适用于自同构集成译码的兼容码率极化码

Marvin Geiselhart、Jannis Clausius 和 Stephan ten Brink，斯图加特大学电信研究所，Pfaffenwaldring 47，德国斯图加特 70569{geiselhart,clausius,tenbrink}@inue.uni-stuttgart.de

arXiv:2305.01214v1 [cs.IT] 2 May 2023

摘要——近年来，自同构集成译码（AED）作为极化码连续消除列表（SCL）译码的一种计算效率更高的替代方案，引起了研究者的关注。尽管 AED 在特定码参数下展现出更优的性能，但目前尚无能够适应不同码率的灵活码设计。本文提出了一种理论框架，用于构造具有指定自同构群的兼容码率极化码，这是实现 AED 的关键要求。我们首先证明，不存在具有实用自同构的一比特粒度序列。然而，允许码维数以更大的步长变化后，便可以构造灵活的码序列。随后，我们基于 β-扩展提出一种显式的合成信道排序，以确保所有构造的码都具有所需的对称性。涵盖多种码维数和码长的仿真结果表明，该方案的性能与采用循环冗余校验（CRC）辅助 SCL 译码的 5G 极化码相当，但复杂度更低。

I. 引言

极化码由 Arıkan [1], 提出，是第一类在长码长下通过低复杂度连续消除（SC）译码，能够被证明渐近达到离散无记忆信道（DMC）信道容量的信道编码。为提升其在短码长区间的性能，研究人员引入了外层循环冗余校验（CRC）码和连续消除列表（SCL）译码器 [2]。因此，SCL 已成为 CRC 辅助极化码的事实标准译码器，而这类极化码已被 5G标准 [3]采用。

遗憾的是，SCL 译码需要大量的路径管理开销，从而增加译码时延，并使大列表尺寸的实现变得困难。SCL 译码的一种替代方案是自同构集成译码（AED） [4], , 其中所有子译码器彼此独立，因此能够实现效率高得多的硬件实现 [5]。AED 利用码的自同构群生成接收序列的 M 个置换版本，并由低复杂度 SC译码器并行处理这些版本。因此，要使 AED 适用，该码必须具有数量合理的有效自同构，这需要进行专门的码设计 [6]。首个用于 AED 的码设计在[7], 中提出，但该设计依赖人工检查，因此并非完全自动化。在 [8], 中，提出了首个自动化码设计，可确保预先指定的自同构群。这通过反复修改标准设计算法生成的极化码，直至其具有所需的对称性，即可实现这一目标。 [9], 提出了一种更直接的方法：在任意设计中添加信息比特，直至满足对称性约束。上述所有设计算法生成的码都只有一种码率，但许多实际应用需要能够适应不同码率的码。 [10]表明，对于几乎所有码维数，都存在高度对称码。然而，这些码彼此并非子码，因此无法构成速率兼容序列。本文提出了一种低复杂度、显式的速率灵活极化码设计算法。本文的主要贡献如下：

- 我们给出了极化码序列的信息集包含至少一个预定义自同构群的充要条件。
- 我们扩展了偏序，使其恰好涵盖具有至少这种对称性的码。
- 基于 β-展开，我们提出了一种比特可靠性序列，该序列天然包含所需的对称性，因此能够直接生成适用于 AED 的灵活码率极化码设计。
- 我们首次通过大量蒙特卡罗仿真，证明 AED 在广泛的码率和码长范围内可实现接近最先进水平的性能。

II. 预备知识

A. 符号说明

向量和矩阵分别用小写和大写粗体字母表示。 $\mathbb{Z}_N$ 表示介于 0 和 $N-1$之间的整数集合。对于整数 $i \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $\hat{\imath} \in \mathbb{F}_2^n$ 表示其 n 位、最低有效位优先的二进制展开。二进制数按最低有效位优先书写，并用下标 2 表示，例如 $11 = 11010_2$。S_n 表示 n 个元素的所有排列组成的集合。

B. 极化码

极化码的结构由 $N \times N$ Hadamard矩阵 $G_N = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]^{\otimes n}$ 定义，其中 $N = 2^n$，$(\cdot)^{\otimes n}$表示第 n 个 Kronecker幂。Hadamard矩阵可以解释为将 N 个离散无记忆信道转换为 N 个极化合成信道。在此语境下，极化意味着大多数合成信道要么高度可靠，要么高度不可靠，只有少数处于中间状态。极化码设计的任务是选择一组可靠的

