arXiv:2305.01227v1 [math.ST] 2 May 2023

不等样本最小值与最大排序集抽样的一般加权外熵

Santosh Kumar Chaudhary*，Nitin Gupta** 印度理工学院克勒格布尔分校数学系，印度西孟加拉邦，邮编 721302

摘要

在工业、环境和生态调查中，排序集抽样是一种抽样方法，使实验者能够利用总体值的整个取值范围。排序集抽样过程可以通过两种极为有用的方式加以改进：不等样本最大排序集抽样和不等样本最小排序集抽样。它们能够增加集合大小，同时避免引入过多排序误差。本文定义了样本量不等时最小和最大排序集样本的一般加权外熵（GWJ）（分别记为 minRSSU 和 maxRSSU）。我们在不同情形下研究了随机比较和单调性质。此外，我们将这两种抽样数据的外熵与排序集抽样数据和简单随机抽样数据的外熵进行了比较。最后，得到了 minRSSU 和 maxRSSU 的 GWJ 界。

K关键词：外熵；一般加权外熵；不等样本下的最大和最小排序集抽样 pli；次序统计量；简单随机抽样；随机序。

数学主题分类：62B10；62D05；60E15。

1 引言

McIntyre（1952年）提出了排序集抽样（秩集抽样），以提高样本均值估计总体均值的准确性。在估计总体均值方面，秩集抽样似乎比简单随机抽样更有效。秩集抽样是一种抽样技术，可用于提高为实验或研究选择样本单位的成本效益。通常建议，对样本单位进行排序而非测量，这样成本更低、操作也更简单。Bain 和 Engelhardt（2017年）介绍了 Stokes（1977年）提出的秩集抽样应用实例，其中研究变量 Y 表示海水中的石油污染，辅助变量 X 表示附近海岸上的焦油沉积。在这个例子中，采集海水样本并测量石油污染既困难又昂贵。然而，周边终端海岸上的焦油沉积能充分反映海水污染的普遍程度。在这一实例中，根据海岸上的焦油沉积对海水污染程度进行排序，比凭目测或判断法排序更自然、更科学。与简单随机抽样相比，秩集抽样是估计总体均值更有效的抽样方法。读者可以

* 通讯作者电子邮箱：skchaudhary1994@kgpian.iitkgp.ac.in **电子邮箱：nitin.gupta@maths.iitkgp.ac.in

参阅 Ozturk 和 Wolfe（2000）、Chen 等（2004）、Jemain 等（2007）、Tseng 和 Wu（2007），以及 Al-Saleh 和 Diab（2009），了解更多有关秩集抽样的详情。

Al-Odat 和 Al-Saleh（2001）以及 Biradar 和 Santosha（2014）分别提出了不等样本的最小秩集抽样（MinRSSU）和不等样本的最大秩集抽样（maxRSSU），将其作为两种重要的秩集抽样变体。他们将 MinRSSU 和 maxRSSU 视为移动极值秩集抽样设计；然而，Rahmani 和 Razmkhah（2017）分别研究了这两种设计，以实现理想排序检验。作为对秩集抽样技术的有益改进，Qiu 和 Eftekharian（2021）研究了不等样本的最小秩集抽样和最大秩集抽样过程（minRSSU 和 maxRSSU）的外熵。在 minRSSU 和 maxRSSU 中，我们抽取 n 个简单随机样本，其中第 i–个样本的大小为 i、 $i = 1$、$\ldots n$. 单周期 minRSSU 或 maxRSSU 首先对大小为 n的 n 个样本进行排序。对于所有 $i = 1$、2、...、n，我们收集 $Z_i = X_{(1:i)i}$；对于所有 $i = 1$、2、...、n，我们收集 $Y_i = X_{(i:i)i}$，其中 $X_{(i:j)j}$表示大小为 j. 的第 j个简单随机抽样中的第 i个次序统计量。所得样本称为大小为 n 的单周期 minRSSU 和 maxRSSU，分别记为 $Z_{minRSSU} = \{Z_i : \ i = 1、\ldots、\ n\}$ 和 $Y_{maxRSSU} = \{Y_i : \ i = 1、\ldots、\ n\}$（见 Biradar 和 Santosha（2014））。

已有多位作者提出了秩集抽样及其变体的信息测度（参见 Eskandarzadeh 等（2018）、Raqab 和 Qiu（2019）、Qiu 和 Raqab（2022）以及 Gupta 和 Chaudhary（2023）等）。设 X 为一个概率密度函数为 f. 的非负绝对连续随机变量。Lad 等（2015）提出了一种称为外熵的新信息测度，

$$J(X) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(x)dx = -\frac{1}{2}E\left(f(X)\right). \tag{1.1}$$

Raqab 和 Qiu（2019）使用外熵来评估秩集抽样数据的信息含量。Qiu 和 Eftekharian（2021）从外熵的角度研究了不等样本下最小值和最大值秩集抽样的信息含量。Chacko 和 George（2022）研究了排序不完美时排序集样本（RSS）的外熵性质。通过推导伴随次序统计量外熵的表达式，Chacko 和 George（2022）得到了研究变量 Y 的秩集抽样外熵表达式；其中，使用辅助变量 X 对每个集合中的单位进行排序，并假设（X, Y）服从 Morgenstern 分布族。

