反弹平均漂移：等效定义、数值实现与示例案例

R.J.J. Mackenbach,[1,2] J.M. Duff,[3] M.J. Gerard,[3] J.H.E. Proll,[1,2] P. Helander,[2] 和 C. C. Hegna[3]1)埃因霍温理工大学，荷兰埃因霍温，邮编 *5612 AZ*2)马克斯·普朗克等离子体物理研究所，德国格赖夫斯瓦尔德，邮编 *17491*3)威斯康星大学麦迪逊分校，美国威斯康星州麦迪逊，邮编 *53706*

（*电子邮件：r.j.j.mackenbach@tue.nl）

（日期：2023年5月3日）

本文介绍了多种分析和数值方法，用于计算复杂几何结构中磁俘获粒子横越磁力线的平均漂移，并对这些方法进行了比较。为计算弹跳积分，我们提出了梯形法则的一种推广形式，可避开可积奇点。我们将此方法与抛物线型磁阱中的标准求积方法进行比较，发现梯形法的计算成本显著较低，但精度也有所牺牲。建立数值计算程序后，我们进一步研究了粒子穿越计算边界时的条件，并发现受该边界影响的粒子会呈现显著差异，而这些差异可能取决于具体的计算实现方式。最后，我们研究了优化仿星器 NCSX 中的反弹平均漂移。通过考察这些漂移，可以轻易推断出重要性质，例如哪些粒子群能够驱动俘获粒子模，以及在哪些区域径向漂移对这类模的稳定性危害最大。

arXiv:2305.01225v1 [physics.plasm-ph] 2 May 2023

I. 引言

粒子被困在磁势阱中时，在两个相邻弹跳点之间经历的总漂移，下文称为弹跳平均漂移（BAD），在等离子体物理中发挥着重要作用。例如，在仿星器物理中，人们投入了大量工作来构造径向 BAD 接近于零的平衡态，准轴对称、准螺旋对称和准等动力学磁场就是如此[1–5]。另一方面，克莱布施角方向上的 BAD（通常称为副法线漂移）在确定陀螺动理学俘获电子模的线性稳定性方面起着关键作用[6–8]。因此，人们有必要掌握在一般平衡态中准确计算这些量的方法。

尽管许多作者已实现了计算这类量的方法[9–15]，但这些方法并非总适用于一般平衡态；此外，它们可能依赖于已被更新版本取代的代码。计算这些漂移还有一些等价方法，具体采用哪种方法可能取决于给定的量，其中有些方法更易于实现[16,17]。因此，本文旨在概述计算 BADs 的各种解析和数值方法，以便为具体问题选择合适的方法。此外，我们将运用这一框架研究 NCSX 装置中的 BADs，并计算径向电场对这些漂移的影响。

II. 计算 BAD 的方法

在本节中，我们将介绍几种解析方法，利用文献中的公认结果来计算 BAD[18]。我们首先考虑导心穿过磁场时的局部瞬时漂移速度

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} + \frac{v_\perp^2}{2\Omega}\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^2} + \frac{v_\parallel^2}{\Omega}\frac{\mathbf{B}\times\boldsymbol{\kappa}}{B}, \tag{1}$$

其中，$\Omega = qB/m$ 是质量为 m 、电荷为 q 的粒子的回旋频率，并且我们忽略了极化漂移[19]。此外，$v_\parallel$ 和 $v_\perp$ 分别是粒子相对于磁场的平行速度和垂直速度。通常，使用俯仰角变量 $\lambda \equiv \mu B_0/H$ 来表示该漂移会更加方便，其中 $H = m(v_\parallel^2 + v_\perp^2)/2 + \Phi$ 是总能量（动能 + 势能），而 B_0 是某个参考磁场强度。用该量表示时，漂移可写为

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} + \frac{H}{qB_0}\left[\lambda\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^2} + 2\left(\hat{B}^{-1} - \lambda - \frac{\Phi}{H\hat{B}}\right)\frac{\mathbf{B}\times\boldsymbol{\kappa}}{B}\right], \tag{2}$$

其中 $\hat{B} = B/B_0$。值得注意的是，当满足磁流体力学平衡条件时，曲率漂移和梯度漂移之间存在一个简单关系。通过对曲率矢量的定义应用磁流体力平衡 $\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{b})$，我们得到

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mu_0\nabla p}{B^2} + \frac{\nabla_\perp B}{B}. \tag{3}$$

如果将上述关系代入曲率漂移的表达式，可得

$$\frac{\mathbf{B}\times\boldsymbol{\kappa}}{B} = \mathbf{b}\times\frac{\mu_0\nabla p}{B^2} + \frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^2}, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$。现在我们将注意力转向平行运动，其满足

$$m\frac{\mathrm{d}v_\parallel}{\mathrm{d}t} = -\nabla_\parallel(\Phi + \mu B). \tag{5}$$

这里， Φ 是电势，因此 $\mathbf{F} = -\nabla\Phi = q\mathbf{E}$ 表示电力，$\nabla_\parallel = \mathbf{b}\cdot\nabla$ 是沿磁场方向的梯度，而 $\mu = mv_\perp^2/(2B)$ 是磁矩，即第一绝热不变量。需要注意的是，只有当磁场在回旋半径的长度尺度上变化缓慢，且电场不太强时，这些漂移表达式才有效。

A. 粒子轨道追踪

我们首先考察计算 BADs 最直接的方法，即粒子轨道追踪。这些方法求解陀螺平均运动方程，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_D + v_\parallel \mathbf{b}. \tag{6}$$

有多种方法可用于准确计算粒子轨道，包括具有哈密顿结构且能守恒辛不变量的算法[20]。如果要计算较长时间内的轨道（例如经历多次弹跳），这类方法尤其有价值；在此期间，轨道可能在不同的俘获类别之间转换，而这对新经典输运可能很重要[21]。要计算上述表达式中的 BAD，只需计算弹跳时间，即两个连续弹跳点之间一次反弹运动的总持续时间（即 $v_\parallel = 0$ 的位置），再用总漂移量除以该时间。用角括号表示反弹平均算符，则该平均漂移可写为

$$\langle \mathbf{v}_D \rangle \equiv \frac{\int \mathbf{v}_D \,\mathrm{d}t}{\int \mathrm{d}t}. \tag{7}$$

上述各量都可以很容易地从粒子轨道追踪代码中提取。由于这类代码已接受过广泛的基准测试，本文不再进一步讨论。与本文将介绍的所有方法相比，这些方法的计算成本可能最高。

B. 直接平均

也可以直接根据定义计算 BAD。这对陀螺动力学代码可能很有用，尤其是局部代码，因为其中漂移的投影通常表示为某个沿磁力线坐标的函数，我们将该坐标记为 ζ。例如，这种沿磁力线坐标可以是环向和极向直磁力线角的线性组合，通常分别记为 φ 和 θ。采用这种沿磁力线坐标后，平行导数变为

$$\mathbf{B}\cdot\nabla = (\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}. \tag{8}$$

假设给定以下漂移投影

$$\mathbf{v}_D\cdot\nabla x, \tag{9}$$

其中，x 是一个占位符，可以表示径向坐标（例如环向磁通 ψ），也可以表示副法向坐标（例如克莱布施角 $\alpha = \theta - \iota\varphi$），其中 ι 表示旋转变换。随后，可以根据其定义计算反弹平均。

$$\langle \mathbf{v}_D\cdot\nabla x\rangle \equiv \frac{\int \mathbf{v}_D\cdot\nabla x\,\mathrm{d}t}{\int \mathrm{d}t}. \tag{10}$$

由于平行动力学在最低阶占主导地位，我们可以将无穷小量 $\mathrm{d}t$ 近似为

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\ell}{v_\parallel}, \tag{11}$$

其中 ℓ 是沿磁力线的弧长。平行速度与能量的关系为

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \mu B + \Phi \implies \\ v_\parallel &= \pm\sqrt{\frac{2H}{m}}\sqrt{1-\lambda\hat{B}-\frac{\Phi}{H}}. \end{aligned} \tag{12}$$