本研究由德国联邦教育与研究部（BMBF）通过 Open6GHub 项目（资助编号：16KISK019）资助。

信道索引用于信息传输，即所谓的信息集 $\mathcal{I}$。其余不可靠的信道索引构成所谓的冻结集 $\mathcal{F}$，其中传输的冻结比特等于“0”。相应的生成矩阵 G 由 G_N 中由 $\mathcal{I}$定义的行组成。

C. 连续消除译码

SC译码算法通过对因子图进行深度优先遍历来运行。根据信道观测值以及此前所有已估计比特的硬判决，依次估计与合成信道相关联的比特。在冻结位置，硬判决始终设为 0。下文中，我们将 SC译码函数记为$\tilde{\mathrm{x}}$ =SC(y)，其中 y 为接收序列，$\tilde{\mathrm{x}}$ 为码字估计。SCL通过在每个信息比特处分支，将因子图的深度优先遍历修改为两条并行译码路径，分别假设该比特为 0 和 1。此外，还会根据比特的可靠性计算路径度量。为抑制路径数量的指数增长，在每个分支步骤中仅保留路径度量最小的 L 条路径 [2]。

D. 偏序

极化码的合成信道呈现一种偏序关系，即无论传输信道如何，其中一些信道总是比另一些更可靠 [11], [12]。若合成信道 j 的可靠性始终至少与 i 一样高，则记作 i 4 j。偏序由以下两条规则定义[1]：

1) 左交换：若对于某个 $l \in \mathbb{Z}_{n-1}$，$(\hat{\mathrm{i}}_l, \hat{\mathrm{i}}_{l+1}) = (1, 0)$，且 $(\hat{\mathrm{j}}_l, \hat{\mathrm{j}}_{l+1}) = (0, 1)$，同时所有其他 $\hat{\mathrm{j}}_{l'} = \hat{\mathrm{i}}_{l'}$，$l' \notin \{l, l+1\}$，则 $\hat{} \hat{} \mathrm{i}$ 4 j。也就是说，若 j 是将 i 中一个“1”比特向右（更高有效位）移动一位后得到的，则 i 4 j。2) 二进制支配：若 $\hat{\mathrm{i}}_l \leq \hat{\mathrm{j}}_l \ \forall l \in \mathbb{Z}_n$，则 i 4 j。换言之，j 是 i，但可以包含额外的“1”比特。

其余所有关系均可由传递性推导得出。

具有信息集 $\mathcal{I}$ 的极化码符合（或遵循）该偏序：若 $\mathrm{i} \in \mathcal{I}$，则所有 $\mathrm{j} \succcurlyeq \mathrm{i}$ 也满足 $\mathrm{j} \in \mathcal{I}$；也就是说，对于任意信息比特，所有更可靠的信道也都被指定为信息比特。

一种始终遵循偏序的低复杂度极化码设计算法是 β-扩展 [14]。该算法为每个合成信道分配一个极化权重，其计算方式如下：

$$w_{\mathrm{p}}(i) = \sum_{l=0}^{n-1} \hat{i}_l \beta^l \tag{1}$$

其中，β 是满足 $1 < \beta \leq 2$的实数。按照极化权重对合成信道进行排序，并选取权重最大的K个作为信息集。

[1]在 [11] 中，偏序采用单项式形式体系定义，这种形式体系很容易与此处使用的符号说明联系起来。 [13]给出了二者等价性的形式化证明。

E. 极化码的自同构

定义：码 $\mathcal{C}$（码长为N）的（置换）自同构群Aut($\mathcal{C}$)是将每个码字符号映射到另一个（不一定不同的）码字符号的所有排列的集合。换言之，

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) = \{\boldsymbol{\pi} \in S_N | \boldsymbol{\pi}(\mathbf{c}) \in \mathcal{C} \ \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}\}.$$

在极化码的背景下，一种特殊形式的置换尤其值得关注，即仿射置换。

定义：仿射置换是指一种对码字符号的置换，可以写成

$$\pi : i \mapsto i' : \quad \hat{\mathbf{i}}' = \mathbf{A}\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{b} \tag{2}$$

