arXiv:2305.01196v1 [math.FA] 2 May 2023

关于交换算子族的同时相似性

SHERWIN KOUCHEKIAN 和 BORIS SHEKHTMAN

Abstract. 交换 m 元算子组同时相似性的刻画，即使在有限维空间中也仍是一个未解决的问题；这被称为“线性代数中的一个野问题”。本文给出了任意巴拿赫空间上 m 元 k 循环交换算子组同时相似的判据。此外，我们还在有限维巴拿赫空间的情形下得到了一个额外的等价条件，推广了 [7] 中关于循环交换矩阵对的结果。我们还介绍了本文结果的两个应用：一个应用于解析函数巴拿赫空间上的一般乘法算子，另一个应用于 m 元交换方阵组。

1. 引言

关于交换算子对的同时相似性的刻画，是分类具有野型表示的代数中的一个核心问题，参见 [1], [2], 和[5]。Gelfand 和 Ponomorev [4] 指出，对交换方阵对的同时相似性的刻画，可以进一步实现对任意方阵对的同时相似性的刻画。自此，交换方阵对的同时相似性刻画问题便被称为“线性代数中的一个野性问题”。在 [7], 中，利用多项式的消失理想，给出了交换方阵循环对的一个充要条件。本文将这一结果推广到巴拿赫空间上算子的 k-循环交换 m-元组。我们首先引入一些记号。

在下文中，$(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ 始终表示一个复巴拿赫空间，而 $\mathscr{B}(\mathscr{X})$ 表示从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$. 的所有有界线性算子所构成的空间。一个 m-元组 $(A_1, \ldots, A_m)$ 是 $(\mathscr{B}(\mathscr{X}))^m$ 中的一个向量，若 $A_iA_j = A_jA_i$ 对所有 $i, j = 1, \ldots, m.$ 都成立，则称其为 $\mathscr{X}$ 上的一个交换 m- 元组。 $\mathscr{X}$ 上的两个交换 m- 元组 $(A_1, \ldots, A_m)$ 和 $(B_1, \ldots, B_m)$，分别记为 A 和 B，若存在一个可逆算子 S 属于$\mathscr{B}(\mathscr{X})$，使得 $B_j = SA_jS^{-1}$ 对所有 $j = 1, \ldots, m$ 均成立，则称它们同时相似。此外，令 $\mathbb{C}[\mathsf{z}] := \mathbb{C}[z_1, ..., z_m]$表示复数域 $\mathbb{C}$.上关于 m 个变量的多项式代数。最后，若$p(\mathsf{z}) = p(z_1, ..., z_m)$ 是 $\mathbb{C}[\mathsf{z}]$ 中的一个多项式，且 $\mathsf{A} = (A_1, \ldots, A_m)$ 属于 $(\mathscr{B}(\mathscr{X}))^m$，则 $p(\mathsf{A})$ 表示算子 $p(A_1, ..., A_m)$，它属于 $\mathscr{B}(\mathscr{X})$。

本文的组织结构如下。第 2 节给出了我们的主要结果——定理 2.3，该定理为巴拿赫空间上两对 k-循环 m 元交换算子同时相似提供了一个等价条件。在第 3 节中，我们证明，对于有限维情形，可以为定理 2.3 补充一个有用的充要条件，但这一条件对于一般的巴拿赫空间并不成立。所给出的简单

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：15A21、47A16、47B99；次要分类：47L22、15A30。

本节中的例子展示了有限维与无限维巴拿赫空间之间的鲜明差异。第 4 节以定理 2.3 和定理 3.2 的两个一般应用作为本文的结尾。

2. 主要结果

首先，我们需要以下定义。

定义 2.1. 对于 $\mathscr{X}^k$ 中的向量 $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_k)$，以及 $(\mathscr{B}(\mathscr{X}))^m$ 中的 m 元组 $\mathbf{A}=(A_1,\dots,A_m)$，定义

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})=\left\{\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j : p_j\in\mathbb{C}[\mathbf{z}]\right\}. \tag{2.2}$$

