arXiv:2305.01221v1 [math.AP] 2 May 2023

$\mathbf{A_n}$ 和 C 型仿射Toda系统：紧性与仿射魏尔群

Leilei Cui、ZHAOHU NIE 和 WEN YANG

摘要。局部质量是刻画 Toda 系统爆破解的一种基本量子化信息，与其底层代数结构有着深刻联系。在 [24], 中，人们发现，对于 $\mathbf{AA}_n$、$\mathbf{BB}_n$、$\mathbf{CC}_n$ 和 $\mathbf{GG}_2$ 型 Toda 系统，可以利用相应的魏尔群来表示这一信息。在 [11], 中，进一步探讨了某些仿射 **BB** 型 Toda 系统的爆破解的局部质量与相应仿射魏尔群之间的关系，并将可能的局部质量明确表示为 8 种类型。本研究全面考察了任意秩的一般仿射 **AA** 和 $\mathbf{CC}^t$ 型 Toda 系统。在爆破过程（通过缩放）的每个阶段，我们都可以利用相应仿射魏尔群中的某些元素（称为"集合链"）来衡量局部质量的变化。因此，我们得到了具有任意多个奇点的仿射 **AA** 和 $\mathbf{CC}^t$ 型 Toda 系统的先验估计。

关键词： 仿射*Toda*系统，仿射魏尔群，*Pohozaev*恒等式，爆破分析。

AMS 主题分类：35B44, 35J61, 35R01。

1. 引言与主要结果

Toda 理论一直是数学和物理学中的重要研究课题，尤其是在场论和偏微分方程领域，相关研究综述见 [17] 。其中一个特别受关注的领域是仿射Toda系统

$$\Delta u_i + \sum_{j\in I} k_{ij} e^{u_j} = 0, \text{ for } i \in I, \tag{1.1}$$

其中，指标集 $I = \{1, 2, \cdots, n+1\}$，其中 $n \geq 2$，而 $(k^{ij})^{(n+1)\times(n+1)}$ 表示与某个仿射李代数相关联的广义 Cartan 矩阵。例如，类型为 $\mathbf{A}_n^{(1)}$的仿射魏尔群 的广义 Cartan 矩阵可表示为（这里稍微滥用了符号）：

$$\mathbf{A}_n^{(1)} := (k_{ij})_{(n+1)\times(n+1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} . \tag{1.2}$$

方程（1.1）是一个经典的可积系统，源于数学和物理学的诸多分支，包括二维统计力学、共形场论和数学理论。这类方程最早由 Toda [31, 32] 于50多年前在晶格振动的背景下提出，此后一直受到纯粹数学家和应用数学家的广泛关注

第三位作者部分获得国家重点研发计划 2022YFA1006800、国家自然科学基金第 12171456 号和国家自然科学基金第 12271369 号的资助。

。关于其最初背景的详细介绍，建议参阅 [2, 6, 10, 12, 15, 33]。

我们可以将紧致单李群$\mathbf{G}$ （秩为n ）的仿射 Toda 方程写成如下形式，见 [5, 15],

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}}+\sum_{j=0}^{n}c_j e^{2\alpha_j(U)}\alpha_j^{\sharp}=0, \tag{1.3}$$

其中，$U(z,\bar{z})$ 是定义在复数开子集上、取值于$i\mathbf{g}$的函数（$\mathbf{g}$ 表示$\mathbf{G}$的 Cartan 子代数），$\{\alpha_j \mid \alpha_j\in i\mathbf{g}^*,\ 1\le j\le n\}$ 是$\mathbf{G}$的一组正简单根，$c_0=1$ 和 $-\alpha_0=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$ 是最高根。此外，对每个$j\in\{0,1,\dots,n\}$，$\alpha^{\sharp}{}_j\in i\mathbf{g}$ 表示在 Killing 形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下 α_j 的对偶，其定义如下:

$$\langle\alpha_j^{\sharp},v\rangle=\alpha_j(v),\ v\in\mathbf{g}.$$

在特殊情形$\mathbf{G}=\mathrm{SU}(n+1)$ 下，我们将$U=(w_1,\cdots,w_{n+1})$ 记作$(w_1,\cdots,w_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$，方程 (1.3) 可改写为

$$2\frac{\partial^2 w_i}{\partial z\partial\bar{z}}+e^{2(w_i-w_{i-1})}-e^{2(w_{i+1}-w_i)}=0,\ \forall\, i\in I,^{1} \tag{1.4}$$

其中

$$w_{n+1+i}=w_i,\ i\in I,\ \text{satisfying that}\ \sum_{i\in I}w_i=0. \tag{1.5}$$

自然地，我们可以将（1.4）写为

$$2\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial z\partial\bar{z}}-e^{2\alpha_{i-1}}+2e^{2\alpha_i}-e^{2\alpha_{i+1}}=0,\ \forall\, i=0,1,\cdots,n, \tag{1.6}$$

其中 $\alpha_i(U)=w_{i+1}-w_i$。因此，只要 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 SU（$n+1$） 的正单根，且 $\alpha_0=-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ 是最高根，（1.5）便成立；由此我们可得到与（1.1）相同的形式，至多相差一个常数项（$u_i=2\alpha_{i-1}+\log 4, i\in I$）。事实上，方程（1.1）也可从超共形调和映射理论中得到，见 [4, 39]。具体而言，设 $\phi:\Omega\to\mathbb{CP}^n$ 是一个调和映射。那么，与 ϕ 相关联的调和序列 ϕ_n 由调和映射 $\phi_i:\Omega\to\mathbb{CP}^n$ 组成，其中$\phi_0=\phi$，而 $\phi_i=[f_i]$ 满足f_i 是一个局部定义的 $\mathbb{C}^{n+1}$-值函数，并满足

$$\frac{\partial f_i}{\partial z}=f_{i+1}+\frac{\partial}{\partial z}\log|f_i|^2 f_i,\ \frac{\partial f_i}{\partial\bar{z}}=-\frac{|f_i|^2}{|f_{i-1}|^2}f_{i-1},\ \langle f_{i+1},f_i\rangle=0. \tag{1.7}$$

对于 z 在 S 上给定的局部坐标，序列 $\{f_i\}$ 可利用（1.7）和 $\phi=[f_0]$，在相差一个亚纯函数因子的意义下刻画。映射 ϕ_i 可用于确定平凡丛 $S\times\mathbb{C}^{n+1}$的一个复直线子丛L_i，其中 L_i 定义为集合

$$L_i=\{(x,v)\in\Omega\times\mathbb{C}^{n+1}\mid v\in\phi_i(x)\}.$$

每个L_i 都从其在 $\Omega\times\mathbb{C}^{n+1}$中的包含关系继承了全纯向量丛结构，而$f_i$ 是L_i的局部亚纯截面。于是，结合可积性条件与 (1.7)，可得

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log|f_i|^2=\frac{|f_{i+1}|^2}{|f_i|^2}-\frac{|f_i|^2}{|f_{i-1}|^2}. \tag{1.8}$$

令 $v_i=\log\frac{|f_i|^2}{|f_{i-1}|^2}$，可见 (1.8) 等价于 (1.6) 或 (1.1)。特别地，当 $n=1$ 时，方程 (1.1) 可化为经典的 sinh-Gordon 方程，该方程在几何上出现在对常平均曲率曲面的研究中，参见 [9, 37, 38]。

[1]这里，对于任意$i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，我们令$w_i=w_{n+1+i}$。

主要的 a　我们关注的领域是奇异情形。可将 (1.1) 写成如下局部形式:

$$\begin{cases} \Delta u_i + \sum\limits_{j\in I} k_{ij} e^{u_j} = 4\pi\alpha_i \delta_0 \text{ in } B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2, \ \forall\, i \in I, \\ \\ \sum\limits_{i\in I} u_i \equiv C, \ C \text{ is a fixed constant}, \end{cases} \tag{1.9}$$

其中指标集$I = \{1, 2, \cdots, n+1\}$ 满足$n \geq 2, \alpha_i > -1$ 对于$i \in I$，而 δ_0 表示位于 0 处的狄拉克测度。（1.9）在经典情形下的对应方程为

$$\Delta u_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e^{u_j} = 4\pi\alpha_i \delta_0 \text{ in } B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2, \ \forall\, i = 1, \cdots, n, \tag{1.10}$$

其中 $\alpha_i > -1$、$i = 1$、$\cdots$、n，系数矩阵$\mathbf{A}_n := (a^{ij})$ 表示与单李代数$\mathbf{A}_n$相对应的Cartan矩阵，即

$$(a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n} . \tag{1.11}$$

为方便起见，我们始终将$\mathbf{A}_\ell := (a^{ij})$ 记作单李代数$\mathbf{A}_\ell$在 $\ell \geq 1$时的Cartan矩阵。 [2]

方程（1.10）给出的Toda 系统通常称为$\mathbf{A}_n$ (SU$(n+1)$) Toda 系统。方程（1.9）和（1.10）的结构颇为相似，而 sinh-Gordon 方程的结构则与单个Liouville方程密切相关。众所周知，这类方程会出现紧性丧失，因此研究它们是一个引人入胜且自然而然的问题。关于经典单个Liouville方程和Toda 系统中的爆破现象，已有大量研究。Brezis-Merle [7],Li-Shafrir [19], Li [18], Bartolucci-Tarantello [3], Kuo-Lin [16] 和Wei-Zhang [34, 35, 36] 的开创性工作，已充分阐明了带奇点的单个Liouville方程中的爆破现象。然而，处理秩为二的系统，即二分量系统时，问题会更具挑战性。在 [14], 中，当方程（1.10）没有奇异源项时，紧性问题得以解决；随后，Lin-Wei-Zhang [22], Lin-Zhang[25], Lin-Wei-Yang-Zhang [20] 和Lin-Yang [23]通过一系列工作对其进行了广泛研究。在上述工作中，最关键的一步是推导爆破解$\mathbf{u}^k = (u_1^k, u_2^k)$的所谓局部质量。$\mathbf{u}^k$ 的局部质量定义如下:

$$\sigma_i = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} \lim_{k\to+\infty} \int_{B_r(p)} e^{u_i^k(x)} \mathrm{d}x, \text{ for } i = 1, 2, \text{ where } p \text{ is the blow-up point.} \tag{1.12}$$

对于秩为$n \geq 3$的情形，相关李代数的结构在确定爆破解的量子化信息方面起着关键作用。具体而言，在 [24], 中，作者

[2]我们将带有$(a^{ij}) = \mathbf{A}_\ell$ 的式 (1.10) 称为$\mathbf{A}_\ell$ Toda 系统。类似地，$\mathbf{C}_\ell$ Toda 系统指带有$(a^{ij}) = \mathbf{C}_\ell, \ell \geq 2$ 的式 (1.10)，其中$\mathbf{C}_\ell$ 表示秩为 ℓ 的$\mathbf{C}$ 型 Cartan矩阵。

证明了局部质量与相应李代数的 Weyl 群有着深刻联系，并且可以通过置换映射隐式表示：

$$\sigma_i = 2\sum_{\ell=0}^{i-1}\Big(\sum_{j=1}^{f(\ell)}\mu_j - \sum_{j=1}^{\ell}\mu_j\Big) + 2m_i, \text{ for some } m_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \cdots, n,$$

其中f是从 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 到其自身的置换映射。已知这类置换映射构成的群同构于相应*Weyl* 群，即$\mathbf{A}_n$ 型李代数的 Weyl 群。得到上述公式的关键在于，对于$\mathbf{A}_n$、$\mathbf{B}_n$、$\mathbf{C}_n$和$\mathbf{G}_2$, 型李代数，解与一个复常微分方程相关联，该方程的系数是 Toda 系统的 $\mathcal{W}$-不变量，如 [21] 中所述。这自然引出了一个问题：对于仿射情形，是否也能得出类似的结论？在最近的一项研究中， [11] 的作者探讨了这一问题，并针对$\mathbf{B}_2^{(1)}$ Toda 系统实现了这一目标

$$\begin{cases} \Delta u_i + \sum_{j=1}^{3} k_{ij} e^{u_j} = 4\pi\alpha_i\delta_0 \text{ in } B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2,\ \forall\, i = 1, 2, 3, \\ u_1 + u_2 + 2u_3 \equiv 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

其中 $\alpha_i > -1$、$i = 1$、2、3，系数矩阵为

$$(k_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

与其使用*Weyl* 群不同，相应的代数结构是仿射魏尔群。在此项工作之前，关于无奇点方程 (1.13) 的爆破解的局部质量的计算已在 [27] 中完成。

本文旨在将相同目标拓展到任意秩的仿射Toda系统 (1.9)。为陈述我们的结果，我们首先介绍仿射李代数 $\mathrm{A_n}$ 的仿射魏尔群 $\mathbf{A}_n^{(1)}$，参见 [30, 第 4] 章。设 $\mathbf{G_A}$ 是一个具有如下表示的群组

$$\begin{aligned} \mathbf{G_A} = \big\langle\, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_{n+1} \mid\ & \mathfrak{R}_i^2 = e,\ \forall\, i \in I, \\ & (\mathfrak{R}_i\mathfrak{R}_j)^3 = e, \text{ for } |i-j| = 1 \text{ or } n,\ \forall\, i, j \in I, \\ & (\mathfrak{R}_i\mathfrak{R}_j)^2 = e, \text{ for } 1 < |i-j| < n,\ \forall\, i, j \in I, \\ & \mathfrak{R}_i\mathfrak{R}_j\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_j\mathfrak{R}_i\mathfrak{R}_j, \text{ for } |i-j| = 1 \text{ or } n,\ \forall\, i, j \in I\big\rangle. \end{aligned} \tag{1.15}$$

这里，e 表示单位元，$|\mathfrak{R}|$ 表示元素 $\mathfrak{R}$ 的阶，即 $\mathfrak{R}^{|\mathfrak{R}|} = e$。群组 $\mathbf{G_A}$ 是无限多个不可约 Coxeter群之一，称为 $\mathrm{A_n}$ 型仿射魏尔群 $\mathbf{A}_n^{(1)}$（或**A**型）。

设 $\mathbf{u}^k = (u_1^k, \cdots, u_{n+1}^k)$ 为满足条件 (1 的系统 (1.9) 的爆破解序列

.16)

$$\begin{cases} (i): & 0 \text{ is the only blow-up point of } \mathbf{u}^k \text{ in } B_1(0), \text{ i.e.,} \\ & \max\limits_{i\in I}\sup\limits_{x\in B_1(0)}\{u_i^k(x) - 2\alpha_i\log|x|\} \to +\infty \text{ and } \max\limits_{i\in I}\sup\limits_{K\subseteq B_1(0)\setminus\{0\},\, K \text{ is compact}} u_i^k \le C(K), \\ (ii): & |u_i^k(x) - u_i^k(y)| \le C,\ \forall\, x, y \text{ on } \partial B_1(0),\ i \in I, \\ (iii): & \int_{B_1(0)} e^{u_i^k(x)}\mathrm{d}x \le C,\ \forall\, i \in I. \end{cases}$$

对于此序列　　对于爆破解序列，我们将局部质量定义为 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1})$，其中

$$\sigma_i=\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0}\lim_{k\to+\infty}\int_{B_r(0)}e^{u_i^k(x)}\mathrm{d}x,\ \text{for } i\in I. \tag{1.17}$$

我们将给定的 $\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$ $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_{n+1})$ 及可能的局部质量量 $\boldsymbol{\sigma}$ 定义如下:

(1) $\mathbf{0}\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。**(2)** 若 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1})\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，则对任意满足 **(1.15)** 的 $\mathfrak{R}_i\in\mathbf{G_A}$，均有 $\mathfrak{R}_i\boldsymbol{\sigma}\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，其中每个生成元 $\mathfrak{R}_i$、$i\in I$ 将 $\boldsymbol{\sigma}$ 映射为 $\mathfrak{R}_i\boldsymbol{\sigma}$，且

$$(\mathfrak{R}_i\boldsymbol{\sigma})_j=\begin{cases}2\mu_i-\sum\limits_{t\in I}k_{it}\sigma_t+\sigma_i, & \text{if } j=i,\\ \sigma_j, & \text{if } j\neq i.\end{cases}$$

这里，(k^{ij}) 的定义同 **(1.2)**。对于任意 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1})\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，$\sigma_i$ 是关于 μ_i 的一次多项式，其中 $i\in I$。接下来，我们给出本文的第一个结果。

定理1.1。 假设 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1})$ 按 (1.17) 中的定义，是满足条件 (1.16) 的系统 (1.9) 的爆破解序列 $\mathbf{u}^k=(u_1^k,\cdots,u_{n+1}^k)$ 的局部质量。则存在$\hat{}\boldsymbol{\sigma}=(\hat{}\sigma_1,\cdots,\hat{}\sigma_{n+1})\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$ 使得

$$\sigma_i=\hat{\sigma}_i+2m_i,\ m_i\in\mathbb{Z},\ \forall\, i\in I.$$

注1。 出现在$(n+2)$阶方程(1.9) 中的常数可以取任意实数值，而不影响定理*1.1*的结论。因此，不失一般性，我们可以假设常数 C 等于零。利用这个方程，我们发现系数 $\alpha_i, i\in I$ 必须满足关系式 $\sum_{i\in I}\alpha_i=0$。

如前所述，相应李代数的群结构在确定爆破解的局部质量方面起着至关重要的作用。我们在本文中的发现以及 [11] 中的结果表明，对于仿射 Toda 系统也可以得出类似结论，例如 sinh-Gordon 方程、$\mathbf{B}_2^{(1)}$ Toda 系统，以及任意秩的仿射$\mathbf{A}$ （和$\mathbf{C}^t$）型 Toda 系统。然而，经典 Toda 系统与仿射情形之间存在显著差异。在仿射情形中，魏尔群的对应物是仿射魏尔群，它包含无穷多个元素，因此无法以具体形式表示局部质量。相反，我们必须借助生成元，通过抽象表示来描述它。此外，在经典 Toda 系统和仿射 Toda 系统中，求得每种爆破组合下明确变换的过程也有所不同。在经典情形中使用置换映射，而对于低秩的仿射情形，穷举所有可能性便已足够。然而，对于任意秩的仿射情形，这两种方法似乎都行不通。相反，我们必须通过生成元的复合来表示局部质量的每种变换。问题在于，如何以等价形式表示 $\boldsymbol{\sigma}$（其中第i个元素 $\sigma_i=2\sum_{\ell=0}^{i-1}\left(\sum f(\ell+1)\mu_j-\sum_{j=1}^{\ell}\mu_j\right))_j$，而$f$表示反向映射$f(i)=n-i,\ 0\le i\le n$），使其通过作用于起点$\mathbf{0}$的生成元复合来表示。需要指出的是，用生成元的复合来表示 $\boldsymbol{\sigma}$的方式可能不止一种，因此求得一个特定的解并非易事。为解决这个问题，我们提出一种利用归纳法的间接表示方法，详见第3节和第5节。

众所周知，所有单李代数均属于$\mathbf{A}_n$、$\mathbf{B}_n$、$\mathbf{C}_n$、$\mathbf{D}_n$、$\mathbf{F}_4$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$ 和$\mathbf{G}_2$。此外，这些代数各自都有相应的仿射李代数，见 [8]。本文第二作者在 [28, 29] 中证明了$\mathbf{B}$ 型和$\mathbf{C}$

型可在某些对称性条件下嵌入更高秩的$\mathbf{A}$ 型。上述两种类型对应的Cartan矩阵分别表示为

$$\mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

与经典情形类似，可以发现，仿射$\mathbf{C}^t$ 型 Toda 系统可以由仿射$\mathbf{A}$ 型导出。具体而言，仿射$\mathbf{C}_n^{(1)\,t}$（或$\mathbf{C}^t$）型 Toda 系统如下：

$$\begin{cases} \Delta u_i + \sum\limits_{j\in I} k_{ij}^{\mathfrak{c}^t} e^{u_j} = 4\pi\alpha_i\delta_0 \text{ in } B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2, \ \forall\, i \in I, \\ \\ u_1 + 2\sum\limits_{i\in I\setminus\{1,n+1\}} u_i + u_{n+1} \equiv 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

其中，$\alpha_i > -1$ 当$i \in I$ 时，$(k^{\mathfrak{c}^t}{}_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$ 表示仿射$\mathbf{C}^t$ 型李代数的 Cartan矩阵，即：

$$(k_{ij}^{\mathfrak{c}^t})_{(n+1)\times(n+1)} := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}. \tag{1.20}$$

为确保系统 (1.19) 的相容性，必须满足：

$$\alpha_1 + 2\sum_{i\in I\setminus\{1,n+1\}} \alpha_i + \alpha_{n+1} = 0.$$

通过施加以下对称性，我们可以从一个$\mathbf{A}_2^{(1)}{}_{n-1}$ Toda 系统推导出 (1.19)：

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_{2n+2-i} = u_i, \ \tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_{2n+2-i} = \alpha_i, \text{ for } i \in I.$$

现在我们定义C^t 型仿射李代数的仿射魏尔群 。值得注意的是，这个群与对应于$\mathbf{C}$ 型仿射李代数的群同构。这是因为相应的 Cartan矩阵互为转置，见 [8]。令群组$\mathbf{G}_{\mathbf{C}^t}$由（参见 [1]）定义

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\mathbf{C}^t} = \big\langle\, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_{n+1} \mid\ & \mathfrak{R}_i^2 = e, \ \forall\, i \in I, \\ & \mathfrak{R}_i\mathfrak{R}_j = \mathfrak{R}_j\mathfrak{R}_i, \text{ for } 1 < |i-j| \le n, \ \forall\, i,j \in I, \\ & \mathfrak{R}_i\mathfrak{R}_j\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_j\mathfrak{R}_i\mathfrak{R}_j, \text{ for } |i-j| = 1, \ \forall\, 2 \le i,j \le n, \\ & (\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_1)^4 = (\mathfrak{R}_n\mathfrak{R}_{n+1})^4 = e \big\rangle. \end{aligned} \tag{1.21}$$

群组 $\mathbf{G}_{\mathbf{C}^t}$ 称为类型 $C_n^{(1)\,t}$（或类型 $\mathbf{C}^t$）的仿射魏尔群 。对于给定的 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_{n+1})$，定义集合 $\Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$ 以及可能的局部质量量 $\boldsymbol{\sigma}$ 如下：(1) $\mathbf{0} \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$。

(2) 若 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1})\in\Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$，则对于任意满足 (1.21) 的 $\mathfrak{R}_i\in\mathbf{G}\mathbf{C}^t$，都有 $\mathfrak{R}_i\boldsymbol{\sigma}\in\Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$，其中每个生成元 $\mathfrak{R}_i$，$i\in I$ 将 $\boldsymbol{\sigma}$ 映射为 $\mathfrak{R}_i\boldsymbol{\sigma}$，满足

$$(\mathfrak{R}_i\boldsymbol{\sigma})_j=\begin{cases}2\mu_i-\sum\limits_{t\in I}k_{it}\sigma_t+\sigma_i, & \text{if } j=i,\\ \sigma_j, & \text{if } j\neq i.\end{cases}$$

此处$(k^{c^t}{}_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$的定义同 (1.20)。对于任意 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1})\in\Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$，$\sigma_i$是关于 μ_i 的一次多项式，其中$i\in I$。

系统 (1.19) 的对应结果如下所示。

定理 1.2. 设 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1})$，按(1.17)定义，是满足条件(1.16)的系统(1.19) 的一列爆破解$\mathbf{u}^k=(u_1^k,\cdots,u_{n+1}^k)$ 的局部质量。那么存在$\hat{}\boldsymbol{\sigma}=(\hat{}\sigma_1,\cdots,\hat{}\sigma_{n+1})\in\Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$ 使得

$$\sigma_i=\hat{\sigma}_i+2m_i,\ m_i\in\mathbb{Z},\ \forall\, i\in I.$$

注 2. 与经典情形不同，对于秩为 $n\geq 3$ 的仿射**B** 型 *Toda* 系统，我们无法得出类似结论。主要障碍在于，仿射**B** 型系统的一个子系统中可能出现**D** 型 *Toda* 系统。研究**D** 型 *Toda* 系统以及与其他例外李代数相关的 *Toda* 系统的紧性，仍是一项艰巨挑战。这是因为，与**A**型不同，对于其他类型，*Fuchs* 型常微分方程被伪微分方程取代，这给证明局部单值化矩阵为酉矩阵带来了困难。