注意，对于任意常数 C，反弹平均算符在 $v_\parallel \mapsto C\cdot v_\parallel$ 变换下保持不变，因此 BAD 变为

$$\langle \mathbf{v}_D\cdot\nabla x\rangle = \frac{\int \mathrm{d}\ell\,(\mathbf{v}_D\cdot\nabla x)\left(1-\lambda\hat{B}-\frac{\Phi}{H}\right)^{-1/2}}{\int \mathrm{d}\ell\left(1-\lambda\hat{B}-\frac{\Phi}{H}\right)^{-1/2}}. \tag{13}$$

最后，在用沿磁力线坐标 ζ 表示这些量时应当谨慎。通过考察磁场沿 ζ 的投影，可以很容易地得到弧长与该沿磁力线坐标之间的关系，

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta = (\nabla\psi\times\nabla\alpha)\cdot\nabla\zeta, \tag{14}$$

这里用到了磁场的克莱布施表示 $\mathbf{B} = \nabla\psi\times\nabla\alpha$。由于 ζ 是沿磁力线坐标，令 $\zeta = \zeta(\ell)$，上述方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\ell} = \frac{(\nabla\psi\times\nabla\alpha)\cdot\nabla\zeta}{B}. \tag{15}$$

举例来说，若选择 $\nabla\zeta = a_\theta\nabla\theta + a_\varphi\nabla\varphi$，其中$a_\theta$和 a_φ为满足$a_\theta\iota + a_\varphi \neq 0$的常数（即沿磁力线坐标不应垂直于$\mathbf{B}$），则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\ell} = (a_\theta\iota + a_\varphi)\frac{(\nabla\psi\times\nabla\theta)\cdot\nabla\varphi}{B}. \tag{16}$$

在布泽坐标中，这个表达式尤其简单[18,22],，因为逆雅可比 $(\nabla\psi\times\nabla\theta)\cdot\nabla\varphi$ 变得与B^2成正比。这大大简化了 BAD，因为弹跳平均算子在 $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}\ell \mapsto C\cdot\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}\ell$ 下保持不变。在布泽坐标中，接下来可以将

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\zeta} \mapsto \frac{1}{B} \tag{17}$$

在方程（13）中替换，只要 ζ 是 Boozer角的线性组合即可。因此我们可以看到，在布泽平面上，磁力线在磁场强度较低的区域会经过更长的弧长。

回到一般情形，现在可以用任意沿磁力线坐标表示 BAD，因此有

$$\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla x \rangle = \frac{\int \mathrm{d}\zeta \, (\mathbf{v}_D \cdot \nabla x) \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\zeta} \left(1 - \lambda \hat{B} - \frac{\Phi}{H}\right)^{-1/2}}{\int \mathrm{d}\zeta \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\zeta} \left(1 - \lambda \hat{B} - \frac{\Phi}{H}\right)^{-1/2}}. \tag{18}$$

这一表达式现在的形式便于许多代码使用，例如 GIST [23], GENE[24], 或 Simsopt[25]。需要注意的是，这些表达式仅在 $\rho_* = \rho_g / a$ 很小时才准确，其中 ρ_g 为回旋半径，a 为小半径。

C. 几何方法

计算 BADs 也可以采用更具几何性的方式，即考察其与第二绝热不变量（记为 $\mathscr{J}$）之间的关系，该不变量定义为

$$\mathscr{J} = \int m v_{\parallel} \mathrm{d}\ell. \tag{19}$$

根据陀螺平均拉格朗日量，可以得到以下关系[18]

$$\left(\frac{\partial \mathscr{J}}{\partial \psi}\right)_{H,\mu,\alpha} = -q\Delta\alpha, \tag{20a}$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{J}}{\partial \alpha}\right)_{H,\mu,\psi} = +q\Delta\psi, \tag{20b}$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{J}}{\partial H}\right)_{\mu,\psi,\alpha} = \tau_b, \tag{20c}$$

其中，$\Delta\alpha$ 和 $\Delta\psi$ 分别表示一次完整反弹运动后在 α 和 ψ 方向上的总位移，τ_b 表示该次反弹运动的总反弹时间。根据这些表达式，可直接求得 α 和ψ 中的 BAD 为

$$\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\alpha \rangle = -\frac{1}{q} \left(\frac{\partial \mathscr{J}}{\partial \psi}\right)_{H,\mu,\alpha} \Bigg/ \left(\frac{\partial \mathscr{J}}{\partial H}\right)_{\mu,\psi,\alpha}, \tag{21a}$$

$$\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\psi \rangle = +\frac{1}{q} \left(\frac{\partial \mathscr{J}}{\partial \alpha}\right)_{H,\mu,\psi} \Bigg/ \left(\frac{\partial \mathscr{J}}{\partial H}\right)_{\mu,\psi,\alpha}. \tag{21b}$$

上述表达式的主要难点在于，必须谨慎地在所选坐标系中表示这些导数。例如，若用 Clebsch坐标（ψ，α，ℓ）表示各个函数，方程就会异常简洁。

根据局部三维平衡模型的相关推导，[17,26,27] 方程 (20a) 和 (20c) 同样可以用直磁力线角坐标表示。这样可得到以下导数方程

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathscr{J}}{\partial \psi}\right)_{H,\mu,\alpha} \approx \sqrt{\frac{mH}{2}} \int \frac{B}{\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda\hat{B}}} \times \\ \left\{ \frac{2M(1-\lambda\hat{B})}{N-\iota M} \left[\frac{\mathrm{d}\iota}{\mathrm{d}\psi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_\mathrm{n}}{|\nabla\psi|} + D\kappa_\mathrm{g} \frac{|\nabla\psi|}{B} \right) \right] - \right. \\ \left. \left[\frac{\kappa_\mathrm{n}}{|\nabla\psi|} + D\kappa_\mathrm{g} \frac{|\nabla\psi|}{B} \right] + \frac{\lambda}{\hat{B}} \frac{\mu_0}{B_0^2} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\psi} \right\} \mathrm{d}\zeta,\end{aligned} \tag{22a}$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{J}}{\partial H}\right)_{\mu,\psi,\alpha} = \sqrt{\frac{m}{2H}} \int \frac{B}{\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{1-\lambda\hat{B}}}. \tag{22b}$$

对于上述方程，我们选择沿磁力线坐标为 $\zeta = N\varphi - M\theta$，其中 ζ是螺旋角，M 和 N 分别为极向和环向场周期数。例如，准轴对称仿星器有 $N = 0$ 和 $M = 1$。此外，测地曲率分别定义为 $\kappa_\mathrm{n} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\kappa}$和 $\kappa_\mathrm{g} = (\mathbf{n}\times\mathbf{b})\cdot\boldsymbol{\kappa}$，其中$\mathbf{n} = \nabla\psi/|\nabla\psi|$。最后，$D$ 与局部磁剪切的关系为

$$s_\mathrm{loc} = \frac{|\nabla\psi|^2}{B^2} (\boldsymbol{B}\cdot\nabla) \left(\varphi \frac{d\iota}{d\psi} + D \right), \tag{23}$$

其中 $s_\mathrm{loc} = (\mathbf{b}\times\mathbf{n})\cdot\nabla\times(\mathbf{b}\times\mathbf{n})$ 为局部磁剪切。重要的是，方程（22a）忽略了比表达式中所含项小一个因子 $(\iota\varepsilon)^2$ 的项，其中ε 为反纵横比。这些表达式的优点是易于理解：可以轻易看出局部剪切、曲率分量和抗磁效应对 $\nabla\alpha$ 方向上总 BAD 的贡献。

III. 数值实现

本节列出若干可能适用于计算 BADs 的数值方法。我们不着重讨论用于计算粒子轨道的数值方法，因为这类方法已有详尽的文献记载。相反，我们重点关注涉及求解弹跳平均积分的方法。这里的主要难点在于，积分具有以下形式：

$$\int \frac{h(x)}{\sqrt{f(x)}} \mathrm{d}x, \tag{24}$$

其中，积分区域由$f(x) > 0$ 所在的区域确定。当$f(x) \to 0$ 时，被积函数会变得奇异；要准确处理这一奇异性，就需要谨慎选择数值方法。

由方程（13）可知，这种奇异性在物理上对应于弹跳点处的平行速度 $v_\parallel \to 0$，因此俘获粒子可能会将其相当一部分轨道时间花在这些弹跳点附近。