Gupta 和 Chaudhary（2023）针对带权重 $w(x) \geq 0$ 的非负随机变量 X 引入了一般加权外熵（GWJ），定义为

$$J^w(X) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty w(x)f^2(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du = -\frac{1}{2}E(\Lambda_X^w(U)), \tag{1.2}$$

其中，$\Lambda_X^w(u) = w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))$，且 U是在（0, 1）上均匀分布的随机变量，即 $U \sim$ uniform(0, 1)。

本文的主要目标是研究 maxRSSU 和 minRSSU 数据的一般加权外熵特征。本文其余部分安排如下。第 2 节定义了 minRSSU 和 maxRSSU 的 GWJ，并对不同分布进行了评估。第 3 节进行了随机比较。第 4 节探讨 minRSSU 和 maxRSSU 的 GWJ 的单调性质。第 5 节给出了 minRSSU 和 maxRSSU 的 GWJ 的界。第 6 节总结全文。

2 maxRSSU 和最小RSSU 的 GWJ

设 X 是一个有限均值为 μ、方差为 σ^2 的非负随机变量。设 X_1、X_2、...、X_n 是来自 X. 的随机样本。$\mathbf{X}_{SRS} = \{X_i : \quad i = 1、...、n\}$ 的联合概率密度函数为 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$。$\mathbf{X}_{SRS}^{(n)}$ 的一般加权外熵定义如下（Gupta 和 Chaudhary（2023））

$$J^w(\mathbf{X}_{SRS}^{(n)}) = \frac{-1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^\infty w(x_i)f^2(x_i)dx_i\right) = \frac{-1}{2}\left(-2J^w(X)\right)^n = \frac{-1}{2}\left(E(\Lambda_X^w(U))\right)^n. \quad (2.1)$$

$\mathbf{X}_{RSS}^{(n)}$ 的 GWJ 定义如下（参见 Gupta 和 Chaudhary (2023)）

$$J^w(\mathbf{X}_{RSS}^{(n)}) = -\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(-2J^w(X_{(i:n)i})\right) = -\frac{Q_n}{2}\prod_{i=1}^{n}E\left(\Lambda_X^w(B_{2i-1:2n-1})\right),$$

其中

$$Q_n = n^n\prod_{i=1}^{n}c_{i,n},$$
$$c_{i,n} = \frac{\binom{2i-2}{i-1}\binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n-1}{n-1}},$$

且 $B_{2i-1:2n-1}$ 是一个参数为（$2i-1$）和（$2n-2i+1$）的服从贝塔分布的随机变量。现在，我们可以将 $\mathbf{X}_{minRSSU}^{(n)}$ 的 GWJ 写为

$$\begin{aligned}
J^w(\mathbf{X}_{minRSSU}^{(n)}) &= -\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}[-2J^w(X_{1:i})] \quad (2.2)\\
&= -\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^\infty w(x)f_{1:i}^2(x)dx\right)\\
&= -\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^\infty w(x)i^2(1-F(x))^{2i-2}f^2(x)dx\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 w(F^{-1}(u))(1-u)^{2i-2}f(F^{-1}(u))du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (2i-1)(1-u)^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{n}E(\Lambda_X^w(B_{1,2i-1})), \quad (2.3)
\end{aligned}$$

其中 $(2n-1)!! = \prod_{i=1}^{n}(2i-1) = 1.3.5.7\ldots(2n-1)$，且 $B_{1,\ 2i-1}$ 是一个参数为 1 和 $2i-1.$ 的贝塔分布随机变量

此外，我们还可以将 $\mathbf{X}_{maxRSSU}^{(n)}$ 的 GWJ 写为

$$
\begin{aligned}
J^w(\mathbf{X}_{maxRSSU}^{(n)}) &= -\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}[-2J^w(X_{i:i})] \qquad (2.4)\\
&= -\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^\infty w(x)f_{i:i}^2(x)dx\right)\\
&= -\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^\infty w(x)i^2(F(x))^{2i-2}f^2(x)dx\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 w(F^{-1}(u))u^{2i-2}f(F^{-1}(u))du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (2i-1)u^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{n}E(\Lambda_X^w(B_{2i-1,1})), \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

其中 $B_{2i-\ 1,\ 1}$ 是一个参数为 $2i-1$ 和 1 的贝塔分布随机变量 .