定理 1.1 和 1.2 在建立流形上相关归一化方程的紧性结果时具有实际应用。设 Δ_g 为闭二维黎曼曲面 (M,g) 上的 Beltrami 算子（$-\Delta_g\geq 0$），并将 $\mathbf{u}^k=(u_1^k,\cdots,u_{n+1}^k)$ 记为系统的一列爆破解

$$\text{(1.22)}\qquad\begin{cases}\Delta_g u_i^k+\sum\limits_{j\in I}k_{ij}\rho_j^k\left(\dfrac{h_j^k e^{u_j^k}}{\int_M h_j^k e^{u_j^k}\mathrm{d}V_g}-\dfrac{1}{|M|}\right)=4\pi\sum\limits_{p\in\mathcal{S}}\alpha_{p,i}\left(\delta_p-\dfrac{1}{|M|}\right)\text{ in } M,\ \forall\, i\in I,\\ \sum\limits_{i\in I}u_i^k\equiv C_k,\ \text{where }\sup\limits_{k\geq 1}|C_k|\leq C\text{ for some constant } C>0,\end{cases}$$

其中 $(\mathrm{k}^{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$ 如 (1.2) 中所定义，$\mathrm{h}_i^k(\mathrm{i}\in\mathrm{I})$ 是 M 上正且光滑的函数，满足 $\sup\mathrm{k}_{\geq 1}\max\limits_{i\in I}\|\mathrm{h}_i^k\|_{C^3}(\mathrm{M})\leq\mathrm{C}$，$\mathcal{S}$ 是 M 的有限子集，$\alpha_{p,i}>-1$ 和 $\boldsymbol{\rho}^k=(\rho_1^k,\cdots,\rho_{n+1}^k)$ 是分量非负的常向量序列，且 $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{\rho}^k=(\rho_1,\cdots,\rho_{n+1})$。由于 (1.22) 在加上任意常数后保持不变，我们可以在空间 $\mathrm{H}=(\mathring{}\mathrm{H}^1(\mathrm{M}))^{n+1}$ 中考虑 (1.22)，其中

$$\mathring{H}^1(M)=\left\{u\in H^1(M)\Big|\int_M u\mathrm{d}V_g=0\right\}.$$

不失一般性，可以假设 $C_k=0$，由此可得$\sum_{i\in I}\alpha_p$，对于任意$p\in\mathcal{S}$。

我们将 $u_i^k(x)=\tilde{}u_i^k(x)-4\pi\sum_{p\in\mathcal{S}}\alpha_{p,i}G(x,p)$ 分解，其中 $G(x,p)$ 是满足以下条件的格林函数

$$\Delta_g G(x,p)+\left(\delta_p-\frac{1}{|M|}\right)=0,\ \int_M G(x,p)\mathrm{d}V_g=0.$$

于是，我们可以将 (1.22) 改写为

$$\begin{cases} \Delta_g \tilde{u}_i^k + \sum\limits_{j\in I} k_{ij}\rho_j^k \left(\dfrac{\tilde{h}_j^k e^{\tilde{u}_j^k}}{\int_M \tilde{h}_j^k e^{\tilde{u}_j^k} \mathrm{d}V_g} - \dfrac{1}{|M|} \right) = 0 \text{ in } M, \ \forall\, i \in I, \\ \sum\limits_{i\in I} \tilde{u}_i^k \equiv 0, \end{cases} \tag{1.23}$$

其中 $\tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{n}} h_i^k(x) = h_i^k(x) e^{-4\pi \sum_{p\in\mathcal{S}} \alpha_{p,i} G(x,p)}$ 对 $i \in I$ 成立。令 $\mu_{p,i} = 1 + \alpha_{p,i}$ 对 $i \in I$ 成立，并记为

$$\Gamma_i^{\mathbf{A}} = \left\{ 2\pi \sum_{p\in R} \sigma_{p,i} + 4\pi m_i \,\middle|\, (\sigma_{p,1}, \cdots, \sigma_{p,n+1}) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\mu_{p,1}, \cdots, \mu_{p,n+1}), R \subseteq S, m_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

然后，(1.23) 的紧性结果如下所示。

定理 1.3。 假设对每个 $i \in I$ 都有 $\rho_i \not\in \Gamma_i^{\mathbf{A}}$。那么存在常数 $C > 0$，它依赖于 $\boldsymbol{\rho}$，使得对于 (1.23) 的任意解 $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_{n+1}) \in \mathbf{H}$，

$$|\tilde{u}_i(x)| \le C, \ \forall\, x \in M, \ i \in I.$$

$\mathbf{C}^t$ 型仿射 Toda 系统也有类似的结论。假设 $\hat{\mathbf{u}}^k = (\hat{u}_1^k, \cdots, \hat{u}_{n+1}^k)$是一列爆破解，属于

$$\begin{cases} \Delta_g \hat{u}_i^k + \sum\limits_{j\in I} k_{ij}^t \rho_j^k \left(\dfrac{\hat{h}_j^k e^{\hat{u}_j^k}}{\int_M \hat{h}_j^k e^{\hat{u}_j^k} \mathrm{d}V_g} - \dfrac{1}{|M|} \right) = 0 \text{ in } M, \ \forall\, i \in I, \\ \hat{u}_1^k + 2 \sum\limits_{i\in I\setminus\{1,n+1\}} \hat{u}_i^k + \hat{u}_{n+1}^k \equiv 0, \end{cases} \tag{1.24}$$

其中 $\hat{h}_i^k(x) = h_i^k(x) e^{-4\pi \sum_{p\in\mathcal{S}} \alpha_{p,i,c} G(x,p)}$ 对于 $i \in I$ 且

$$\alpha_{p,1,c} + 2 \sum_{i\in I\setminus\{1,n+1\}} \alpha_{p,i,c} + \alpha_{p,n+1,c} = 0, \ \forall\, p \in \mathcal{S}.$$

我们将 $\mu_{p、i、c} = 1 + \alpha_{p、i、c}$ 定义为任意的 $p \in \mathcal{S}$、$i \in I$，并记为

$$\Gamma_i^{\mathbf{C}^t} = \left\{ 2\pi \sum_{p\in Q} \sigma_{p,i} + 4\pi m_i \,\middle|\, (\sigma_{p,1}, \cdots, \sigma_{p,n+1}) \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\mu_{p,1,c}, \cdots, \mu_{p,n+1,c}), Q \subseteq S, m_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

那么，以下紧性结果成立。

定理 1.4。 假设对每个 $i \in I$，都有 $\rho_i \not\in \Gamma^{\mathbf{C}^t}$。那么存在常数 $C > 0$，其取决于 $\boldsymbol{\rho}$，使得对于 $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_{n+1}) \in \mathbf{H}$ 中任意一个(1.24)的解，

$$|\hat{u}_i(x)| \le C, \ \forall\, x \in M, \ i \in I.$$

注释 3。 定理 *1.3* 和定理 *1.4* 的证明几乎与 [11, 定理 1。3] 的证明完全相同。因此，为避免重复，本文略去证明。

本文的组织结构如下。第2节从分析角度给出所有必要的预备知识，并为仿射**A** 型Toda系统建立某种形式的Pohozaev恒等式。第3节重点研究相关的代数结构，并从代数观点介绍所有相关结果。第4节概述定理1.1的证明。这部分内容已在 [11, 20, 24]等先前的研究中进行了详细阐述。第5节展示$\mathbf{C}^t$ 型仿射Toda系统的对应结果。

本文中的记号均为标准记号。对于任意子集$J \subseteq I$，$|J|$ 表示J的基数。通常使用粗体表示序列和元组，例如 $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_k\}$、$\mathbf{s} = \{s_k\}$、$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1、\ \cdots、\ \mu_{n+1})$ 以及 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1、\ \cdots、\ \sigma_{n+1})$。在全文中，我们不区分序列与子序列。

2. 泡分析与 Pohozaev恒等式

本节首先通过标准选取程序分析聚集区域，并建立局部质量的某种Pohozaev恒等式，即

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i^2-\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i\sigma_{i+1}=2\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i\sigma_i.^3 \tag{2.1}$$

在下文中，我们将始终遇到该系统

$$\Delta u_s+\sum_{t\in J}k'_{st}e^{u_t}=4\pi\alpha_s\delta_0 \text{ in } \mathbb{R}^2,\ \int_{\mathbb{R}^2}e^{u_s(y)}\mathrm{d}y<+\infty,\ \forall\, s\in J\subseteq I, \tag{2.2}$$

其中$(k'_{st})_{|J|\times|J|}$是 A 型广义 Cartan 矩阵的一个子矩阵（除非另有说明，条目$(k'_{st})=(k_{st})$）。

定义2.1 ([24]). 若$J\subseteq I$由连续指标组成，则$J=\{j,j+1,\cdots,j+l\}$，其中$j\in I$且$l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

命题 2.2. 设$\mathbf{u}^k$是满足(1.9) 和(1.16)的系统解序列。那么存在有限点序列 $\Sigma_k:=\{0,x_1^k,\cdots,x_m^k\}$(若 0 不是奇点，则可从 Σ_k 中删去0)，以及正数序列 $l_1^k,\cdots,l_m^k$，使得

(1) 存在一个与 k 无关的常数 $C>0$，使得 *Harnack*型不等式成立：

$$\max_{i\in I}\left\{u_i^k(x)+2\log\operatorname{dist}(x,\Sigma_k)\right\}\le C,\ \forall\, x\in B_1(0). \tag{2.3}$$

(2) $x_j^k\to 0$和 $l_j^k\to 0$作为 $k\to+\infty$, $l_j^k\le\tau_j^k:=\frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_j^k,\ \Sigma_k\setminus\{x_j^k\}), j=1,\ \cdots,\ m.$ 此外，$B(x_i^k,\ l_i^k)\cap B(x_j^k,\ l_j^k)=\emptyset$对于 $1\le i,\ j\le m, i\ne j$。

(3) 对每个 x_j^k，最大$_{i\in I}u_i^k(x_j^k)=$最大$_{i\in I}$最大$_{x\in B(x_j^k,l_j^k)}u_i^k(x)\to+\infty$当 $k\to+\infty$、$j=1,\cdots,m$。记为

$$\varepsilon_j^k:=\exp\left(-\frac{1}{2}\max_{i\in I}u_i^k(x_j^k)\right),\ j=1,\cdots,m.$$

然后 $R_j^k:=l_j^k/\varepsilon_j^k\to+\infty$当 $k\to+\infty$、$j=1,\ \cdots,\ m$。

(4) 在每个 $B(x_j^k,l_j^k)$ 中，记 $v_i^k(y):=u_i^k(x_j^k+\varepsilon_j^k y)+2$对数 ε_j^k，其中 $i\in I$。则以下备选情形之一成立：

(I). 指标集 I 分解为如下形式：$I=J\cup N$和$J=J_1\cup\cdots\cup J_\vartheta$，其中某个 $\vartheta\in\mathbb{N}$满足条件，即

（*I-1*）。$J_1,\cdots,J_\vartheta$和 N 两两不相交，$N\ne\emptyset$, $\{1,n+1\}\cap N\ne\emptyset$，且每个$J_p, p=1,\cdots,\vartheta$，记为 $J_p=\{i_p,\cdots,i_p+l_p\}$，对于某些 $i_p\in I$和 $l_p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，均由极大连续指标组成；

(I-2). $v_s^k(y)\to-\infty$属于 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 对于 $s\in N$;

(I-3). 对于 $s\in J_p$、$p=1,\cdots,\vartheta$，$v_s^k(y)\to v_s(y)$属于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $v_s(y)$ 满足 $\mathbf{A}^{l_p+1}$ *Toda* 系统 (2.2)，其中 $(k'_{st})=(k_{st})$ 以及 $\alpha_s=0$，$s,t\in J_p$。

(II). 指标集 I 分解为 $I=J\cup N$ 的形式，且$J=J_0\cup J_1\cup\cdots\cup J_\vartheta$，其中某个 $\vartheta\in\mathbb{N}\cup$满足 $\{0\}$

(II-1). $J_0,J_1,\ \cdots,\ J_\vartheta$和 N 两两不相交，$N\ne\emptyset$, $\{1,n+1\}\cap N=\emptyset$，每个$J_p$、$p=1,\ \cdots,\ \vartheta$，记为 $J_p=\{i_p,\ \cdots,\ i_p+l_p\}$，其中 $i_p\in I$且 $l_p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，由极大

[3]按照惯例，令 $\sigma_\ell=\sigma_i$，如果 $\ell\equiv i$ (模 $n+1$)。因此，$\sigma_{n+2}=\sigma_1$。

连续指标和 $J_0 = \{r_2, r_2+1, \cdots, n+1, 1, 2, \cdots, r_1\}$ 组成，其中 $1 \le r_1 < r_2 - 1 \le n$，可改写为 $J_0 = \{s_1, s_2, \cdots, s_{|J_0|}\}$，其中

$$\begin{cases} s_1 = r_2 \\ s_2 = r_2 + 1 \\ \quad \vdots \\ s_{n-r_2+2} = n+1 \end{cases} \quad and \quad \begin{cases} s_{n-r_2+3} = 1 \\ s_{n-r_2+4} = 2 \\ \quad \vdots \\ s_{|J_0|} = r_1 \end{cases}; \tag{2.4}$$

(II-2). $v_s^k(y) \to -\infty$ 属于 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 对于 $s \in N$;

(II-3). $v_s^k(y) \to v_s(y)$ 在 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中，对 $s \in J_p$、$p = 1, \cdots, \vartheta$成立，其中 $v_s(y)$ 满足带有$(k'_{st}) = (k_{st})$ 和 $\alpha_s = 0$ 的 $\mathbf{A}^{l_p+1}$ *Toda* 系统 (2.2)，且 $s,t \in J_p$;

(II-4)。$v_{s_i}^k(y) \to v_{s_i}(y)$ 属于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $i = 1, 2, \cdots, |J_0|$，且 $v_{s_i}(y)$ 满足带有 $(k'_{ij}) = (k_{s_i s_j})$ (2.2) 和 $\alpha_{s_i} = 0$ （$i, j \in \{1, \cdots, |J_0|\}$）的 $\mathbf{A}|J_0|$ *Toda* 系统。

证明。选取程序现在已经相当标准，详情可见 [11] 或 [24]。 □

命题 2.3. 设 $\mathbf{u}^k$ 是系统 (1.9) 的一列爆破解，满足 (1.16)。记“坏点”集合为 $\Sigma_k = \{0, x_1^k, \cdots, x_m^k\}$（若 0 不是奇点，则可从 Σ_k中删除 0）。那么对于任意 $x_0 \in B_1(0) \setminus \Sigma_k$，存在一个与 x_0 和 k 无关的常数 C_0，使得

$$|u_i^k(x_1) - u_i^k(x_2)| \le C_0, \ \forall\, x_1, x_2 \in B(x_0, \mathrm{dist}(x_0, \Sigma_k)/2), \ \forall\, i \in I.$$

证明。证明请参见 [22, 引理 2.1] 和 [27, 引理 2.2]。 f. □

设 $\mathrm{x}_l^k \in \Sigma_k$ 和 τ_l^k如命题 2.2 中所给，由系统 (1.9) 和命题 2.3 可得 $\mathrm{u}_i^k(\mathrm{x}) = \mathrm{u}^k\,\mathrm{x}_l^k,\mathrm{i}(\mathrm{r}) + \mathrm{O}(1)$，$\mathrm{x} \in \mathrm{B}(\mathrm{x}_l^k, \vec{\tau}_l^k)$，其中 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$。$\mathrm{O}(1)$ 与 r 和 k 无关，$\mathrm{r} = |\mathrm{x} - \mathrm{x}_l^k|$，且 $\mathrm{u}^k\,\mathrm{x}_l^k,\mathrm{i}(\mathrm{r}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{r}} \int_\partial \mathrm{B}(\mathrm{x}_l^k,\mathrm{r})\, \mathrm{u}_l^k \mathrm{dS}$。 −

定义 2.4 ([11, 22, 24, 25]). *(i)* 若 u_i^k在 $\partial B(x_k, r_k)$ 上快速衰减，则称 u_i^k具有快速衰减性。

$$u_i^k(x) + 2\log|x - x_k| \le -N_k, \ \forall\, x \in \partial B(x_k, r_k),$$

对于某个 $N_k \to +\infty$作为 $k \to +\infty$。

(ii) 如果 u_i^k在 $\partial B(x_k, r_k)$ 上具有慢衰减，则称其为慢衰减函数。

$$u_i^k(x) + 2\log|x - x_k| \ge -C, \ \forall\, x \in \partial B(x_k, r_k),$$

对于某个与 k 无关的常数 $C > 0$。

在给出下一个结果之前，我们先给出$\mathbf{A}_n$ 的Cartan矩阵逆矩阵的精确形式（见（1.11））， 参见 [13],

$$(\mathbf{A}_n^{-1})_{ij} := a^{ij} = \frac{\min\{i,j\}(n+1-\max\{i,j\})}{n+1}, \ 1 \le i, j \le n.$$

通过直接计算可以容易地验证,

$$\begin{cases} a^{i1} + a^{in} = 1, \ a^{1j} + a^{nj} = 1, \\ a^{ij} = a^{ji}, \ \text{for } i \ne j, \end{cases} \quad \text{for } i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.5}$$

在下一个命题中，对于 $(r, x_0) := \sigma(r, x_0; u_i^k)$ 和 $\sigma_i^k(r) := \sigma(r, 0; u_i^k)$，其中 $i \in I$，我们记

$$\sigma(r, x_0; u) := \frac{1}{2\pi} \int_{B_r(x_0)} e^{u(x)} \mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

现在我们能够为系统(1.9)的局部质量建立 Pohozaev恒等式。

命题2.5. 设$\mathbf{u}^k=(u_1^k,\cdots,u_{n+1}^k)$是满足(1.16)的系统(1.9)的一个解序列。假设$\Sigma_k'\subseteq\Sigma_k$是$\Sigma_k$的一个子集，且$0\in\Sigma_k'\subseteq B(x_k,r_k)\subseteq B_1(0)$，并且满足

$$\operatorname{dist}(\Sigma_k',\partial B(x_k,r_k))=o(1)\operatorname{dist}(\Sigma_k\setminus\Sigma_k',\partial B(x_k,r_k)).$$

如果$\mathbf{u}^k$在$\partial B(x_k,r_k)$上快速衰减，那么

$$\sum_{i\in I}\sigma_i\Big(\sum_{j\in I}k_{ij}\sigma_j-2\mu_i\Big)=2\sum_{i\in I}\mu_i\sigma_i, \tag{2.7}$$

其中(k^{ij})由(1.2)给出，$\mu_i=1+\alpha_i$且$\sigma_i=\lim_{k\to+\infty}\sigma_i^k(r_k,x_k)$对$i\in I$。

证明。将(1.9)的前n个方程乘以$\mathbf{A}_n^{-1}$并利用(2.5)，可得

$$\sum_{j=1}^n a^{ij}\Delta u_j^k+e^{u_i^k}-e^{u_{n+1}^k}=4\pi\sum_{j=1}^n a^{ij}\alpha_j\delta_0,\ \text{for } i=1,\cdots,n. \tag{2.8}$$

不失一般性，假设$x_k=0$。对于固定的$\theta\in(0,1)$，令$\Omega=B_\theta(0)\setminus B_\varepsilon(0)$，其中$\varepsilon>0$足够小。然后将(2.8)乘以$\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)$并应用标准Pohozaev恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{j\neq i}a^{ij}\int_\Omega\Delta u_j^k\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}x+a^{ii}\left(-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u_i^k|^2(x\cdot\nu)\mathrm{d}S+\int_{\partial\Omega}\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\big(\nu\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}S\right)\\&-2\int_\Omega e^{u_i^k}\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}e^{u_i^k}(x\cdot\nu)\mathrm{d}S-\int_\Omega e^{u_{n+1}^k}\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}x=0,\ \text{for } i=1,\cdots,n,\end{aligned}$$

其中ν表示单位外法向量。将上述方程从$i=1$到$i=n$求和，我们推得牲交

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2+\mathcal{P}_3:=&\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}a^{ij}\int_\Omega\Delta u_j^k\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}x\\&+\sum_{i=1}^n a^{ii}\left(-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u_i^k|^2(x\cdot\nu)\mathrm{d}S+\int_{\partial\Omega}\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\big(\nu\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}S\right)\\&+\sum_{i=1}^n\left(-2\int_\Omega e^{u_i^k}\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}e^{u_i^k}(x\cdot\nu)\mathrm{d}S-\int_\Omega e^{u_{n+1}^k}\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}x\right)=0.\end{aligned} \tag{2.9}$$

我们逐项计算$\mathcal{P}_i$、$i=1$、2、3。首先，由(1.16)的(iii)，容易验证，至多取ε的一个子序列，

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_3&=\sum_{i=1}^n\left(-2\int_\Omega e^{u_i^k}\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}e^{u_i^k}(x\cdot\nu)\mathrm{d}S-\int_\Omega e^{u_{n+1}^k}\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}x\right)\\&=-4\pi\sum_{i\in I}\sigma_i^k(\theta)+\sum_{i\in I}\theta\int_{\partial B_\theta(0)}e^{u_i^k}\mathrm{d}S+o(1).\end{aligned}$$

对于第二项$\mathcal{P}_2$，直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2&=\sum_{i=1}^n a^{ii}\left(-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u_i^k|^2(x\cdot\nu)\mathrm{d}S+\int_{\partial\Omega}\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\big(\nu\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}S\right)\\&=\sum_{i=1}^n a^{ii}\left(-\frac{1}{2}\int_{\partial B_\theta(0)}|\nabla u_i^k|^2(x\cdot\nu)\mathrm{d}S+\int_{\partial B_\theta(0)}\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\big(\nu\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}S\right)\\&\quad+\sum_{i=1}^n a^{ii}\left(-\frac{1}{2}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}|\nabla u_i^k|^2(x\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S+\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\big(\mathbf{n}\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}S\right),\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示 $\partial B_\varepsilon(0)$上的单位外法向量。利用分部积分，我们推得

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i} a^{ij}\int_\Omega \Delta u_j^k\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}x = \sum_{1\le i\neq j\le n} a^{ij}\int_\Omega \Delta u_j^k\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}x\\ &= \sum_{1\le i<j\le n} a^{ij}\int_{\partial B_\theta(0)}\Big(\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\big(\nu\cdot\nabla u_j^k\big)+\big(x\cdot\nabla u_j^k\big)\big(\nu\cdot\nabla u_i^k\big)-(x\cdot\nu)\big(\nabla u_i^k\cdot\nabla u_j^k\big)\Big)\,\mathrm{d}S\\ &\quad+\sum_{1\le i<j\le n} a^{ij}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\Big(\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\big(\mathbf{n}\cdot\nabla u_j^k\big)+\big(x\cdot\nabla u_j^k\big)\big(\mathbf{n}\cdot\nabla u_i^k\big)-(x\cdot\mathbf{n})\big(\nabla u_i^k\cdot\nabla u_j^k\big)\Big)\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

应用引理 4. 所用的相同论证，我们得到以下估计。

$$\nabla u_i^k(x) = -2\alpha_i x/|x|^2 + o(1) \text{ near the origin.} \tag{2.10}$$

因此由 (2.10) 可知,

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le i<j\le n} a^{ij}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\Big(\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\big(\mathbf{n}\cdot\nabla u_j^k\big)+\big(x\cdot\nabla u_j^k\big)\big(\mathbf{n}\cdot\nabla u_i^k\big)-(x\cdot\mathbf{n})\big(\nabla u_i^k\cdot\nabla u_j^k\big)\Big)\,\mathrm{d}S\\ &\quad=-8\pi\sum_{1\le i<j\le n} a^{ij}\alpha_i\alpha_j+o(1)\end{aligned} \tag{2.11}$$

and

$$\sum_{i=1}^n a^{ii}\left(-\frac{1}{2}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}|\nabla u_i^k|^2(x\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S+\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\big(x\cdot\nabla u_i^k\big)\big(\mathbf{n}\cdot\nabla u_i^k\big)\mathrm{d}S\right)=-4\pi\sum_{i=1}^n a^{ii}\alpha_i^2+o(1). \tag{2.12}$$

由于$\mathbf{u}^k$ 的各个元素在 $\partial B(0,r_k)$上具有快速衰减性质，根据 [11,命题 2.4], 的证明中相同的论证, 我们可以选取$R^k\to+\infty$，使得$\mathbf{u}^k$ 在 $\partial B(0,R^k r_k)$ 上具有快速衰减性质，并且

$$\sigma_i^k(R^k r_k)=\sigma_i^k(r_k)+o(1),\ \text{for } i\in I.$$

令 $\theta=\sqrt{R^k r_k}$, 则有

$$-4\pi\sum_{i\in I}\sigma_i^k(\theta)=-4\pi\sum_{i\in I}\sigma_i^k(r_k)+o(1)\ \text{ and }\ \sum_{i\in I}\theta\int_{\partial B_\theta(0)}e^{u_i^k}\mathrm{d}S=o(1).$$

因此可得:

$$\mathcal{P}_3=-4\pi\sum_{i\in I}\sigma_i^k(r_k)+o(1). \tag{2.13}$$

与估计式 (2.10) 类似（由 [26, 引理 4.1] 及缩放论证可得），对于$i=1,\cdots,n$，我们有

$$\nabla u_i^k(x)=-\frac{x}{|x|^2}\Big(\sum_{t\in I}k_{it}\sigma_t^k(r_k)-2\alpha_i\Big)+\frac{o(1)}{|x|},\ x\in\partial B_{\sqrt{R^k r_k}}(0).$$