其中 $\mathrm{A} \in \mathbb{F}_2^{n \times n}$是一个非奇异矩阵，$\mathrm{b} \in \mathbb{F}_2^n$。类似地，码的仿射自同构群是由仿射置换构成的自同构子群。

对于极化码，仿射自同构群可以通过稳定子的概念来刻画：

定义：集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}_{2^n}$ 的稳定子 Stab($\mathcal{S}$) 是所有满足以下性质的置换 $\sigma \in \mathrm{S}_n$ 的集合：

$$f_\sigma(i) \in \mathcal{S} \quad \forall i \in \mathcal{S},$$

其中，f_σ(i) 对 i 的二进制位进行置换，即：

$$f_\sigma : i \mapsto i' : \quad \hat{\mathbf{i}}' = \sigma(\hat{\mathbf{i}}).$$

如果 $\mathcal{I}$ 是遵循偏序的极化码的信息集，那么 Stab($\mathcal{I}$) 遵循一种分块结构，即比特仅在连续块 [6] 内进行置换。该分块结构由块大小向量 $\mathrm{s} = [\mathrm{s}0, \ldots, \mathrm{s}_{m-1}]$ 定义，其中 m 为块的数量。我们将集合 $\mathrm{P}_\mathrm{s} \subset \mathrm{S}_n$ 定义为这样一组置换：其置换矩阵在由 s 给出的分块轮廓上方没有非零元素。

定理 1：设 $\mathcal{C}$ 是一个信息集为 $\mathcal{I}$ 、遵循偏序的极化码，s 为 Stab($\mathcal{I}$) 的分块轮廓。则，其仿射自同构群是根据公式（2）定义的仿射置换 BLTA(s) 的集合，其中 A 在由 s [6], [15] 给出的分块对角线上方没有任何非零元素。

在下文中，这种码称为 s-对称。

F. 自同构集成译码

AED 已在 [4] 中被提出，作为一种高度可并行化的 Reed–Muller（RM）码译码算法，随后又在 [6] 中应用于极化码。该算法使用由 M 个完全相同、复杂度较低的 SC译码器组成的集成，这些译码器在噪声接收序列 y 的置换版本上并行运行。随后，对译码结果进行逆置换，

$$\tilde{\mathbf{x}}_j = \boldsymbol{\pi}_j^{-1}(\mathrm{SC}(\boldsymbol{\pi}_j(\mathbf{y})))$$

从中选出最有可能的候选码字，作为最终的码字估计

$$\tilde{\mathbf{x}} = \underset{\tilde{\mathbf{x}}_j, j=0,\ldots,M-1}{\arg\max} P(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{x}}_j).$$

置换 $\boldsymbol{\pi}_j$ 源自该码的自同构群。由于译码器等变性 [4], , AED [8]至多从每个等价类中使用一个置换。

III. 具有对称性约束的极化码

A. 对称码扩充

接下来，我们推导具有至少一组指定自同构 BLTA(s) 的码之间的关系。我们的方法与 [9], [16], 类似，其中识别出索引组，这些组中的索引要么全部冻结，要么全部是信息比特。然而，由于我们关注的是极化码的完整仿射自同构群，因此还会考虑合成信道的偏序。为了分析在保持码的对称性的同时可以向码中添加哪些信息比特，我们再次利用稳定子的概念。

命题 1：设 s 为某个分块轮廓，且 $\mathcal{I}_1$a 信息集满足偏序，并且 Stab($\mathcal{I}_1$) ⊇ P_s。此外，设 $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{D}$ 也满足关于 $\mathcal{D} \cap \mathcal{I}_1 = \varnothing$ 的偏序。则当且仅当 Stab($\mathcal{I}_2$) ⊇ P_s 时，Stab($\mathcal{D}$) ⊇P_s。

证明。“⇒”：假设 Stab($\mathcal{D}$) $\not\supseteq P_s$，即 $\exists i \in \mathcal{D}, \sigma \in P_s$，且 $f_\sigma(i) \notin \mathcal{D}$。于是 $i \in \mathcal{I}_2$，但 $f_\sigma(i) \notin \mathcal{I}_2$，这与 Stab($\mathcal{I}_2$) ⊇$P_s$ 矛盾。注意，$f_\sigma(i) \in \mathcal{I}_1$ 是不可能的，因为此时还必须使 $i \in \mathcal{I}_1$，以确保 Stab($\mathcal{I}_1$) ⊇P_s。