注 1 对于 $w(x) = 1$，我们得到 Qiu 和 Eftekharian (2021) 给出的表达式。

现在我们提供一些示例来说明方程 (2.3) 和 (2.5)。

例 1 设 Y 为服从幂分布的随机变量。 Y 的概率密度函数和累积分布函数分别为 $f(y) = \theta y^{\theta-1}$ 和 $F(y) = y^\theta,\quad 0<y<1,\quad \theta>0$。设 $w(y) = y^m,\quad y>0,\quad m>0$，则可得

$$\Lambda_Y^w(u) = w(F_Y^{-1}(u))f_Y(F_Y^{-1}(u)) = \theta u^{\frac{m+\theta-1}{\theta}}$$

对于 $w(x) = x^m.$，由（2.3）可得

$$
\begin{aligned}
J^w(\boldsymbol{X}_{minRSSU}^{(n)}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (1-u)^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (1-u)^{2i-2}\theta u^{\frac{m+\theta-1}{\theta}}\ du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2\theta^n}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 u^{\frac{m+\theta-1}{\theta}}\ (1-u)^{2i-2}du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2\theta^n}{2}\prod_{i=1}^{n}\beta\left(\frac{m+\theta-1}{\theta}+1, 2i-1\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\beta(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du.$

此外，由式（2.5）可得

$$\begin{aligned}
J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{maxRSSU}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 u^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 u^{2i-2}\theta u^{\frac{m+\theta-1}{\theta}}du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2\theta^n}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 u^{2i-2+\frac{m+\theta-1}{\theta}}du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2\theta^n}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1+\frac{m+\theta-1}{\theta}}\\
&= -\frac{(n!)^2\theta^n}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta}{2i\theta+m-1}.
\end{aligned}$$

例2 设 Z 服从指数分布，其累积分布函数为 $F_Z(z)=1-e^{-\lambda z}$, $\lambda>0$, $z>0$。设 $w(x)=x^m$, $m>0$, $x>0$，则可得娱乐主管

$$\Lambda^w_Z(u)=w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))=\frac{(-1)^m(1-u)(ln(1-u))^m}{\lambda^{m-1}}, 0<u<1.$$

那么，由（2.3）可得

$$\begin{aligned}
J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{minRSSU}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (1-u)^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \frac{(1-u)^{2i-1}(-1)^m(ln(1-u))^m}{\lambda^{m-1}}du\right)\\
&= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{(-1)^m}{\lambda^{m-1}}\left(\int_0^1 (1-u)^{2i-1}(ln(1-u))^m du\right).
\end{aligned}$$

代入 $u=1-e^{-x}$ 并使用 $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$, 我们得到:

$$\begin{aligned}
J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{minRSSU}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{(-1)^m}{\lambda^{m-1}}\left(\int_0^1 e^{-2ix}(-x)^m dx\right).\\
&= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda^{m-1}}\left(\int_0^1 e^{-2ix}x^m dx\right).\\
&= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda^{m-1}}\left(\frac{\Gamma(m+1)}{(2i)^{m+1}}\right).\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^{m-1}}\right)^n\left(\frac{\Gamma(m+1)}{2^{m+1}}\right)^n\left(\frac{1}{n!}\right)^{m-1}.
\end{aligned}$$

例 3 设 V为一个帕累托随机变量，其累积分布函数为 $F(x) = 1 - x^{-\alpha},\ \alpha > 0,\ x > 1$。设$w(x) = x^m,\ m > 0,\ x > 0$，则有

$$\begin{aligned}\Lambda_V^w(u) &= w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u)) \\ &= \alpha(1-u)^{\frac{\alpha-m+1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

由 (2.3) 可得

$$\begin{aligned}J^w(\boldsymbol{X}_{minRSSU}^{(n)}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (1-u)^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right) \\ &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (1-u)^{2i-2}\alpha(1-u)^{\frac{\alpha-m+1}{\alpha}}du\right) \\ &= -\frac{(n!)^2\alpha^n}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2i\alpha-m+1}.\end{aligned}$$

此外，由 (2.5) 可得

$$\begin{aligned}J^w(\boldsymbol{X}_{maxRSSU}^{(n)}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 u^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right) \\ &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 u^{2i-2}\alpha(1-u)^{\frac{\alpha-m+1}{\alpha}}du\right) \\ &= -\frac{(n!)^2\alpha^n}{2}\prod_{i=1}^{n}\beta\left(2i-1,\frac{2\alpha-m+1}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

例 4 设 V 为一个累积分布函数为 $F(x) = x,\ \alpha > 0,\ 0 < x < 1$ 的均匀随机变量。设$w(x) = x^m,\ m > 0,\ x > 0$，则可得

$$\Lambda_V^w(u) = w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u)) = u^m.$$

由此，根据（2.3）可得

$$\begin{aligned}J^w(\boldsymbol{X}_{minRSSU}^{(n)}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (1-u)^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right) \\ &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (1-u)^{2i-2}u^m du\right) \\ &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\beta\left(2m+1,2i-1\right).\end{aligned}$$

此外，根据（2.5）可得

$$\begin{aligned} J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{maxRSSU}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 u^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right) \\ &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 u^{2i-2}u^m du\right) \\ &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{m+2i-1}. \end{aligned}$$

例5 假设 X 是来自比例风险族（PHF）的非负随机变量，其累积分布函数为 $F(x) = 1-[\bar{F}_0(x)]^\theta$，概率密度函数为 $f(x) = \theta f_0(x)[\bar{F}_0(x)]^{\theta-1}$，其中 F_0 和 f_0 分别表示基础总体的累积分布函数和概率密度函数，且 $\theta > 0$ 为形状参数。由（2.2）可得，

$$J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{minRSSU}) = -\frac{\theta^{2n}(n!)^2}{2(2n\theta-1)!!}\prod_{i=1}^{n}E[w(F_0^{-1}(B_{1,2\theta i-1}))f_0(F_0^{-1}(B_{1,2\theta i-1}))].$$