如果 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密，则称 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{A}$ 的循环 k 元组，或者称 $\mathbf{A}$ 关于 k 元组 $\mathbf{u}$ 是 k-循环的。此外，如果 $\mathbf{u}$ 已明确，则简称 $\mathbf{A}$ 为 k-循环 m 元组。显然，$\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个（线性）子空间，而我们的定义将循环性的标准定义推广到了算子 m 元组。

现在可以陈述我们的主要结果了。

定理 2.3. 设 $\mathbf{A}=(A_1,\dots,A_m)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的可交换 m-元组，并设 $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_k)$ 是 $\mathbf{A}$ 的循环 k-元组。$\mathscr{X}$ 上的可交换 m-元组 $\mathbf{B}=(B_1,\dots,B_m)$ 与 $\mathbf{A}$ 同时相似，当且仅当存在 $\mathbf{B}$ 的循环 k-元组 $\mathbf{v}=(v_1,\dots,v_k)$ 以及正常数 $c>0$，使得

$$c^{-1}\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j\right\|\le\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j\right\|\le c\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j\right\| \tag{2.4}$$

对于所有多项式 p_j in $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$。

证明。首先，假设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 同时相似。因此，存在一个可逆算子 S in $\mathscr{B}(\mathscr{X})$，使得 $B_j=SA_jS^{-1}$ 对所有 $j=1,\dots,m$ 都成立。定义 $v_j=Su_j$，其中 $j=1,\dots,k$，并令 $\mathbf{v}=(v_1,\dots,v_k)$。对于任意 $p$in $\mathbb{C}[\mathbf{z}],$，由于 $\mathbf{B}$ 是一个交换的 m-元组，我们有

$$p(\mathbf{A})=p(A_1,\dots,A_m)=p(S^{-1}B_1S,\dots,S^{-1}B_mS)=S^{-1}p(B_1,\dots,B_m)S=S^{-1}p(\mathbf{B})S.$$

因此，

$$\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j=\sum_{j=1}^{k}S^{-1}p_j(\mathbf{B})Su_j=S^{-1}\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j\quad\text{for all}\quad p_j\in\mathbb{C}[\mathbf{z}]. \tag{2.5}$$

回顾定义 (2.2)，由 (2.5) 可得 $\mathcal{L}_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})=S\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$。由于 S 是满射，并且根据假设，$\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密，因此同样可得 $\mathcal{L}_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密。于是，$\mathbf{v}=(v_1,\dots,v_k)$ 是关于 B 的循环 k-元组。此外，(2.5) 还意味着

$$\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j\right\|\le\left\|S^{-1}\right\|\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j\right\|\quad\text{for all}\quad p_j\in\mathbb{C}[\mathbf{z}]. \tag{2.6}$$

从左侧将 S 应用于 (2.5) 并取范数，可得

$$\frac{1}{\|S\|}\left\|\sum_{j=1}^{k} p_j(\mathbf{B})v_j\right\| \le \left\|\sum_{j=1}^{k} p_j(\mathbf{A})u_j\right\| \quad \text{for all} \quad p_j \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]. \tag{2.7}$$

现在，由 (2.6)、(2.7) 以及 $c = \max\{\|S\|, \|S^{-1}\|\}$. 可得不等式 (2.4)。这就完成了必要性部分的证明。

反过来，设 B 是一个交换的 m-元组，并设 $\mathbf{v} = (v_1,\ldots, v_k)$ 是 B 的一个循环 k-元组，且满足 (2.4)。定义从 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$ 到 $\mathcal{L}_{\mathbf{B}}(\mathrm{v})$ 的映射 $\mathfrak{L} \subseteq \mathscr{X} \subseteq \mathscr{X}$ 如下：

$$\mathfrak{L}\Big(\sum_{j=1}^{k} p_j(\mathbf{A})u_j\Big) = \sum_{j=1}^{k} p_j(\mathbf{B})v_j \quad \text{for all} \quad p_j \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]. \tag{2.8}$$