由于 BAD 是漂移的时间平均值，弹跳点可能对 BAD 总量贡献相当大的一部分。在磁阱的局部极大值附近，这种效应会更加显著：粒子在局部极大值附近停留的时间比例在形式上趋近于 1，即粒子整个轨道周期都停留在局部极大值处。在这种情况下，BAD 完全由该局部极大值处的漂移决定。因此，准确解析这种奇异行为也具有重要的物理意义：若处理不当，就可能忽略 BAD 总量中相当大的一部分。

A. 梯形法则的推广

数值积分中一种常用的选择是梯形法，因为这种方法计算开销小。然而，在奇异性附近，误差可能变得任意大。例如，考虑积分

$$\int_{\delta}^{\delta+\Delta x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{\Delta x+\delta}-\sqrt{\delta}). \tag{25}$$

间距为 Δx 的梯形法则会将该积分近似为

$$\int_{\delta}^{\delta+\Delta x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \approx \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x+\delta}}+\frac{1}{\sqrt{\delta}}.\right) \tag{26}$$

当令 $\delta \to 0^+$ 趋近奇异点时，梯形估计值可能变得任意大，而真实积分则简单地收敛到$2\sqrt{\Delta x}$。因此，简单直接地使用梯形法并不可取。

将梯形法应用于上述积分时，所违反的主要假设是：被积函数在各采样位置之间的变化必须很小。显然，这一条件在奇异点附近不成立，导致梯形法则表现不佳。不过，只需稍微调整构成梯形法则的主要假设，就可以找到一种类似的方法。我们来考虑估算下列积分的推广问题：

$$\int g(f(x))\mathrm{d}x, \tag{27}$$

其中，我们现在假设$f(x)$在不同位置之间的变化很小。更确切地说，给定两个间距很近的样本$f(x_i)$和$f(x_j)$，其中$x_j > x_i$，我们假设函数$f(x \in [x_i,x_j])$可由以下形式很好地近似：

$$f(x) = f_i + \frac{x-x_i}{x_j-x_i}(f_j-f_i), \tag{28}$$

其中我们引入了简写 $f(x_k) \equiv f_k$。可以选择任意可积函数 $g(x)$；若已知$g(x)$的原函数，就可以求得该积分的解析形式。定义 $G'(x) = g(x)$，则很容易证明：

$$\int_{x_i}^{x_j} g(f(x))\mathrm{d}x = (x_j-x_i)\frac{G(f_j)-G(f_i)}{f_j-f_i}. \tag{29}$$

上述方程在$g(x)$存在可积奇点的情况下尤其有用。该奇点在$G(x)$中被消除，因此广义梯形法则不会遇到朴素梯形积分所面临的问题。此外，还可以令$g(x) = x$，从而得到常规梯形法则。对于我们的情况，令$g(x) = 1/\sqrt{x} \implies G(x) = 2\sqrt{x}$，则积分变为

$$\int_{x_i}^{x_j} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x)}} \approx 2\frac{x_j-x_i}{\sqrt{f_i}+\sqrt{f_j}}. \tag{30}$$

如果将这种广义梯形法则应用于方程 (25) 的示例，就会得到精确结果。这或许并不令人意外，因为 $f(x) = x$ 恰好是一个线性函数。通过纳入方程 (24) 中的函数$h(x)$，还可以进一步推广这个问题，不过确实需要假设$G(x) = \mathscr{G}'(x)$的原函数也是已知的。我们再次假设，函数 $h(x)$ 可以很好地近似为

$$h(x) = h_i + \frac{x-x_i}{x_j-x_i}(h_j-h_i). \tag{31}$$

然后，我们可以使用分部积分将一般积分表示为

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_i}^{x_j} h(x)g(f(x))\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{h(x)}{f'(x)}G(f(x))\right]_{x_i}^{x_j} - \int_{x_i}^{x_j}\frac{h'(x)}{f'(x)}G(f(x))\mathrm{d}x \\ &= (x_j-x_i)\frac{h_jG(f_j)-h_iG(f_i)}{f_j-f_i} - \\ &\quad \frac{(x_j-x_i)(h_j-h_i)}{(f_j-f_i)^2}(\mathscr{G}(f_j)-\mathscr{G}(f_i)) \end{aligned} \tag{32}$$

注意，如果 $h = 1$，则方程（32）与方程（29）相同。现在，通过设置即可轻松估算方程（24）的弹跳平均积分

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad G(x) = 2\sqrt{x}, \quad \mathscr{G}(x) = \frac{4}{3}x^{3/2}, \tag{33}$$

并注意到 I 中的奇异行为已被消除。这种梯形法还有一个额外的好处，这对于弹跳平均积分具有重要意义。要进行弹跳平均积分，需要通过数值方法找出 $f(x) > 0$ 的区域，这涉及求解 $f(x) = 0$，而这样的求根问题可能计算成本很高。然而，如果假设在各个采样节点之间 $f(x)$ 是分段线性函数，那么求根就会变得非常简单，且计算成本低廉。假设 $f(x)$ 是分段线性函数，与所提出的梯形法则所依据的假设一致，因此线性求根和积分方法也是一致的。

最后需要指出的是，即使在显式表达式 $g(x)$ 未知、但奇异类型已知的情况下，所提出的方法仍然具有实用价值。例如，假设我们希望对具有某种 $\ln(x)$ 型奇异性的函数 $k(x)$ 进行积分。此时，只需令 $g(x) = \ln(x)$，并令 $f(x) = \exp(k(x))$，即可得到满足广义梯形求积公式所要求形式的表达式。

B. 自适应求积

还可以采用一种更传统的方法来求反弹平均，即使用自适应求积方法[28–30]。此外，这类方法在各种代码中都很容易找到。它们在不断细化的网格上迭代应用求积公式，并且能够准确处理某些可积奇点。求积方法的精度通常也优于朴素的梯形方法，不过需要注意的是，计算成本可能更高（尤其是在尝试准确处理奇异性时）。

在实现用于弹跳平均运算的求积公式时，有几点需要注意。

- 在求取反弹平均所需的各种函数时，应采用更先进的插值方案，而不是简单的分段线性插值。如果确实采用分段线性插值，则此前给出的梯形法则的推广形式能够得到精确结果。

- 如果所选的插值规则无法求出$f(x) = 0$的精确根，则在端点附近计算被积函数时应格外小心。假设我们通过数值方法，在某个容差范围 δx 内，求得$f(x) = 0$ 的两个解，即$x0$ 和$x1$。此时，使用估计根计算的积分变为

$$\int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} \frac{h(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x, \tag{34}$$

当 $f(x_0+\delta x_0) < 0$ 或 $f(x_1+\delta x_1) < 0$时，该值会变为虚数。可以通过几种方法来规避这个问题。一种方法是将积分域缩小一定范围，以确保$f(x)$在域内始终为正。例如，给定根的容差为 δx ，可以按如下方式缩小积分域。

$$\int_{x_0+\delta x_0+\sqrt{\delta x}}^{x_1+\delta x_1-\sqrt{\delta x}} \frac{h(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x. \tag{35}$$

还可以通过确保 $f(x) \geq 0$ 来保证正定性，例如将积分改为

$$\int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} \frac{h(x)}{\sqrt{|f(x)|}}\mathrm{d}x. \tag{36}$$

这两种建议都会随着δx 趋于零而收敛到真实区域，并且不会遇到虚数问题。

- 如果采用任意插值方案，就无法先验地知道函数$f(x)$有多少个根。因此，应谨慎处理，以准确找出所有根。采用单调插值方法可以避免此类问题，因为其根的数量与线性插值方法相同。

通常，当各种函数的采样节点数量很少时，求积更受青睐。此时，足够先进的插值方案或许能够准确重构底层函数，进而可使用自适应求积对其积分。

最后我们指出，也可以通过减去奇异项来规避奇异行为，Velasco等人[31]，采用的正是这种做法；而且这种方法确实可能显著加快计算。不过，这需要准确掌握 $f(x)$ 的导数，而这并非总是能够获得。如果能够获得这类信息，那么结合数值求积使用这种方法或许更为合适。

C. 穿越计算边界的轨道

尽管给定完整的磁几何时，所述方法可用于准确计算漂移，但通常给出的只是截断区域内沿磁力线的各种量（例如 $\zeta \in [\zeta_{\min}, \zeta_{\max}]$）。例如，回旋动理学磁通管模拟会采用这种截断区域，因为模拟极长的区域在计算上代价高昂。因此，通常会有一些磁阱穿越区域边界，我们需要设法处理这些情况。应当认识到，在最一般的情况下，无法准确重建此类粒子的 BAD，因为这需要了解给定区域之外的磁场。不过，如果磁场具有旋转对称性（托卡马克就是如此），则可以重建 BAD。因此，我们将探讨在磁场被视为近似周期的情况下，如何近似计算区域以外的 BAD。