例6 假设 X 是来自比例反向风险族（PRHF）的非负随机变量，其累积分布函数为 $F(x) = [F_0(x)]^\theta$，概率密度函数为 $f(x) = \theta f_0(x)[F_0(x)]^{\theta-1}$.。由（2.4）可得，

$$J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{maxRSSU}) = -\frac{\theta^{2n}(n!)^2}{2(2n\theta-1)!!}\prod_{i=1}^{n}E[w(F_0^{-1}(B_{2\theta i-1,1}))f_0(F_0^{-1}(B_{2\theta i-1,1}))].$$

以下定理给出了GWJ递增（递减）的条件。

定理1 设 X 是一个具有概率密度函数f和累积分布函数F的非负绝对连续非负随机变量。假设 $\phi(x)$是递增函数，且 $^w(\phi(x))\phi'(x) \leq (\geq)w(x)$，并且$\phi(0) = 0$。~~若 $Z =$~~ $\phi(X)$，则

(i) $J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq (\geq)J^w(\boldsymbol{Z}^{(n)}_{minRSSU})$

(ii) $J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \leq (\geq)J^w(\boldsymbol{Z}^{(n)}_{maxRSSU})$.

证明 (i) 设 Z 的概率密度函数和累积分布函数分别为 h 和 H。则

$$\begin{aligned} \Lambda^w_Z(u) &= w\left(H^{-1}(u)\right)h\left(H^{-1}(u)\right) \\ &= \frac{w(\phi(F^{-1}(u)))}{\phi'(F^{-1}(u))}f(F^{-1}(u)) \quad \forall \quad 0<u<1. \end{aligned}$$

注意到 $\phi(x) \geq \phi(0), \ \forall\, x \geq 0$。因此，对于 $0 < u < 1$，有

$$\Lambda^w_Z(u) = \frac{w(\phi(F^{-1}(u)))}{\phi'(F^{-1}(u))}f(F^{-1}(u)) \leq w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u)) = \Lambda^w_X(u).$$

因此，根据方程 (2.3)，$J^w(\mathrm{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq J^w(\mathrm{Z}^{(n)}_{minRSSU})$。其余部分的证明可用类似方法完成。

(ii) 与第 (i) 部分类似。 ■

3 随机比较

在以下结果中，我们给出了在不同权重下比较两种秩集抽样方案的条件。

定理 2 设 X 和 Y 为非负随机变量，其概率密度函数分别为 f 和 g，累积分布函数分别为 F 和G，且具有 $u_X = u_Y < \infty$。
(a) 若 w_1递增， $w_1(x) \geq w_2(x)$ 且 $X \leq_{disp} Y$，则 $J^{w_1}(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq J^{w_2}(\mathbf{Y}^{(n)}_{minRSSU})$。(b) 若 w_1递增， $w_1(x) \leq w_2(x)$ 且 $X \geq_{disp} Y$，则 $J^{w_1}(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) \geq J^{w_2}(\mathbf{Y}^{(n)}_{minRSSU})$。(c) 若 w_1递增， $w_1(x) \geq w_2(x)$ 且 $X \leq_{disp} Y$，则 $J^{w_1}(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq J^{w_2}(\mathbf{Y}^{(n)}_{minRSSU})$。
(d) 若 w_1递增， $w_1(x) \leq w_2(x)$ 且 $X \geq_{disp} Y$，则 $J^{w_1}(\mathbf{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \geq J^{w_2}(\mathbf{Y}^{(n)}_{maxRSSU})$。

证明 (a) 由于 $X \leq_{disp} Y$，因此对于所有 $u \in (0,1)$，我们有 $f(F^{-1}(u)) \geq g(G^{-1}(u))$。然后利用 Shaked 和 Shanthikumar (2007) 的定理 3.B.13(b)， $X \leq_{disp} Y$推出$X \geq_{st} Y$。因此 $F^{-1}(u) \geq G^{-1}(u) \ \forall \ u \in (0,1)$。由于 w_1是递增的，且 $w_1(x) \geq w_2(x)$，因此 $w_1(F^{-1}(u)) \geq w_1(G^{-1}(u)) \geq w_2(G^{-1}(u))$。因此

$$\begin{aligned}\Lambda_X^{w_1}(u) &= w_1(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u)) \\ &\geq w_2(G^{-1}(u))g(G^{-1}(u)) \\ &= \Lambda_Y^{w_2}(u). \end{aligned} \tag{3.1}$$

现在，利用 (2.3),

$$\begin{aligned}J^{w_1}(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) &= -\frac{(n!)^2}{2(n-1)!!}\prod_{i=1}^{n} E(\Lambda_X^{w_1}(B_{1,2i-1})) \\ &\leq -\frac{(n!)^2}{2(n-1)!!}\prod_{i=1}^{n} E(\Lambda_Y^{w_2}(B_{1,2i-1})) \\ &= J^{w_2}(\mathbf{Y}^{(n)}_{minRSSU}).\end{aligned}$$