“⇐”：这直接由 Stab($\mathcal{I}_2$) =Stab($\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{D}$) =Stab($\mathcal{I}_1$) ∩Stab($\mathcal{D}$) 得出，其至少为 P_s。■

这意味着，如果两个 s-对称极化码互为子码，它们的差异索引集合必须遵循偏序，且自身在 P_s 下保持稳定。显然，这限制了一系列对称速率兼容极化码的码维数 K 的粒度。对于最细粒度，令 $\mathcal{D}_i$ 表示仅包含 i 及其在 P_s 下所有排列的信道索引集合，即 $\mathcal{D}_i = \{f_\sigma(i) | \sigma \in P_s\}$。$\mathcal{D}_i$ 的大小计算如下：

$$|\mathcal{D}_i| = \prod_{j=0}^{m-1} \binom{s_j}{w_{h,s,j}(\hat{\mathbf{i}})},$$

其中，$w_{h,\,s,\,j}(\hat{i})$ 表示 s 的第 j 个块中 $\hat{i}$ 的汉明重量。对于 n = 4，表 I 展示了 P_s稳定的群，其中 s = [2,2]。例如，对于 i = 5 = 1010_2，我们有$\mathcal{D}_i$ = $\{1010_2, 0110_2, 1001_2, 0101_2\} = \{5,6,9,10\}$，其大小为 4。

B. 对称偏序

[11], [12] 中引入的偏序可以加以限制，从而确保对于给定的 s，所有构造的极化码都至少将 BLTA(s) 作为其自同构群。如上文所述，只有将合成信道 i 与其群 $\mathcal{D}_i$ 中的所有元素一同添加或移除时，才能进行此操作；该群在 P_s下保持稳定。因此，我们将这些群定义为偏序“$\preccurlyeq_s$”，即

$$\mathcal{D}_i \preccurlyeq_s \mathcal{D}_j \quad \Leftrightarrow \quad \exists i' \in \mathcal{D}_i, j' \in \mathcal{D}_j \text{ with } i' \preccurlyeq j'.$$

“$\preccurlyeq_s$”的哈斯图可以通过将“4”的哈斯图中处于一个在 P_s 下稳定的群组内的合成信道节点合并为一个节点而得到。注意，这种合并总是可行的，因为每个群组中的所有元素在偏序下都可比较，并且彼此直接相邻（左交换规则）。换言之，

$$\mathcal{D}_i \preccurlyeq_s \mathcal{D}_j \quad \Rightarrow \quad \forall j' \in \mathcal{D}_j \quad \exists i' \in \mathcal{D}_i \text{ with } i' \preccurlyeq j'.$$

表 I：n = 4、s = [2,2] 的示例。分组条目表示不同的稳定子集 $\mathcal{D}_i$。

i	$\hat{\mathbf{i}}$	i	$\hat{\mathbf{i}}$	i	$\hat{\mathbf{i}}$	i	$\hat{\mathbf{i}}$
0	0000_2	4	0010_2	8	0001_2	12	0011
1	1000_2	5	1010_2	9	1001_2	13	1011_2
2	0100_2	6	0110_2	10	0101_2	14	0111_2
3	1100_2	7	1110_2	11	1101_2	15	1111_2

图 1 展示了 n = 5且最小对称性为 s = [1,1,3]时的哈斯图。

定理 2：设 s 为某个分块轮廓。极化码 $\mathcal{C}$满足 Aut($\mathcal{C}$) ⊇ BLTA(s) 当且仅当其信息集符合“$\preccurlyeq_s$”。

证明。“⇒”：我们有 P_s 稳定 $\mathcal{I}$，并且根据 [13], 定理 3，我们知道，当 Aut($\mathcal{C}$) ⊇ BLTA(s) 时，$\mathcal{C}$ 符合“4”，因此也可推出“$\preccurlyeq_s$”。

“⇐”：根据上述定义，所有符合“$\preccurlyeq_s$”的码也满足偏序“4”，并且被 P_s 稳定。由定理 1 可得，Aut($\mathcal{C}$) ⊇BLTA(s)。■

IV. 对称极化码的速率兼容序列

利用对称偏序，可以构造具有指定对称性的极化码。在需要多种码率的应用中，定义合成信道的全序比仅定义偏序更有用。受 β-展开的启发，我们提出一种 s-对称极化权重 $w_{p,\,s}$，并满足以下要求：