那么，(2.11) 和 (2.12) 蕴含着

$$\mathcal{P}_1=2\pi\sum_{1\le i<j\le n}a^{ij}\Big(\sum_{t\in I}k_{it}\sigma_t^k(r_k)-2\alpha_i\Big)\Big(\sum_{t\in I}k_{jt}\sigma_t^k(r_k)-2\alpha_j\Big)-8\pi\sum_{1\le i<j\le n}a^{ij}\alpha_i\alpha_j+o(1) \tag{2.14}$$

and

$$\mathcal{P}_2=\pi\sum_{i=1}^n a^{ii}\Big(\sum_{t\in I}k_{it}\sigma_t^k(r_k)-2\alpha_i\Big)^2-4\pi\sum_{i=1}^n a^{ii}\alpha_i^2+o(1). \tag{2.15}$$

将 (2.13)、(2.14) 和 (2.15) 代入 (2.9)，我们得出

$$2\sum_{1\le i<j\le n} a^{ij}\Big(\sum_{t\in I} k_{it}\sigma_t^k(r_k)-2\alpha_i\Big)\Big(\sum_{t\in I} k_{jt}\sigma_t^k(r_k)-2\alpha_j\Big)-8\sum_{1\le i<j\le n} a^{ij}\alpha_i\alpha_j$$
$$+\sum_{i=1}^{n} a^{ii}\Big(\sum_{t\in I} k_{it}\sigma_t^k(r_k)-2\alpha_i\Big)^2-4\sum_{i=1}^{n} a^{ii}\alpha_i^2-4\sum_{i\in I}\sigma_i^k(r_k)=o(1).$$

因此，取$k\to+\infty$，我们得到

$$\sum_{1\le i,j\le n} a^{ij}\Big(\sum_{t\in I} k_{it}\sigma_t-2\alpha_i\Big)\Big(\sum_{s\in I} k_{js}\sigma_s-2\alpha_j\Big)-4\sum_{1\le i,j\le n} a^{ij}\alpha_i\alpha_j-4\sum_{i\in I}\sigma_i=0. \tag{2.16}$$

It r接下来需化简 (2.16)。我们将 (2.16) 的左端分成四部分，即 .,

$$\begin{aligned}0&=\sum_{1\le i,j\le n} a^{ij}\sum_{t\in I} k_{it}\sigma_t\sum_{s\in I} k_{js}\sigma_s-2\sum_{1\le i,j\le n} a^{ij}\sum_{t\in I} k_{it}\sigma_t\alpha_j-2\sum_{1\le i,j\le n} a^{ij}\sum_{s\in I} k_{js}\sigma_s\alpha_i-4\sum_{i\in I}\sigma_i\\&=:\mathcal{Q}_1-\mathcal{Q}_2-\mathcal{Q}_3-\mathcal{Q}_4.\end{aligned} \tag{2.17}$$

我们将逐项计算 $\mathcal{Q}_i$、$i=1$、2、3。直接计算可得 t

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_1&=\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\sum_{t,s=1}^{n} a_{it}a_{js}\sigma_t\sigma_s+\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\sum_{t=1}^{n} a_{it}k_{j,n+1}\sigma_t\sigma_{n+1}\\&\quad+\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\sum_{s=1}^{n} a_{js}k_{i,n+1}\sigma_s\sigma_{n+1}+\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}k_{i,n+1}k_{j,n+1}\sigma_{n+1}^2\\&=:\mathcal{Q}_{11}+\mathcal{Q}_{12}+\mathcal{Q}_{13}+\mathcal{Q}_{14}.\end{aligned}$$

由 (2.5) 可知

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{11}&=\sum_{j,t,s=1}^{n} a_{js}\sigma_t\sigma_s\delta_{jt}=\sum_{j,s=1}^{n} a_{js}\sigma_j\sigma_s=2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2-2\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i\sigma_{i+1},\\\mathcal{Q}_{12}&=\sigma_{n+1}\sum_{i,t=1}^{n} a_{it}\sigma_t\big(-a^{i1}-a^{in}\big)=-\sigma_{n+1}\sum_{i,t=1}^{n} a_{it}\sigma_t=-\sigma_{n+1}(\sigma_1+\sigma_n),\\\mathcal{Q}_{13}&=\sigma_{n+1}\sum_{j,s=1}^{n} a_{js}\sigma_s\big(-a^{1j}-a^{nj}\big)=-\sigma_{n+1}\sum_{j,s=1}^{n} a_{js}\sigma_s=-\sigma_{n+1}(\sigma_1+\sigma_n),\\\mathcal{Q}_{14}&=\big(a^{11}+a^{1n}+a^{n1}+a^{nn}\big)\sigma_{n+1}^2=2\sigma_{n+1}^2.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_1&=2\sum_{i\in I}\sigma_i^2-2\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i\sigma_{i+1}-2\sigma_n\sigma_{n+1}-2\sigma_{n+1}\sigma_1\\&=(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+\cdots+(\sigma_n-\sigma_{n+1})^2+(\sigma_{n+1}-\sigma_1)^2.\end{aligned} \tag{2.18}$$

此外，再次利用（2.5），我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_2&=2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\sum_{t=1}^{n} a_{it}\sigma_t\alpha_j+2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}k_{i,n+1}\sigma_{n+1}\alpha_j\\&=2\sum_{j,t=1}^{n}\sigma_t\alpha_j\delta_{jt}+2\sigma_{n+1}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\big(-a^{1j}-a^{nj}\big)=2\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sigma_j-2\sigma_{n+1}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=2\sum_{j\in I}\alpha_j\sigma_j\end{aligned} \tag{2.19}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_3 &= 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\sum_{s=1}^{n} a_{js}\sigma_s\alpha_i + 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}k_{j,n+1}\sigma_{n+1}\alpha_i \\ &= 2\sum_{i,s=1}^{n}\sigma_s\alpha_i\delta_{is} + 2\sigma_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\big(-a^{i1}-a^{in}\big) = 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_i - 2\sigma_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 2\sum_{i\in I}\alpha_i\sigma_i.\end{aligned} \tag{2.20}$$

因此，将（2.18）、（2.19）和（2.20）代入（2.17），可推得

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+\cdots+(\sigma_n-\sigma_{n+1})^2+(\sigma_{n+1}-\sigma_1)^2 = 4\sum_{i\in I}\mu_i\sigma_i,$$

这与 (2.7) 等价。可以直接验证 (2.1) 与 (2.7) 等价。命题 2.5 的证明至此完成。□

3. $\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$ AND 群表示的性质

本节重点考察集合 $\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，并证明其等价于$\Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，如命题 3.4 中所述。本节的主要目标是推导 仿射魏尔群 $\mathbf{A}_n^{(1)}$ 的群组表示。

3.1. 集合 $\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$ 的性质

命题3.1。 对于每个元素 $\boldsymbol{\sigma}\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$， $\boldsymbol{\sigma}$ 满足 *Pohozaev*恒等式 (2.1)。

证明。与 [24, 命题 3.1], 类似，可以直接由韦达定理得出。 □

定义 3.2 ([11])。 我们称 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{i_s}\mathfrak{R}_{i_{s-1}}\cdots\mathfrak{R}_{i_1}$ $(i_a\in I,\ 1\le a\le s)$ 为长度为 s 的最简链，如果 $\mathfrak{R}$ 无法约化为任意子链 $\mathfrak{R}_{j_{s'}}\mathfrak{R}_{j_{s'-1}}\cdots\mathfrak{R}_{j_1}$，其中 $s'<s$、$j_a\in I$、$1\le a\le s'$。

对于任意 $\boldsymbol{\sigma}\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$， $\boldsymbol{\sigma}=\mathfrak{R}_{i_s}\mathfrak{R}_{i_{s-1}}\cdots\mathfrak{R}_{i_1}\mathbf{0}$ 存在某条长度为s的最简链 $\mathfrak{R}$。由此，我们称 $\boldsymbol{\sigma}$ 处于第s层。

命题 3.3。 对于任意 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1})\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，$\sigma_i=2\sum_{j\in I}n^{ij}\mu_j$ 存在某个 $n_{ij}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

证明。 我们用归纳法证明此命题。根据 $\mathfrak{R}_i$ 的定义（$i\in I$），容易看出，该结论对第一层中的元素成立。假设该结论对第M层（$M\ge 1$）中的所有 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1})\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$ 均成立，则只需证明对每个 $\mathfrak{R}_i\boldsymbol{\sigma}$、$i\in I$也成立。假设 $\sigma_i=2\sum_{j\in I}n^{ij}\mu_j$，其中 $n_{ij}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 且 i、$j\in I$，目标是证明对任意 $i_0\in I$，下列不等式成立：

$$\delta_{i_0j}-\sum_{s\in I}k_{i_0,s}n_{s,j}+n_{i_0,j}\ge 0,\ \forall\, j\in I. \tag{3.1}$$

为清晰起见，这里分别将n^{ij} 和k^{ij} 设为$n_{i,j}$ 和$k_{i,j}$。

将 $\boldsymbol{\sigma}$ 的表达式代入(2.1)，并比较每个$j\in I$对应的 μ_j^2的系数，得到以下方程：

$$\sum_{i\in I}\big(n_{i,j}-n_{i+1,j}\big)^2 = 2n_{j,j}.^4 \tag{3.2}$$

对于(3.2)，我们可以将n_{i_0,i_0} 视为该二次方程的解

$$2x^2-2\big(1+n_{i_0-1,i_0}+n_{i_0+1,i_0}\big)x+n_{i_0-1,i_0}^2+n_{i_0+1,i_0}^2+\sum_{i\in I\setminus\{i_0-1,i_0\}}\big(n_{i,i_0}-n_{i+1,i_0}\big)^2=0. \tag{3.3}$$

[4]这里 $\sigma_\ell=\sigma_i$ 如果 $\ell\equiv i$ (模 $n+1$)。因此， $\sigma_{n+2}=\sigma_1$ 和 $\sigma_0=\sigma_{n+1}$， $n_{n+2,j}=n_{1,j}$ 以及 $n_{0,j}=n_{n+1}$，对于任意 $j\in I$。

那么，很容易看出，式 (3.3) 的另一个解满足

$$1 + n_{i_0-1,i_0} - n_{i_0,i_0} + n_{i_0+1,i_0} \geq 0. \tag{3.4}$$

类似地，对于 (3.2)，我们也可以将 $n_{i_0,j}, j \neq i_0$ 视为二次方程的一个解

$$2x^2 - 2\big(n_{i_0-1,j} + n_{i_0+1,j}\big)x + n_{i_0-1,j}^2 + n_{i_0+1,j}^2 + \sum_{i\in I\setminus\{i_0-1,i_0\}} \big(n_{i,j} - n_{i+1,j}\big)^2 - 2n_{jj} = 0. \tag{3.5}$$

为了证明另一个解非负，我们断言

$$n_{i_0-1,j}^2 + n_{i_0+1,j}^2 + \sum_{i\in I\setminus\{i_0-1,i_0\}} \big(n_{i,j} - n_{i+1,j}\big)^2 - 2n_{jj} \geq 0. \tag{3.6}$$

我们通过考察以下 4 种情况来证明 (3.6)：

$$\text{(a). } j = i_0 - 1;\ \text{(b). } j = i_0 + 1;\ \text{(c). } j < i_0 - 1;\ \text{(d). } j > i_0 + 1.$$

这里我们只给出情况 (a) 和 (c) 的证明，因为情况 (b) 和 (d) 的论证非常相似。

情况 *(a)* 的证明。如果 $j = i_0 - 1$，那么

$$\begin{aligned} &n_{i_0-1,j}^2 + n_{i_0+1,j}^2 + \sum_{i\in I\setminus\{i_0-1,i_0\}} \big(n_{i,j} - n_{i+1,j}\big)^2 - 2n_{jj} \\ &\geq n_{i_0-1,i_0-1} + n_{i_0+1,i_0-1} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0-1,i_0\}} \big(n_{i+1,i_0-1} - n_{i,i_0-1}\big) - 2n_{i_0-1,i_0-1} = 0. \end{aligned}$$

情况 *(c)* 的证明。如果 $j < i_0 - 1$，那么

$$\begin{aligned} &n_{i_0-1,j}^2 + n_{i_0+1,j}^2 + \sum_{i\in I\setminus\{i_0-1,i_0\}} \big(n_{i,j} - n_{i+1,j}\big)^2 - 2n_{jj} \\ &\geq \big(n_{j,j} - n_{j-1,j}\big) + \big(n_{j,j} - n_{j+1,j}\big) + \sum_{i=j+1}^{i_0-2} \big(n_{i,j} - n_{i+1,j}\big) + n_{i_0-1,j} + n_{i_0+1,j} \\ &\quad + \sum_{i\in I\setminus\{j-1,j,\cdots,i_0-1,i_0\}} \big(n_{i+1,j} - n_{i,j}\big) - 2n_{jj} = 0. \end{aligned}$$

因此，断言（3.6）得证。因此，（3.5）的另一个解满足 s

$$n_{i_0-1,j} - n_{i_0,j} + n_{i_0+1,j} \geq 0. \tag{3.7}$$

由（3.4）和（3.7）可得（3.1）。命题 3.3 的证明至此完成。 □

命题 3.4. 令 $\Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$ 定义为

$$\Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}) = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \;\middle|\; \boldsymbol{\sigma} \textit{ satisfies the Pohozaev identity } (2.7),\ \sigma_i = 2\sum_{j\in I} n_{ij}\mu_j,\ n_{ij} \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ i \in I \right\}.$$

则有

$$\Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}) = \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}).$$

证明。 由命题3.1和命题 3.3可知， $\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}) \subseteq \Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。因此，只需证明 $\Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}) \subseteq \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。对于任意 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}) \in \Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，由命题3.1可知，每个 $\mathfrak{R}_i\boldsymbol{\sigma}$、$i \in I$ 都满足 Pohozaev恒等式 (2.7)。我们声称

$$\text{if } \boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}),\ \text{then } \mathfrak{R}_i\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}),\ \text{for each } i \in I. \tag{3.8}$$

事实上，对于任意 $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_N^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，设 $\sigma_i = 2\sum_{j\in I} n^{ij}\mu_j$，其中 $n_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$、$i$、$j \in I$。通过与命题 3.3 相同的论证，我们得到

$$\delta_{ij} - \sum_{s\in I} k_{is}n_{sj} + n_{ij} \geq 0,\ \forall\, i,j \in I,$$

因此，式（3.8）得证。

然后，按照 [24, 命题 3.4], 的相同论证，我们在 $\Gamma_N^{\mathbf{A}}$（$\boldsymbol{\mu}$）中定义偏序关系 $\preceq$，即$\boldsymbol{\sigma}_1 \preceq \boldsymbol{\sigma}_2$ 当且仅当（$\boldsymbol{\sigma}_1$）$_i \leq$ （$\boldsymbol{\sigma}_2$）$_i$ 对每个$i \in I$均成立。对于任意 $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_N^{\mathbf{A}}$（$\boldsymbol{\mu}$），令

$$\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{A}} := \left\{\mathfrak{R}_{i_1}\mathfrak{R}_{i_2}\cdots\mathfrak{R}_{i_s}\boldsymbol{\sigma} \mid s \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ i_a \in I,\ 1 \leq a \leq s\right\}.$$

因此，对于任意 $\boldsymbol{\sigma}_1$、$\boldsymbol{\sigma}_2 \in \Gamma_N^{\mathbf{A}}$（$\boldsymbol{\mu}$），有

$$\text{either } \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}_1}^{\mathbf{A}} = \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}_2}^{\mathbf{A}} \text{ or } \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}_1}^{\mathbf{A}} \cap \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}_2}^{\mathbf{A}} = \emptyset. \tag{3.9}$$

容易推出，对于任意 $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_N^{\mathbf{A}}$（$\boldsymbol{\mu}$），$\mathbf{0} \in \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{A}}$。由（3.9），我们得到，对于任意$\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_N^{\mathbf{A}}$（$\boldsymbol{\mu}$），$\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{A}} = \Gamma_{\mathbf{0}}^{\mathbf{A}}$。因此，$\Gamma_N^{\mathbf{A}}$（$\boldsymbol{\mu}$）$= \Gamma_{\mathbf{A}}$（$\boldsymbol{\mu}$）。命题 3.4 得证。□

3.2. **群表示**。

引理 3.5。对于任意 $\boldsymbol{\sigma} =$（σ_1，$\cdots$，σ_{n+1}）$\in \Gamma_{\mathbf{A}}$（$\boldsymbol{\mu}$），记$\mu_s^* = \mu_s - \frac{1}{2}\sum_{t\in I} k_{st}\sigma_t$（$s \in I$）。假设 $J = \{j,\ j+1,\ \cdots,\ j+l\} \subsetneqq I$ 由连续指标组成，其中 $j \in I$ 且 $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$。令$\boldsymbol{\sigma}^* = \left(\sigma_1^*,\ \cdots,\ \sigma_{n+1}^*\right)$ 定义为

$$\begin{cases} \sigma_s^* = \sigma_s, & \text{for } s \in I \setminus J, \\ \sigma_s^* = \sigma_s + 2\sum\limits_{t\in J} k^{st}\left(\mu_t^* + \mu_{t^*}^*\right), & \text{for } s \in J, \end{cases}$$

其中，$t^* = 2j + |J| - t - 1$ 以及 $(k^{st})_{|J|\times|J|}$ 表示$(k_{st})_{|J|\times|J|}$的逆矩阵，s，$t \in J$。于是 $\boldsymbol{\sigma}^* \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。

为了证明引理 3.5，我们将找出一个元素 $\mathfrak{R}_J \in \mathbf{G}_{\mathbf{A}}$，使得 $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathfrak{R}_J\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。为此，我们引入集合链的概念。

定义 3.6。假设 $J \subsetneqq I$ 由连续指标组成，记作 $J = \{j,\ j+1,\ \cdots,\ j+l\}$，其中 $j \in I$ 且 $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$。我们将 J-链定义为 $\mathfrak{R}_J$，如下所示：
(a). 若 $l = 0, |J| = 1$，则 $\mathfrak{R}_J = \mathfrak{R}_j$；*(b).* 若 $l = 1, |J| = 2$，则 $\mathfrak{R}_J = \mathfrak{R}_j\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j$；*(c).* 若 $l = 2, |J| = 3$，则 $\mathfrak{R}_J = \left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\mathfrak{R}_j\right)^2$；*(d).* 若 $l = 3, |J| = 4$，则 $\mathfrak{R}_J = \left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\mathfrak{R}_{j+3}\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j\right)^2$；*(e).* 若 $l \geq 4, |J| = l + 1 \geq 5$，则

$$\mathfrak{R}_J = \mathfrak{R}_{J^*}\left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\cdots\mathfrak{R}_{j+l-1}\mathfrak{R}_{j+l}\mathfrak{R}_{j+l-2}\mathfrak{R}_{j+l-3}\cdots\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j\right)^2,$$

其中 $J^* = \{j+2,\ \cdots,\ j+l-2\}$ 满足 $|J^*| = l - 3$。

注4. 如果 $J = \{i_1, i_2, \cdots, i_{l+1}\} \subseteq I$ 对于某个 $l \in \mathbb{N}$ 不是连续指标集，我们也可以给出相应的 J-链，如下所示。定义一个双射。

$$g : J = \{i_1, i_2, \cdots, i_{l+1}\} \to \{1, 2, \cdots, l+1\} =: \widetilde{J},\ i_t \mapsto t,\ t = 1, 2, \cdots, l+1.$$

~假设 J-链由 $\mathfrak{R}_{\widetilde{J}} = \prod_{s\in\Lambda}\mathfrak{R}_s$ 给出，其中 $\prod$ 表示生成元~$\mathfrak{R}_s$的复合，而 Λ 是一个长度为 $(l+1)(l+2)/2$ 的元组，满足对每个 $s \in \Lambda$，均有 $s \in J$。于是，J-链定义为 $\mathfrak{R}_J = \prod_{s\in\Lambda}\mathfrak{R}_{g^{-1}(s)}$。

注5。在爆破过程中（参见第*4*节），任意给定爆破序列的局部质量都会在每一步发生变化。我们将通过用集合链表示来衡量变化量。具体而言，若 $\boldsymbol{\sigma}$ 表示当前步骤的局部质量，则进一步进行爆破分析后，新的局部质量可表示为 $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathfrak{R}_J\boldsymbol{\sigma}$，其中 $J \subsetneqq I$。

注记6. *(a)* 根据命题*3.1*，对于任意连续指标集 $J \subsetneqq I$，$\mathfrak{R}_J\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$ 只要 $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。

(b) 我们为读者列出一些直接的结果：见表*1*。

仿射 A 型的 J-链			
l	$\lvert J\rvert$	$\mathfrak{R}_J$	$\mathfrak{R}_J$中的元素个数
0	1	$\mathfrak{R}_j$	1
1	2	$\mathfrak{R}_j\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j$	3
2	3	$\left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\mathfrak{R}_j\right)^2$	6
3	4	$\mathfrak{R}_J = \left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\mathfrak{R}_{j+3}\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j\right)^2$	$10 = 5\times 2 + 0$
4	5	$\mathfrak{R}_J = \mathfrak{R}_{j+2}\left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\mathfrak{R}_{j+3}\mathfrak{R}_{j+4}\mathfrak{R}_{j+2}\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j\right)^2$	$15 = 7\times 2 + 1$
5	6	$\mathfrak{R}_J = \left(\mathfrak{R}_{j+2}\mathfrak{R}_{j+3}\mathfrak{R}_{j+2}\right)\left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\mathfrak{R}_{j+3}\mathfrak{R}_{j+4}\mathfrak{R}_{j+5}\mathfrak{R}_{j+3}\mathfrak{R}_{j+2}\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j\right)^2$	$21 = 9\times 2 + 3$
...	...	...	...
l	$l+1$	$\mathfrak{R}_J = \mathfrak{R}_{J^*}\left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\cdots\mathfrak{R}_{j+l-1}\mathfrak{R}_{j+l}\mathfrak{R}_{j+l-2}\mathfrak{R}_{j+l-3}\cdots\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j\right)^2$	$\frac{(l+1)(l+2)}{2}$

表1. 仿射 A 型的J链

引理 *3.5* 的证明。我们断言

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_{n+1}^*) = \mathfrak{R}_J\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}). \tag{3.10}$$

我们对指标l使用归纳法证明断言 (3.10)。对于$l \le 4$ 的情形，通过 $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathfrak{R}_J\boldsymbol{\sigma}$直接计算可证得 (3.10)。因此，不失一般性，我们从$l = 4$ 开始。假设 (3.10) 对$l \ge 4$ 成立，那么只需检验它对$l+1$ 是否也成立。我们将证明分成几个步骤。

步骤 1. 对于$l \ge 5$, $|J| = l+1 \ge 6$。我们计算 $\mathfrak{R}_J\boldsymbol{\sigma}$。通过归纳法，可以很容易地验证

$$\left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\cdots\mathfrak{R}_{j+l-1}\mathfrak{R}_{j+l}\mathfrak{R}_{j+l-2}\mathfrak{R}_{j+l-3}\cdots\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j\boldsymbol{\sigma}\right)_s$$
$$= \begin{cases} \sigma_s, & \text{for } 1 \le s \le j-1 \text{ and } j+l+1 \le s \le n+1, \\ 2\mu_s^* + \sigma_s, & \text{for } s = j \text{ and } s = j+l, \\ 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k^* + \sigma_s, & \text{for } j+1 \le s \le j+l-1. \end{cases}$$

直接计算 离子表明 $2\sum^{j+l}{}_{k=j}\ \mu_k^* = 2\sum_{=kj}^{j+l}\ \mu_k + \sigma_{j-1} - \sigma_j - \sigma_{j+l} + \sigma_{j+l+1}$。因此我们有 ve

$$\left(\left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\cdots\mathfrak{R}_{j+l-1}\mathfrak{R}_{j+l}\mathfrak{R}_{j+l-2}\mathfrak{R}_{j+l-3}\cdots\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j\right)^2\boldsymbol{\sigma}\right)_s$$

$$= \begin{cases} \sigma_s, & \text{for } s \in I \setminus J, \\ 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k^* + \sigma_s = 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k + \sigma_{j-1} - \sigma_{j+l} + \sigma_{j+l+1}, & \text{for } s = j, \\ 2\sum_{k=j+1}^{j+l-1}\mu_k + 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k + \sigma_{j-1} - \sigma_{j+1} - \sigma_{j+l-1} + \sigma_{j+l+1} + \sigma_s, & \text{for } j+1 \le s \le j+l-1, \\ 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k^* + \sigma_s = 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k + \sigma_{j-1} - \sigma_j + \sigma_{j+l+1}, & \text{for } s = j+l. \end{cases} \tag{3.11}$$