(b) 证明与 (a) 部分类似。(c) 证明与 (a) 部分类似。(d) 证明与 (a) 部分类似。 ■

如果在上述定理中取 $w_1(x) = w_2(x) = w(x)$，则可得到以下推论。

推论 1 设 X 和 Y 为非负随机变量，其概率密度函数分别为 f 和 g，累积分布函数分别为 F 和G，且具有 $u_X = u_Y < \infty$；设 w 为递增函数。则
(a) 如果 $X \leq_{disp} Y$，则 $J^{w}(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq J^{w}(\mathbf{Y}^{(n)}_{minRSSU})$。
（b）如果 $X \geq_{disp} Y$，则 $J^{w}(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) \geq J^{w}(\mathbf{Y}^{(n)}_{minRSSU})$。
（c）如果 $X \leq_{disp} Y$，则 $J^{w}(\mathbf{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \leq J^{w}(\mathbf{Y}^{(n)}_{maxRSSU})$。
（d）如果 $X \geq_{disp} Y$，则 $J^{w}(\mathbf{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \geq J^{w}(\mathbf{Y}^{(n)}_{maxRSSU})$。

注 2 对于 $w_1(x) = 1$，推论 1 中的结果由 Qiu 和 Eftekharian（2021）证明。

若随机变量 X 在离散序上小于 Y，记为 $X \leq_{disp} Y$，则称其满足该关系，其中 $G^{-1}(F(x)) - x$ 在 x 上递增（Shaked 和 Shanthikumar（2007））。

定理 3 设 X和 Y为非负随机变量，其概率密度函数分别为 f和 g，累积分布函数分别为 F和 G。设 ϕ 为非负函数，满足对所有 $x.$， $\phi'(x) \geq 1$。若 $Y = \phi(X)$且 w递增，则 $J^w(\mathrm{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq J^w(\mathrm{Y}^{(n)}_{minRSSU})$且 $J^w(\mathrm{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \leq J^w(\mathrm{Y}^{(n)}_{maxRSSU})$。

证明 由于 $G^{-1}(F(x)) - x = \phi(x) - 1$，因此 $X \leq_{disp} Y$。由推论 1 可得，证明完成。■

推论 2 设 X 和 Y 为非负随机变量，其概率密度函数分别为 f 和 g，累积分布函数分别为 F 和 G。若 $Y = aX + b$ 对于 $a \geq 1, \quad b \in \mathbb{R}$ 和 w 为递增的，则 $J^w(\mathrm{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq J^w(\mathrm{Y}^{(n)}_{minRSSU})$ 且 $J^w(\mathrm{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \leq J^w(\mathrm{Y}^{(n)}_{maxRSSU})$。

证明 考虑 $\phi(x) = ax + b$ 对于 $a \geq 1, \quad b \in \mathbb{R}.$ 因此，由推论 2 可得证。■

引理 1 *[Ahmed 等人 (1986)]* 设 X 和 Y 为非负随机变量，其概率密度函数分别为 f 和 g，满足 $f(0) \geq g(0) > 0$。若 $X \leq_{su} Y$（或 $X \leq_* Y$ 或 $X \leq_c Y$），则 $X \leq_{disp} Y$。

有关凸变换序（$\leq_c$）、星序（$\leq_\star$）、超可加序（$\leq_{su}$）和离散序（$\leq_{disp}$）的详细信息，可参阅 Shaked 和 Shanthikumar (2007)。根据定理 2 和引理 1，可得到以下结果。

推论 3 设 X和 Y为非负随机变量，其概率密度函数分别为 f和 g，累积分布函数分别为 F和G，且满足 $u_X = u_Y < \infty$，使得 $f(0) \geq g(0) > 0$。(a) 若 w_1 递增，$w_1(x) \geq w_2(x)$ 且 $X \leq_{su} Y$（或 $X \leq_* Y$ 或 $X \leq_c Y$），则$J^{w_1}(\mathrm{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq J^{w_2}(\mathrm{Y}^{(n)}_{minRSSU})$。(b) 若 w_1递增，$w_1(x) \leq w_2(x)$ 且 $X \geq_{su} Y$（或 $X \geq_* Y$或 $X \geq_c Y$），则$J^{w_1}(\mathrm{X}^{(n)}_{minRSSU}) \geq J^{w_2}(\mathrm{Y}^{(n)}_{minRSSU})$。(c) 若 w_1 递增，$w_1(x) \geq w_2(x)$ 且 $X \leq_{su} Y$（或 $X \leq_* Y$ 或 $X \leq_c Y$），则$J^{w_1}(\mathrm{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \leq J^{w_2}(\mathrm{Y}^{(n)}_{maxRSSU})$。(d) 若 w_1递增，$w_1(x) \leq w_2(x)$ 且 $X \geq_{su} Y$（或 $X \geq_* Y$或 $X \geq_c Y$），则$J^{w_1}(\mathrm{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \geq J^{w_2}(\mathrm{Y}^{(n)}_{maxRSSU})$。