需要注意的是，即使磁场具有周期性，参与计算的函数也不一定都具有这一性质，即给定沿磁力线坐标 ζ 和总区域大小 ζ_{tot}，并非所有相关函数都满足

$$f(\zeta + N\zeta_{\mathrm{tot}}) = f(\zeta) \tag{37}$$

对于 $N \in \mathbb{Z}$。对于直接平均法，或在 Clebsch 坐标中使用几何方法时，在剪切显著的装置中，这一条件并不适用，因为漂移投影中包含一个与剪切成正比的非周期函数。为说明这一点，我们采用 IIB 节讨论的直接平均法来考察漂移。方程 (4) 将曲率漂移和梯度漂移联系起来，借此可以最直接地看出剪切的影响：

$$\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^2} = \mathbf{b}\times\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{b}\times\frac{\mu_0\nabla p}{B^2}. \tag{38}$$

若将曲率分解为测地部分和法向部分，$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_n\mathbf{n} + \kappa_g\mathbf{b}\times\mathbf{n}$，则可以将该表达式写成更简便的形式。我们得到

$$\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^2} = \left(\kappa_n - \frac{\mu_0|\nabla p|}{B^2}\right)\mathbf{b}\times\mathbf{n} - \kappa_g\mathbf{n}, \tag{39}$$

并且可以直接与副法向量 $\nabla\alpha$ 求内积。由此得到

$$\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^2}\cdot\nabla\alpha=\left(\kappa_n-\kappa_g\cot\vartheta_s-\frac{\mu_0|\nabla p|}{B^2}\right)\frac{B}{|\nabla\psi|},\tag{40}$$

其中 $\cot\vartheta_s$ 是 $\nabla\psi$ 与$\nabla\alpha$向量之间夹角的余切，即 $\cot\vartheta_s=(\nabla\psi\cdot\nabla\alpha)/|\nabla\psi\times\nabla\alpha|$。在托卡马克中，我们看到函数 B、$\nabla\psi$、 κ_n 和 κ_g 都是周期性的。只有 $\cot\vartheta_s$ 不是周期性的，除非全局磁剪切s 恰好为零。注意，径向投影

$$\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^2}\cdot\nabla\psi=-\kappa_g|\nabla\psi|\tag{41}$$

确实 只包含周期函数。为了准确地重构边界之外的漂移，我们利用以下关系[26]

$$\cot\vartheta_s(\zeta)=-\frac{|\nabla\psi|^2}{B}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\iota}{\mathrm{d}\psi}+\frac{\partial D}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi,\tag{42}$$

其中 φ_0 定义了磁力线的中心点，而D通过方程（23）与局部磁剪切相关。由方程（42）可以证明，在托卡马克中，$\cot\vartheta_s$由一个与剪切成正比的久期项和一个周期项组成。因此，该函数表现为所谓的算术拟周期函数[32,33]。从物理上看，久期项对应于磁剪切在环面上的每次环绕中对 $\nabla\psi$ 与 $\nabla\alpha$ 之间夹角产生相同的影响，即对于N 次环绕，只需简单地将相同的剪切映射应用N 次。由方程（42）可知，如果选择沿磁力线坐标为 $\zeta=\varphi$和 $\zeta_{\mathrm{tot}}=2\pi$，我们现在可以选择一个自然的边界条件，即施加$D(\varphi+N2\pi)=D(\varphi)$，如前一种情况所示，从而

$$\cot\vartheta_s(\varphi)=-\frac{|\nabla\psi|^2}{B}\left(\frac{\mathrm{d}\iota}{\mathrm{d}\psi}(\varphi-\varphi_0)+\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\partial D}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\right).\tag{43}$$

今后我们将把这种行为称为准周期性。

有些方法无需强制要求准周期性。具体而言，可以选择一种用于计算弹跳平均漂移的解析框架，使其中不包含非周期项，例如用直磁力线坐标[17]表示$\partial_\psi\mathscr{J}$。也可以通过选择适当的定义域来完全避免这一问题，使磁场强度的绝对最大值位于边界处，即$B(\zeta_{\min})=B(\zeta_{\max})=B_{\max}$，这样就不会有磁阱或穿过边界的俘获粒子。

IV. 示例、比较与结果

本节将对各种数值方法和解析方法进行比较，并将所提出的框架应用于一个示例。为此，我们考察三个例子：一个解析磁势阱、一个具有磁剪切和压力梯度的大纵横比托卡马克，以及一个仿星器平衡。

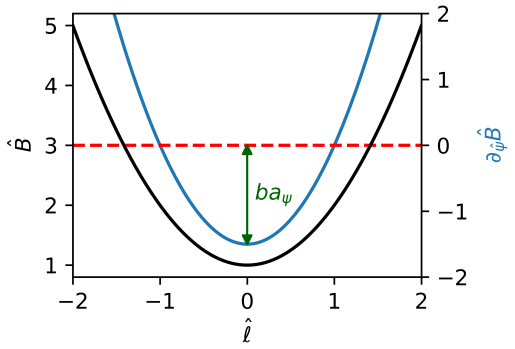


图 1. 展示磁势阱及磁场强度径向导数的图。$ba\psi$ 参数化了势阱的深度。我们使用$a_\psi=3/2$ 和$a_\ell=b=1$。

A. 简单抛物线势阱

考虑以下磁势阱

$$B(\psi,\alpha,\ell)=B_0\left(1+a_\ell\hat{\ell}^2+a_\psi\hat{\psi}\left[\hat{\ell}^2-b\right]+\alpha\hat{\ell}\right),\tag{44}$$

其中，$\hat{}\ \ell=\ell/\ell_0$、$\hat{\psi}=\psi/\psi_0$、a_ℓ 和b 为一些正的常数，而$a\psi$ 为任意常数。我们选择$\hat{\psi}=\alpha=0$ 来表示希望计算弹跳平均漂移的磁力线。此外，我们忽略任何势的影响，即令 $\Phi=0$。图 1 展示了该势阱几何。这个问题非常适合采用几何方法计算 BADs。为此，我们首先写出第二绝热不变量

$$\mathscr{J}=\sqrt{2mH}\int\mathrm{d}\ell\sqrt{1-\lambda\hat{B}}.\tag{45}$$

为找到弹跳点，我们求出平方根中被开方项为零时的纵向坐标，对 $\hat{\psi}=\hat{\alpha}=0$ 而言即为此情况。这是关于 $\hat{}$ 的一次线性方程，其解为

$$\hat{\ell}_s^2=\frac{1-\lambda}{a_\ell\lambda}.\tag{46}$$

显然，只有在 $\lambda\in[0,1]$ 时才存在解。现在让我们计算 BADs 所需的各个分量。我们首先关注弹跳时间，它可以通过方程 (20c) 求得。我们发现它可化简为

$$\tau_b=\sqrt{\frac{m}{2H}}\int_{-\ell_s}^{+\ell_s}\frac{\mathrm{d}\ell}{\sqrt{1-\lambda\hat{B}}}.\tag{47}$$

该积分在 $\hat{\psi}=\hat{\alpha}=0$ 处很容易求得，我们发现它可化简为

$$\tau_b=\ell_0\sqrt{\frac{m}{2H}}\frac{\pi}{\sqrt{a_\ell\lambda}}.\tag{48}$$

我们的下一步是评估副法向漂移。根据方程 (20a)，我们有

$$\Delta\alpha=\frac{\ell_0}{q\psi_0}\sqrt{\frac{mH}{2}}\int\frac{\lambda\partial_{\hat{\psi}}\hat{B}}{\sqrt{1-\lambda\hat{B}}}\mathrm{d}\hat{\ell}\tag{49}$$

这同样可以在 $\hat{\psi} = \alpha = 0$ 处求值，并且我们发现

$$\Delta\alpha = -\frac{\ell_0}{q\psi_0}\sqrt{\frac{mH}{2}}\frac{\pi a_\psi(\lambda + 2\lambda b a_\ell - 1)}{2a_\ell^{3/2}\sqrt{\lambda}}. \tag{50}$$