步骤 2. 根据 [24], 后面的推论，我们得到

$$\sigma_s^* = \sigma_s + 2\sum_{t\in J} k^{st}\left(\mu_t^* + \mu_{t^*}^*\right) = \sigma_s + 2\sum_{q=j-1}^{s-1}\left(\sum_{k=j}^{2j+|J|-2-q}\mu_k^* - \sum_{k=j}^{q}\mu_k^*\right), \text{ for } s\in J. \tag{3.12}$$

然后，直接计算可得

$$\begin{aligned}
\sigma_s^* &= \sigma_s + 2\sum_{q=j-1}^{s-1}\left(\sum_{k=j}^{2j+|J|-2-q}\mu_k^* - \sum_{k=j}^{q}\mu_k^*\right) = \sigma_s + \sum_{q=j-1}^{s-1} 2\sum_{k=j}^{2j+|J|-2-q}\mu_k^* - \sum_{q=j-1}^{s-1} 2\sum_{k=j}^{q}\mu_k^* \\
&= \sigma_s + \sum_{q=j-1}^{s-1}\left(2\sum_{k=j}^{2j+|J|-2-q}\mu_k + \sigma_{j-1} - \sigma_j - \sigma_{2j+|J|-2-q} + \sigma_{2j+|J|-1-q}\right) \\
&\quad - \sum_{q=j-1}^{s-1}\left(2\sum_{k=j}^{q}\mu_k + \sigma_{j-1} - \sigma_j - \sigma_q + \sigma_{q+1}\right) \\
&= \sigma_s + 2\sum_{q=j-1}^{s-1}\sum_{k=j}^{2j+|J|-2-q}\mu_k - \sum_{q=j-1}^{s-1}\left(\sigma_{2j+|J|-2-q} - \sigma_{2j+|J|-1-q}\right) - 2\sum_{q=j-1}^{s-1}\sum_{k=j}^{q}\mu_k + \sum_{q=j-1}^{s-1}\left(\sigma_q - \sigma_{q+1}\right) \\
&= 2\sum_{q=j-1}^{s-1}\sum_{k=j}^{2j+|J|-2-q}\mu_k - 2\sum_{q=j-1}^{s-1}\sum_{k=j}^{q}\mu_k - \left(\sigma_{2j+|J|-s-1} - \sigma_{j+|J|}\right) + \sigma_{j-1}.
\end{aligned}$$

由于 $|J| = l+1$，我们推得

$$\sigma_s^* = 2\sum_{q=j-1}^{s-1}\sum_{k=j}^{2j+l-q-1}\mu_k - 2\sum_{q=j-1}^{s-1}\sum_{k=j}^{q}\mu_k - \left(\sigma_{2j+l-s} - \sigma_{j+l+1}\right) + \sigma_{j-1}, \text{ for } s\in J. \tag{3.13}$$

步骤 3. 比较 (3.11) 和 (3.12)，容易验证，对于 $s \in J\setminus J^\star$,

$$\left(\left(\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_{j+2}\cdots\mathfrak{R}_{j+l-1}\mathfrak{R}_{j+l}\mathfrak{R}_{j+l-2}\mathfrak{R}_{j+l-3}\cdots\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j\right)^2\boldsymbol{\sigma}\right)_s = \sigma_s^*. \tag{3.14}$$

根据假设，(3.10) 对 $J^\star$ 成立，因为 $|J^\star| = l-3 < l$。因此，对于任意 $\boldsymbol{\sigma}\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，应用与 [24] 以及 (3.13) 相同的论证（将 j 变换为 $j+2$，并将 $|J| = l+1$ 变换为 $|J^\star| = l-3$），可得 $(\mathfrak{R}_{J^\star}\boldsymbol{\sigma})_s = \sigma_s$ 对 $s\in I\setminus J^\star$ 成立，并且

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{R}_{J^\star}\boldsymbol{\sigma}\right)_s = \sigma_s^* &= 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{2j+|J^\star|+2-q}\mu_k - 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{q}\mu_k - \left(\sigma_{2j+|J^\star|-s+3} - \sigma_{j+2+|J^\star|}\right) + \sigma_{j+1} \\
&= 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{2j+l-q-1}\mu_k - 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{q}\mu_k - \left(\sigma_{2j+l-s} - \sigma_{j+l-1}\right) + \sigma_{j+1}, \text{ for } s\in J^\star.
\end{aligned}$$

作为一个 co 序列，结合 (3.11)，我们推得，对于$s \in J^\star$，即$j+2 \le s \le j+l-2$,

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{R}_J\boldsymbol{\sigma}\right)_s &= 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{2j+l-q-1}\mu_k - 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{q}\mu_k - \left(\sigma_{2j+l-s} - \sigma_{j+l-1}\right) \\
&\quad + 2\sum_{k=j+1}^{j+l-1}\mu_k + 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k + \sigma_{j-1} - \sigma_{j+1} - \sigma_{j+l-1} + \sigma_{j+l+1} + \sigma_{j+1} \\
&= 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{2j+l-q-1}\mu_k - 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{q}\mu_k + 2\sum_{k=j+1}^{j+l-1}\mu_k + 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k \\
&\quad - \left(\sigma_{2j+l-s} - \sigma_{j+l+1}\right) + \sigma_{j-1}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

比较 (3.13) 与 (3.15)，我们发现

$$(\mathfrak{R}_J\boldsymbol{\sigma})_s = \sigma_s^*, \text{ for } j+2 \le s \le j+l-2 \text{ (i.e., } s \in J^\star). \tag{3.16}$$

事实上，对于 $s \in J^\star$，有

$$\begin{aligned}
&2\sum_{q=j-1}^{s-1}\sum_{k=j}^{2j+l-q-1}\mu_k - 2\sum_{q=j-1}^{s-1}\sum_{k=j}^{q}\mu_k \\
&= 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j}^{2j+l-q-1}\mu_k + 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k + 2\sum_{k=j}^{j+l-1}\mu_k - 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j}^{q}\mu_k - 2\sum_{k=j}^{j-1}\mu_k - 2\sum_{k=j}^{j}\mu_k \\
&= 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\left(\sum_{k=j+2}^{2j+l-q-1}\mu_k + \mu_j + \mu_{j+1}\right) + 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k + 2\sum_{k=j+1}^{j+l-1}\mu_k + 2\mu_j \\
&\quad - 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\left(\sum_{k=j+2}^{q}\mu_k + \mu_j + \mu_{j+1}\right) - 2\mu_j \\
&= 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{2j+l-q-1}\mu_k - 2\sum_{q=j+1}^{s-1}\sum_{k=j+2}^{q}\mu_k + 2\sum_{k=j+1}^{j+l-1}\mu_k + 2\sum_{k=j}^{j+l}\mu_k.
\end{aligned}$$

因此，由 (3.14) 和 (3.16) 得到 (3.10)。引理 3.5 的证明至此完成。 □

注 7。 我们可以应用引理 *3.5* 来处理爆破情形 ***(I)***，如命题 *2.2-(4)* 所示。然而，在命题 *2.2-(4)* 中处理爆破情形 ***(II)*** 时，我们需要如下所述的额外技术。

定义 3.7。*(a)* 若指标集（元组）I 上的置换映射 f 满足存在一个元素 $r \in I$，且 $r \ge 2$，则称 f 为 r^+-置换。

$$f : (1, 2, \cdots, r-1, r, r+1, \cdots, n+1) \to (r, r+1, \cdots, n+1, 1, 2, \cdots, r-1).$$

换言之，我们可以将 f 视为 I 上满足以下条件的双射：

$$\begin{cases} f(1) = r \\ f(2) = r+1 \\ \quad\vdots \\ f(n-r+2) = n+1 \end{cases} \quad \textit{and} \quad \begin{cases} f(n-r+3) = 1 \\ f(n-r+4) = 2 \\ \quad\vdots \\ f(n+1) = r-1 \end{cases}. \tag{3.17}$$

(b) 若指标集（元组）I 上的置换映射 f 被称为 r^--置换，如果存在一个元素 $r \in I$，满足 $r \le n$，使得

$$f : (1, 2, \cdots, r, r+1, r+2, \cdots, n+1) \to (r+1, r+2 \cdots, n+1, 1, 2, \cdots, r).$$

我们可以将 f 明确表示为

$$\begin{cases} f(1) = r+1 \\ f(2) = r+2 \\ \quad\vdots \\ f(n-r+1) = n+1 \end{cases} \quad \textit{and} \quad \begin{cases} f(n-r+2) = 1 \\ f(n-r+3) = 2 \\ \quad\vdots \\ f(n+1) = r \end{cases}.$$

换言之，r^--置换是 $r+1$（$^+$-置换，其中 $r \in I \setminus \{n+1\}$。

注 8。 *(a)* 1^+-置换和 $(n+1)^-$-置换恰好是单位元。

(b) 任意 r^+-置换都是$(r-1)^-$-置换，其中 $r \in I \setminus \{1\}$。

对于$r^\pm$-置换，我们给出一些性质供后续应用。

引理 *3.8.* 假设 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1}) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，且 f 是 I 上的 $r^\pm$-置换。那么 *(a)* $\boldsymbol{\sigma}_f=(\sigma_{f(1)}, \sigma_{f(2)}, \cdots, \sigma_{f(n+1)}) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。*(b)* $\boldsymbol{\sigma}_{f^{-1}}=(\sigma_{f^{-1}(1)}, \sigma_{f^{-1}(2)}, \cdots, \sigma_{f^{-1}(n+1)}) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。

证明。不失一般性，我们只考虑r^+-置换。假设f 是r^+-置换，在I 上满足 (3.17)。(

a) 由命题 3.4，我们 hall 证明 h明 $\boldsymbol{\sigma}_f$ 满足 fies the Poh$^{\text{ozaev i}}$ d对象 (2.1)，即，

$$(\sigma_{f(1)}-\sigma_{f(2)})^2+(\sigma_{f(2)}-\sigma_{f(3)})^2+\cdots+(\sigma_{f(n)}-\sigma_{f(n+1)})^2+(\sigma_{f(n+1)}-\sigma_1)^2=4\sum_{i\in I}\mu_{f(i)}\sigma_{f(i)}. \tag{3.18}$$

注意到 (3.18) 等价于

$$\begin{aligned}&(\sigma_r-\sigma_{r+1})^2+(\sigma_{r+1}-\sigma_{r+2})^2+\cdots+(\sigma_n-\sigma_{n+1})^2+(\sigma_{n+1}-\sigma_1)^2\\&+(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+\cdots+(\sigma_{r-2}-\sigma_{r-1})^2+(\sigma_{r-1}-\sigma_r)^2=4\sum_{i\in I}\mu_i\sigma_i,\end{aligned}$$

这显然成立，因为 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足 (2.1)。

(b) 根据 (3.17)，我们得到

$$\begin{cases} f^{-1}(1)=n-r+3\\ f^{-1}(2)=n-r+4\\ \quad\vdots\\ f^{-1}(r-1)=n+1\end{cases}\quad\text{and}\quad\begin{cases} f^{-1}(r)=1\\ f^{-1}(r+1)=2\\ \quad\vdots\\ f^{-1}(n+1)=n-r+2\end{cases}.$$

应用 (a) 中的相同论证，不难验证

$$\boldsymbol{\sigma}_{f^{-1}}=(\sigma_{n-r+3},\sigma_{n-r+4},\cdots,\sigma_{n+1},\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n-r+2})\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}).$$

也可以将 f^{-1} 视为$(n-r+3)^+$-置换，然后应用 (a) 得到相同的结论。这就完成了引理 3.8 的证明。□

定理 3.9. 假设 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1}) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$ 并令 $\mu_i^*=\mu_i-\frac{1}{2}\sum_{t\in I}k_{it}\sigma_t$，其中 $i \in I$。指标集 I 分解为以下两种备选情形之一：***(I)*** 和***(II)*** （参见命题 *2.2-(4)*）。

(a) 另一种情形 ***(I)*** 成立：指标集 I 分解为 $I=J\cup N$ 的形式，且 $J=J_1\cup\cdots\cup J_\vartheta$，其中某个 $\vartheta\in\mathbb{N}$ 满足 *(I-1)*。令 $\sigma_i^*=\sigma_i$，其中 $i \in N$，且

$$\sigma_i^*=\sigma_i+2\sum_{j\in J_p}k_p^{ij}\big(\mu_j^*+\mu_{j_p^*}^*\big),\ \textit{for } i\in J_p,\ p=1,\cdots,\vartheta,$$

其中 $j_p^*=2i_p+|J_p|-j-1$ 以及 $(k_p^{ij})_{|J_p|\times|J_p|}$ 表示$(k^{ij})_{|J_p|\times|J_p|}$的逆矩阵，$i,\ j \in J_p$。于是

$$\boldsymbol{\sigma}^*=(\sigma_1^*,\cdots,\sigma_{n+1}^*)=(\mathfrak{R}_{J_1}\mathfrak{R}_{J_2}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta})\,\boldsymbol{\sigma}\in\Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}).$$

(b) 另一种***(II)*** 成立：指标集 I 分解为 $I=J\cup N$，且 $J=J_0\cup J_1\cup\cdots\cup J_\vartheta$，其中 $\vartheta\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 满足 *(II-1)*。对 $i \in N$，令 $\sigma_i^*=\sigma_i$，并

$$\begin{cases}\sigma_i^*=\sigma_i+2\sum_{j\in J_p}k_p^{ij}\big(\mu_j^*+\mu_{j_p^*}^*\big), & \textit{for } i\in J_p,\ p=1,\cdots,\vartheta,\\ \sigma_{s_i}^*=\sigma_{s_i}+2\sum_{j\in\{1,2,\cdots,|J_0|\}}k_0^{s_is_j}\big(\mu_{s_j}^*+\mu_{s_j^*}^*\big), & \textit{for } i\in\{1,2,\cdots,|J_0|\},\end{cases} \tag{3.19}$$

其中 $j_p^* = 2i_p + |J_p| - j - 1$，且$(k_p^{ij})_{|J_p|\times|J_p|}$表示$(k^{ij})_{|J_p|\times|J_p|}$的逆矩阵，$i,\ j \in J^p$；$s_j^* = s_{1+|J_0|-j}$，且$(k^{s_i s_j})_{|J_0|\times|J_0|}$表示$(k_{s_i s_j})_{|J_0|\times|J_0|}$的逆矩阵，$i,\ j \in \{1,2,\cdots,|J_0|\}$。于是

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_1^*,\cdots,\sigma_{n+1}^*) = (\mathfrak{R}_{J_0}\mathfrak{R}_{J_1}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta})\,\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}).$$

证明。(a) 根据引理 3.5，我们得到

$$\sigma_i^* = \sigma_i + 2\sum_{j\in J_p} k_p^{ij}(\mu_j^* + \mu_{j_p^*}^*) = \left(\mathfrak{R}_{J_p}\boldsymbol{\sigma}\right)_i,\ \text{for } i \in J_p,\ p = 1,\cdots,\vartheta,$$

其中，$\mathfrak{R}_{J_p}$是对应于连续指标集J^p的J^p-链。由于每个J^p都是极大连续指标，我们有

$$\emptyset \neq \{i_p + l_p + 1, i_p + l_p + 2,\cdots,i_{p+1} - 1\} \subseteq N,\ \text{for } p = 1,\cdots,\vartheta - 1.$$

因此

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_1^*,\cdots,\sigma_{n+1}^*) = (\mathfrak{R}_{J_1}\mathfrak{R}_{J_2}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta})\,\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}).$$

(b) 我们将论证分为几个步骤。 1

步骤 1。设f是I上的r_2^+-置换，满足 (3.17)，其中$r = r_2$。由于 $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，由引理 3.8-(a)可知$\boldsymbol{\sigma}_f = (\sigma_f,1,\cdots,\sigma_{f,n+1}) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，其中$\sigma_{f,i} = \sigma_{f(i)}$且$i \in I$。记

$$\overline{\mu}_i := \mu_{f(i)}^* = \mu_{f(i)} - \frac{1}{2}\sum_{j\in I} k_{f(i),j}\sigma_j = \mu_{f(i)} - \frac{1}{2}\sum_{j\in I} k_{ij}\sigma_{f(j)} = \mu_{f(i)} - \frac{1}{2}\sum_{j\in I} k_{ij}\sigma_{f,j},\ \text{for } i \in I$$

and

$$\text{(3.20)}\qquad \begin{cases} \overline{J_p} = f^{-1}(J_p) = \{\bar{i}_p, \bar{i}_p + 1,\cdots,\bar{i}_p + l_p\},\ \text{where } \bar{i}_p = i_p + (n - r_2 + 2),\ p = 1,\cdots,\vartheta, \\ \overline{J_0} = f^{-1}(J_0) = \{\bar{i}_0, \bar{i}_0 + 1,\cdots,\bar{i}_0 + |J_0| - 1\},\ \text{where } \bar{i}_0 = 1, \\ \overline{N} = f^{-1}(N) = \{s + (n - r_2 + 2) \mid s \in N\}. \end{cases}$$

于是容易看出，$I = J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_\vartheta \cup N$，并且每个$\overline{J^p}$，$p = 0, \overline{1},\cdots,\vartheta$都由极大连续指标组成。我们定义$\left(\boldsymbol{\sigma}_f\right)^* = \left((\sigma_f,1)^*,\ (\sigma_f,2)^*,\cdots,\ (\sigma_{f,n+1})^*\right)$，其中

$$(\sigma_{f,i})^* = \begin{cases} \sigma_{f,i}, & \text{for } i \in \overline{N}, \\ \sigma_{f,i} + 2\sum_{j\in\overline{J_p}} k_p^{f(i)f(j)}(\overline{\mu}_j + \overline{\mu}_{\bar{j}_p^*}), & \text{for } i \in \overline{J_p},\ p = 0,1,\cdots,\vartheta, \end{cases}$$

其中 $j^*p = 2\bar{i}_p + |J_{\bar{p}}| - j - 1$，且 $(k\ f\ (i)\ f\ (j)p\ )_{|\overline{J_p}|\times|J_p|}$是 $(k\ f\ (i)\ f\ (j))_{|\overline{J_p}|\times|J_p|}$ 的逆矩阵，$i, j \in J^p$。~步骤 2。对于任意 $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，我们将 $i \in I$ 中的 $\tilde{\mu}_i = \mu f\ (i)$ 记为 $\mathfrak{R}_i$

$$(\widetilde{\mathfrak{R}}_i\boldsymbol{\sigma})_j = \begin{cases} 2\tilde{\mu}_i - \sum_{t\in I} k_{it}\sigma_t + \sigma_i, & \text{if } j = i, \\ \sigma_j, & \text{if } j \neq i. \end{cases}$$

由于每个 J^p、$\overline{p} = 0$、1、$\cdots\ \vartheta$ 均由极大连续指标组成，应用引理 3.5 并取 $\mu_i = \tilde{\mu}_i$，可得

$$\sigma_{f,i} + 2\sum_{j\in\overline{J_p}} k_p^{f(i)f(j)}(\overline{\mu}_j + \overline{\mu}_{\bar{j}_p^*}) = \sigma_{f,i} + 2\sum_{j\in\overline{J_p}} k_p^{ij}(\overline{\mu}_j + \overline{\mu}_{\bar{j}_p^*}) = \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_{\overline{J_p}}\boldsymbol{\sigma}_f\right)_i,\ \text{for } i \in \overline{J_p},\ p = 0,1,\cdots,\vartheta,$$

其中，$\widetilde{\mathfrak{R}}_{\overline{J_p}}$是相对于 $\widetilde{\mathfrak{R}}_i$的相应$J^p$-~~链~~，$i \in J^p$ 和$(k_p^{ij})_{|\overline{J_p}|\times|J_p|}$ 表示$(k^{ij})_{|\overline{J_p}|\times|J_p|}$的逆矩阵，~~$i$~~、$j \in J^p$、$p = 0$、1、$\cdots$、$\vartheta$。因此我们得出 ~~—~~

$$\left(\boldsymbol{\sigma}_f\right)^* = \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_{\overline{J_0}}\widetilde{\mathfrak{R}}_{\overline{J_1}}\cdots\widetilde{\mathfrak{R}}_{\overline{J_\vartheta}}\right)\boldsymbol{\sigma}_f.$$

注意到，对于每个$t \in J^p$、$\overline{p} = 0$、1、$\cdots$、ϑ，我们有

$$(\widetilde{\mathfrak{R}}_t \boldsymbol{\sigma}_f)_s = \begin{cases} 2\mu_{f(t)} - \sum\limits_{j\in I} k_{tj}\sigma_{f,j} + \sigma_{f,t} = (\mathfrak{R}_{f(t)}\boldsymbol{\sigma})_{f(t)}, & \text{if } s = t, \\ \sigma_{f,s} = \sigma_{f(s)} = (\mathfrak{R}_{f(t)}\boldsymbol{\sigma})_{f(s)}, & \text{if } s \neq t, \end{cases}$$

~这意味着 $\mathfrak{R}_t\boldsymbol{\sigma}_f = (\mathfrak{R}_{f(t)}\boldsymbol{\sigma})_f \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。这里我们用到了引理 3.8-(a)。因此，我们推得

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_{\overline{J_p}}\boldsymbol{\sigma}_f = \Big(\prod_{t_i\in\Lambda}\widetilde{\mathfrak{R}}_{t_i}\Big)\boldsymbol{\sigma}_f = \Big(\prod_{t_i\in\Lambda}\mathfrak{R}_{f(t_i)}\boldsymbol{\sigma}\Big)_f = (\mathfrak{R}_{J_p}\boldsymbol{\sigma})_f \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}),\ p = 0, 1, \cdots, \vartheta,$$

其中 Λ 是一个长度为 $|J_p| \times (|J_p|+1)/2$ 的元组，并满足对每个元素 $t_i \in \Lambda$，都有 $t_i \in J^p$。因此，我们还得到，

$$\left(\boldsymbol{\sigma}_f\right)^* = \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_{\overline{J_0}}\widetilde{\mathfrak{R}}_{\overline{J_1}}\cdots\widetilde{\mathfrak{R}}_{\overline{J_\vartheta}}\right)\boldsymbol{\sigma}_f = \left(\mathfrak{R}_{J_0}\mathfrak{R}_{J_1}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta}\boldsymbol{\sigma}\right)_f \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}).$$

步骤 3。令 $\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_{n+1}^*)$ 按 (3.19) 中的定义，并用 $(\boldsymbol{\sigma}^*)_f = (\sigma^*{}_{f(1)}, \cdots, \sigma^*{}_{f(n+1)})$ 表示。首先我们断言 $(\boldsymbol{\sigma}^*)_f = \left(\boldsymbol{\sigma}_f\right)^*$。事实上，对于任意 $t \in I$，我们考虑以下情形：

(1). 如果$f(t) \in N$，即$t \in f^{-1}(N) = \overline{N}$，则令$i := f(t)$，从而得到的是

$$\sigma_{f(t)}^* = \sigma_i^* = \sigma_i.$$

(2). 若$f(t) \in J^p$对于某个$p = 1, \cdots, \vartheta$成立，即$t \in f^{-1}(J^p) = \overline{J^p}$，则我们令$i := f(t)$，并得到彩票娱乐

$$\begin{aligned} \sigma_{f(t)}^* = \sigma_i^* &= \sigma_i + 2\sum_{j\in J_p} k_p^{ij}\left(\mu_j^* + \mu_{j_p^*}^*\right),\quad j_p^* = 2i_p + |J_p| - j - 1, \\ &= \sigma_{f(t)} + 2\sum_{s\in\overline{J_p}} k_p^{f(t)f(s)}\left(\mu_{f(s)}^* + \mu_{f(\overline{s}_p^*)}^*\right),\quad \overline{s}_p^* = 2\overline{i}_p + |\overline{J_p}| - s - 1, \\ &= \sigma_{f,t} + 2\sum_{s\in\overline{J_p}} k_p^{f(t)f(s)}\left(\overline{\mu}_s + \overline{\mu}_{\overline{s}_p^*}\right),\quad \overline{s}_p^* = 2\overline{i}_p + |\overline{J_p}| - s - 1. \end{aligned}$$

(3). 若 $f(t) \in J_0$, 即，$t \in f^{-1}(J_0) = \overline{J_0}$, 则令 $s_i := f(t)$ 并得到 that

$$\begin{aligned} \sigma_{f(t)}^* = \sigma_{s_i}^* &= \sigma_{s_i} + 2\sum_{j\in\{1,2,\cdots,|J_0|\}} k_0^{s_i s_j}\left(\mu_{s_j}^* + \mu_{s_j^*}^*\right),\quad s_j^* = s_{1+|J_0|-j}, \\ &= \sigma_{f(t)} + 2\sum_{s\in\overline{J_0}} k_0^{f(t)f(s)}\left(\mu_{f(s)}^* + \mu_{f(\overline{s}_0^*)}^*\right),\quad \overline{s}_0^* = 1 + |\overline{J_0}| - s, \\ &= \sigma_{f,t} + 2\sum_{s\in\overline{J_0}} k_0^{f(t)f(s)}\left(\overline{\mu}_s + \overline{\mu}_{\overline{s}_0^*}\right),\quad \overline{s}_0^* = 1 + |\overline{J_0}| - s. \end{aligned}$$