设 X 为具有绝对连续分布函数的非负随机变量。当且仅当 $U \leq_c X$ 时，X 的密度递减，其中 U 是服从均匀分布（0, 1）的随机变量（Shaked 和 Shanthikumar（2007），例 4.B.12）。由例 4，$J^w(\mathrm{X}^{(n)}_{minRSSU}) = -(n!)^2 \prod_{i=1}^{n} \beta(2m+1, 2i-1)$ 且 $J^w(\mathrm{X}^{(n)}_{maxRSSU}) = -(n!)^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{m+2i-1}$. 因此，根据推论 3 以及 Shaked 和 Shanthikumar（2007）的例 4.B.12，考虑 $w_1(x) = w_2(x) = x^m, m \geq 0.$ 时，我们得到 minRSSU 和 maxRSSU 数据的 GWJ 下界

命题1 设 X 为具有递减概率密度函数的非负随机变量 f 使得$f(0) \leq 1$且 $w(x) = x^m$, $m \geq 0$则 $J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{minRSSU}) \geq -(n!)_2^2 \prod_{i=1}^{n} \beta\ (2m+1,\ 2i-1)$ 且$J^w\ (\boldsymbol{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \geq -(n!)_2^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{m+2i-1}$.

引理2（定理4.B.11，Shaked 和 Shanthikumar（2007））设 Y 表示参数为 λ、均值为$\frac{1}{\lambda}$的指数随机变量。设 X 为非负随机变量。则 (i) X 是递增失效率，当且仅当 $X \leq_c Y$；(ii) X 是递增失效率平均，当且仅当 $X \leq_* Y$；(iii) X 是新优于旧，当且仅当 $X \leq_{su} Y$。

在例2中，我们得到 $J^w(\mathrm{Y}^{(n)}_{minRSSU}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^{m-1}}\right)^n \left(\frac{\Gamma\ (m+1}{2^{m+1}}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)!\ \Big)^{m-1}$，其中 Y 表示参数为 λ、均值为$\frac{1}{\lambda}$ 的指数随机变量。根据例2、推论 3 和引理2，考虑 $w_1(x) = w_2(x) = x^m$, $m \geq 0$. 时，我们可以写出最小RSSU 数据的 GWJ 上界

Prop 命题 2 若 X 是递增失效率（递增失效率平均、新优于旧）的， $f(0) \geq \lambda$ 且 $w(x) = x^m$, $m \geq 0$, 则

$$J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^{m-1}}\right)^n \left(\frac{\Gamma(m+1)}{2^{m+1}}\right)^n \left(\frac{1}{n!}\right)^{m-1}.$$

引理3（Bagai 和 Kochar（1986））设 X 和 Y 是两个非负随机变量。若 $X \geq_{hr} (\leq_{hr}) Y$，且 X 或 Y 为递减失效率（DFR），则 $X \geq_{disp} (\leq_{disp}) Y$.

引理 4（Shaked 和 Shanthikumar（2007）的定理3.B.28）设 $X_{i:n}$ 和 $X_{j:m}$ 分别表示来自大小为 n和 m 的 DFR 分布 F 的第 i 个和第 j 个次序统计量。则对于 $i \leq j$ 和 $n-i \geq m-j$., $X_{i:n} \leq_{disp} X_{j:m}$

推论 1 的另一个应用见下述命题，该命题给出了 $J^w(\mathrm{X}^{(n)}_{maxRSSU})$ 的下界。

命题3 设 X 是一个非负随机变量，且对所有 $x \geq 0$ 都有 $r_X(x) \leq \lambda$，并且 $w(x) = x^m$, $m \geq 0$，则

$$J^w(\boldsymbol{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \geq -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2\Gamma(m+1)}{(2\lambda)^{m+1}}\right)^n.$$

证明 令 Z 服从失效率为 λ的指数分布。由于， $r_X(x) \leq \lambda = r_Z(x)$, 且 Z 具有递减失效率（DFR）性质，因此根据引理3， $X \geq_{disp} Z$. 。又根据引理 4， $Z_{1:1} \leq_{disp} Z_{2:2} \leq_{disp} Z_{3:3} \leq_{disp} \cdots \leq_{disp} Z_{n:n}$, 由此得到 $J^w(Z_{1:1}) \leq J^w(Z_{2:2}) \leq J^w(Z_{3:3}) \ldots J^w(Z_{n:n})$, 这是由推论 1 得出的。根据推论 1，我们得到

$$\begin{aligned} J^w(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) \geq J^w(\mathbf{Z}^{(n)}_{minRSSU}) &= -\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}[-2J^w(Z_{i:i})] \\ &\geq -\frac{1}{2}[-2J^w(Z_{1:1})]^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2\Gamma(m+1)}{(2\lambda)^{m+1}}\right)^n. \end{aligned}$$

因此，我们得到了所需结果。 ■

可能会有人问，定理 2 中的条件 $X \leq_{disp} Y$ 是否可以通过 $J^{w_1}(X) \leq J^{w_2}(Y)$ 得到放宽。以下结果对此断言给出了肯定的回答。以下定理的证明类似于 Gupta 和 Chaudhary(2023) 中定理 5.3 的证明，故略去。