1) 相等性：同一组中的信道索引应具有相同的极化权重，即

$$w_{p,\mathbf{s}}(i) = w_{p,\mathbf{s}}(f_\sigma(i)) \quad \forall \sigma \in P_s \tag{3}$$

2) 兼容性：该极化权重的值应介于原始 β-展开的最小和最大极化权重之间，即

$$\min_{i' \in \mathcal{D}_i} w_p(i') \le w_{p,\mathbf{s}}(i) \le \max_{i' \in \mathcal{D}_i} w_p(i') \tag{4}$$

为了像式 (1) 一样简洁地表述，我们只放宽每个比特位置 l 必须与 β 的某个幂相关联这一条件，而允许其与一般值 $\beta_{s,\,l}$相关联，从而得到

$$w_{p,\mathbf{s}}(i) = \sum_{l=0}^{n-1} \hat{i}_l \beta_{\mathbf{s},l}.$$

为满足（3），$\beta_{s,\,l}$ 在 s 的每个块中必须取相同的值。为了使条件（4）成立，仅包含一个索引且该索引在一个块中全为 1 的组（例如，i = N − 1）也必须满足 $w_{p,\,s}$(i) =w_p(i)。因此，$\beta_{s,\,l}$ 的唯一有效定义是

$$\beta_{\mathbf{s},l} = \frac{1}{|\mathcal{L}_{\mathbf{s},l}|} \sum_{l' \in \mathcal{L}_{\mathbf{s},l}} \beta^{l'},$$

其中，$\mathcal{L}_{s,\,l}$ 是与索引 l 在 s 中对应相同块的索引集合。

引理 1：对于所有的 $\beta \ge 1$ 和 s，我们有 $\beta_{s,\,l} \le \beta_{s,\,l+1}$。

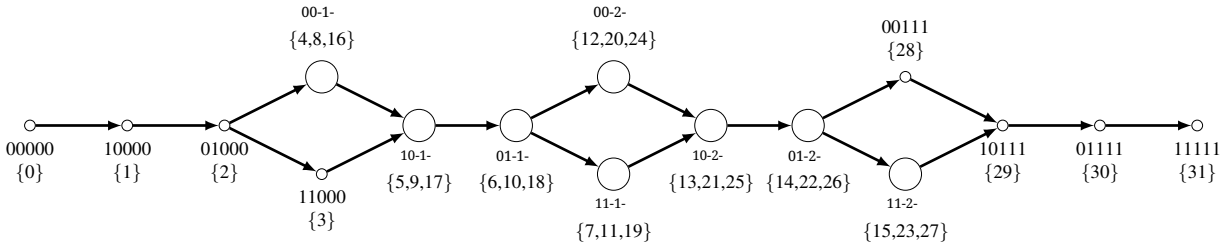


图 1：[1, 1, 的哈斯图到三个合成信道组成的群组

3]-对称偏序，适用于 N = 32 极化码，采用二进制和十进制索引。每个大型节点对应 el 索引，其中“-x-”表示该索引的这 3 个比特中可出现任意组合的 x 个“1”。

证明。我们可以将 $\beta_{\mathbf{s},l}$ 上界为

$$\beta_{\mathbf{s},l} = \frac{1}{|\mathcal{L}_{\mathbf{s},l}|}\sum_{l'\in\mathcal{L}_{\mathbf{s},l}}\beta^{l'} \le \frac{1}{|\mathcal{L}_{\mathbf{s},l}|}|\mathcal{L}_{\mathbf{s},l}|\cdot\beta^{\max\{\mathcal{L}_{\mathbf{s},l}\}} = \beta^{\max\{\mathcal{L}_{\mathbf{s},l}\}}$$

并且类似地，由$\beta_{\mathbf{s},l+1}$ 得到下界

$$\beta_{\mathbf{s},l+1} = \frac{1}{|\mathcal{L}_{\mathbf{s},l+1}|}\sum_{l'\in\mathcal{L}_{\mathbf{s},l+1}}\beta^{l'} \ge \beta^{\min\{\mathcal{L}_{\mathbf{s},l+1}\}}.$$