最后，由于 $\partial_\alpha B$ 是关于 $\hat{\ell}$的偶函数，因此式（20b）的径向偏移为零。于是，双法向 BAD 为

$$\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\alpha \rangle = -\frac{H}{q\psi_0}\frac{a_\psi(\lambda + 2\lambda b a_\ell - 1)}{2a_\ell} \tag{51}$$

最后，我们用俘获参数 k^2 重写上述方程，该参数与螺距角 λ 的关系为

$$k^2 = 1 - \lambda, \tag{52}$$

因此，$k^2 = 0$ 对应深度俘获粒子，而$k^2 = 1$ 对应浅度俘获粒子。需要注意的是，这一定义的k^2 仅适用于当前的抛物线势阱。使用这种俘获粒子参数化方式，我们得到

$$\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\alpha \rangle = \frac{H}{q\psi_0}\frac{a_\psi\left(k^2 - 2b a_\ell(1-k^2)\right)}{2a_\ell}. \tag{53}$$

深度俘获粒子的漂移为

$$\lim_{k^2\to 0}\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\alpha \rangle = -\frac{H}{q\psi_0} b a_\psi, \tag{54}$$

而浅度俘获粒子的漂移为

$$\lim_{k^2\to 1}\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\alpha \rangle = \frac{H}{q\psi_0}\frac{a_\psi}{2a_\ell}. \tag{55}$$

因此，正如我们所见，这个抛物线势阱中的深度俘获粒子和浅度俘获粒子朝相反方向漂移，因此俘获粒子群中总有一部分会使俘获粒子模[6,34]失稳。

现在，我们继续计算这一 BAD，并通过数值计算方程（47）和（49）中的积分来比较不同的数值方法。为了比较各种方法，我们计算若干个k^2 值下的 $\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\alpha \rangle$ 相对误差，并对这些误差取平均值。此外，我们还研究计算单个k^2值对应的 $\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\alpha \rangle$ 所需的平均时间。结果如图 2 所示。图中展示了几种方法，其中 gtrapz 表示第 III A 节讨论的广义梯形法，另外两种则是第 III B 节讨论的自适应求积方法的不同实现。这两种求积方法均利用 SciPy 的标准自适应求积积分方法来计算积分。它们的区别在于底层函数（例如B、 $\partial_\psi B$）的插值方式。m-quad 方法使用单调分段三次 Hermite 插值多项式对底层函数进行插值[35], , 而 c-quad 方法则使用三次样条。

从图 2 中展示的所有方法可以看出，就准确性而言，gtrapz 方法通常表现最差，但运行时间最短。此外，其误差的缩放关系略逊于梯形类方法的预期

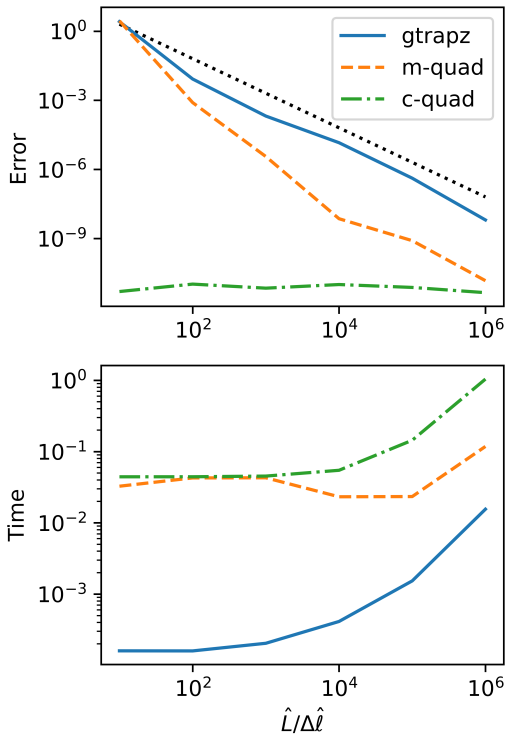


图 2。上图显示了使用各种方法计算弹跳平均漂移时的平均相对误差，黑线还表示一个 3/2 标度律。x 轴 $\hat{L}/\Delta\hat{\ell}$ 表示域中的样本总数。在此图中，我们设定了 $a_\psi = 3/2$ 和 $= a_\ell = b = 1$。下图显示了计算一次弹跳平均漂移所需的总平均时间。

：其误差呈 3/2 缩放（以黑色虚线表示），而不是随网格尺寸呈平方关系缩放。另一方面，m-quad 方法的准确性更高，但代价是运行时间大幅增加。由于 m-quad 插值方法无法以机器精度构造底层函数，我们看到误差会随着网格点数量的增加而减小。这与 c-quad 方法形成对比，后者能够使用插值方法重建底层函数。因此，误差几乎不受网格尺寸影响，其数值由积分方法和求根算法的容差决定。需要注意的是，c-quad 的运行时间确实最长。

顺便提一下，我们也测试了其他求积方法，但这里没有展示这些结果。特别出色的一种方法是所谓的双曲正切求积公式，因为当被积函数在端点处变为奇异时，这种方法表现良好[36]。与 SciPy 的标准求积方法相比，使用这种方法计算积分确实能显著缩短运行时间，不过梯形法通常仍然是最快的。然而，我们发现双曲正切求积公式的结果很大程度上取决于底层插值器，而特别糟糕的选择可能会导致这种方法

未收敛。

总的来说，我们发现抛物线势阱为比较不同数值算法提供了良好的基准；当网格尺寸变化时，这些算法的精度表现各不相同。不同算法的计算成本也有所差异，因此在速度、精度和实现难易度方面，并不存在一种全方位最优的方法。最后还应注意，插值算法会对误差产生显著影响；找到一种能够准确重建底层函数的插值方法，可以大幅降低误差。最后我们指出，当前结果来自 Python 实现。我们也用 Julia 构建了一个类似的软件包，所得结果在定性趋势上相同，不过运行时间的差异较小。

B. 大纵横比圆截面托卡马克

本节比较两种计算 BAD 的解析方法，并研究穿越计算边界的轨道的 BAD。我们以具有圆形截面、磁剪切和压力梯度的大纵横比托卡马克几何为例进行分析。Connor、Hastie 和 Martin [37]，此前曾在这一背景下研究过这种几何，并推导出该极限下反弹平均漂移的解析表达式。他们发现，在这种几何中，副法向上的 BAD 会变为

$$\langle \mathbf{v}_d \cdot \nabla\alpha \rangle = -\frac{2H}{qB_0R_0r}\left(G_1 - \frac{(\iota\alpha)^2}{4} + 2sG_2 - \alpha G_3\right), \quad (56)$$

其中，R_0 为主径向坐标，r 为次径向坐标，ι 为旋转变换，$s = -r\partial_r \ln(\iota)$ 为磁剪切，而 $\alpha = -(2\mu_0 R_0/\iota^2 B_0^2)\partial_r p$ 为归一化压力梯度，其中 $p(r)$ 表示压力。函数 G_i 取决于俘获参数k^2, , 该参数在一般几何中定义为

$$k^2 = \frac{\hat{B}_{\max} - \lambda \hat{B}_{\min}\hat{B}_{\max}}{\hat{B}_{\max} - \hat{B}_{\min}}, \quad (57)$$

其中下标 max 和 min 分别表示该函数的最大值和最小值。利用这一俘获参数，函数G_i 是

$$G_1(k^2) = \frac{E(k^2)}{K(k^2)} - \frac{1}{2}, \quad (58a)$$

$$G_2(k^2) = \frac{E(k^2)}{K(k^2)} + k^2 - 1, \quad (58b)$$

$$G_3(k^2) = \frac{2}{3}\left(\frac{E(k^2)}{K(k^2)}(2k^2-1) + 1 - k^2\right), \quad (58c)$$

其中，$K(k^2)$ 和 $E(k^2)$ 分别是第一类和第二类完全椭圆积分。可以利用 NE3DLE 代码，生成参与 $\partial_\psi \mathcal{J}$ 的各种函数的剖面，或