根据上述讨论，我们得到$(\boldsymbol{\sigma}^*)_f = \left(\boldsymbol{\sigma}_f\right)^*$。因此，

$$(\boldsymbol{\sigma}^*)_f = \left(\boldsymbol{\sigma}_f\right)^* = \left(\mathfrak{R}_{J_0}\mathfrak{R}_{J_1}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta}\boldsymbol{\sigma}\right)_f \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}). \tag{3.21}$$

步骤 4. 由引理 3.8-(b) 和 (3.21)，我们有

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (\boldsymbol{\sigma}^*)_{f\circ f^{-1}} = \left((\boldsymbol{\sigma}^*)_f\right)_{f^{-1}} = \left(\mathfrak{R}_{J_0}\mathfrak{R}_{J_1}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta}\right)\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu}).$$

因此，定理 3.9 得证。 □

注 9（定理 3.9 的注释）。 定理 *3.9* 的第 *(b)* 个结论的证明表明，$\sigma_{s_i}^* = (\mathfrak{R}_{J_0}\boldsymbol{\sigma})_{s_i}$ 对于 $i = 1, \cdots, |J_0|$成立，其中 $\mathfrak{R}_{J_0}$ 指与非连续指标集 J_0关联的 J_0-链。

4. 定理1.1的证明

本节将给出定理1.1的证明，其中我们将利用选取过程找出“坏”点及其对应的起泡圆盘。随后，我们计算每个包含“坏”点的起泡圆盘所贡献的局部质量，并分析各个阶段发生的变换。这种方法已成功应用于经典 Toda 系统，包括类型 $\mathbf{A}_n$、$\mathbf{B}_n$、$\mathbf{C}_n$、$\mathbf{G}_2$ 和 $\mathbf{B}_2^{(1)}$，详见 [11, 20, 22, 24]。这里我们将概述整个过程的证明。首先，按照第 2 节所述找出所有起泡圆盘。然后，从一个起泡圆盘开始，计算该圆盘遇到最近的起泡圆盘之前可能产生的所有局部质量贡献。接着，我们将相邻的起泡圆盘归为一个“群组”，这一概念引自 [22], ，并计算该群组中的局部质量类型。代数结构对于确定群组中发生的变换规律至关重要。

在概述证明之前，我们先做一些准备工作。在本节中，对于任意序列 $(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \{(x^k,s_k)\}$，我们总是记

$$\sigma_i^k(B(x^k,s_k)) = \frac{1}{2\pi}\int_{B(x^k,s_k)} e^{u_i^k(x)}\mathrm{d}x, \text{ for } i \in I.$$

我们将局部质量定义为 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}(B(\mathbf{x},\mathbf{s})) = (\hat{}\sigma_1(B(\mathbf{x},\mathbf{s})), \cdots, \hat{}\sigma_{n+1}(B(\mathbf{x},\mathbf{s})))$ 为

$$\hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x},\mathbf{s})) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} \sigma_i^k(B(x^k,s_k)), & \text{if } u_i^k \text{ has fast decay on } \partial B(x^k,s_k), \\ \lim\limits_{r\to 0}\lim\limits_{k\to+\infty} \sigma_i^k(B(x^k,rs_k)), & \text{if } u_i^k \text{ has slow decay on } \partial B(x^k,s_k). \end{cases}$$

为简便起见，若$x^k = 0$，令 $\hat{}\sigma_i(\mathbf{s}) = \hat{}\sigma_i(B(\mathbf{0},\mathbf{s}))$。我们将计算$\mathbf{s}$ 增大时 $\hat{}\sigma_i(\mathbf{s})$ 的所有可能取值，使得圆盘 $B(\mathbf{0},\mathbf{s})$ 包含所有“坏”点。论证分为以下五个步骤：

步骤 1. 在这一步中，我们将计算命题 2.2 中引入的每个起泡圆盘$B(x_t^k, l_t^k)$内爆破解的能量$t = 1, \cdots, m$。对于任意固定的$x_t^k \in \Sigma_k \setminus \{0\}$，$l_t^k \ll \tau_t^k$ =1 2 dist$(x_t^k, \Sigma_k \setminus \{x_t^k\})$。应用命题 2.2-(1)，可得Ħarnack型不等式成立

$$u_i^k(x) + 2\log|x - x_t^k| \le C, \ |x - x_t^k| \le \tau_t^k, \ \forall\, i \in I.$$

在$B(x_t^k, l_t^k)$中，我们对$\mathbf{u}^k$进行如下缩放：

$$v_i^k(y) := u_i^k(x_t^k + \varepsilon_t^k y) + 2\log\varepsilon_t^k, \text{ for } i \in I.$$

由命题 2.2-(4)，$\mathbf{u}^k$在 $\partial B(x_t^k, l_t^k)$ 上快速衰减，并且以下备选情形之一成立：

(I). 指标集I可分解为$I = J \cup N$以及$J = J_1 \cup \cdots \cup J_\vartheta$的形式，其中 $\vartheta \in \mathbb{N}$满足 (I-1)–(I-3)。

(II). 指标集I可分解为$I = J \cup N$以及$J = J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_\vartheta$的形式，其中$\vartheta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 满足 (II-1)–(II-4)。

无论哪种情形，根据分类结果 [21, 定理1.1], 我们得到存在一个序列R_k，其中$R_k \to +\infty$ 当$k \to +\infty$ 时满足$l_t^k = R_k\varepsilon_t^k \ll \tau_t^k$，并且

$$\int_{B(0,R_k)} e^{v_i(y)}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)}\mathrm{d}y + o(1), \text{ for } i \in J.$$

容易得出，对于$i \in N$，有 $\hat{}\sigma_i(B(\mathbf{x}_t,\mathbf{l}_t)) = 0$，且

$$\hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_t,\mathbf{l}_t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)}\mathrm{d}y, \text{ for } i \in J,$$

其中，$(\mathbf{x}_t, \mathbf{l}_t)$ 表示序列 $\{(x_t^k, l_t^k)\}$。由定理 3.9-(a)（或引理 3.5），我们推得

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{l}_t)) = (\hat{\sigma}_1(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{l}_t)), \cdots, \hat{\sigma}_{n+1}(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{l}_t))) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(1, \cdots, 1).$$

步骤 2。接下来，w e 分析从$B(x_t^k, l_t^k)$ 过渡到$B(x_t^k, \tau_t^k)$时能量的变化。如果

$$\hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)) = \hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{l}_t)),\ \forall\, i \in I,$$

其中$(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)$ 表示序列 $\{(x_t^k, \tau_t^k)\}$，那么我们得出

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(B(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)) = (\hat{\sigma}_1(B(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)), \cdots, \hat{\sigma}_{n+1}(B(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t))) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(1, \cdots, 1),$$

如所需。否则，存在某个$i_0 \in I$ 使得

$$\hat{\sigma}_{i_0}(B(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)) > \hat{\sigma}_{i_0}(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{l}_t)).$$

根据 [11, 引理 4.3], 中的相同论证，我们可以选取一个序列 $\{s_k\}, l_t^k \ll s_k \ll \tau_t^k$，使得 (i) $\mathbf{u}^k$ 的某些分量在 $\partial B(x_t^k, s_k)$ 上慢衰减，

(ii) $\hat{}\sigma_i(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{s})) = \hat{}\sigma_i(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{l}_t))$ 对$i \in I$成立，其中$(\mathbf{x}_t, \mathbf{s})$ 表示序列 $\{(x_t^k, s_k)\}$。

我们将 $\mathbf{u}^k$ 按 $v_i^k(y) = u_i^k(x_t^k + s_k y) + 2\log s_k$ 进行缩放，其中 $i \in I$，并记为

$$J = \left\{ i \in I \mid u_i^k \text{ has slow decay on } \partial B(x_t^k, s_k) \right\} \subsetneq I.$$

那么，对于每个 v_i^k，$\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}$，在 $\partial \mathrm{B}(\mathrm{x}_t^k, \mathrm{s}_k)$ 上具有快速衰减，即 $\mathrm{v}_i^k(\mathrm{y}) \to -\infty$ 属于 $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}$；并且对于 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}$，$\mathrm{v}_i^k(\mathrm{y}) \to \mathrm{v}_i(\mathrm{y})$ 属于 $\mathrm{C}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $\mathrm{v}_i(\mathrm{y})$ 满足系统

$$\Delta v_i(y) + \sum_{j \in J} k_{ij} e^{v_j(y)} = 4\pi \alpha_i^* \delta_0 \text{ in } \mathbb{R}^2,\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)} \mathrm{d}y < +\infty,\ \forall\, i \in J.$$

这里，$\alpha_i^* = -\frac{1}{2}\sum_{j \in I} \mathrm{k}^{ij}\, \hat{}\sigma_j(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \mathrm{l}_t)) > -1$，其中 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}$。对于指标集 J，我们将遇到与步骤 1 中相同的两种备选情形 (I) 和 (II)。无论哪种情形，我们都可推出存在一个序列 N_k^*，且 $\mathrm{N}_k^* \to +\infty$，当 $\mathrm{k} \to +\infty$ 时，使得 $\mathrm{l}_t^k \ll \mathrm{N}_k^* \mathrm{s}_k \ll \tau_t^k$，$\hat{}\sigma_i(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \mathrm{N}^*\mathrm{s})) = \hat{}\sigma_i(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \mathrm{l}_t))$，其中 $\mathrm{i} \in \mathrm{N}$，并且

$$\hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{N}^*\mathbf{s})) = \hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{l}_t)) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)} \mathrm{d}y,\ \text{for } i \in J,$$

其中$B(\mathbf{x}_t$ ，$\mathbf{N}^*\mathbf{s})$ 表示序列 $\{x_t^k,\ N_k^* s_k\}$。因此，由定理 3.9 可得

$$\hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{N}^*\mathbf{s})) \in 2\mathbb{N} \cup \{0\},\ \text{for } i \in I.$$

设 $\mathrm{s}_{k,1} = \mathrm{N}_k^* \mathrm{s}_k$。若 $\hat{}\sigma_i(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)) = \hat{}\sigma_i(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \mathrm{s}_1))$ 对于 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ 成立，其中 s_1 表示序列 $\{\mathrm{s}_{k,1}\}$，则我们完成了此步骤的讨论。否则，我们重复上述论证，找到 $\mathrm{s}_{k,1} \ll \mathrm{s}_{k,j} \ll \mathrm{s}_{k,j+1}$，使得 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \mathrm{s}_{j+1})) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(1, \cdots, 1)$，其中 s^{j+1} 表示序列$\{\mathrm{s}_{k,j+1}\}$。由于能量是有限的，且每一步局部质量的总增益都有下界，该过程将在 j_0（某个有限数）步后停止。因此，对于每个 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，都有 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)) = \hat{}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \mathrm{s}_{j_0}))$，其中 $\hat{}\sigma_i(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)) \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$，且 s_{j_0} 表示序列 $\{\mathrm{s}_{k,j_0}\}$。

步骤 3. 接下来，我们将相邻的圆盘归为一个“群组”，并计算该群组的局部质量。正如我们在 [11] 中所做的那样，Σ_k 可以分解为互不相交的 S_j^k 的并集：

$$\Sigma_k = \{0\} \cup S_1^k \cup \cdots \cup S_{m_0}^k,\ m_0 \le m \text{ and } m_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

每个S_j^k都形成一个群，包含 Σ_k中彼此相对接近的元素。记为$S_j^k = \{x_j^k, \mathbf{1}, \cdots, x_{j,m_j}^k\}$，其中某些 $1 \le m_j \le m$。令 $\tau^k{}_{S_j^k}$和$\tau_{j,l}^k$ 定义如下。

$$\tau_{S_j^k}^k = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x_{j,1}^k, \Sigma_k \setminus S_j^k) \text{ and } \tau_{j,l}^k = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x_{j,l}^k, S_j^k \setminus \{x_{j,l}^k\}),\ \text{for } l = 1, \cdots, m_j.$$

然后 $\tau_{j,l}^k \ll \tau^k \mathrm{S}_j^k$对于 $\mathrm{l} = 1, \cdots, \mathrm{m}j$。根据步骤 2，球 $\mathrm{B}(\mathrm{x}_{j,l}, \boldsymbol{\tau}_{j,l})$ 中的局部质量 $\hat{}\sigma_i = 2\mathrm{m}_{j,l}$, $_i \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ 对于 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，其中 $(\mathrm{x}_{j,l}, \boldsymbol{\tau}_{j,l})$ 表示对 $\{(\mathrm{x}_{j,l}^k, \tau_{j,l}^k)\}$ 的序列，$1 \leq \mathrm{l} \leq \mathrm{m}j$。

设 $\sigma_i = \hat{}\sigma_i(B(\mathbf{x}_j, \mathbf{1}, \boldsymbol{\tau}_{S_j^k}))$，可以证明 $\sigma_i \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ 对于$i \in I$。事实上，运用命题 [11, 命题 5.3], 中的相同论证，我们会遇到以下情形之一：**情形（1）**。$\mathbf{u}^k$ 在 $\partial B(x_j^k, \mathbf{1}, \tau_j^k, \mathbf{1})$ 上快速衰减（因此在 $\partial B(x_j^k, \mathbf{1}, \tau_{j,l}^k)$ 上也如此，对任意 $1 \leq l \leq mj$均成立）。设

$$l_j^k(S_j^k) = 2 \max_{1 \leq l \leq m_j} \mathrm{dist}(x_{j,1}^k, x_{j,l}^k).$$

那么 di 直接计算表明，$\sigma_i^k(B(x_j^k, \mathbf{1}, l_j^k(S_j^k))) = 2\sum^{m_j}{}_{l=1} m_{j,l,i} + o(1)$ 对于$i \in I$成立。I f

$$\hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_{j,1}, \boldsymbol{\tau}_{S_j^k})) = \hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_{j,1}, \mathbf{l}_j(S_j^k))), \ \forall\, i \in I,$$

其中，$(\mathbf{x}_j, \mathbf{1}, \mathbf{l}^j(S_j^k))$ 和$(\mathbf{x}_j, \mathbf{1}, \boldsymbol{\tau}_{S_j^k})$ 分别表示序列 $\{(x_j^k, \mathbf{1}, l_j^k(S_j^k))\}$ 和 $\{(x_j^k, \mathbf{1}, \tau^k{}_{S_j^k})\}$，则证明完成。否则，存在某个$i_0 \in I$ 使得

$$\hat{\sigma}_{i_0}(B(\mathbf{x}_{j,1}, \boldsymbol{\tau}_{S_j^k})) > \hat{\sigma}_{i_0}(B(\mathbf{x}_{j,1}, \mathbf{l}_j(S_j^k))).$$

然后，我们可以应用**步骤 2** 中的相同论证来证明

$$\hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_{j,1}, \boldsymbol{\tau}_{S_j^k})) = \hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_{j,1}, \mathbf{s}_\ell)) \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}, \ \forall\, i \in I,$$

对于满足$l_j^k(S_j^k) \ll s_\ell^k \ll \tau^k{}_{S_j^k}$的某个**序列** $\mathbf{s}_\ell = \{s_\ell^k\}$。

Case (2)。 在$\mathbf{u}^k$ 的某些分量中，$\partial B(x_j^k, \mathbf{1}, \tau_j^k, \mathbf{1})$上存在**慢衰减**。我们记为

$$J = \big\{ i \in I \mid u_i^k \text{ has slow decay on } \partial B(x_{j,1}^k, \tau_{j,1}^k) \big\}.$$

由于$l_j^k(S_j^k) \sim \tau_{j,l}^k$对于$l \leq mj$，$u_i^k$在 $\partial B(x_j^k, \mathbf{1}, l_j^k(S_j^k))$ 上对于$i \in J$存在慢衰减。令

$$v_i^k(y) = u_i^k(x_{j,1}^k + l_j^k(S_j^k)y) + 2\log l_j^k(S_j^k), \text{ for } i \in I,$$

则，对于$i \in I \setminus J$，$L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中的$v_i^k(y) \to -\infty$ 以及对于$i \in J$，$C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中的$v_i^k(y) \to v_i(y)$ 满足系统

$$\Delta v_i(y) + \sum_{t \in J} k_{it} e^{v_t(y)} = 4\pi \sum_{l=1}^{m_j} n_{j,l,i} \delta_{q_{j,l}} \text{ in } \mathbb{R}^2, \ \int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)} \mathrm{d}y < +\infty, \ \forall\, i \in J,$$

其中 $\mathrm{n}_{j,l,i} = -\sum_{t \in I} \mathrm{k}_{it} \mathrm{m}_{j,l,t} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 对于 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}$。在后续步骤中，我们将面临与步骤 1中所讨论的相同的两种选择。无论如何，对于 $\mathrm{i} \in \mathrm{N}$，我们有 $\sigma_i^k(\mathrm{B}(\mathrm{x}_j^k, \mathbf{1}, \mathrm{R}_k \mathrm{l}_j^k(\mathrm{S}_j^k))) = 2\sum^{m_j}{}_{\mathrm{l}=1} \mathrm{m}_{j,l,i} + \mathrm{o}(\mathbf{1})$，并且

$$\sigma_i^k(B(x_{j,1}^k, R_k l_j^k(S_j^k))) = \hat{\sigma}_i(B(\mathbf{x}_{j,1}, \mathbf{l}_j(S_j^k))) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)} \mathrm{d}y = 2\Big(\sum_{l=1}^{m_j} m_{j,l,i} + \widetilde{m}_{j,i} \Big) + o(1), \ i \in J.$$

通过与**步骤 2**相同的论证，我们可以在有限步之后得到结论。

步骤 4。我们计算以 0 为中心的起泡圆盘的局部能量。对于先前定义的群 S_j^k, $1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{m}_0$, ，我们将它们与 $\{0\}$ 一起视为点，并将相邻成员合并为一个更大的群。通过为每个 $1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{m}_0$，选取一个代表元 $\mathrm{x}_j^k \in \mathrm{S}_j^k$，我们可以假设集合 $\mathrm{S}_1^k, \cdots, \mathrm{S}_{j_0}^k$ 满足 $\mathrm{c}^{-1}|\mathrm{x}_1^k| \leq |\mathrm{x}_j^k| \leq \mathrm{c}|\mathrm{x}_1^k|$，其中 $1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{j}_0$，并且 $|\mathrm{x}_j^k| \gg |\mathrm{x}_1^k|$，其中 $\mathrm{j} > \mathrm{j}_0$。现在，我们得以计算以原点为中心的起泡圆盘中可能的爆破局部质量。令 $\tau_k = \frac{1}{2}$ if $\mathrm{m}_0 = 0$，以及 $\tau_k = \frac{1}{2}|\mathrm{x}_1^k|$ if $\mathrm{m}_0 > 0$。使用与文献 25 中类似的论证

步骤 1 和 **步骤 2**，结合应用 [11, 引理 6。1] 和定理3.9，我们可以找到一个序列 s_k，满足 $s_k \ll \tau_k$，使得 $\mathbf{u}^k$ 在 $\partial B(0, s_k)$ 上快速衰减，并且 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}) = \hat{}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{s}) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。

步骤 5. 最后，我们继续进行组装群组 $\{0\}$ 和 S_j^k, $1 \leq j \leq m_0$的过程。具体而言，我们遇到以下中间问题：对于当前步骤中的局部质量 $\boldsymbol{\sigma}$，令 $v_i^k(y) = u_i^k(x^k + s_k y) + 2\log s_k$，其中 $i \in I$，并记作

$$J = \left\{ i \in I \mid u_i^k \text{ has slow decay on } \partial B(x^k, s_k) \right\} \subsetneqq I.$$

那么，$v_i^k(y) \to -\infty$，其中 $i \in I \setminus J$ 属于 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，并且 $v_i^k(y) \to v_i(y)$ 属于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $i \in J$，且$v_i(y)$满足系统

$$\Delta v_i(y) + \sum_{j \in J} k_{ij} e^{v_j(y)} = 4\pi\alpha_i^* \delta_0 + 4\pi \sum_{l=1}^{N} m_{il} \delta_{q_l} \text{ in } \mathbb{R}^2, \ \int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)} \mathrm{d}y < +\infty, \ \forall\, i \in J,$$

其中 $0 \neq q_l \in \mathbb{R}^2$、$m_{il} \in \mathbb{N}$ 以及 $\alpha_i^* = \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{j \in I} k_{ij}\sigma_j > -1$，其中 $i \in J$。记作 $\mu_i^* = 1 + \alpha_i^*$，其中$i \in I$。令

$$\sigma_j^* = \begin{cases} \sigma_j, & \text{if } j \in I \setminus J, \\ \sigma_j + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{v_j(y)} \mathrm{d}y, & \text{if } j \in J. \end{cases}$$

关于 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 的势值，我们有以下结果：

引理 4.1. 设指标集 I 分解为***(I)*** 和***(II)*** 中的一种备选情形（见步骤 ***1***）。假设$\hat{}\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$ 满足 $\sigma_i = \hat{}\sigma_i + 2n_i$ 和 $n_i \in \mathbb{Z}$。那么 $\sigma_i^* = \hat{}\sigma_i^* + 2n_i^*$，其中$\hat{}\boldsymbol{\sigma}^* \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$且 $n_i^* \in \mathbb{Z}$。

证明. 根据指标集I的分解，我们考虑以下两种情形。**情形 1.** 备选情形**(I)** 成立，且 **(I-1)** 成立。按照 [24, 引理 6.3], 中的相同论证，令$\mathfrak{f}_p$ 为从$J_p \cup \{i_p - 1\}$ 到其自身的一个双射，则可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)} \mathrm{d}y = 2 \sum_{j=i_p-1}^{i-1} \Big(\sum_{l=i_p}^{\mathfrak{f}_p(j)} \overline{\mu}_l - \sum_{l=i_p}^{j} \overline{\mu}_l \Big) + 2\widetilde{N}_i, \text{ for some } \widetilde{N}_i \in \mathbb{Z}, \ i \in J_p,$$

其中 $\overline{\mu}_i = \mu_i - \frac{1}{2}\sum_{j \in I} k^{ij} \hat{}\sigma_j$ 对$i \in I$成立。我们按如下方式在$I_0 = I \cup \{0\}$ 上定义 $\mathfrak{f}_p$' 的延拓f

$$f(i) = \begin{cases} \mathfrak{f}_p(i), & \text{if } i \in \cup_{p=1}^{\vartheta} \big(J_p \cup \{i_p - 1\} \big), \\ i, & \text{if } i \in I_0 \setminus \big(\cup_{p=1}^{\vartheta} \big(J_p \cup \{i_p - 1\} \big) \big). \end{cases}$$

因此，$\boldsymbol{\sigma}^*$ 可以改写为

$$\sigma_i^* = \hat{\sigma}_i + 2 \sum_{j=0}^{i-1} \Big(\sum_{l=1}^{f(j)} \overline{\mu}_l - \sum_{l=1}^{j} \overline{\mu}_l \Big) + 2n_i^* = \hat{\sigma}_i^* + 2n_i^*, \ i \in I,$$

对于某个 $n_i^* \in \mathbb{Z}$，$i \in I$，其中

$$\hat{\sigma}_i^* = \hat{\sigma}_i + 2 \sum_{j=0}^{i-1} \Big(\sum_{l=1}^{f(j)} \overline{\mu}_l - \sum_{l=1}^{j} \overline{\mu}_l \Big), \text{ for } i \in I.$$

剩下要证明 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}^* \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。令 g 为简单置换，它仅交换 $\ell \in I$ 中某个 $\ell - 1$ 与 ℓ 的位置。可以应用 [24, 定理 3.6] 的相同论证来验证 $\boldsymbol{\sigma}_{f \circ g} = \mathfrak{R}_\ell \boldsymbol{\sigma}_f$。利用 f可以表示为简单置换的复合这一事实，我们得出 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}^* \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，因为 $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。引理 4.1 的证明至此完成。

情形 2. 备选情形 (II) 成立，且 (II-1) 成立。设 f 是 I 上满足 (3.17) 且 r $=$ r$_2$ 的 r$_2^+$-置换。由于 $\hat{}$ $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，由引理 3.8-(a) 可推出 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}_f = (\hat{}\sigma_{f,1}, \cdots, \hat{}\sigma_{f,n+1}) \in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$，其中 $\hat{}\sigma_{f,\mathrm{i}} = \hat{}\sigma_f(\mathrm{i})$，对 i $\in$I 成立。按 (3.20) 定义 J$_0$,J^{p}和 N，容易看出 I $=$J$_0 \cup$ J$_1 \cup \cdots \cup$ J$_\vartheta \cup$ N。令

$$\sigma^*_{f,i} = \begin{cases} \sigma_{f,i}, & \text{if } i \in \overline{N}, \\ \sigma_{f,i} + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{v_{f(i)}} \mathrm{d}y, & \text{if } i \in f^{-1}(J) =: \overline{J} = \overline{J_0} \cup \overline{J_1} \cup \cdots \cup \overline{J_\vartheta}. \end{cases}$$

然后，我们可以按照**情形 1** 中的方法进行论证，从而得到 that

$$\sigma^*_{f,i} = \hat{\sigma}^*_{f,i} + 2n_{f,i}, \text{ for some } n_{f,i} \in \mathbb{Z},\ i \in I,$$

其中 \(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*_f =\)(\(\hat{\sigma}^*_f\),1,$\cdots$,\(\hat{\sigma}^*_f\),$n+1$) $\in \Gamma_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\mu})$。不难验证，\(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*_f =\)(\(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*\))$_f$。根据引理 3.8-(b)，我们得到 \(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \in \Gamma_{\mathbf{A}}\)$(\boldsymbol{\mu})$。至此，引理 4.1 得证。□

定理*1.1* 的证明。 类似于 [11, 定理1.1], 的证明，利用引理 4.1 以及从 **步骤 1** 到 **步骤 5** 的讨论，即可得到所需结果。□

5. 仿射$\mathbf{C}^t$ 型 TODA 系统

本节中，我们聚焦于仿射 $\mathbf{C}^t$ 型 Toda 系统(1.19)。采用类似的方法，我们研究爆破区域，并推导局部质量的 Pohozaev恒等式，其形式如下:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \cdots + (\sigma_n - \sigma_{n+1})^2 = 2\left(\mu_1\sigma_1 + 2\sum_{i \in I\setminus\{1,n+1\}} \mu_i\sigma_i + \mu_{n+1}\sigma_{n+1}\right). \tag{5.1}$$

我们将获得由 $\boldsymbol{\sigma}$ 对应的仿射魏尔群 $\mathbf{G}^{\mathbf{C}^t}$的群表示 .