首先证明 $\mathfrak{L}$ 定义良好。为此，假设 $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$ 有两种表示形式： $x = \sum_{j=1}^{k} p_j(\mathrm{A})u_j$ 和 $x = \sum_{j=1}^{k} q_j(\mathrm{A})u_j$，其中 p_j、 $q_j \in \mathbb{C}[\mathrm{z}]$ 以及$1 \le j \le k.$。换言之， $\sum_{j=1}^{k}(p_j(\mathrm{A}) - q_j(\mathrm{A}))u_j = 0.$。现在，由 (2.4) 的第一个不等式可知 $\sum_{j=1}^{k}(p_j(\mathrm{B}) - q_j(\mathrm{B}))v_j = 0$；或者等价地， $\sum_{j=1}^{k} p_j(\mathrm{B})v_j = \sum_{j=1}^{k} q_j(\mathrm{B})v_j$.。根据 $\mathfrak{L}$ 的定义，最后一个等式等价于 $\mathfrak{L}x = \mathfrak{L}(\sum_{j=1}^{k} p_j(\mathrm{A})u_j) = \mathfrak{L}(\sum_{j=1}^{k} q_j(\mathrm{A})u_j)$。因此， $\mathfrak{L}$ 定义良好。

此外， $\mathfrak{L}$ 显然是线性的。由 (2.4) 的第一个不等式可直接推出，$\mathfrak{L}$ 在 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$ 上也是有界的，且 $\|\mathfrak{L}\| \le c.$。由于 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密，有界线性变换（BLT）定理意味着， $\mathfrak{L}$ 有唯一的保范扩张至 $\mathscr{X}$；也就是说，存在唯一的 S 属于 $\mathscr{B}(\mathscr{X})$，使得对于所有 x 属于 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$，都有 $Sx = \mathfrak{L}x$，且 $\|S| = \|\mathfrak{L}\|.$。我们证明 S 就是所需的算子，它给出了 A 与 B 之间的同时相似。要证明 S 可逆，根据开映射定理，只需证明 S 是一个双射。

为此，首先令 $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$。那么 x 具有如下形式： $x = \sum_{j=1}^{k} p_j(\mathrm{A})u_j$，其中某个 p_j属于 $\mathbb{C}[\mathrm{z}].$。现在，设 $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$ 且 $Sx = 0.$。利用 $Sx = \mathfrak{L}x$这一事实，结合 $\mathfrak{L}$ 的定义以及 (2.4) 的第二个不等式可得 $x = 0.$。由于 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密，由 S的连续性可知， $\mathrm{Ker}\,(S) = \{0\}$，其中 $\mathrm{Ker}\,(S)$ 表示 $S.$ 的核。这证明了 S 是一一映射。

接下来，令 $y \in \mathscr{X}.$。由 $\mathcal{L}_{\mathbf{B}}(\mathrm{v})$ 的稠密性，存在一个序列 $\{y_n\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{B}}(\mathrm{v})$，使得 $y_n \to y$ 属于 $\mathscr{X}$；也就是说， $\lim_{n\to\infty}\|y_n - y\| = 0$，其中 $y_n = \sum_{j=1}^{k} p_j^{(n)}(\mathrm{B})v_j$，且 $\{p_1^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)}\}.$是某个多项式序列。令 $x_n = \sum_{j=1}^{k} p_j^{(n)}(\mathrm{A})u_j$，根据 $\mathfrak{L}$ 的定义，对于所有 $n \ge 1.$，我们有 $\mathfrak{L}x_n = y_n$。由于 $\{y_n\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛，因而是一个柯西序列，(2.4) 中的第二个不等式表明， $\{x_n\}$ 在 $\mathscr{X}.$ 中也构成一个柯西序列。因此，存在一个 $x \in \mathscr{X}$，使得 $x_n \to x$ 在 $\mathscr{X}.$ 中。现在，由 S的连续性可得

$$Sx = \lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y. \tag{2.9}$$

因此， S 也是满射。

还需证明 A 和 B 是同时相似的。我们首先固定 $x \in \mathscr{X}$，并利用 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$ 的稠密性得到一个序列 $\{x_n\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathrm{u})$，使得 $x_n \to x$ 属于 $\mathscr{X}$，其中

