就是稀疏的。另一方面，目前已知的避免三柱门的最佳构造是一种避免 C_4-s 的排列，如 [6]所述，其下界为 $\Omega(n^{3/2})$。

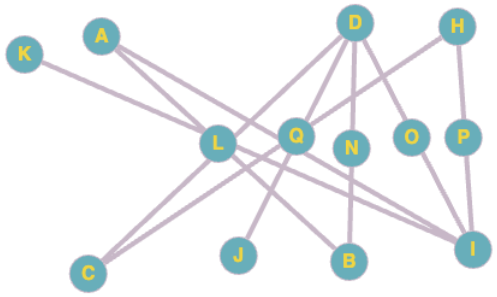


FIGURE 7. 稠密线性超图中的第二个不可避免超图有 13 个顶点和 9 条边；若 N 和 P 是同一个顶点，则有 13 个顶点和 9 条边

4. ACKNOWLEDGEMENTS

本研究部分获得加拿大自然科学与工程研究委员会探索基金及 OTKA K基金（编号 119528）的资助。作者感谢 Andr´as Gy´arf´as 和 G´abor S´ark¨ozy 提出这一问题并给予宝贵意见。

REFERENCES

[1] David Conlon、Lior Gishboliner、Yevgeny Levanzov、Asaf Shapira，《Brown–Erd˝os–S´os 问题的新界》，《组合理论杂志》B辑，第 158 卷，第 2, 2023, 1 35, 部分，页码 – Paul Erdos、William G. Brown 和 Vera S´os。《3-图中三角剖分球面的存在性及相关问题》。 *Period. Math. Hung.*，3:221–228。[3] Peter Frankl 和 Vojtech R¨odl。《集合系统中的极值问题》。 *Random Structures and Algorithms* 20 2 131 164, 2002 , ( ): – . [4] Lior Gishboliner 和 Asaf Shapira，《构造稠密无网格线性3-图》，《美国数学会会刊》， 150 2022 69 74 ( )，第 – 页。William Gowers 和 Jason Long，《 s-递增的 r元组序列的长度》。组合学、概率与计算，(2021) 30(5)，686–721。[6] Andr´as Gy´arf´as 和 G´abor N. S´ark¨ozy，《小型三元系统的线性 Tur´an 数，或 wicket 为何有趣? 》，《离散数学》，第 345 卷，第 11 期，2022 年，[7] Andr´as Gy´arf´as 和 G´abor N. S´ark¨ozy，《线性三元系统中的 Tur´an 数与拉姆齐数》，《离散数学》，第 344, 3, 2021，卷，第 期。Imre Z. Ruzsa 和 Endre Szemeredi。《不含包含三个三角形的六个点的三元系统》。载于 *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Combinatorics II: 939–945,* 1978 [9] ´Gabor Sarkozy 和 Stanley Selkow。《Ruzsa-Szemeredi 定理的推广》。 *Combinatorica* 25 1 77 84, 2004 , ( ): – 。[10] David Solymosi 和 Jozsef Solymosi，《3-均匀超图中的小核心》，《组合理论杂志》B辑，第 122 卷，2017 年，897–910 页，

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA, VANCOUVER, CANADA, AND OBUDA UNIVERSITY, BUDAPEST, HUNGARY*Email address*: solymosi@math.ubc.ca