由于对所有 $l' \le l''$ 都成立$' \in \mathcal{L}_{\mathbf{s},l}$ 且 $l'' \in \mathcal{L}_{\mathbf{s},l+1}$，我们有 $\beta_{\mathbf{s},l} \le \beta^{\max\{\mathcal{L}_{\mathbf{s},l}\}} \le \beta^{\min\{\mathcal{L}_{\mathbf{s},l+1}\}} \le \beta_{\mathbf{s},l+1}$。■

引理 2：设 s 为某个分块轮廓，且 i、j $\in \mathbb{Z}_N$ 互不相同并满足 i 4 j。则 $w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(i) \le w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(j)$ 也成立。

证明。若 i 和 j 通过左交换规则直接相连，即 $(\hat{i}_l, \hat{i}_{l+1}) = (1, 0)$，$(\hat{j}_l, \hat{j}_{l+1}) = (0, 1)$ 且 $\hat{j}_{l'} = \hat{i}_{l'}$，$l' \notin \{l, l+1\}$，则有

$$w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(i) = \sum_{l'\notin\{l,l+1\}}\hat{i}_{l'}\beta_{\mathbf{s},l'} + \beta_{\mathbf{s},l} \le \sum_{l'\notin\{l,l+1\}}\hat{i}_{l'}\beta_{\mathbf{s},l'} + \beta_{\mathbf{s},l+1} = w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(j)$$

根据引理 1。若 i 和 j 通过二进制支配规则直接相连，

$$w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(i) \le w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(i) + \sum_{l',\hat{i}_{l'}\neq\hat{j}_{l'}}\hat{i}_{l'}\beta_{\mathbf{s},l'} = w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(j).$$

对于一般的 i 4 j，上述结论可通过传递性推广。■

利用这个 s-对称极化权重，我们通过选取 $w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}$ 最大的 K 个信道索引，定义一种速率灵活的极化码设计。如果多个索引对应于第 K 大的 $w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}$，则必须将它们全部纳入信息集 $\mathcal{I}$，这可能会增大码维数。该设计流程列于算法 1。注意，码维数可能的增大不会降低码的最小距离，因为具有相同 $w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}$ 的索引也具有相同的汉明重量。

定理 3：使用算法 1 构造的所有码 $\mathcal{C}$ 均满足 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) \supseteq \mathrm{BLTA}(\mathbf{s})$。

证明：根据定理 1，要使该命题成立，我们必须验证这些码满足偏序，并且其 $\mathcal{P}_{\mathbf{s}}$ 稳定其信息集。通过反证法证明其满足偏序。假设存在一对 i 4 j，其中 $i \in \mathcal{I}$ 且 $j \notin \mathcal{I}$。那么，根据引理 2，有 $t \le w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(i) \le w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(j)$，这与 $j \notin \mathcal{I}$矛盾，因此，$\mathcal{C}$必定满足偏序。根据构造，每个组内所有索引的 $w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}$都相同，因此它们要么全部纳入信息集 $\mathcal{I}$，要么全部排除。由于每个组都由 $\mathcal{P}_{\mathbf{s}}$稳定，其并集 $\mathcal{I}$也如此。■

算法 1：基于 s-对称 β-展开的极化码设计

输入：分块轮廓 $\mathbf{s} = [s_0, \ldots, s_{m-1}]$, β, K

输出：信息集 $\mathcal{I}$

$l \leftarrow 0$;

对于 $k = 0, \ldots, m-1$ do

  $\beta_{\mathbf{s},l:l+s_k} \leftarrow \frac{1}{s_k}\sum_{i=1}^{l+s_k}\beta^i$;

  $l \leftarrow l + s_k$;

结束

$w \leftarrow [w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(i)]_i = [\sum_{l=0}^{n-1}\hat{i}_l\beta_{\mathbf{s},l}$ 对每个 $i \in \mathbb{Z}_N]$;

$t \leftarrow w$ 的第 K 大值;

$\mathcal{I} \leftarrow \{i \in \mathbb{Z}_N | w_{\mathrm{p},\mathbf{s}}(i) \ge t\}$;

表 II：速率兼容极化码序列的参数

N	64	128	256	512	1024
s	[1,1,1,3]	[1,1,1,4]	[1,1,1,1,4]	[1,1,1,1,1,4]	[1,1,1,1,1,1,4]
β	1.1	1.1	1.122	1.134	1.14