$x_n = \sum_{j=1}^k p_j^{(n)}(\mathbf{A})u_j$ 对于某个多项式序列 $\{p_1^{(n)}, \dots, p_k^{(n)}\}$（属于 $\mathbb{C}[z].$）。对于每个固定的 $n \geq 1$ 和 $1 \leq j \leq k$，令 $q_{\ell}^{(n)}{}_{,j} = z_\ell p_j^{(n)}$，其中 $1 \leq \ell \leq m.$。显然，对于每个固定的 ℓ,

$$A_\ell x_n = A_\ell \sum_{j=1}^k p_j^{(n)}(\mathbf{A})u_j = \sum_{j=1}^k A_\ell p_j^{(n)}(\mathbf{A})u_j = \sum_{j=1}^k q_{\ell,j}^{(n)}(\mathbf{A})u_j.$$

因此，根据 $\mathfrak{L}$ and $q_{\ell}^{(n)}{}_{,j}$ 的定义可得

$$\mathfrak{L}A_\ell x_n = \mathfrak{L}\sum_{j=1}^k q_{\ell,j}^{(n)}(\mathbf{A})u_j = \sum_{j=1}^k q_{\ell,j}^{(n)}(\mathbf{B})v_j = B_\ell \sum_{j=1}^k p_j^{(n)}(\mathbf{B})v_j = B_\ell \mathfrak{L}x_n. \tag{2.10}$$

最后，方程 (2.10) 连同与 (2.9) 类似的论证可推出

$$SA_\ell x = \lim_{n\to\infty} SA_\ell x_n = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}A_\ell x_n = \lim_{n\to\infty} B_\ell \mathfrak{L}x_n = \lim_{n\to\infty} B_\ell S x_n = B_\ell S x. \tag{2.11}$$

由于 x 是任意的，由 (2.11) 可知，对所有 $\ell = 1, \dots, m.$, $SA_\ell = B_\ell S$。定理证明完毕。□

这里我们作几点说明。首先，注意到 (2.4) 中的正常数 c^{-1} 和 c，可以分别等价地替换为两个任意的正常数 c_1 和 c_2。不过，采用给定的形式可使 (2.4) 在将 (A, u) 替换为 (B, v)，或反之时保持不变。这也与定理 2.3 的陈述一致，因为该定理关于 A 和 B 是对称的。其次，定理 2.3 必要性部分的证明清楚地表明，若 A 和 B 是同时相似的 m-元组，则 A 是 k-循环的，当且仅当 B 是 k-循环的。例如，若 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ 是 A 的一个循环 k-元组，则 $\mathbf{v} = (Su_1, \dots, Su_k)$ 是 B 的一个循环 k-元组，其中 u 和 v 均满足 (2.4)。然而，一般而言，逆命题并不成立；也就是说，存在同时相似的、k-循环的交换 m-元组 A 和 B，但相应的循环 k-元组 u 和 v 不满足 (2.4)。下一节末尾，我们将利用定理 3.2 给出一个简单的例子。

3. 有限维情形

本节中，我们假设 $\mathscr{X}$ 是有限维的。因此，不失一般性，可以假设 $\mathscr{X} = \mathbb{C}^N$ 对某个自然数 $N.$ 成立。显然，现在 $(\mathscr{B}(\mathscr{X}))^m$ 中的一个 m 元组 $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m)$ 就只是作用于 $\mathbb{C}^N.$ 上的一个 m 元 $N \times N$ 矩阵。这里我们的主要目标是定理 3.2，在该定理中，我们证明可以为定理 2.3 增添另一个非常有用的等价条件。不过，这个等价条件在无限维情形下并不成立。本节末尾将给出一个简单的反例。我们从一个一般引理开始。

引理 3.1. 设 $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m)$ 和 $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_m)$ 是作用在 $\mathbb{C}^N.$ 上的两个由 m 个两两可交换矩阵组成的组。若 $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_k)$ 和 $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k)$ 是 $\left(\mathbb{C}^N\right)^k$ 中任意两个向量，则以下条件等价。