设 $J = \{i, i+1, \cdots, i+l\} \subsetneqq I$，其中 $i \in I$ 且 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。在本节中，如果$\mathbf{u} = (u_i, \cdots, u_{i+l})$ 满足该系统，我们就称其为$\mathbf{A}_{l+1}$ 型（或$\mathbf{C}_{l+1}$型）Toda 系统的解

$$\begin{cases} \Delta u_s + \displaystyle\sum_{t \in J} k'_{st} e^{u_t} = 4\pi\alpha_s\delta_0 \text{ in } \mathbb{R}^2, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{u_s(y)}\mathrm{d}y < +\infty,\ \forall\, s \in J. \end{cases} \tag{5.2}$$

这里，(5.2)中的系数矩阵 (k'_{st}) 被选为秩为$l+1$ 的$\mathbf{A}$ 型（或$\mathbf{C}$型）Cartan矩阵，且对于$s \in J$有 $\alpha_s > -1$。特别地，如果系数矩阵(k'_{st}) 具有以下形式，我们也可以称(5.2)为$\mathbf{C}_{l+1}$型Toda 系统（$l \geq 1$）

$$(k'_{st}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

下文中，$(k_{st})_{|J|\times|J|}$ 表示仿射$\mathbf{C}^t$ 型广义Cartan矩阵的一个片段，除非另有明确说明。

5.1. **泡分析与Pohozaev恒等式**。在本小节中，我们执行选取过程，并建立Pohozaev恒等式（5.1）。

命题 5.1。 设$\mathbf{u}^k$ 是系统(1.19) 的一个解序列，满足(1.16)。那么存在一列有限点 $\Sigma_k := \{0, x_1^k, \cdots, x_m^k\}$ （如果0 不是奇点，则可从 Σ_k中删去0）以及一列正数 $l_1^k, \cdots, l_m^k$，使得以下性质成立：*(1)* 存在一个与 k 无关的常数 C，使得 *Harnack*型不等式成立：

$$\max_{i\in I}\left\{u_i^k(x) + 2\log \operatorname{dist}(x, \Sigma_k)\right\} \le C,\ \forall\ x \in B_1(0).$$

(2) 当 $k \to +\infty$ 时，$x_j^k \to 0$ 和 $l_j^k \to 0$，$l_j^k \le \tau_j^k := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_j^k, \Sigma_k \setminus \{x_j^k\})$，$j = 1, \cdots, m$。此外，对于 $1 \le i, j \le m$、$i \ne j$，有 $B(x_i^k, l_i^k) \cap B(x_j^k, l_j^k) = \emptyset$。

(3) 极大$_{i\in I} u_i^k(x_j^k)$ $=$极大$_{i\in I}$极大$_{B(x_j^k, l_j^k)} u_i^k(x) \to +\infty$ 对于 $k \to +\infty, j = 1, \cdots, m$。记为

$$\varepsilon_j^k := \exp\left(-\frac{1}{2}\max_{i\in I} u_i^k(x_j^k)\right),\ j = 1, \cdots, m.$$

那么 $R_j^k := l_j^k/\varepsilon_j^k \to +\infty$ 对于 $k \to +\infty, j = 1, \cdots, m$。

(4) 对每个 $B(x_j^k, l_j^k)$，令 $v_i^k(y) := u_i^k(x_j^k + \varepsilon_j^k y) + 2$ 对数 ε_j^k对于 $i \in I$。于是以下备选情形之一成立：

(I). 指标集 I 可分解为 $I = J \cup N$，且 $J = J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_\vartheta$，其中 $\vartheta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$满足

(I-1). $J_0, J_1, \cdots, J_\vartheta$和 N 两两不相交，$J_0 \ne \emptyset, N \ne \emptyset, \{1, 2\} \cap N = \emptyset, \{n, n+1\} \cap N \ne \emptyset$，且每个 $J_p, p = 0, 1, \cdots, \vartheta$ 都由极大连续指标组成，记为

$$J_p = \{i_p, \cdots, i_p + l_p\},\ \textit{for some } i_p \in I \textit{ and } l_p \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

特别地，$i_0 = 1$。自然地，需要 $n \ge 2$；

(I-2). $v_s^k(y) \to -\infty$ 属于 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $s \in N$;

(I-3). $v_s^k(y) \to v_s(y)$ 在 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中，其中 $s \in J_p$，$p = 1, \cdots, \vartheta$，$v_s(y)$ 满足$\mathbf{A}^{l_p+1}$ *Toda* 系统(5.2)，其中 $\alpha_s = 0$ 且$(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t} st)$，$s, t \in J_p$;

(I-4). $v_s^k(y) \to v_s(y)$ 属于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $s \in J_0$，且 $v_s(y)$ 满足具有$\mathbf{C}_{l_0+1}$型的 *Toda* 系统(5.2)，其满足

$\alpha_s = 0$ *and* $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t}_{st})$, $s, t \in J_0$.

（***II***）。指标集 I 分解为形式 $I = J \cup N$ 和 $J = J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_\vartheta$，其中某个 $\vartheta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 满足条件：

(II-1). J_0, J_1，$\cdots$，J_ϑ 和 N 两两不相交，$J_0 \ne \emptyset$、$N \ne \emptyset$、$\{1, 2\} \cap N \ne \emptyset$、$\{n, n+1\} \cap N = \emptyset$，且每个 J_p、$p = 0$，1，$\cdots$，ϑ 均由极大连续指标组成，记为

$$J_p = \{i_p, \cdots, i_p + l_p\},\ \textit{for some } i_p \in I \textit{ and } l_p \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

特别地，$i_0 + l_0 = n + 1$。自然地，需要 $n \ge 2$；

(II-2). 对于 $s \in N$，$v_s^k(y) \to -\infty$ 属于 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$; *(II-3).* 对于 $s \in J_p$、$p = 1$、$\cdots$、ϑ，$v_s^k(y) \to v_s(y)$ 属于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $v_s(y)$ 满足 A^{l_p+1} *Toda* 系统 *(5.2)*，且 $\alpha_s = 0$ 和 $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t} st)$，$s$、$t \in J_p$; *(II-4).* 对于 $s \in J_0$，$v_s^k(y) \to v_s(y)$ 属于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $v_s(y)$ 满足 C^{l_0+1} *Toda* 系统 *(5.2)*，且 $\alpha_s = 0$ 和 $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t} st)$，$s$、$t \in J_0$。

(III). 指标集 I 分解为 $I = J \cup N$ 的形式，并且$J = J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_\vartheta \cup J^{\vartheta+1}$ 对某个$\vartheta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 满足

(III-1). $J_0, J_1, \cdots, J_{\vartheta+1}$ 和 N 两两不相交，$J_0 \neq \emptyset$、$J_{\vartheta+1} \neq \emptyset$、$N \neq \emptyset$, $\{1,2\} \cap N = \emptyset$,$\{n, n+1\} \cap N = \emptyset$，且每个 J_p、$p = 0$、1、$\cdots$，$\vartheta+1$ 均由极大连续指标组成，记为

$$J_p = \{i_p, \cdots, i_p + l_p\}, \text{ for some } i_p \in I \text{ and } l_p \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

特别地，$i_0 = 1$、$i_{\vartheta+1} + l_{\vartheta+1} = n+1$。当然，需要 $n \geq 4$；

(III-2). $v_s^k(y) \to -\infty$ *in* $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 对于 $s \in N$;

(III-3). $v_s^k(y) \to v_s(y)$ 属于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $s \in J_p$，$p = 1, \cdots, \vartheta$，其中 $v_s(y)$ 满足带有 $\alpha_s = 0$ 的 $\mathbf{A}^{l_p+1}$ *Toda* 系统(5.2)，且 $(k'_{st}) = (k^{\mathbf{c}^t} st)$，$s,t \in J_p$;

(III-4). $v_s^k(y) \to v_s(y)$ 属于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $s \in J_0$,，$v_s(y)$ 满足 $\mathbf{C}^{l_0+1}$ 型 *Toda* 系统 (5.2)，且 $\alpha_s = 0$ 以及 $(k'_{st}) = (k^{\mathbf{c}^t} st)$，$s,t \in J_0$;

(III-5). $v_s^k(y) \to v_s(y)$ 在 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中，对 $s \in J_{\vartheta+1}$，其中 $v_s(y)$ 满足$\mathbf{C}^{l_{\vartheta+1}+1}$ *Toda* 系统(5.2) 且 $\alpha_s = 0$ *and* $(k'_{st}) = (k^{\mathbf{c}^t}_{st})$, $s,t \in J_{\vartheta+1}$.

(IV). 指标集 I 分解为 $I = J \cup N$ 和 $J = J_1 \cup \cdots \cup J_\vartheta$，其中某个 $\vartheta \in \mathbb{N}$ 满足条件，即

(IV-1)。J_1，$\cdots$，J_ϑ 和 N 两两不相交，$N \neq \emptyset$、$\{1,2\} \cap N \neq \emptyset$、$\{n, n+1\} \cap N \neq \emptyset$，且每个 J_p、$p = 1$，$\cdots$，ϑ 均由极大连续指标组成，记为

$$J_p = \{i_p, \cdots, i_p + l_p\}, \text{ for some } i_p \in I \text{ and } l_p \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

自然地，需要 $n \geq 2$；

(IV-2). $v_s^k(y) \to -\infty$ 属于 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $s \in N$; *(IV-3).* $v_s^k(y) \to v_s(y)$ 属于 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中 $s \in J_p$，$p = 1, \cdots, \vartheta$，其中 $v_s(y)$ 满足 A_n *Toda* 系统 *(5.2)*，其中 $\alpha_s = 0$，且 $(k'_{st}) = (k^{\mathbf{c}^t} st)$，$s, t \in J_p$。

现在我们为 (1.19) 的任意解爆破序列建立 Pohozaev恒等式。在命题5.2中，我们用 $\sigma_i^k(r, x_0) := \sigma(r, x_0; u_i^k)$ 和 $\sigma_i^k(r) := \sigma(r, 0; u_i^k)$ 表示 $i \in I$，其中$\sigma(r, x_0; u)$ 的定义同 (2.6)。

命题5.2. 设 $\mathbf{u}^k = (u_1^k, \cdots, u_{n+1}^k)$ 是系统 (1.19) 的一个解序列，满足(1.16)。假设 $\Sigma'_k \subseteq \Sigma_k$ 是 Σ_k 的一个子集，且 $0 \in \Sigma'_k \subseteq B(x_k, r_k) \subseteq B_1(0)$ 并且有如下关系。

$$\mathrm{dist}(\Sigma'_k, \partial B(x_k, r_k)) = o(1)\mathrm{dist}(\Sigma_k \setminus \Sigma'_k, \partial B(x_k, r_k)).$$

如果$\mathbf{u}^k$ 在 $\partial B(x_k, r_k)$上快速衰减，那么

$$\sum_{i=1,n+1} \sigma_i \Big(\sum_{j \in I} k_{ij}^{\mathbf{c}^t} \sigma_j - 2\mu_i \Big) + 2 \sum_{i \in I \setminus \{1,n+1\}} \sigma_i \Big(\sum_{j \in I} k_{ij}^{\mathbf{c}^t} \sigma_j - 2\mu_i \Big) = 2 \Big(\sum_{i=1,n+1} \mu_i \sigma_i + 2 \sum_{i \in I \setminus \{1,n+1\}} \mu_i \sigma_i \Big), \tag{5.3}$$

其中，$(k^{\mathbf{c}^t} ij)$ 的定义见 (1.20)，$\mu_i = 1 + \alpha_i$ 并且对 $i \in I$，$\sigma_i = \lim_{k \to +\infty} \sigma_i^k(r_k, x_k)$。

证明。 通过执行以下操作，我们可以变换系统 (1.19) :

$$v_i = v_{2n+2-i} = u_i, \ \beta_i = \beta_{2n+2-i} = \alpha_i, \text{ for } i \in I. \tag{5.4}$$

该变换将仿射$\mathbf{C}_n^{(1)\,t}$型 Toda 系统(1.19)嵌入到仿射$\mathbf{A}_2^{(1)}{}_{n-1}$ 型 Toda 系统中。具体而言，$\mathbf{v} = (v1, \cdots, v_{2n})$ 满足该系统

$$\begin{cases} \Delta v_i + \sum\limits_{j=1}^{2n} \hat{k}_{ij} e^{v_j} = 4\pi\beta_i \delta_0 \text{ in } B_1(0), \ \forall\, i = 1, \cdots, 2n, \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_{2n} \equiv 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

其中 $\beta_i > -1$ 对于 $\mathrm{i} = 1, \cdots, 2\mathrm{n}$，满足 $\sum_{i=1}^{2n} \beta_i = 0$，而 $(\hat{\mathrm{k}}^{ij})_{2n\times 2n}$ 表示广义 Cartan矩阵 $\mathrm{A}_2^{(1)}{}_{\mathrm{n}-1}$。不失一般性，设 $\mathrm{x}_k = 0$，并按 (5.4) 定义 v^k，其中 $\mathrm{u} = \mathrm{u}^{\mathrm{k}}$。记 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{v}} = (\sigma_{\mathbf{v},1}, \cdots, \sigma_{\mathbf{v},2n})$，其中 $\sigma_{\mathbf{v},i} := \lim_{k\to+\infty}{}^{\sigma}(\mathrm{r}_k, 0; \mathrm{v}_i^k)$，对于 $\mathrm{i} = 1, \cdots, 2\mathrm{n}$。由命题2.5，$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{v}}$ 满足 Pohozaev恒等式 (2.7)，将其改写如下：

$$\begin{aligned}&(\sigma_{\mathbf{v},1} - \sigma_{\mathbf{v},2})^2 + (\sigma_{\mathbf{v},2} - \sigma_{\mathbf{v},3})^2 + \cdots + (\sigma_{\mathbf{v},2n-1} - \sigma_{\mathbf{v},2n})^2 + (\sigma_{\mathbf{v},2n} - \sigma_{\mathbf{v},1})^2\\ &= 4\left((1+\beta_1)\sigma_{\mathbf{v},1} + \cdots + (1+\beta_{2n})\sigma_{\mathbf{v},2n}\right),\end{aligned}$$

这可化简为 (5.1)。因此，(5.3) 成立，命题5.2的证明至此完成。 □

集合 $\Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$ 的以下性质显而易见。

命题 5.3。对于每个元素 $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$，$\boldsymbol{\sigma}$ 满足 *Pohozaev*恒等式 （5.1 ）.

证明。利用韦达定理可以直接验证这一点。 □

5.2. **群表示**。在本小节中，我们使用群组$\mathbf{GC}^t$ 中的一些元素来表示可能的局部质量。假设$J_0 = \{i, i+1, \cdots, i+l\} \subsetneqq I$ 由某些$i \in I$ 和$l \in \mathbb{N}$的连续指标组成。

引理 5.4. 令 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}) \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$ 并记 $\alpha_s^* = \alpha_s - \frac{1}{2}\sum_{t\in I} k^{\mathbf{c}^t}\, st\, \sigma_t$ 和 $\mu_s^* = 1 + \alpha_s^*$，其中 $s \in I$，式 $(k^{\mathbf{c}^t}\, st)$ 按 (1.20) 中的定义给出。

(a) 假设 $i = 1$。设 $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_{l+1})$ 为满足$\alpha_s = \alpha_s^*$和 $(k'_{st}) = (k^{\mathbf{c}^t}\, st)$、$s,t \in J_0$的$\mathbf{C}_{l+1}$型 *Toda* 系统 (5.2) 的解。

(b) 假设 $i + l = n + 1$。设 $\mathbf{v} = (v_i, \cdots, v_{n+1})$ 为满足$\alpha_s = \alpha_s^*$和 $(k'_{st}) = (k^{\mathbf{c}^t}\, st)$、$s,t \in J_0$的$\mathbf{C}_{l+1}$ 型 *Toda* 系统 (5.2) 的解。

无论如何，我们将 $\sigma_s^* = \sigma_s$ 记作 $s \in I \setminus J_0$ 且

$$\sigma_s^* = \sigma_s + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{v_s(y)}\mathrm{d}y, \ \textit{for } s \in J_0.$$

于是 $\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_{n+1}^*) \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$。

为证明引理 5.4，需要寻找一个满足$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathfrak{R}_{J_0}\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$的元素$\mathfrak{R}_{J_0} \in \mathbf{GC}^t$。为便于此，我们引入相应的**集合链**概念。

定义 5.5. 假设 $J \subsetneqq I$ 由连续指标组成，记为 $J = \{j, j+1, \cdots, j+l\}$，其中 $j \in I$ 且 $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$。我们将 J链记为 $\mathfrak{R}_J$，定义如下：

(a). 若 $l = 0, |J| = 1$，则 $\mathfrak{R}_J = \mathfrak{R}_j$；*(b).* 若 $l \geq 1, |J| \geq 2$，则 *(b-1).* 若 $j = 1$（自然地，$j + l < n + 1$），则 $\mathfrak{R}_J = (\mathfrak{R}_{j+l}\cdots\mathfrak{R}_{j+1}\mathfrak{R}_j)^{l+1}$；*(b-2).* 若 $j + l = n + 1$（自然地，$j > 1$），则 $\mathfrak{R}_J = \left(\mathfrak{R}_j\mathfrak{R}_{j+1}\cdots\mathfrak{R}_{j+l}\right)^{l+1}$；

(b-3). 若 $1 < j < j + l < n + 1$，则 $\mathfrak{R}_J$ 按定义 *3.6* 定义。

注 10 （定义 5.5 的注）。每次爆破过程之后，若 $\boldsymbol{\sigma}$ 表示前一阶段的局部质量，则更新后的局部质量 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 可表示为 $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathfrak{R}_J\boldsymbol{\sigma}$，其中某个$J \subsetneqq I$。

引理 *5.4* 的证明。我们将验证 $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathfrak{R}_{J_0}\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$，其中 $\mathfrak{R}_{J_0}$ 是按定义 5.5 所定义的 J_0-链。讨论分为两部分，分别对应结论 (a) 和 (b)：

(a) 的证明。证明分为几个步骤。

步骤 1. 我们计算每个v_s、$s \in J_0$的质量。记 $\tilde{}\mathbf{v} = (\tilde{}v1, \tilde{}v2, \cdots, \tilde{}v_{l+1})$，其中 $\tilde{}v_i = v_{l+2-i}$，并令 $\tilde{\alpha}_i^* = \alpha_{l+2-i}^*$ 对$i \in J_0$成立。于是 $\tilde{}\mathbf{v}$ 满足带有 $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i^*$ 和 的$\mathbf{C}_{l+1}$ Toda 系统 (5.2)

$(k'_{ij}) = (c^{ij})$，i、$j \in J_0$,，其中$(c^{ij})_{|J_0|\times|J_0|}$表示秩为$l+1$的$\mathbf{C}$型 Cartan矩阵。众所周知，任何$\mathbf{C}_{l+1}$ Toda 系统都嵌入在一个$\mathbf{A}_{2l+1}$ Toda 系统中，即令

$$u_i = u_{2l+2-i} = \tilde{v}_i,\ \beta_i = \beta_{2l+2-i} = \tilde{\alpha}_i^*,\ i = 1, \cdots, l+1,$$

那么$\mathbf{u} = (u_1, u2, \cdots, u_{2l+1})$满足$\mathbf{A}_{2l+1}$Toda 系统

$$\Delta u_i + \sum_{j=1}^{2l+1} a_{ij} e^{u_j} = 4\pi\beta_i\delta_0 \text{ in } \mathbb{R}^2,\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_i(y)}\mathrm{d}y < +\infty,\ \forall\, i = 1, 2, \cdots, 2l+1,$$

其中$(a^{ij})_{(2l+1)\times(2l+1)}$表示秩为$2l+1$的$\mathbf{A}$型 Cartan矩阵。正如引理 3.5证明中的**步骤 2**，我们提取出对于$i \in J_0 = \{1, \cdots, l+1\}$,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tilde{v}_i} = \sigma_{u_i} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{u_i(y)}\mathrm{d}y = 2\sum_{q=0}^{i-1}\Big(\sum_{t=1}^{2l+1-q}(1+\beta_t) - \sum_{t=1}^{q}(1+\beta_t)\Big) \\
&= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{l+1}(1+\beta_t) + 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}(1+\beta_t) - 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{q}(1+\beta_t) \\
&= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{l+1}(1+\tilde{\alpha}_t^*) + 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}(1+\tilde{\alpha}_{2l+2-t}^*) - 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{q}(1+\tilde{\alpha}_t^*) \\
&= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{l+1}(1+\alpha_{l+2-t}^*) + 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}(1+\alpha_{t-l}^*) - 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{q}(1+\alpha_{l+2-t}^*) \\
&=: I + II - III.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

我们逐项计算I、II和III。直接计算表明

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{q=0}^{i-1} 2\sum_{t=1}^{l+1}(1+\alpha_{l+2-t}^*) = 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{l+1}\mu_{l+2-t} - \sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{l+1}\sum_{j\in I} k^{\mathfrak{c}^t}_{l+2-t,j}\sigma_j \\
&= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{l+1}\mu_{l+2-t} - i(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_{l+1} - \sigma_{l+2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II &= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}(1+\alpha_{t-l}^*) = 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{t-l} - \sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\sum_{j\in I} k^{\mathfrak{c}^t}_{t-l,j}\sigma_j \\
&= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{t-l} - \sum_{q=1}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\sum_{j\in I} k^{\mathfrak{c}^t}_{t-l,j}\sigma_j - \sum_{t=l+2}^{2l+1}\sum_{j\in I} k^{\mathfrak{c}^t}_{t-l,j}\sigma_j \\
&= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{t-l} - (i-1)(-\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_{l+1} - \sigma_{l+2-i}) - (-\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_{l+1} - \sigma_{l+2})
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
III &= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{q}(1+\alpha_{l+2-t}^*) = 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{q}\mu_{l+2-t} - \sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{q}\sum_{j\in I} k^{\mathfrak{c}^t}_{l+2-t,j}\sigma_j \\
&= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{q}\mu_{l+2-t} - \sum_{q=1}^{i-1}(-\sigma_{l+1-q} + \sigma_{l+2-q} + \sigma_{l+1} - \sigma_{l+2}) \\
&= 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{q}\mu_{l+2-t} - (\sigma_{l+1} - \sigma_{l+2-i}) - (i-1)(\sigma_{l+1} - \sigma_{l+2}).
\end{aligned}$$

将I、II和III的上述结果代入 (5.6)，可得

$$\sigma_{\tilde{v}_i} = 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{l+1}\mu_{l+2-t} + 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{t-l} - 2\sum_{q=0}^{i-1}\sum_{t=1}^{q}\mu_{l+2-t} + 2\sigma_{l+2} - 2\sigma_{l+2-i}.$$