定理 4 设 X 和 Y 为非负随机变量，其概率密度函数分别为 f 和 g，累积分布函数分别为 F 和G。设 $\Delta(u) = w_1(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u)) - w_2(G^{-1}(u))g(G^{-1}(u))$,

$$A_1 = \{0 \leq u \leq 1 | \Delta(u) > 0\}, \ A_2 = \{0 \leq u \leq 1 | \Delta(u) < 0\}.$$

若 $\inf_{A_1} \phi_{2i-1:2n-2i}(u) \geq \sup_{A_2} \phi_{2i-1:2n-2i}(u)$，且 $J^{w_1}(X) \leq J^{w_2}(Y)$，则 $J^{w_1}(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq J^{w_2}(\mathbf{Y}^{(n)}_{minRSSU})$】【。

在上述定理中取 $w_1(x) = w_2(x)$，可得以下推论。

推论 4 设 X和 Y是非负随机变量，其概率密度函数分别为 f和 g，累积分布函数分别为 F和G。设 $\Delta(u) = w_1(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u)) - w_1(G^{-1}(u))g(G^{-1}(u))$,

$$A_1 = \{0 \leq u \leq 1 | \Delta(u) > 0\}, \ A_2 = \{0 \leq u \leq 1 | \Delta(u) < 0\}.$$

若 $\inf_{A_1} \phi_{2i-1:2n-2i}(u) \geq \sup_{A_2} \phi_{2i-1:2n-2i}(u)$，且若 $J^{w_1}(X) \leq J^{w_1}(Y)$，则 $J^{w_1}(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) \leq J^{w_1}(\mathbf{Y}^{(n)}_{minRSSU})$。

4 单调性质

本节给出一个条件，在该条件下，minRSSU 数据的一般加权外熵随样本量 n 的增加而递减。

定理 5 设 $\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}$ 是来自某个分布的 minRSSU 样本，该分布的累积分布函数为 F，概率密度函数为 f。若对所有 $0 < u < 1$，均有 $w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u)) \geq 1$，则 $J^w(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU})$ 随 $n \geq 1.$ 的增加而递减。

证明：利用（2.2），可得

$$\begin{aligned}
\frac{J^w(\mathbf{X}^{(n+1)}_{minRSSU})}{J^w(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU})} &= -2J^w(X_{1:n+1}) \\
&= \int_0^{+\infty} w(x) f^2_{1:n+1}(x) dx \\
&= (n+1)^2 \int_0^1 w(F^{-1}(u))(1-u)^{2n} f(F^{-1}(u)) du \\
&\geq \frac{(n+1)^2}{2n+1} \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

因此，由于二者均为非正数，$J^w(\mathbf{X}^{(n+1)}_{minRSSU}) \leq J^w(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU})$。所以，$J^w(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU})$ 关于 $n \geq 1.$ ■递减

与上述定理类似，maxRSSU 数据的一般加权外熵也随样本量n的增加而递减。

定理 6 设 $\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n)}$ 是来自累积分布函数为 F、概率密度函数为 f. 的分布的 maxRSSU 样本。若对于所有 $0<u<1$，$w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u)) \geq 1$，则 $J^w(\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n)})$ 随 $n \geq 1$. 的增加而递减。

证明 利用 (2.4)，可得

$$\begin{aligned}\frac{J^w(\mathbf{X}_{maxRSSU}^{(n+1)})}{J^w(\mathbf{X}_{maxRSSU}^{(n)})} &= -2J^w(X_{n+1:n+1}) \\ &= \int_0^{+\infty} w(x)f_{1:n+1}^2(x)dx \\ &= (n+1)^2\int_0^1 w(F^{-1}(u))u^{2n}f(F^{-1}(u))du \\ &\geq \frac{(n+1)^2}{2n+1} \\ &\geq 1.\end{aligned}$$

因此，$J^w(\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n+1)}) \leq J^w(\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n)})$，因为二者均为非正数。因此，$J^w(\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n)})$ 关于 $n \geq 1$. ■递减

推论 5 若 X 是具有 $\theta > 1/4$ 的比例风险族，且对所有 $0<u<1.$，$w(F_0^{-1}(u))f_0(F_0^{-1}(u)) \geq 1$，则 $J^w(\mathrm{X}_{minRSSU}^{(n)})$ 关于 $n \geq 1$.递减

推论 6 若 X 是具有 $\theta > 1/4$ 的比例反向风险族，且对所有 $0<u<1.$，$w(F_0^{-1}(u))f_0(F_0^{-1}(u)) \geq 1$，则 $J^w(\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n)})$ 关于 $n \geq 1$.递减

5 界

本节中，我们根据 $J^w(\mathrm{X}_{SRS}^{(n)})$ 得到 $J^w(\mathrm{X}_{minRSSU}^{(n)})$ 和 $J^w(\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n)})$ 的界。

定理 7 若 $\mathrm{X}_{minRSSU}^{(n)}$、$\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n)}$ 和 $\mathrm{X}_{SRS}^{(n)}$ 分别表示最小RSSU 样本、maxRSSU 样本和简单随机抽样样本，则有

(i) $J^w(\boldsymbol{X}_{minRSSU}^{(n)}) \geq (n!)^2 J^w(\boldsymbol{X}_{SRS}^{(n)})$.