V. 数值结果

A. 码设计参数

所提出的 s 对称 β扩展设计有两个超参数，即 s 和 β。优化这些参数超出了本文的范围，因此我们为这一概念验证假设了一些示例值。对于分块轮廓 s，实证结果表明，最后一个分块 s_{m-1} 对于置换译码 [6], [7], [17]尤其有价值。直观而言，这类自同构会增大比特索引的置换距离，从而带来更多样化的译码结果。因此，我们选择 $s_{m-1} \le 4$，并将其他所有 $s_k = 1$ 设为不超过 $\binom{4}{2} = 6$，以在错误率性能和最大维度粒度之间取得平衡。需要强调的是，所提出的码设计算法适用于任意分块轮廓 s。对于每个码长 N，通过网格搜索确定 β的取值，以获得良好的块错误率（BLER）性能。选定的参数列于表 II。

B. 误码率性能

我们评估了采用 $64 \le N \le 1024$ 的速率兼容极化码在加性高斯白噪声（AWGN）信道上的性能，其中采用二进制相移键控（BPSK）映射。我们将所提出的 s-对称 β扩展码在自同构集成连续消除（AE-SC）译码下的性能与 5G

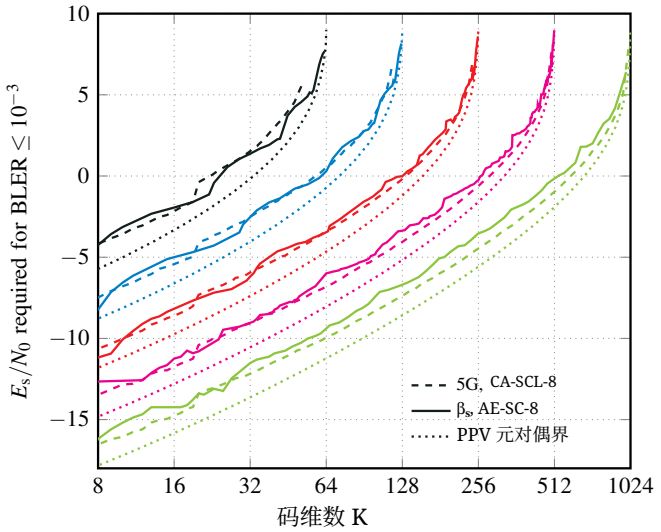


图 2：不同码维数 K 和块大小 N 下，实现 10^{-3} 块错误率所需的信噪比。

标准化码在 CRC 辅助连续消除列表（CA-SCL）译码下的性能进行比较，其中列表大小为 L = 8。对于 K $<$ 20，5G 码采用 6 位 CRC码；对于 K $\geq$ 20 [3]，则采用 11 位 CRC。请注意，AED 使用来自每种码的完整仿射自同构群的随机自同构，该群可能大于码设计中指定的最小对称性。图 2 展示了达到 10^{-3} 块错误率所需的信噪比（SNR）。作为基线，我们还绘制了有限码长 Polyanskyi-Poor-Verd´u（PPV）元逆界的$\mathcal{O}(n^{-2})$近似值 [18]。可以看出，在所考察的所有 N 值和码率下，采用 AE-SC 的所提码性能与采用 CA-SCL 的标准化码相近，并且在较短码长时性能更优。然而，在较长码长（N $\geq$512）下，AED 的性能逊于 SCL，但与 5G极化码相比仍相差不到 1 dB。

C. 译码复杂度与时延

由于各译码器彼此独立，AED 的时延在一阶近似下与 M 无关，其复杂度随 M 线性增长。相比之下，SCL 译码需要进行路径管理（即路径度量排序和剪枝），因此其时延和复杂度的扩展表现较差。本文不讨论复杂度的数值分析以及 AED 与 SCL 的比较，感兴趣的读者可参阅 [5]。

第六节：结论与展望

在这项工作中，我们研究了在给定自同构群的情况下生成速率灵活的极化码序列所需的必要且充分条件。我们的结果表明，单比特粒度不可行，但实际的速率灵活性是可以实现的。我们提出了一种对称偏序，同时考虑偏序和对称性约束，可用于以较低复杂度设计单个极化码或速率兼容序列。为了展示我们的方法，我们给出了 β expansion 的一种变体，用于构造合成信道的全序，该变体亚洲视频从根本上确保所有设计码都具有所需的对称性。误码率性能仿真结果表明，采用 AE-SC 译码的设计码与采用 CA-SCL 译码的 5G极化码相比具有竞争力，尤其是在短码长区间，同时译码复杂度和时延更低。