(I) 存在一个正常数 $c>0$，使得

$$c^{-1}\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j\right\|\le\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j\right\|\le c\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j\right\|,$$

对于所有多项式 p_j in $\mathbb{C}$[z]。

(II) $\left\{p_1、\ldots\ldots、\ p_k\in\mathbb{C}[\mathbf{z}]:\ \sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j=0\right\}=\left\{p_1、\ldots\ldots、\ p_k\in\mathbb{C}[\mathbf{z}]:\ \sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j=0\right\}$.换言之，如果 $p_1、\ldots\ldots、\ p_k\in\mathbb{C}[\mathbf{z}]$, 那么

$$\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j=0\quad \textit{if and only if}\quad \sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j=0.$$

证明。由于有限维空间上的所有范数都等价，我们可以假设（I）中的范数是 $\mathbb{C}^N$. 上的任意范数。现在，如果对某个 $p_1,\ldots,p_k$ 属于$\mathbb{C}$[z], ，有 $\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j=0$，那么由（I）的第一个不等式可得 $\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j=0$，反之亦然。因此（I）蕴含（II）。

为证明 (II) 蕴含 (I)，按照 (2.8) 定义从 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$ 到 $\mathcal{L}_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})$ 的 $\mathfrak{L}$。采用与定理 2.3 证明中完全相同的论证，只需将不等式 (2.4) 替换为条件 (II)，即可得出 $\mathfrak{L}$ 定义良好。由于 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$ 和 $\mathcal{L}_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})$ 现在是 $\mathbb{C}^N$ 的子空间，因此它们都是闭的，从而是完备的。这意味着 $\mathfrak{L}$ 是从 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$ 到 $\mathcal{L}_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})$ 的有界算子。此外，若 $x=\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$，且满足 $\mathfrak{L}x=0$；或者等价地，若 $\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j=0$，那么由 (II) 可得 $x=0$；也就是说，Ker $(S)=\{0\}$。这表明 $\mathfrak{L}$ 也是单射，因而是可逆的。现在，运用定理 2.3 证明第一部分中的类似论证，可得 (II) 中的两个不等式，其中$c=\max\{\|\mathfrak{L}\|,\|\mathfrak{L}^{-1}\|\}$. □

将引理 3.1 与定理 2.3 结合，可立即得到有限维情形下的以下结果。

定理 3.2. 设 $\mathbf{A}=(A_1,\ldots,A_m)$ 和 $\mathbf{B}=(B_1,\ldots,B_m)$ 是作用在 $\mathbb{C}^N$. 上的两个 m 元交换 $N\times N$矩阵组。若 A 关于 k 元组 $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_k)$ 是 k-循环的，则以下命题等价。

(a) B 与 A 同时相似。(b) 存在 B 的一个循环 k 元组 $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_k)$，以及一个正常数 $c>0$，使得

$$c^{-1}\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j\right\|\le\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j\right\|\le c\left\|\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j\right\|,$$

对所有属于 $\mathbb{C}$[z]的多项式 p_j，均有。

（c）对于 B，存在一个循环的 k-元组 $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_k)$，使得

$$\left\{p_1,\ldots,p_k\in\mathbb{C}[\mathbf{z}]:\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{A})u_j=0\right\}=\left\{p_1,\ldots,p_k\in\mathbb{C}[\mathbf{z}]:\sum_{j=1}^{k}p_j(\mathbf{B})v_j=0\right\}.$$

正如本节开头所述，在无限维情形下，定理 3.2 的条件（c）并不等价于同时相似。下面给出一个简单的例子。

例 3.3。令 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|) = (H^2, \|\cdot\|_2)$，其中 H^2 表示开单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}$ 上的解析函数的哈代空间：$|z| < 1\}$ 定义为（见 [3]）

$$H^2 = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad \text{and} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