由于 $\sigma_{v_{l+2-i}} = \sigma_{\tilde{v}_i}$ 对于 $i \in J_0,$，我们得到对于 $s \in J_0,$

$$\sigma_{v_s} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{v_s(y)}\mathrm{d}y = 2\sum_{q=0}^{l+1-s}\sum_{t=1}^{l+1}\mu_{l+2-t} + 2\sum_{q=0}^{l+1-s}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{t-l} - 2\sum_{q=0}^{l+1-s}\sum_{t=1}^{q}\mu_{l+2-t} + 2\sigma_{l+2} - 2\sigma_s.$$

因此，对于 $s \in J_0,$，有

$$\sigma_s^* = \sigma_s + \sigma_{v_s} = 2(l+2-s)\sum_{t=1}^{l+1}\mu_t + 2\sum_{q=0}^{l+1-s}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{t-l} - 2\sum_{q=0}^{l+1-s}\sum_{t=1}^{q}\mu_{l+2-t} - \sigma_s + 2\sigma_{l+2}.$$

步骤 2。 我们计算 $\mathfrak{R}_{J_0}\boldsymbol{\sigma} = (\mathfrak{R}_{l+1}\mathfrak{R}_l\cdots\mathfrak{R}_1)^{l+1}\boldsymbol{\sigma}$。通过直接计算，我们得到

$$(\mathfrak{R}_{l+1}\mathfrak{R}_l\cdots\mathfrak{R}_1\boldsymbol{\sigma})_s = \begin{cases} 2\sum_{t=1}^{s}\mu_t - \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_{s+1}, & \text{for } 1 \le s \le l+1, \\ \sigma_s, & \text{for } l+2 \le s \le n+1. \end{cases}$$

归纳地，可以推出，对于任意 $2 \le r \le l+1$,

$$((\mathfrak{R}_{l+1}\mathfrak{R}_l\cdots\mathfrak{R}_1)^r\boldsymbol{\sigma})_s =$$

$$\begin{cases} 2\sum_{q=s}^{s+r-1}\sum_{t=1}^{q}\mu_t + 2\sum_{w=1}^{r-1}\sum_{q=1}^{r-w}\Big(\sum_{t=1}^{q+1}\mu_t - \sum_{t=1}^{q}\mu_t\Big) - \sigma_1 + \sigma_{r+1} + \sigma_{s+r}, & \text{for } 1 \le s \le l-(r-2), \\ 2\sum_{q=s}^{l+1}\sum_{t=1}^{q}\mu_t + 2\sum_{w=1}^{r-i}\sum_{q=1}^{r-w}\Big(\sum_{t=1}^{q+1}\mu_t - \sum_{t=1}^{q}\mu_t\Big) - \sigma_{i+1} + \sigma_{r+1} + \sigma_{s+r-i}, & \text{for } s = l+2-r+i,\ 1 \le i \le r-1, \\ \sigma_s, & \text{for } l+2 \le s \le n+1. \end{cases}$$

步骤 3。 最后，我们比较上述两个步骤中的结果。对于 $r = l+1$ 和 $s = 1$，我们得到

$$\begin{aligned} \Big((\mathfrak{R}_{l+1}\mathfrak{R}_l\cdots\mathfrak{R}_1)^{l+1}\boldsymbol{\sigma}\Big)_1 &= 2\sum_{q=1}^{l+1}\sum_{t=1}^{q}\mu_t + 2\sum_{w=1}^{l}\sum_{q=1}^{l+1-w}\mu_{q+1} - \sigma_1 + 2\sigma_{l+2} \\ &= 2(l+1)\sum_{t=1}^{l+1}\mu_t - 2\sum_{q=1}^{l+1}\sum_{t=q+1}^{l+1}\mu_t + 2\sum_{w=1}^{l}\sum_{q=1}^{l+1-w}\mu_{q+1} - \sigma_1 + 2\sigma_{l+2} \\ &= 2(l+1)\sum_{t=1}^{l+1}\mu_t - 2\sum_{q=0}^{l}\sum_{t=1}^{q}\mu_{l+2-t} + 2\sum_{q=0}^{l}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{t-l} - \sigma_1 + 2\sigma_{l+2} \\ &= \sigma_1^*. \end{aligned}$$

对于 $r = l+1$ 和 $s = i+1$ （$1 \le i \le l$），我们有 $l+2-r+i = i+1$。于是有如下结论。

$$\begin{aligned} \Big((\mathfrak{R}_{l+1}\mathfrak{R}_l\cdots\mathfrak{R}_1)^{l+1}\boldsymbol{\sigma}\Big)_{i+1} &= 2\sum_{q=s}^{l+1}\sum_{t=1}^{q}\mu_t + 2\sum_{w=1}^{l+1-i}\sum_{q=1}^{l+1-w}\mu_{q+1} - \sigma_{i+1} + 2\sigma_{l+2} \\ &= \left(2(l+1-i)\sum_{t=1}^{l+1}\mu_t - 2\sum_{q=0}^{l-i}\sum_{t=1}^{q}\mu_{l+2-t}\right) + 2\sum_{q=0}^{l-i}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{t-l} - \sigma_{i+1} + 2\sigma_{l+2} \\ &= \sigma_{i+1}^*. \end{aligned}$$

这意味着 $(\mathfrak{R}_{l+1}\mathfrak{R}_l\cdots\mathfrak{R}_1)^{l+1}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^*$。

(b) 的证明。与 (a) 的证明一样，我们也将证明分成几个步骤。

步骤 1。我们计算每个 v_s、$s\in J_0$ 的质量。记 $\tilde{v}=(\tilde{v}_i,\tilde{v}_{i+1},\cdots,\tilde{v}_{n+1})$，其中$\tilde{v}_s=v_{s+i-1}$，并令 $\tilde{\alpha}_s^*=\alpha_{s+i-1}^*$，其中 $s=1,\cdots,l+1$。则 $\tilde{v}$ 满足 C_{l+1} Toda 系统 (5.2)，其中 $\alpha_s=\tilde{\alpha}_s^*$ 且 $(k'_{st})=(c_{st})$，$s,t=1,\cdots,l+1$，其中 $(c_{st})^{(l+1)\times(l+1)}$ 表示秩为 $l+1$ 的 C型Cartan矩阵。令 $u_s=u_{2l+2-s}=\tilde{v}_s$，并令 $\beta_s=\beta_{2l+2-s}=\tilde{\alpha}_s^*$，其中 $s=1,\cdots,l+1$，则 $u=(u_1,u2,\cdots,u_{2l+1})$ 满足 A_nToda 系统

$$\Delta u_s+\sum_{t=1}^{2l+1}a_{st}e^{u_t}=4\pi\beta_s\delta_0 \text{ in } \mathbb{R}^2,\ \int_{\mathbb{R}^2}e^{u_s(y)}dy<+\infty,\ \forall\, s=1,2,\cdots,2l+1,$$

其中$(a_{st})^{(2l+1)\times(2l+1)}$ 表示秩为 $2l+1$的**A** 型 Cartan矩阵。对于$s=1,\cdots,l+1$，我们有

$$\begin{aligned}\sigma_{\tilde{v}_s}=\sigma_{u_s}&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}e^{u_s(y)}dy=2\sum_{q=0}^{s-1}\Big(\sum_{t=1}^{2l+1-q}(1+\beta_t)-\sum_{t=1}^{q}(1+\beta_t)\Big)\\&=2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{l+1}(1+\beta_t)+2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}(1+\beta_t)-2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{q}(1+\beta_t)\\&=2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{l+1}(1+\tilde{\alpha}_t^*)+2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}(1+\tilde{\alpha}_{2l+2-t}^*)-2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{q}(1+\tilde{\alpha}_t^*)\\&=2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{l+1}(1+\alpha_{t+i-1}^*)+2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}(1+\alpha_{2l+i+1-t}^*)-2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{q}(1+\alpha_{t+i-1}^*)\\&=:I+II-III.\end{aligned}\tag{5.7}$$

以类似的方式，　与第一部分的讨论一样，我们逐项直接计算I、II和III项

$$\begin{cases}I=2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{l+1}\mu_{t+i-1}-s(-\sigma_{i-1}+\sigma_i-\sigma_n+\sigma_{n+1}),\\II=2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{2l+i+1-t}-s(\sigma_n-\sigma_{n+1})-(-\sigma_{i-1}+\sigma_{s+i-1}),\\III=2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{q}\mu_{t+i-1}-s(-\sigma_{i-1}+\sigma_i)-(\sigma_{i-1}-\sigma_{s+i-1}).\end{cases}$$

将I、II和III的上述结果代入 (5.7)，我们得出

$$\sigma_{\tilde{v}_s}=2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{l+1}\mu_{t+i-1}+2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{2l+i+1-t}-2\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{t=1}^{q}\mu_{t+i-1}+2\sigma_{i-1}-2\sigma_{s+i-1}.$$

由于对于$s=1,\cdots,l+1$有 $\sigma_{v_{s+i-1}}=\sigma_{\tilde{v}_s}$，我们推得，对于$s\in J_0$,

$$\sigma_{v_s}=2\sum_{q=0}^{s-i}\sum_{t=1}^{l+1}\mu_{t+i-1}+2\sum_{q=0}^{s-i}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{2l+i+1-t}-2\sum_{q=0}^{s-i}\sum_{t=1}^{q}\mu_{t+i-1}+2\sigma_{i-1}-2\sigma_s.$$

因此，对于$s\in J_0$,，有

$$\sigma_s^*=\sigma_s+\sigma_{v_s}=2\sum_{q=0}^{s-i}\sum_{t=1}^{l+1}\mu_{t+i-1}+2\sum_{q=0}^{s-i}\sum_{t=l+2}^{2l+1-q}\mu_{2l+i+1-t}-2\sum_{q=0}^{s-i}\sum_{t=1}^{q}\mu_{t+i-1}-\sigma_s+2\sigma_{i-1}.$$

步骤 2. 我们计算 $\mathfrak{R}_{J_0}\boldsymbol{\sigma} = (\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^{l+1}\boldsymbol{\sigma}$。通过直接计算可得

$$(\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1}\boldsymbol{\sigma})_s = \begin{cases} \sigma_s, & \text{for } 1 \le s \le i-1, \\ 2\sum_{t=s}^{n+1} \mu_t + \sigma_{s-1} + \sigma_n - \sigma_{n+1}, & \text{for } i \le s \le n+1, \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} &\left((\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^2 \boldsymbol{\sigma}\right)_s \\ &= \begin{cases} \sigma_s, & \text{for } 1 \le s \le i-1, \\ 2\sum_{t=s}^{n+1} \mu_t + 2\mu_n + \sigma_{s-1} + \sigma_{n-1} - \sigma_n, & \text{for } s = i, \\ 2\sum_{q=s-1}^{s} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t + 2\mu_n + \sigma_{s-2} + \sigma_{n-1} - \sigma_{n+1}, & \text{for } i+1 \le s \le n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

我们将 $s = i + j$ 分解为：若 $i \le s \le n+1$，其中 $0 \le j \le l$。归纳可得，对任意 $3 \le r \le l+1$，

(1) 若 $0 \le s - i \le r - 3$，则

$$\begin{aligned} &\left((\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^r \boldsymbol{\sigma}\right)_s \\ &= 2\sum_{q=s-j}^{s} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t + 2\sum_{w=n+2-r}^{n+2-r+j} \sum_{q=w}^{n} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t - 2\sum_{w=n+3-r}^{n+3-r+j} \sum_{q=w}^{n+1} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t + \sigma_{s-j-1} + \sigma_{n+1-r} - \sigma_{n+2-r+j}; \end{aligned}$$

(2) 若 $j = r - 2$，即 $s = i + r - 2$，则

$$\begin{aligned} &\left((\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^r \boldsymbol{\sigma}\right)_s \\ &= 2\sum_{q=s-r+2}^{s} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t + 2\sum_{w=n+2-r}^{n-1} \sum_{q=w}^{n} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t - 2\sum_{w=n+3-r}^{n} \sum_{q=w}^{n+1} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t + 2\mu_n + \sigma_{s-r+1} + \sigma_{n+1-r} - \sigma_{n+2-r+j}; \end{aligned}$$

(3) 若 $r - 1 \le j \le l$，则

$$\begin{aligned} &\left((\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^r \boldsymbol{\sigma}\right)_s \\ &= 2\sum_{q=s-r+1}^{s} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t + 2\sum_{w=n+2-r}^{n-1} \sum_{q=w}^{n} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t - 2\sum_{w=n+3-r}^{n} \sum_{q=w}^{n+1} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t + 2\mu_n + \sigma_{s-r} + \sigma_{n+1-r} - \sigma_{n+1}; \end{aligned}$$

(4) 若 $1 \le s \le i - 1$，则 $\left((\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^r \boldsymbol{\sigma}\right)_s = \sigma_s$。

步骤 3. 最后，我们比较上述两个步骤中的结果。对于 $r = l + 1$，我们将$s = i + j$ 分解为：若$i \le s \le n+1$，其中 $0 \le j \le l$。一方面，根据**步骤 1**，我们有

$$\begin{aligned} \sigma_s^* &= 2\sum_{q=0}^{s-i} \sum_{t=i}^{n+1} \mu_t + 2\sum_{q=0}^{s-i} \sum_{t=q+i}^{n} \mu_t - 2\sum_{q=0}^{s-i} \sum_{t=i}^{q+i-1} \mu_t - \sigma_s + 2\sigma_{i-1} \\ &= 4\sum_{q=0}^{s-i} \sum_{t=q+i}^{n+1} \mu_t - 2(j+1)\mu_{n+1} - \sigma_s + 2\sigma_{i-1} \\ &= 4\sum_{q=i}^{s} \sum_{t=q}^{n+1} \mu_t - 2(j+1)\mu_{n+1} - \sigma_s + 2\sigma_{i-1}. \end{aligned}$$

另一方面，根据**步骤 2** 中的结果，我们有：

(1)if $0 \preccurlyeq j \succcurlyeq = l - 2$,

$$
\begin{aligned}
&\left((\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^r \boldsymbol{\sigma}\right)_s \\
&= 2\sum_{q=i}^{s}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + 2\sum_{w=i}^{s}\sum_{q=w}^{n}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t - 2\sum_{w=i+1}^{s+1}\sum_{q=w}^{n+1}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t - \sigma_s + 2\sigma_{i-1} \\
&= 2\sum_{q=i}^{s}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + 2\left(\sum_{w=i+1}^{s}\sum_{q=w}^{n}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + \sum_{q=i}^{n}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t\right) - 2\left(\sum_{w=i+1}^{s}\sum_{q=w}^{n}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + \sum_{q=s+1}^{n+1}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + j\mu_{n+1}\right) \\
&\quad - \sigma_s + 2\sigma_{i-1} \\
&= 2\sum_{q=i}^{s}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + 2\sum_{q=i}^{n}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t - 2\sum_{q=s+1}^{n+1}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t - 2j\mu_{n+1} - \sigma_s + 2\sigma_{i-1} \\
&= 4\sum_{q=i}^{s}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t - 2(j+1)\mu_{n+1} - \sigma_s + 2\sigma_{i-1};
\end{aligned}
$$

(2) 如果$j = r - 2 = l - 1$，即$s = i + r - 2 = \mathrm{n}$</style}，

$$
\begin{aligned}
\left((\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^{l+1}\boldsymbol{\sigma}\right)_n &= 2\sum_{q=i}^{n}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + 2\sum_{w=i}^{n-1}\sum_{q=w}^{n}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t - 2\sum_{w=i+1}^{n}\sum_{q=w}^{n+1}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + 2\mu_n - \sigma_n + 2\sigma_{i-1} \\
&= 4\sum_{q=i}^{n}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t - 2(j+1)\mu_{n+1} - \sigma_n + 2\sigma_{i-1};
\end{aligned}
$$

(3) 若 $l = r - 1 \le j \le l$，即 $s = n + 1$,

$$
\begin{aligned}
\left((\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^{l+1}\boldsymbol{\sigma}\right)_{n+1} &= 2\sum_{q=i}^{n+1}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + 2\sum_{w=i}^{n-1}\sum_{q=w}^{n}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t - 2\sum_{w=i+1}^{n}\sum_{q=w}^{n+1}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t + 2\mu_n - \sigma_{n+1} + 2\sigma_{i-1} \\
&= 4\sum_{q=i}^{n+1}\sum_{t=q}^{n+1}\mu_t - 2(j+1)\mu_{n+1} - \sigma_{n+1} + 2\sigma_{i-1}.
\end{aligned}
$$

因此，对于 \(s\in I\)，我们得到$\left((\mathfrak{R}_i \cdots \mathfrak{R}_n \mathfrak{R}_{n+1})^{l+1}\boldsymbol{\sigma}\right)_s = \sigma_s^*$。这就完成了引理 5.4 的证明。□

作为引理 5.4 的推论，我们得到以下定理，它将在爆破过程中反复使用。

定理 5.6. 假设 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}) \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$。记 $\alpha_i^* = \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{t\in I} k^{\mathfrak{c}^t} it\ ^{\sigma_t}$和$\mu_i^* = 1 + \alpha_i^*$对于 $i \in I$。命题 *5.1-(4)* 中所述的四种可能性之一适用于指标集 I:

(a) 假设 *(I)* 成立且满足 *(I-1)*。记 $v = (v1, \cdots, v_{n+1})$，其中每个 v_s、$s \in J_0$ 都满足 C^{l_0+1} 型 *Toda* 系统 *(5.2)*，其中 $\alpha_s = \alpha_s^*$ 和 $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t}\ st)$、$s$、$t \in J_0$；每个 v_s、$s \in J^p$、$p = 1, \cdots, \vartheta$ 都满足 $A_n^{l_p+1}$ *Toda* 系统 *(5.2)*，其中 $\alpha_s = \alpha_s^*$ 和 $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t}\ st)$、$s$、$t \in J^p$；左侧元素可视为 $-\infty$。
(b) 假设 *(II)* 成立且满足 *(II-1)*。记 $v = (v1, \cdots, v_{n+1})$，其中每个 v_s、$s \in J_0$ 都满足 C^{l_0+1} *Toda* 系统 *(5.2)*，其中 $\alpha_s = \alpha_s^*$ 和 $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t}\ st)$、$s$、$t \in J_0$；每个 v_s、$s \in J^p$、$p = 1, \cdots, \vartheta$ 都满足 $A_n^{l_p+1}$ *Toda* 系统 *(5.2)*，其中 $\alpha_s = \alpha_s^*$ 和 $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t}\ st)$、$s$、$t \in J^p$；左侧元素可视为 $-\infty$。
(c) 假设 *(III)* 成立且满足 *(III-1)*。记 $v = (v1, \cdots, v_{n+1})$，其中每个 v_s、$s \in J_0$ 都满足 C^{l_0+1} 型 *Toda* 系统 *(5.2)*，其中 $\alpha_s = \alpha_s^*$ 和 $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t}\ st)$、$s$、$t \in J_0$；每个 v_s、$s \in J^{\vartheta+1}$

都满足 $\mathbf{C}^{l_{\vartheta+1}+1}$ *Toda* 系统 (5.2)，其中 $\alpha_s = \alpha_s^*$ 和 $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t} st)$、$s$，$t \in J^{\vartheta+1}$；每个 v_s、$s \in J^p$、$p = 1, \cdots, \vartheta$ 都满足 $\mathbf{A}^{l_p+1}$ *Toda* 系统 (5.2)，其中 $\alpha_s = \alpha_s^*$ 和 $(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t} st)$、$s$，$t \in J^p$；左侧元素可视为 $-\infty$。

(d) 假设*(IV)* 成立且满足 *(IV-1)*。记 $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_{n+1})$，其中每个 v_s、$s \in J^p$、$p = 1, \cdots, \vartheta$ 均满足 $\mathbf{A}^{l_p+1}$ *Toda* 系统(5.2)，且有 $\alpha_s = \alpha_s^*$ 和$(k'_{st}) = (k^{\mathfrak{c}^t} st)$，$s$,$t \in J^p$；左侧元素可视为 $-\infty$。

无论如何，我们令 $\sigma_s^* = \sigma_s$，其中 $s \in I \setminus J$，且对 $s \in J$，取 $\sigma_s^* = \sigma_s + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{v_s(y)}\mathrm{d}y$。于是有

$$
\begin{aligned}
&\textit{(a):}\ \boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_{n+1}^*) = (\mathfrak{R}_{J_0}\mathfrak{R}_{J_1}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta})\,\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu}),\\
&\textit{(b):}\ \boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_{n+1}^*) = (\mathfrak{R}_{J_0}\mathfrak{R}_{J_1}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta})\,\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu}),\\
&\textit{(c):}\ \boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_{n+1}^*) = \big(\mathfrak{R}_{J_0}\mathfrak{R}_{J_1}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta}\mathfrak{R}_{J_{\vartheta+1}}\big)\,\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu}),\\
&\textit{(d):}\ \boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_{n+1}^*) = (\mathfrak{R}_{J_1}\cdots\mathfrak{R}_{J_\vartheta})\,\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu}).
\end{aligned}
$$

证明。 由引理 3.5 和引理 5.4，可直接得到这些结论。 □

5.3. **仿射 $\mathbf{C}^t$ 型 Toda 系统的爆破分析**。 本小节以与第4节中定理1.1类似的方式证明定理 1.2。因此，我们仅概述主要步骤。在此之前，我们先给出一些代数计算，并回顾 [24] 中的一些研究结果。

对于任意整数 $l \geq 1$，令 $\mathfrak{S}_{\mathbf{C}_{l+1}}$ 为 $\{0, 1, \cdots, 2l+1\}$ 的置换群的一个子群，使得每个 $f \in \mathfrak{S}_{\mathbf{C}_{l+1}}$ 满足

$$
f(j) + f(2l+1-j) = 2l+1,\ 0 \leq j \leq 2l+1. \tag{5.8}
$$

由 [24, 命题 n 8.5], 所有满足 (5.8) 的简单置换（即属于 $\mathfrak{S}_{\mathbf{C}_{l+1}}$ 的置换）如下所示。 s

$$
f_i(j) = \begin{cases} j+1, & \text{if } j = i, 2l-i,\\ j-1, & \text{if } j = i+1, 2l+1-i,\\ j, & \text{if } j \neq i, i+1, 2l-i, 2l+1-i, \end{cases} \qquad \text{for } 0 \leq i \leq l. \tag{5.9}
$$

换句话说，每个$f \in \mathfrak{S}_{\mathbf{C}_{l+1}}$ 都可以表示为这些简单置换的复合。设$J_0 = \{i_0, i_0+1, \cdots, i_0+l_0\} \subsetneq I$，其中$i_0 \in I$ 且$l_0 \in \mathbb{N}$。接下来，我们考虑以下奇异Toda系统。

$$
\Delta u_i + \sum_{j\in J_0} k'_{ij} e^{u_j} = 4\pi \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_{\ell,i}\delta_{p_\ell} \text{ in } \mathbb{R}^2,\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_i(y)}\mathrm{d}y < +\infty,\ \forall\, i \in J_0, \tag{5.10}
$$

其中，$(\mathrm{k}'_{ij})_{|J_0|\times|J_0|}$ 是C型Cartan矩阵，$\mathrm{p}1, \cdots, \mathrm{p}_N$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的互异点，且$\alpha_{\ell,\ i} > -1$、$1 \leq \ell \leq \mathrm{N}$，$\mathrm{i} \in \mathrm{J}_0$。特别地，$\alpha_{\ell,\ i}$ 除$\alpha_{1,\ i}$外均为正整数，$\mathrm{i} \in \mathrm{J}_0$。令$\mathrm{u} = (\mathrm{u}_{i_0}, \cdots, \mathrm{u}_{i_0+l_0})$为方程(5.10)的解，我们定义每个$\mathrm{u}_i$的质量，记为$\sigma_{u_i}$，如下:

$$
\sigma_{u_i} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{u_i(y)}\mathrm{d}y,\ \text{ for } i \in J_0. \tag{5.11}
$$

然后，应用群组 $\mathfrak{S}_{\mathbf{C}_{l_0+1}}$，我们能够如下刻画某些$\mathbf{C}^{l_0+1}$Toda 系统的量子化结果。

引理5.7. ([24, 定理8.1]) 设$\mathbf{u} = (u_{i_0}, \cdots, u_{i_0+l_0})$ 是(5.10) 的解，并且σ_{u_i}按(5.11)定义。若$i_0 = 1$ 和$(k'_{ij})_{|J_0|\times|J_0|}$ 表示与单李代数$\mathbf{C}^{l_0+1}$相关联的*Cartan*矩阵，则存在置换映射$f \in \mathfrak{S}_{\mathbf{C}_{l_0+1}}$ 使得

$$
\sigma_{u_i} = 2\sum_{j=0}^{i-1}\Big(\sum_{r=1}^{f(j)}\bar{\alpha}_{1,r} - \sum_{r=1}^{j}\bar{\alpha}_{1,r}\Big) + 2\bar{N}_i,\ \textit{for some } \bar{N}_i \in \mathbb{Z},\ 1 \leq i \leq l_0+1,
$$

其中$\bar{\alpha}_{1,r}=\bar{\alpha}_{1,2l_0+2-r}=\alpha_{1,r}, 1\le r\le l_0+1$。

由引理5.7可推出以下引理，供后文使用。

引理 5.8. 设 $\mathbf{u}=(u_{i_0},\cdots,u_{i_0+l_0})$ 是(5.10) 的解，并且 σ_{u_i} 如(5.11)中所定义。假设$(k'_{ij})=(k^{\mathfrak{c}^t}ij)$，$i,j\in J_0$。

(a) 若 $i_0=1$，则存在一个置换映射 $f\in \mathrm{S}_{\mathbf{C}_{l_0+1}}$ 使得

$$\sigma_{u_i}=2\sum_{j=0}^{l_0+1-i}\Big(\sum_{r=1}^{f(j)}\hat{\alpha}_{1,r,1}-\sum_{r=1}^{j}\alpha_{1,l_0+2-r}\Big)+2N_{i,1},\ \textit{for some } N_{i,1}\in\mathbb{Z},\ 1\le i\le l_0+1,$$

其中$\hat{\alpha}_{1,r,1}=\alpha_{1,l_0+2-r}$对于 $1\le r\le l_0+1$，而$\hat{\alpha}_{1,r,1}=\alpha_{1,r-l_0}$对于 $l_0+2\le r\le 2l_0+1$.