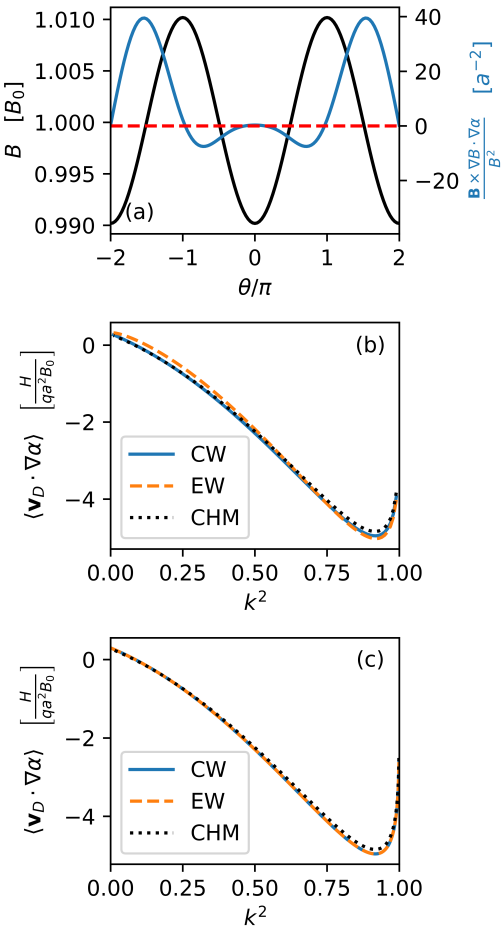


图3。（a）图显示了磁场强度和梯度漂移。（b）图和（c）图展示了通过直接平均法计算得到的弹跳平均漂移随俘获参数 k^2 的变化。（b）图采用准周期边界条件，（c）图则显示了通过几何法计算得到的结果。CHM 表示解析结果，CW 表示中心势阱中的漂移，EW 表示穿越边界的势阱中的漂移。

生成漂移$\mathbf{v}_D \cdot \nabla x$的投影。该代码根据给定的三维形状 ι，以及压力梯度、全局剪切或磁通面平均平行电流三者中的任意两项[26]，求解磁通面附近的磁流体动力学平衡方程。因此，可以轻松指定一个具有剪切和压力梯度的大长径比圆形磁通面，这与 Connor、Hastie 和 Martin 所采用的假设一致[37]。在这种几何构型下，我们考察计算漂移的不同解析方法。这些方法彼此等价，但在所选边界条件下，对于穿越边界的粒子，可能会出现细微差异。数值积分采用上一节介绍的 c-quad 方案。

结果绘制于图3中，其中我们选择了$s = 7$ 和 $\alpha = 5$。在图(a)中，磁场强度与蓝色表示的梯度漂移一同显示，作为.....的函数。

极向角 θ。图 (b) 和 (c) 分别展示了使用 IIB节中的直接平均法和 IIC节讨论的几何法计算得到的 BAD。后者是在直磁力线坐标中完成的，因此无需强制满足准周期性。

我们先关注图 (b)，可以看到，解析结果（记为 CHM）与中央阱的数值结果（记为 CW）高度吻合。穿过计算边界的阱记为 EW（边缘阱，即 $\theta \in (-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi)$），其以黄色显示的反弹平均漂移也在很大程度上吻合，尽管并非完全一致。最后，在图 (c) 中，边缘阱与中央阱的结果完全吻合。这是计算漂移时所用几何法的结果；进入 $\partial_\psi \mathscr{J}$ 的函数都严格周期，因此满足边界条件。

应当认识到，此处选择的所有边界条件仅在特殊情况下适用。如果任意选择区域 $\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$，则无法保证底层函数在该区域内是（准）周期性的。对于三维平衡态上的任意磁力线，情况也同样如此，因为此时磁力线的周期性遭到破坏。

C. 仿星器平衡与径向电场的影响

在本节中，我们计算一般三维平衡中的漂移。我们选择研究 NCSX 平衡[39]，，因为该构型中同时存在径向漂移和副法线漂移。此外，我们人为地向系统中加入径向电场，并研究其如何改变俘获粒子的漂移。

为研究径向电场如何改变 BADs，我们采用 IIB节中讨论的直接平均方法。假设存在形式如下的径向电场

$$\mathbf{E} = E_\psi \nabla \psi. \tag{59}$$

显然，径向电场仅对副法线漂移有贡献，因为 $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$。该副法线漂移很容易求得为常数，

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla \alpha = E_\psi. \tag{60}$$

由于反弹平均算符是线性的，总 BAD 可表示为各个分量之和。因此，副法线漂移变为

$$\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla \alpha \rangle = E_\psi + \frac{H}{qB_0} \times \left\langle \left(\lambda \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} + 2(\hat{B}^{-1} - \lambda) \frac{\mathbf{B} \times \boldsymbol{\kappa}}{B} \right) \cdot \nabla \alpha \right\rangle. \tag{61}$$

由此可见，径向电场对弹跳平均漂移的影响很简单；它只是在

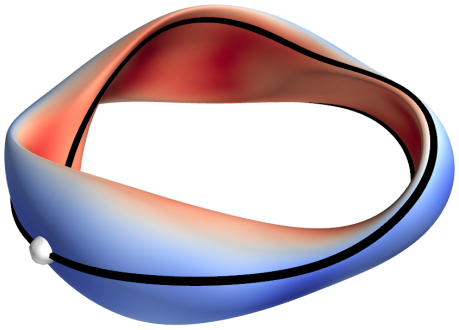


图 4。黑色显示了用于计算漂移的 NCSX 磁力线，白点表示中心点，$\theta = 0$。颜色表示磁场强度，红色表示强磁场，蓝色表示弱磁场。所示表面位于 $\psi/\psi_{\text{edge}} = 0.5$。

漂移上增加一个常数。为完整起见，我们也列出径向漂移，其表达式为

$$\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla \psi \rangle = \frac{H}{qB_0} \times \left\langle \left(\lambda \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} + 2(\hat{B}^{-1} - \lambda) \frac{\mathbf{B} \times \boldsymbol{\kappa}}{B} \right) \cdot \nabla \psi \right\rangle. \tag{62}$$

接下来我们注意到，尽管 BAD 会受到径向电场的影响，但磁通管中的回旋动理学不稳定性却不受影响，频率仅发生简单的多普勒频移。这一点起初可能令人惊讶，因为副法向 BAD 与抗磁漂移乘积的符号决定了线性 TPM 稳定性。然而，抗磁漂移波也会随 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移一起被对流，因此可以进行伽利略变换 $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$，转换到一个径向电场影响消失的参考系中[7,16,40,41]。这一论证适用于仿星器中的磁通管或托卡马克中的磁通面，因此，如果研究全局效应[42,43]，就可能发现径向电场造成的重要差异。例如，在仿星器的磁通面上，显著的电场会使俘获粒子以更快的速度绕整个磁通面进动，因此这些粒子经历的是磁通面平均漂移，而不是沿单条磁力线的平均漂移。如果俘获粒子所采样的径向漂移的磁通面平均值低于某些单独磁力线上的径向漂移，则新经典输运会显著降低。对于高能粒子而言，这一机制的作用较弱，因为与曲率漂移和梯度漂移不同，$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$漂移不随粒子能量缩放。

现在，让我们研究没有径向电场时 NCSX 中的 BADs。计算漂移所沿的磁力线如图 4 所示，磁场强度和梯度漂移随极向 Boozer 角的变化如图 5 所示。通过选择 $B(\theta_{\min}) = B(\theta_{\max}) = B_{\max}$，我们设置了计算域，使边界效应无关紧要。为了能够比较副法向 BAD 和径向 BAD，我们首先确保

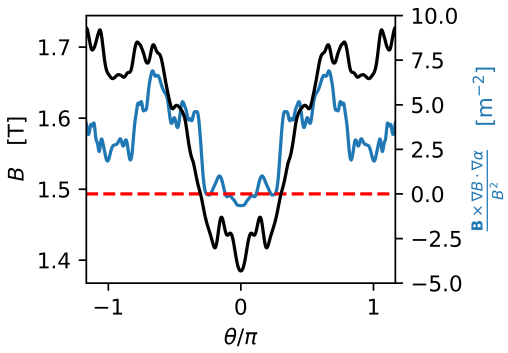


图 5. 黑线表示磁力线上的磁场强度随极向 Boozer 角的变化。蓝线表示 ∇B 漂移，红线表示 ∇B 漂移变号的位置边界。

它们具有相同的单位。为此，我们将径向坐标定义为长度单位：

$$r = a\sqrt{\frac{\psi}{\psi_{\text{edge}}}}, \tag{63}$$

其中，a 是装置的小半径，ψ 是磁通面标签，ψ_{edge} 是最外层闭合磁通面处的环向磁通。此外，我们定义一个以长度为单位的副法向坐标：

$$y = r_0\alpha, \tag{64}$$

其中，r_0 是所讨论磁通面的径向坐标。最后，我们将漂移归一化为

$$\langle \hat{\mathbf{v}}_D \cdot \nabla y \rangle = \frac{qaB_0}{H}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\alpha \rangle, \tag{65a}$$

$$\langle \hat{\mathbf{v}}_D \cdot \nabla r \rangle = \frac{qaB_0}{H}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi}\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla\psi \rangle. \tag{65b}$$