设 $A = M_z$ 为在 H^2 上由 M_z 定义的关于自变量 z 的乘法算子：$f(z) \mapsto zf(z)$。显然，$A \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$。由于多项式在 H^2 中稠密，因此 A 是循环的，其循环向量可取为 $u = 1.$。接下来，我们令 $B = 2A = M_{2z}.$。由此可得 $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$，并且 B 相对于同一个循环向量 $u = 1.$ 也是循环的。

现在，若 $p \in \mathbb{C}[z]$，则根据定义可得 $p(A)u = p(z)$。因此，$p(A)u = 0$ 当且仅当 $p(z) \equiv 0$；或者等价地，$\{p \in \mathbb{C}[z] : p(A)u = 0\} = \{0\}.$。类似的论证还可得出 $\{p \in \mathbb{C}[z] : p(B)u = 0\} = \{0\}.$。因此，定理 3.2 的条件 (c) 成立。然而，A 和 $B = 2A$ 并不彼此（同时）相似。为完整起见，我们在此给出证明。假设存在一个可逆的 $S \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$，使得 $2A = SAS^{-1.}$。将最后一个等式迭代应用于 $n \geq 1$，可得 $2^n A^n = SA^n S^{-1}.$。因此，

$$2^n \|A^n\| = \|2^n A^n\| = \|SA^n S^{-1}\| \leq \|S\| \|A^n\| \|S^{-1}\| \quad \text{for all } n \geq 1.$$

由于 $\|A^n\| > 0$ $(n \geq 1)$，上述不等式意味着，对于所有 $n \geq 1$，都有 $\|S\|\|S^{-1}\| \geq 2^n$，这是荒谬的，因为 $\|S\|$ 和 $\|S^{-1}\|$ 都是有限的。因此，不存在这样的 S。

我们应当指出，在无限维情形中，例如例 3.3 中，定理 3.2 的 (c) 部分所述的条件很可能会被平凡地满足，因为该部分描述的两个集合最终都是零理想 $\{0\}.$。然而，在有限维情形中，这种现象绝不可能发生。为此，回顾一下，根据 Cayley-Hamilton 定理，每个 $N \times N$ 矩阵 A 都满足其自身的特征多项式；也就是说，总存在一个多项式 p，进而存在无穷多个多项式，使得 $p(A)$恒等于零。这正是无限维情形中的理想方法无法成为有效策略的根本原因。

我们以两个循环（同时）相似的算子 A 和 B 为例结束本节。这两个算子具有一个共同的循环 k-元组，但不满足定理 2.3 中的条件 (2.4)，参见第 2 节末尾的评注。

例 3.4。设 $\mathscr{X} = \mathbb{C}^2$ 是 $\mathbb{C}$ 上通常的二维向量空间，其标准基为 $\{e_1, e_2\} = \{(1, 0)^T$、$(0, 1)^T\}$。另请注意，对于任意 2×2-矩阵，(e_1, e_2) 显然是一个循环 2-元组。考虑 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$。通过常规检验可得 $B = SAS^{-1}$，其中 $S = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$ 因此，A 和 B 与同一个循环 2-元组 $\mathbf{u} = \mathbf{v} = (e_1, e_2)$ 同时相似。现在，若令 $p_1(z) = 1$ 和 $p_2(z) = -z$，则显然 $\sum_{j=1}^{2} p_j(A)u_j = e_1 - Ae_2 = 0$，而 $\sum_{j=1}^{2} p_j(B)v_j = e_1 - Be_2 \neq 0.$。这表明定理 3.2 的条件 (c) 不成立。但根据引理 3.1，定理 3.2 的条件 (b) 和 (c) 在有限维情形下总是等价的。因此，

(2.4) 也不成立。至此，我们的论证完成。最后补充一点：这个给出的平凡例子之所以成立，仅仅是因为有限维情形下添加了等价条件，而这一点很容易验证。

4. 示例与说明

我们以所得结果的一些应用作为本文的结尾。作为第一个应用，设 Ω 是 $\mathbb{C}^m$ 的一个非空开子集，并用 ($\mathscr{X}$(Ω) $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$) 表示 Ω 上满足 $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ 是稠密子集的全纯函数所构成的巴拿赫空间。例如，可以考虑 m 维单位多圆盘上的狄利克雷型空间。