(b) 若 $i_0+l_0=n+1$，则存在一个置换映射 $f\in \mathrm{S}_{\mathbf{C}_{l_0+1}}$ 使得

$$\sigma_{u_i}=2\sum_{j=0}^{i-i_0}\Big(\sum_{r=1}^{f(j)}\hat{\alpha}_{1,r,2}-\sum_{r=1}^{j}\alpha_{1,r+i_0-1}\Big)+2N_{i,2},\ \textit{for some } N_{i,2}\in\mathbb{Z},\ i_0\le i\le n+1,$$

其中$\hat{\alpha}_{1,r,2}=\alpha_{1,r+i_0-1}$对于 $1\le r\le l_0+1$以及$\hat{\alpha}_{1,r,2}=\alpha_{1,2l_0+1+i_0-r}$对于 $l_0+2\le r\le 2l_0+1$.

证明。(a) 记 $\tilde{\mathrm{u}}=(\tilde{\mathrm{u}}1,\cdots,\tilde{\mathrm{u}}_{l_0+1})$，其中 $\tilde{\mathrm{u}}_i=\mathrm{u}_{l_0+2-\mathrm{i}}$，并令$\tilde{\alpha}_{\ell,i}=\alpha_{\ell,l_0+2-\mathrm{i}}$，其中 $1\le\ell\le\mathrm{N}$ 且 $\mathrm{i}=1,\cdots,\mathrm{l}_0+1$。则 $\tilde{\mathrm{u}}$ 满足 C_{l_0+1} Toda 系统 (5.10)，其中 $(\mathrm{k}'_{ij})=(\mathrm{c}^{ij})$，且 $\alpha_{\ell,i}=\tilde{\alpha}_{\ell,i}$对于 $1\le\ell\le\mathrm{N}$ 和 $1\le\mathrm{i},\mathrm{j}\le\mathrm{l}_0+1$，其中 $(\mathrm{c}^{ij})_{(l_0+1)\times(l_0+1)}$ 表示秩为 l_0+1 的 C型Cartan矩阵。根据引理5.7，存在一个置换映射 $\mathrm{f}\in \mathrm{S}_{\mathbf{C}_{l_0+1}}$ 使得

$$\sigma_{\tilde{u}_i}=2\sum_{j=0}^{i-1}\Big(\sum_{r=1}^{f(j)}\beta_{1,r}-\sum_{r=1}^{j}\beta_{1,r}\Big)+2\hat{N}_i,\ \text{for some } \hat{N}_i\in\mathbb{Z},\ 1\le i\le l_0+1,$$

其中 $\beta_{\ell,r}=\beta_{\ell,2l_0+2-r}=\tilde{\alpha}_{\ell,r}, 1\le r\le l_0+1$。因此我们得出

$$\sigma_{u_i}=2\sum_{j=0}^{l_0+1-i}\Big(\sum_{r=1}^{f(j)}\hat{\alpha}_{1,r,1}-\sum_{r=1}^{j}\hat{\alpha}_{1,r,1}\Big)+2N_{i,1}=2\sum_{j=0}^{l_0+1-i}\Big(\sum_{r=1}^{f(j)}\hat{\alpha}_{1,r,1}-\sum_{r=1}^{j}\alpha_{1,l_0+2-r}\Big)+2N_{i,1},$$

对于某个$N_{i,1}\in\mathbb{Z}, 1\le i\le l_0+1$，其中$\hat{\alpha}_{1,r,1}=\alpha_{1,l_0+2-r}$对于 $1\le r\le l_0+1$，而$\hat{\alpha}_{1,r,1}=\alpha_{1,r-l_0}$对于$l_0+2\le r\le 2l_0+1$。

(b) 记 $\tilde{\mathrm{u}}=(\tilde{\mathrm{u}}1,\cdots,\tilde{\mathrm{u}}_{l_0+1})$，其中 $\tilde{\mathrm{u}}_i=\mathrm{u}_{i+i_0-1}$，并令$\tilde{\alpha}_{\ell,i}=\alpha_{\ell,i+i_0-1}$对于 $1\le\ell\le\mathrm{N}$ 和 $\mathrm{i}=1,\cdots,\mathrm{l}_0+1$。则 $\tilde{\mathrm{u}}$ 满足 C_{l_0+1} Toda 系统 (5.10)，其中 $(\mathrm{k}'_{ij})=(\mathrm{c}^{ij})$，且 $\alpha_{\ell,i}=\tilde{\alpha}_{\ell,i}$对于$1\le\ell\le\mathrm{N}$ 和 $1\le\mathrm{i},\mathrm{j}\le\mathrm{l}_0+1$，其中 $(\mathrm{c}^{ij})_{(l_0+1)\times(l_0+1)}$ 表示秩为 l_0+1 的 C型Cartan矩阵。根据引理5.7，存在一个置换映射 $\mathrm{f}\in \mathrm{S}_{\mathbf{C}_{l_0+1}}$ 使得

$$\sigma_{\tilde{u}_i}=2\sum_{j=0}^{i-1}\Big(\sum_{r=1}^{f(j)}\hat{\alpha}_{1,r,2}-\sum_{r=1}^{j}\hat{\alpha}_{1,r,2}\Big)+2\tilde{N}_i,\ \text{for some } \tilde{N}_i\in\mathbb{Z},\ 1\le i\le l_0+1,$$

其中$\hat{\alpha}_{1,r,2}=\alpha_{1,r+i_0-1}$对于 $1\le r\le l_0+1$，而$\hat{\alpha}_{1,r,2}=\alpha_{1,2l_0+1+i_0-r}$对于 $l_0+2\le r\le 2l_0+1$。因此

$$\sigma_{u_i}=2\sum_{j=0}^{i-i_0}\Big(\sum_{r=1}^{f(j)}\hat{\alpha}_{1,r,2}-\sum_{r=1}^{j}\hat{\alpha}_{1,r}\Big)+2N_{i,2}=2\sum_{j=0}^{i-i_0}\Big(\sum_{r=1}^{f(j)}\hat{\alpha}_{1,r,2}-\sum_{r=1}^{j}\alpha_{1,r+i_0-1}\Big)+2N_{i,2},$$

对于某个$N_{i,2}\in\mathbb{Z}$，$i_0\le i\le n+1$。至此，引理 5.8 的证明完成。 □

引理 5.9。 设 $\boldsymbol{\sigma}\in\Gamma_{\mathbf{C}^l}(\boldsymbol{\mu})$ 且 $\overline{\mu}_i:=\mu_i-\frac{1}{2}\sum_{t\in I}k^{\mathfrak{c}^t}{}_{it}\,\sigma_t$ 对 $i\in I$。

(a) 假设 $i_0 = 1$。对于任意置换映射 $f \in \mathfrak{S}_{\mathbf{C}_{l_0+1}}$，我们定义 $\boldsymbol{\sigma} f = (\sigma_{f,1}, \cdots, \sigma_{f,n+1})$ 为

$$\sigma_{f,i} = \begin{cases} \sigma_i + 2 \sum\limits_{j=0}^{l_0+1-i} \Big(\sum\limits_{r=1}^{f(j)} \hat{\overline{\mu}}_r - \sum\limits_{r=1}^{j} \hat{\overline{\mu}}_r \Big), & \text{for } 1 \le i \le l_0+1, \\ \sigma_i, & \text{for } l_0+2 \le i \le n+1, \end{cases}$$

其中，当 $1 \le r \le l_0+1$ 时，$\hat{\overline{\mu}}_r = \overline{\mu}_{l_0+2-r}$；当 $l_0+2 \le r \le 2l_0+1$ 时，$\hat{\overline{\mu}}_r = \overline{\mu}_{r-l_0}$。因此，$\boldsymbol{\sigma} f \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$。

(b) 假设 $i_0 + l_0 = n+1$。对于任意置换映射 $f \in \mathfrak{S}_{\mathbf{C}_{l_0+1}}$，我们定义 $\boldsymbol{\sigma} f = (\sigma_{f,1}, \cdots, \sigma_{f,n+1})$ 为

$$\sigma_{f,i} = \begin{cases} \sigma_i, & \text{for } 1 \le i \le i_0 - 1, \\ \sigma_i + 2 \sum\limits_{j=0}^{i-i_0} \Big(\sum\limits_{r=1}^{f(j)} \hat{\overline{\mu}}_r - \sum\limits_{r=1}^{j} \hat{\overline{\mu}}_r \Big), & \text{for } i_0 \le i \le n+1, \end{cases}$$

其中，$\hat{\overline{\mu}}_r = \overline{\mu}_{r+i_0-1}$ 对于 $1 \le r \le l_0+1$，且 $\hat{\overline{\mu}}_r = \overline{\mu}_{2l_0+1+i_0-r}$ 对于 $l_0+2 \le r \le 2l_0+1$。则 $\boldsymbol{\sigma} f \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$。

证明。 我们以类似于 [24, 引理 3.6 和引理 8.6] 的方法证明。令 f_i's 为 (5.9) 中定义的简单置换映射，可以很容易验证，

$$\text{(a).} \quad \boldsymbol{\sigma}_{f \circ f_i} = \mathfrak{R}_{l_0+1-i} \boldsymbol{\sigma}_f, \quad \text{for } 0 \le i \le l_0,$$
$$\text{(b).} \quad \boldsymbol{\sigma}_{f \circ f_i} = \mathfrak{R}_{i+i_0} \boldsymbol{\sigma}_f, \quad \text{for } 0 \le i \le l_0.$$

结合< id='1'>f 可视为若干简单置换的复合这一事实，我们完成了引理 5.9 的证明。□

现在我们概述仿射 $\mathbf{C}^t$ 型 Toda 系统的爆破过程。设 $\mathbf{u}^k$ 是方程 (1.19) 的一列爆破解，并满足条件 (1.16)。本部分使用的记号与第4节中的记号一致。我们首先计算 $\mathbf{u}^k$ 在鼓泡区域 $B(x_t^k, \tau_t^k)$ 内的局部质量，即，

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(B(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)) \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(1, \cdots, 1), \tag{5.12}$$

其中，$(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\tau}_t)$ 表示序列 $\{(x_t^k, \tau_t^k)\}$。在此过程中，我们从圆盘 $B(x_t^k, l_t^k)$出发，并选取某个序列 $s_k \in (l_t^k, \tau_t^k)$，使其满足 $l_t^k \ll s_k \ll \tau_t^k$，使得
(1). u^k 的某些分量在 $\partial \mathrm{B}(\mathrm{x}_t^k, \mathrm{s}_k)$ 上具有慢衰减，(2). $\hat{}\sigma_i(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \mathrm{s})) = \hat{}\sigma_i(\mathrm{B}(\mathrm{x}_t, \mathrm{l}_t))$，其中 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，$(\mathrm{x}_t, \mathrm{s})$ 表示序列 $\{(\mathrm{x}_t^k, \mathrm{s}_k)\}$.
我们将$\mathbf{u}^k$按$v_i^k(y) = u_i^k(x_t^k + s_k y) + 2\log s_k$缩放，其中$i \in I$，并记作

$$J = \big\{ i \in I \mid u_i^k \text{ has slow decay on } \partial B(x_t^k, s_k) \big\} \subsetneq I.$$

自然地，对于$i \in I \setminus J$，有$v_i^k(y) \to -\infty$属于$L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$；对于$i \in J$，有$v_i^k(y) \to v_i(y)$属于$C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，其中$v_i(y)$满足该系统

$$\Delta v_i(y) + \sum_{j \in J} k_{ij}^{\mathbf{c}^t} e^{v_j(y)} = 4\pi \alpha_i^* \delta_0 \text{ in } \mathbb{R}^2, \ \int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)} \mathrm{d}y < +\infty, \ \forall\, i \in J.$$

这里，$\alpha_i^* = -\frac{1}{2} \sum_{j \in I} k^{\mathbf{c}^t}{}_{ij} \hat{}\sigma_j(B(\mathbf{x}_t, \mathbf{l}_t)) > -1$ 对应$i \in J$。接下来，我们会遇到命题 5.1-(4)中所确定的相同四种备选情形**(I)**、**(II)**、**(III)** 和**(IV)** 。应用定理 5.6，即可得到所需结论 (5.12)。

接下来，我们计算包含相邻元素的群的局部质量。举例来说，对于群组 $\mathrm{S}_j^k = \{\mathrm{x}_j^k, 1, \cdots, \mathrm{x}_{j,m_j}^k\} \subseteq \Sigma_k$ with some $1 \le \mathrm{m}_j \le \mathrm{m}$，令 $\tau^k \mathrm{S}_j^k$ 定义为 $\tau^k \mathrm{S}_j^k = 1\ 2\ \mathrm{dist}(\mathrm{x}_j^k, 1, \Sigma_k \setminus \mathrm{S}_j^k)$。通过计算每个包含 $\mathrm{x}_{j,l}^k$, $\mathrm{l} = 1, \cdots, \mathrm{m}_j$ 的起泡圆盘所作的贡献，我们推得 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{B}(\mathrm{x}_j, 1, {}^{\boldsymbol{\tau}_{S_j^k}})) \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(1, \cdots, 1)$。在此过程中，我们还会遇到相同的

与命题 5.1-(4) 中相同的四种备选情形**(I)**、**(II)**、**(III)** 和**(IV)** 。定理 5.6 用于处理相应的问题。

此外，我们收集 $\{0\}$ 以及“更接近的”群组 $\mathrm{S}_j^k, 1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{m}_0$。以下情形将会出现：对于最后一步中的局部质量 $\boldsymbol{\sigma}$，令 $\mathrm{v}_i^k(\mathrm{y}) = \mathrm{u}_i^k(\mathrm{x}^k + \mathrm{s}_k\mathrm{y}) + 2\log \mathrm{s}_k$，其中 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，并记 $\mathrm{J} = \{\mathrm{i} \in \mathrm{I} \mid \mathrm{u}_i^k$在 $\partial \mathrm{B}(\mathrm{x}^k, \mathrm{s}_k)\} \subsetneqq \mathrm{I}$ 上慢衰减。则对于 $\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}$，$\mathrm{v}_i^k(\mathrm{y}) \to -\infty$ 属于 $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，且对于 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}$，$\mathrm{v}_i^k(\mathrm{y}) \to \mathrm{v}_i(\mathrm{y})$ 属于 $\mathrm{C}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$；其中 $\mathrm{v}_i(\mathrm{y})$ 满足该系统

$$\Delta v_i(y) + \sum_{j\in J} k_{ij}^t e^{v_j(y)} = 4\pi\alpha_i^*\delta_0 + 4\pi\sum_{t=1}^{N} m_{it}\delta_{p_t} \text{ in } \mathbb{R}^2,\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{v_i(y)}\mathrm{d}y < +\infty,\ \forall\, i \in J,$$

其中 $0 \neq p_t \in \mathbb{R}^2$、$m_{it} \in \mathbb{N}$ 以及 $\alpha_i^* = \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{j\in I} k^t{}_{ij}\sigma_j > -1$，对于 $i \in J$。记 $\mu_i^* = 1 + \alpha_i^*$，其中$i \in I$。令

$$\sigma_j^* = \begin{cases} \sigma_j, & \text{if } j \in I \setminus J, \\ \sigma_j + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{v_j(y)}\mathrm{d}y, & \text{if } j \in J. \end{cases}$$

为完成定理 1.2 的证明，我们需要证明 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 也满足与引理 4.1 中所述的类似结果，即，

引理 5.10。 设指标集 I 分解为命题 *5.1-(4)* 中的四种备选情形之一：***(I)***、***(II)***、***(III)*** 和***(IV)*** 。假设 $\hat{}\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$ 满足 $\sigma_i = \hat{}\sigma_i + 2n_i$ 且 $n_i \in \mathbb{Z}$。那么$\sigma_i^* = \hat{}\sigma_i^* + 2n_i^*$，其中 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}^* \in \Gamma_{\mathbf{C}^t}(\boldsymbol{\mu})$ 且 $n_i^* \in \mathbb{Z}$。

证明。 应用引理 5.8 和引理 5.9，可以通过与引理 4.1 中类似的论证证明该结论。□

最后，我们给出定理 1.2 的证明。

定理 *1.2* 的证明。 类似于 [11, 定理 1.1] 和定理1.1 的证明，我们可以由引理 5.10 得到所需结论。□

参考文献

[1] Muhammad A. Albar, Maha A. Al-Hamed，C_{n-1}型仿射Weyl群。《爱尔兰皇家科学院数学学报》100 (2000)，第1期，39–45页。[2] M. Adler, P. van Moerbeke，完全可积系统、欧几里得李代数与曲线。《Adv. Math.》38 (1980)，第3期，267–317页。[3] D. Bartolucci, G. Tarantello，带奇异数据的李乌维尔型方程及其在电弱理论周期性多涡旋中的应用。《Comm. Math. Phys.》229 (2002)，第1期，3–47页。[4] J. Bolton, L.M. Woodward，从黎曼曲面到 $\mathbb{CP}^n$ 和 S^n的调和映射合同定理。《J. London Math. Soc.》45 (1992)，第2期，363–376页。[5] J. Bolton, L.M. Woodward，仿射 Toda 方程与极小曲面。载于：调和映射与可积系统，A.P. Fordy、J.C. Wood（编），数学专题，Vieweg，1994年，第59–82页。[6] H.W. Braden, E. Corrigan, P.E. Dorey, R. Sasaki，仿射 Toda 场论与精确 S 矩阵。《核物理 B》338 (1990)，第3期，689–746页。[7] H. Brezis, F. Merle，二维中 $-\Delta \mathrm{u} = \mathrm{V}(\mathrm{x})\mathrm{e}^u$ 解的一致估计与爆破行为。《Comm. Partial Differential Equation》16 (1991)，第8–9期，1223–1253页。[8] R.W. Carter，有限型与仿射型李代数。剑桥高等数学研究丛书第96卷，剑桥大学出版社，纽约，2005年，第567–609页。[9] S.S. Chern，sinh-Gordon 方程的几何解释。《波兰数学年刊》39 (1981)，第1期，63–69页。[10] E. Corrigan，仿射 Toda 量子场论的最新进展。载于：G. Semenoff、L. Vinet（编），粒子与场，Springer，纽约，1999年，第1–34页。[11] L. Cui, J. Wei, W. Yang, L. Zhang，B(1) 2型仿射Toda系统的爆破分析：局部质量与仿射魏尔群。arXiv: 2206.10409。[12] A.P. Fordy，与单李代数和对称空间相关的可积方程。载于《孤子理论：成果综述》，《非线性科学：理论与应用》，曼彻斯特大学出版社，曼彻斯特，1990年，第315–337页。

[13] A. Hyder, J. Wei, W. Yang，具有多个奇异点的一般Toda系统。《Calc. Var. Partial Differ. Equ.》59 (2020)，论文编号136，第1–19页。[14] J. Jost, C. Lin, G. Wang，Toda系统的解析方面。II. 起泡行为与解的存在性。《Comm. Pure Appl. Math.》59 (2006)，第4期，526–558页。[15] B. Kostant，广义Toda晶格的解与表示论。《Adv. Math.》34 (1979)，第3期，195–338页。[16] T.J. Kuo, C.S. Lin，具有整数奇异源的平均场方程估计：非简单爆破。《J. Differential Geom.》103 (2016)，第3期，377–424页。[17] A.N. Leznov, M.V. Saveliev，非线性动力系统积分的群论方法。物理学进展丛书第15卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1992年。[18] Y. Li，Harnack型不等式：移动平面法。《Comm. Math. Phys.》200 (1999)，第2期，421–444页。[19] Y. Li, I. Shafrir，二维中 $-\Delta u = Ve^{u}$ 解的爆破分析。《Indiana Univ. Math. J.》43 (1994)，第4期，1255–1270页。[20] C.S. Lin, J. Wei, W. Yang, L. Zhang，具有任意奇异性的秩2 Toda系统：局部质量与新估计。《Anal. PDE》11 (2018)，第4期，873–898页。[21] C.S. Lin, J. Wei, D. Ye，带奇异源的SU(n + 1) Toda系统的分类与非退化性。《Invent. Math.》190 (2012)，第1期，169–207页。[22] C.S. Lin, J. Wei, L. Zhang，SU(3)奇异Toda系统爆破极限的分类。《Anal. PDE》8 (2015)，807–837页。[23] C.S. Lin, W. Yang，具有任意奇异性的SU(3) Toda系统临界参数的尖锐估计，I。《Vietnam Journal of Mathematics》49 (2021)，363–379页。[24] C.S. Lin, W. Yang, X. Zhong，Toda系统的先验估计，I：A_n、B_n、C_n 和 G_2型李代数。《J. Differ. Geom.》114 (2020)，第2期，337–391页。[25] C.S. Lin, L. Zhang，具有B_2 和G_2 型Cartan矩阵的奇异Toda系统中的能量集中。《Int. Math. Res. Not.》2016年第16期，5076–5105页。[26] C.S. Lin, L. Zhang，李乌维尔系统起泡解的剖面。《Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire》27 (2010)，第1期，117–143页。[27] L. Liu, G. Wang，与超共形极小曲面相关的仿射Toda系统的爆破分析，见 $\mathbb{S}^4$。《J. Funct. Anal.》281 (2021)，109194。[28] Z.H. Nie，Toda场论的特征积分。《J. Nonlinear Math. Phys.》21 (2014)，第1期，120–131页。[29] Z.H. Nie，带奇异源的C型和B型Toda系统解的分类。《Calc. Var. Partial Differ. Equ.》55 (2016)，论文编号3，第1–23页。[30] J.Y. Shi，某些仿射Weyl群中的Kazhdan-Lusztig胞腔。《数学讲义》第1179卷，Springer-Verlag，柏林，1986年。[31] M. Toda，具有非线性相互作用的链振动。《J. Phys. Soc. Jpn.》22 (1967)，第2期，431–436页。[32] M. Toda，非简谐晶格中的波传播。《J. Phys. Soc. Jpn.》23 (1967)，第3期，501–506页。[33] M. Toda，非线性晶格理论。Springer Science & Business Media，2012年。[34] J.C. Wei, L. Zhang，具有量子化奇异性的李乌维尔方程估计。《Adv. Math.》380 (2021)，107606。[35] J.C. Wei, L. Zhang，具有量子化奇异性的李乌维尔方程消失估计。《Proc. Lond. Math. Soc.》124 (2022)，第1期，106–131页。[36] J.C. Wei, L. Zhang，量子化奇异李乌维尔方程的拉普拉斯消失定理。arXiv: 2202.10825v3。[37] H.C. Wente，体积约束的Plateau问题的大解。《Arch. Rat. Mech. Anal.》75 (1980)，59–77页。[38] H.C. Wente，H. Hopf猜想的反例。《Pacific J. Math.》121 (1986)，第1期，193–243页。[39] J.C. Wood，映入对称空间的调和映射与可积系统。载于：调和映射与可积系统，A.P. Fordy、J.C. Wood（编），数学专题，Vieweg，1994年，第29–55页。LEILEI CUI，华中师范大学数学与统计学院，武汉，430079

中华人民共和国电子邮箱：leileicui@mails.ccnu.edu.cn ZHAOHU NIE，犹他州立大学数学与统计系，美国犹他州洛根市，邮编 84322-3900电子邮箱：zhaohu.nie@usu.edu WEN YANG，中国科学院精密测量科学与技术创新研究院武汉物理与数学研究所，中华人民共和国武汉市，邮编 430071电子邮箱：wyang@wipm.ac.cn