我们在图 6 中绘出方程 (65a) 和 (65b) 定义的归一化漂移随方程 (57) 中俘获参数k^2 的变化。我们还绘出了相同漂移随反弹角的变化，即满足以下方程的 θ 值

$$1 - \lambda\hat{B}(\theta) = 0. \tag{66}$$

由于可以为每个反弹阱和 λ 计算两个反弹角，而它们也唯一确定径向漂移和副法线漂移，因此可以绘制 $\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla r \rangle(\theta)$ 和 $\langle \mathbf{v}_D \cdot \nabla y \rangle(\theta)$。其中有几种值得注意的趋势。首先可以看到图 6 中有多条不连续的线，每一段线都对应一个唯一的反弹阱。请注意，径向漂移通常小于副法线漂移。这是 NCSX 具有近似准轴对称性的结果，因为严格准轴对称的系统没有反弹平均径向漂移。中央阱的径向漂移甚至恰好为零。这是由所选磁力线造成的：由于该点具有仿星器对称性，瞬时径向漂移是 θ 的偶函数，且中央阱的反弹平均恒为零。这也解释了反弹平均径向漂移图的镜像对称性，因为偶函数在两个对称阱上的反弹平均仅相差一个符号。有趣的是，尽管反弹平均径向漂移往往较小，但有两个阱的漂移相当显著。从底部图中可以看到，这两个阱对应于中央阱两侧相邻的两个俘获阱，因此它们的新经典输运表现可能尤其差。接下来请注意，副法线漂移在 $k^2 = 0$ 处最小，此处的粒子俘获最深。应用俘获粒子模稳定性判据[6], 可知，对于由密度梯度驱动的俘获粒子模，只有这些深度俘获粒子会导致不稳定[44]。

总而言之，我们看到，展示弹跳平均漂移的图有助于评估磁力线的各种性质，例如找出预期新经典输运较差的区域、找出存在俘获粒子模不稳定性的俘获粒子群体，以及评估优化方案的结果。

V. 结论

我们介绍了三种计算俘获粒子平均漂移的方法：粒子轨道追踪法、直接平均法和几何法。尽管在 ρ_* 较小时，这些方法等价，但在数值和解析情形下，计算难易程度可能各不相同。为了在一般情形下计算弹跳平均漂移，我们介绍了两种求解弹跳平均积分的数值方法，包括一种适用于任意可积奇异性的梯形法则推广形式，以及一种更常用的求积法。

我们在一种简单的磁几何中比较了各种数值方法的性能，即抛物线形俘获势阱。我们发现，广义梯形法则的误差会随着网格点数量的增加，按 $3/2$ 次幂下降。另一方面，求积法的误差标度则强烈取决于插值方法和所选的数值容差。总体而言，我们发现，与求积法相比，广义梯形法则在计算成本方面表现优异，因此适用于扫描大型数据库或用于优化循环。

我们还研究了具有磁剪切和压力梯度的大纵横比托卡马克中的弹跳平均漂移。在这种情况下，我们比较了计算弹跳平均漂移的不同解析方法，并检验了穿过计算域的俘获粒子的准周期条件。结果发现，直接平均法与直磁力线角坐标中的几何法所得结果一致。

最后，我们利用所提出的框架研究 NCSX 中的反弹平均漂移。我们发现，径向漂移通常较小，这是由其近似

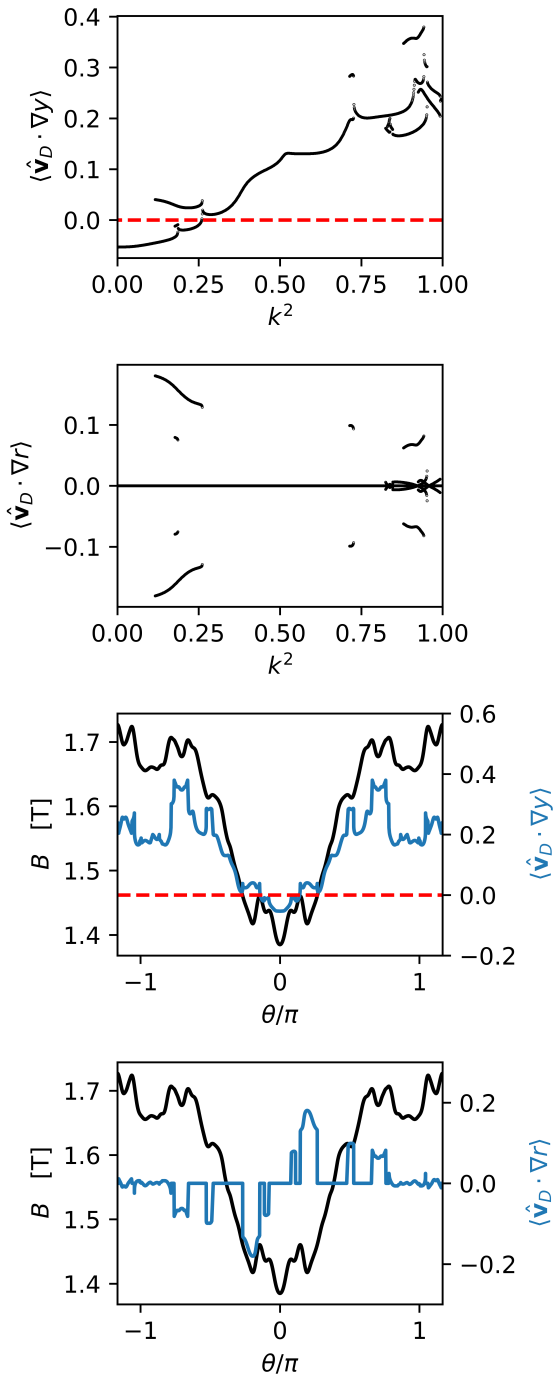


图 6. 上方两幅图显示副法向漂移和径向漂移随k^2的变化。下方两幅图显示相同的量随极向弹跳角的变化。

准轴对称性所致。此外，通过考察副法线漂移，可以轻松评估俘获粒子模的线性稳定性。我们还研究了径向电场如何改变反弹平均漂移，发现其总体影响很简单：只是在副法线漂移上增加一个常数。我们讨论了径向电俘获粒子轨道上的场，并指出新经典输运可能会减弱。

总而言之，我们看到，本文介绍的各种方法都是计算反弹平均漂移的有效途径，而利用这些反弹平均漂移可以快速推断出重要性质。此外，这些方法还可轻松用于多种代码中计算反弹平均漂移，适用范围从陀螺动理学代码到平衡代码。该代码套件已以 Python 形式提供，可通过标准方法安装[45]。此外，它还可用于计算任意函数的反弹平均值，例如静电势，这正是俘获粒子模色散关系所需要的[7]。

致谢

作者感谢与 B. Faber、M.J. Pueschel、E. Rodríguez、A. Goodman、P. Mul- holland、P. Costello、M. Morren 和 R. Jorge 进行的富有成效的讨论。本研究部分由 Simons 基金会的资助（560651, PH）支持。本出版物是项目“塑造湍流——构建聚变反应堆湍流优化框架”的成果，该项目隶属于研究计划“荷兰科学研究组织开放竞争领域科学计划”，项目编号为 OCENW.KLEIN.013，由荷兰研究理事会（NWO）资助。本研究在 EUROfusion 联盟框架内开展，由欧盟通过 Euratom 研究与培训计划资助（资助协议编号：101052200—EUROfusion）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧盟委员会的观点。欧盟和欧盟委员会均不对这些观点和意见承担责任。