值得注意的是，所提出的对称偏序也可以通过极化码设计中的其他方法转换为全序，例如密度演化 [19]，或限制在偏序图上的蒙特卡罗模拟 [20]。

参考文献

[1] E. Arıkan，《信道极化：一种为对称二进制输入无记忆信道构造容量可达码的方法》，IEEE Trans. Inf. Theory，第55卷，第7期，第3051–3073页，2009年7月。[2] I. Tal 和 A. Vardy，《极化码的列表译码》，IEEE Trans. Inf. Theory，第61卷，第5期，第2213–2226页，2015年5月。[3] 《无线接入网技术规范组》，3GPP，2018年，TS 38.212 V.15.1.1。[在线]。链接：http://www.3gpp.org/ftp/Specs/ archive/38 series/38.212/[4] M. Geiselhart、A. Elkelesh、M. Ebada、S. Cammerer 和 S. ten Brink，《Reed–Muller码的自同构集成译码》，IEEE Trans. Commun.，2021年。[5] C. Kestel、M. Geiselhart、L. Johannsen、S. ten Brink 和 N. Wehn，《面向6G超可靠低时延通信的自同构集成极化码译码器》，发表于第13届ITG系统、通信与编码国际会议（SCC），2023年2月。[6] M. Geiselhart、A. Elkelesh、M. Ebada、S. Cammerer 和 S. ten Brink，《极化码的自同构群》，发表于2021年IEEE信息论国际研讨会（ISIT），2021年，第1230–1235页。[7] C. Pillet、V. Bioglio 和 I. Land，《面向自同构集成译码的极化码》，发表于2021年IEEE信息论研讨会（ITW），2021年。[8] ——，《极化码译码的自同构分类》，发表于ICC 2022——IEEE国际通信会议，2022年，第110–115页。[9] K. Shabunov，《具有预定义自同构的单项式码》，发表于2022年IEEE/CIC中国国际通信会议（ICCC专题研讨会），2022年，第205–210页。[10] C. Pillet 和 V. Bioglio，《自同构集成译码中部分对称码的分布》，2022年。[在线]。链接：https://arxiv.org/abs/2205 04338。[11] M. Bardet、V. Dragoi、A. Otmani 和 J. Tillich，《基于新多项式形式体系的极化码代数性质》，发表于IEEE信息论国际研讨会（ISIT），2016年，第230–234页。[12] C. Sch¨urch，《极化码合成信道的一个偏序》，发表于IEEE信息论国际研讨会（ISIT），2016年7月，第220–224页。[13] V. Bioglio、I. Land 和 C. Pillet，《面向自同构集成译码的极化码群性质》，IEEE Trans. Inf. Theory，2023年。[14] G. He、J. C. Belfiore、I. Land、G. Yang、X. Liu、Y. Chen、R. Li、J. Wang、Y. Ge、R. Zhang 和 W. Tong，《β展开：快速递归构造极化码的理论框架》，发表于IEEE全球通信大会（GLOBECOM），2017年12月，第1–6页。[15] Y. Li、H. Zhang、R. Li、J. Wang、W. Tong、G. Yan 和 Z. Ma，《极化码的完备仿射自同构群》，发表于2021年IEEE全球通信大会（GLOBECOM），2021年，第01–06页。[16] M. Kamenev、Y. Kameneva、O. Kurmaev 和 A. Maevskiy，《极化码的置换译码》，发表于第十六届国际“信息与控制系统冗余问题”研讨会，2019年，第1–6页。[17] K. Ivanov 和 R. L. Urbanke，《对称码类极化译码的效率》，IEEE Transactions on Communications，第70卷，第1期，第163–170页，2022年。[18] T. Erseghe，《有限码长区间的编码：基于拉普拉斯积分及其渐近近似的界》，IEEE Trans. Inf. Theory，第62卷，第12期，第6854–6883页，2016年。[19] R. Mori 和 T. Tanaka，《对称二进制输入无记忆信道上的极化码性能与构造》，发表于2009年IEEE信息论国际研讨会，2009年，第1496–1500页。[20] M. Geiselhart、A. Zunker、A. Elkelesh、J. Clausius 和 S. ten Brink，《基于图搜索的极化码设计》，发表于Asilomar信号、系统与计算机会议，2022年11月。