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_j| < 1, \quad j = 1 \dots, m\},$$

其中包括多圆盘上的著名 Hardy 空间和伯格曼空间，以及多圆盘代数 $A(\mathbb{D}^m)$，参见 [6]。此外，令 M_{z_j} 表示在 $\mathscr{X}$(Ω) 上定义的乘法算子，它将 j^{th}坐标 z_j 乘以 $\mapsto z_j f(\mathbf{z})$，定义如下： M_{z_j}: $f(\mathbf{z})$。由此可知，$\mathbf{M} = (M_{z_j}, \dots, M_{z_m})$ 是作用于 $\mathscr{X}$(Ω) 上的一个由交换算子构成的循环 m 元组，其循环向量为 1。由于对所有 $p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, , $p(\mathbf{M})1 = p(\mathbf{z})$，以下结果可由定理 2.3 直接推出。

推论 4.1. 在 $\mathscr{X}$(Ω) 上的一个可交换 m-元组 $A = (A_1, \dots, A_m)$ 同时相似于 $\mathbf{M} = (M_{z_1}, \dots, M_{z_m})$，当且仅当 A 是循环的，并且存在 A 在 $\mathscr{X}$(Ω) 中的一个循环向量 u，使得

$$c^{-1} \|p\|_{\mathscr{X}} \leq \|p(\mathbf{A})u\|_{\mathscr{X}} \leq c \|p\|_{\mathscr{X}},$$

对于某个常数 $c > 0$，以及所有多项式 $p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$.

我们的下一个也是最后一个结果涉及有限维情形，是对例 3.4 中已有思路的推广。设 $\mathscr{X} = \mathbb{C}^N$，其标准基为

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \quad e_N = (0, 0, \dots, 1)^T.$$

如例 3.4 所述，对于任意由可交换 $N \times N$矩阵 $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m)$ 构成的 m-元组，$\mathbf{u} = (e_1, \dots, e_N)$ 显然是一个循环 m-元组。因此，根据定理 3.2，我们得到以下推论，它为循环情形下的“线性代数中的一个棘手问题”提供了答案。

推论 4.2. 两个由 $N \times N$ 矩阵组成的可交换 m-元组 $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m)$ 和 $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_m)$ 同时相似，当且仅当存在 $\mathbb{C}^N$ 的一组基 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$，使得

$$\left\{ p_1, \dots, p_N \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] : \sum_{j=1}^{N} p_j(\mathbf{A}) e_j = 0 \right\} = \left\{ p_1, \dots, p_N \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] : \sum_{j=1}^{N} p_j(\mathbf{B}) v_j = 0 \right\}.$$

References

[1] P. Donovan 和 M.R. Freislich, *Some evidence for an extension of the Brauer-Thrall conjecture*, 理论数学特别研究领域，40（1972），24–26。[2] Y. A. Drozd, *Tame and wild matrix problems*, 表示与二次型，（1979），39–74。[3] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press，纽约，1970年。

[4] I.M. Gelfand 和 V.A. Ponomarev, *Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite-dimensional space* **3** 1969 4, 81 82 [, Funktsional. Anal. i Prilozhen., （）第 – 期。英文译本：Functionul Anal. Appl. **3** 1969 325 326]（），– Michiel Hazewinkel、Nadiya Gubareni 和 [5] V. V. Kirichenko, *Algebras, rings and modules. Vol. 2*, Springer （2007）。[6] W. Rudin, *Function Theory in Polydisks*, W. A. Benjamin, Inc.，纽约-阿姆斯特丹，1969年。[7] B. Shekhtman, *On Cyclicity and Regularity of Commuting Matrices*，数学与统计学 1（2013）157–161。

Sherwin Kouchekian, Department of Mathematics & Statistics, University of South Florida, Tampa, FL 33620-5700*Email address*: skouchekian@usf.eduBoris Shekhtman, Department of Mathematics, University of South Florida, Tampa, FL33620-5700 *Email address*: shekhtma@usf.edu