[1]A. H. Boozer, 《输运与同构平衡态》, 《流体物理学》**26**, 496–499（1983年）。[2]E. Rodriguez、P. Helander 和 A. Bhattacharjee, 《准对称性的必要与充分条件》, 《等离子体物理学》**27**, 062501（2020年）。[3]C. Beidler、H. Smith、A. Alonso、T. Andreeva、J. Baldzuhn、M. Beurskens、M. Borchardt、S. Bozhenkov、K. Brunner、H. Damm、等, 《证明温德尔施泰因 **7596**中新经典输运降低》, 《自然》– ()。[4]M. Landreman 和 E. Paul, 《用于等离子体约束的精确准对称磁场》, 《物理评论快报》**128**, 035001（2022年）。[5]A. Goodman、K. C. Mata、S. A. Henneberg、R. Jorge、M. Landre man、G. Plunk、H. Smith、R. Mackenbach 和 P. Helander, 《构造精确的准等动力学磁场》, arXiv 预印本 arXiv:2211.09829（2022年）。[6]J. H. E. Proll、P. Helander、J. W. Connor 和 G. Plunk, 《准等动力学仿星器对俘获粒子不稳定性的抵御能力》, 《物理评论快报》**108**, 245002（2012年）。[7]P. Helander、J. H. E. Proll 和 G. G. Plunk, 《仿星器中的无碰撞微观不稳定性。一、俘获粒子模的解析理论》, 《等离子体物理学》**20**, 122505（2013年）。[8]P. Helander, 《无碰撞等离子体的可用能与基态》, 《等离子体物理学杂志》**83**, 715830401（2017年）。[9]R. t. White 和 M. Chance, 《任意截面等离子体的哈密顿导引中心漂移轨道计算》, 《流体物理学》**27**, 2455–2467（1984年）。[10]C. Roach、J. Connor 和 S. Janjua, 《先进托卡马克中的俘获粒子进动》, 《等离子体物理与受控聚变》**37**, 679（1995年）。

[11]A. Marinoni、S. Brunner、Y. Camenen、S. Coda、J. Graves、X. Lapillonne、A. Pochelon、O. Sauter 和 L. Villard，《等离子体三角形度对湍流输运的影响：通过线性和非线性回旋动理学模拟对 TCV 实验进行建模》，《等离子体物理与受控聚变》**51**，055016（2009年）。[12]J. Proll、H. Mynick、P. Xanthopoulos、S. Lazerson 和 B. Faber，《仿星器中的 TEM 湍流优化》，《等离子体物理与受控聚变》**58**，014006（2015年）。[13]C. Gan 和 D. Zhou，《自洽局部平衡模型及其在计算俘获电子进动中的应用》，《物理学文献》**96**，105603（2021年）。[14]C. D. Stephens、X. Garbet、J. Citrin、C. Bourdelle、K. L. van de Plassche 和 F. Jenko，《准线性回旋动理学理论：QuaLiKiz 的推导》，《等离子体物理学杂志》**87**，905870409（2021年）。[15]R. Mackenbach、J. H. Proll 和 P. Helander，《俘获电子的可用能及其与湍流输运的关系》，《物理评论快报》**128**，175001（2022年）。[16]P. Helander 和 D. J. Sigmar，《磁化等离子体中的碰撞输运》，磁化等离子体中的碰撞输运，第 4 卷（剑桥大学出版社，2005年）。[17]C. Hegna，《三维场对托卡马克中弹跳平均粒子漂移的影响》，《等离子体物理学》**22**，072510（2015年）。[18]P. Helander，《非轴对称磁场中的等离子体约束理论》，《物理学进展报告》**77**，087001（2014年）。[19]H. d. Blank，《导引中心运动》，《聚变科学与技术》**45**，47–54（2004年）。[20]C. G. Albert、S. V. Kasilov 和 W. Kernbichler，《通过仿星器优化加速直接计算聚变阿尔法粒子损失的方法》，《等离子体物理学杂志》**86**，815860201（2020年）。[21]E. Paul、A. Bhattacharjee、M. Landreman、D. Alex、J. Velasco 和 R. Nies，《接近准对称性的反应堆尺度平衡态中的高能粒子损失机制》，《核聚变》**62**，126054（2022年）。[22]A. H. Boozer，《具有有理磁面的等离子体平衡》，《流体物理学》**24**，1999–2003（1981年）。[23]P. Xanthopoulos、W. A. Cooper、F. Jenko、Y. Turkin、A. Runov 和 J. Geiger，《用于环形构型中回旋动理学微湍流研究的几何接口》，《等离子体物理学》**16**，082303（2009年）。[24]F. Jenko、W. Dorland 和 G. Hammett，《环形电子温度梯度模的临界梯度公式》，《等离子体物理学》**8**，4096–4104（2001年）。[25]M. Landreman、B. Medasani、F. Wechsung、A. Giuliani、R. Jorge 和 C. Zhu，《Simsopt：用于仿星器优化的灵活框架》，《开源软件杂志》**6**，3525（2021年）。[26]C. Hegna，《局部三维磁静力平衡》，《等离子体物理学》**7**，3921–3928（2000年）。[27]M. J. Gerard、B. Geiger、M. J. Pueschel、A. Bader、C. C. Hegna、B. J. Faber、P. W. Terry、S. T. A. Kumar 和 J. C. Schmitt，《通过线圈电流调整优化 HSX 仿星器的微观不稳定性》，《核聚变》**63**，056004（2023年）。[28]D. Calvetti、G. Golub、W. Gragg 和 L. Reichel，“高斯–克朗罗德求积公式的计算”，《计算数学》**69**，1035–1052（2000年）。[29]W. Gander 和 W. Gautschi，“自适应求积——再探”，BIT 数值数学 **40**，84–101（2000年）。[30]P. Gonnet，“自适应求积中的误差估计综述”，《ACM 计算调查》（CSUR）**44**，1–36（2012年）。[31]J. L. Velasco、I. Calvo、F. I. Parra 和 J. García-Regaña，“Knosos：用于仿星器几何中轨道平均的新古典快速代码”，计算物理学杂志 **418**，109512（2020年）。[32]C. Corduneanu，《几乎周期振荡与波动》（施普林格科学与商业媒体，2009年）。[33]T. Oka，“阻尼波动方程的时空算术准周期均匀化”，《应用数学研究成果》**15**，100310（2022年）。[34]M. N. Rosenbluth，“交换不稳定性的低频极限”，《流体物理学》**11**，869–872（1968年），https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1692009。[35]F. N. Fritsch 和 J. Butland，“构造局部单调分段三次插值函数的方法”，《SIAM 科学与统计计算杂志》**5**，300–304（1984年）。[36]H. Takahasi 和 M. Mori，“数值积分的双指数公式”，《数理科学研究所刊物》**9**，721–741（1974年）。[37]J. Connor、R. Hastie 和 T. Martin，“压力梯度对托卡马克中弹跳平均粒子漂移的影响”，《核聚变》**23**，1702（1983年）。[38]J. Duff，“NE3DLE 代码”，https://gitlab.com/jduff2/NE3DLE，访问日期：2023年2月17日。[39]M. Zarnstorff、L. Berry、A. Brooks、E. Fredrickson、G. Fu、S. Hirshman、S. Hudson、L. Ku、E. Lazarus、D. Mikkelsen、等，“紧凑型先进仿星器 NCSX 的物理学”，《等离子体物理与受控聚变》**43**，A237（2001年）。[40]T. M. Antonsen Jr 和 B. Lane，“非均匀等离子体中低频不稳定性的动力学方程”，《流体物理学》**23**，1205–1214（1980年）。[41]P. Catto、W. Tang 和 D. Baldwin，“广义回旋动理学”，《等离子体物理学》**23**，639（1981年）。[42]L. Villard、A. Bottino、O. Sauter 和 J. Vaclavik，“托卡马克和仿星器中的径向电场与全局静电微观不稳定性”，《等离子体物理学》**9**，2684–2691（2002年）。[43]P. Xanthopoulos、G. G. Plunk、A. Zocco 和 P. Helander，“仿星器中的内禀湍流稳定化”，《物理评论 X》**6**，021033（2016年）。[44]一个重要推论是，稳定性判据严格来说仅在完全全生的系统中成立。[45]R. Mackenbach、J. Duff 和 M. Gerard，“BAD 代码”，https://github.com/RalfMackenbach/BAD，访问日期：2023年4月11日。