(ii) $J^w(\boldsymbol{X}_{maxRSSU}^{(n)}) \geq (n!)^2 J^w(\boldsymbol{X}_{SRS}^{(n)})$.

证明 (i) 由 (2.3) 可得,

$$\begin{aligned}J^w(\mathbf{X}_{minRSSU}^{(n)}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 w(F^{-1}(u))(1-u)^{2i-2}f(F^{-1}(u))du\right) \\ &\geq -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right) \\ &= (n!)^2 J^w(\mathbf{X}_{SRS}^{(n)}).\end{aligned}$$

(ii) 证明过程与 (i) 部分类似。 ■

我们将 $X_{i:n}$ 表示为基于来自 X 、样本量为 n 的简单随机样本的第 i 个次序统计量。在完美判断排序的假设下，排序集样本定义为 $X_{RSS}^{(n)} = \{X_{i:n}, i = 1, \ldots, n\}$. 。注意， $X_{RSS}^{(n)}$ 是来自 X 的次序统计量的集合，但彼此独立，这与简单随机样本的次序统计量不同。因此，Gupta 和 Chaudhary（2023）将 $X_{RSS}^{(n)}$ 的一般加权外熵定义为

$$J^w(\mathbf{X}_{RSS}^{(n)}) = -\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(-2J^w(X_{(i:n)})\right). \tag{5.1}$$

接下来，我们将证明，如果基础分布具有 DFR 老化性质，则 maxRSSU 数据的一般加权外熵高于秩集抽样和 MinRSSU 数据的一般加权外熵。

定理 8 若 $\mathrm{X}_{minRSSU}^{(n)}$、$\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n)}$ 和 $\mathrm{X}_{SRS}^{(n)}$ 分别表示来自具有 DFR 老化性质的分布 X 的最小 RSSU、maxRSSU 和 SRS 数据。设 $w(x)$ 为递增函数，则有

$$J^w(\boldsymbol{X}_{maxRSSU}^{(n)}) \geq J^w(\boldsymbol{X}_{RSS}^{(n)}) \geq J^w(\boldsymbol{X}_{minRSSU}^{(n)}).$$

证明 根据引理 4，若 $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ 是来自 DFR 分布的一列独立同分布观测值，则对所有 $i = 1, 2, \ldots, n$，有 $X_{1:i} \leq_{disp} X_{i:n} \leq_{disp} X_{i:i}$，由此根据 Gupta 和 Chaudhary (2023) 中的推论 2.1 可得 $J^w(X_{1:i}) \leq J^w(X_{i:n}) \leq J^w(X_{i:i})$。由 (2.2)、(2.4) 和 (5.1)，结论得证。■

例 7 设 Z 服从累积分布函数为 $F_Z(z) = 1 - e^{-\lambda z}$, $\lambda > 0$, $z > 0$ 的指数分布。由于 Z 具有递减失效率（DFR）性质，因此利用定理 8，可得 $J^w(\mathrm{Z}_{maxRSSU}^{(n)}) \geq J^w(\mathrm{Z}_{RSS}^{(n)}) \geq J^w(\mathrm{Z}_{minRSSU}^{(n)})$。

在下一定理中，当概率密度函数和 $w(x)$ 的上界已知时，我们求出 $J^w(\mathrm{Z}_{maxRSSU}^{(n)})$ 和 $J^w(\mathrm{Z}_{minRSSU}^{(n)})$ 的下界。

定理 9 设 X 是一个众数为 m 的随机变量，且 $f(m) = M$ 即 $0 \leq f(x) \leq M$ 对所有 x 和 $0 \leq w(x) \leq k$ 均成立， $k > 0$. 则对所有 $n \geq 1$，有， $J^w(\mathrm{X}_{minRSSU}^{(n)}) \geq -\frac{(n\ ^2k^nM^n!)\,()!!}{2\ 2n-1}$ 且 $J^w(\mathrm{X}_{maxRSSU}^{(n)}) \geq -(\frac{n\ ^2k^nM^n!)\,()!!}{2\ 2n-1}$ ·

证明 由（2.3）式可得。

$$\begin{aligned} J^w(\mathbf{X}_{minRSSU}^{(n)}) &= -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 w(F^{-1}(u))(1-u)^{2i-2}f(F^{-1}(u))du\right) \\ &\geq -\frac{(n!)^2}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 kM(1-u)^{2i-2}du\right) \\ &= -\frac{(n!)^2k^nM^n}{2(2n-1)!!}. \end{aligned}$$

类似地，利用 (2.5)，另一部分的证明即可得出。 ■

现在，我们根据 $w(X)f^2(X)$ 的已知期望，推导 MinRSSU 和 maxRSSU 数据的一般加权外熵下界。

定理10 设 X 为概率密度函数为 $f.$ 的非负随机变量。设 $\kappa_f = E[(w(X)f(X))^2]$.则， $J^w(\mathbf{X}^{(n)}_{maxRSSU}) \geq -(n!)^2(\kappa_f^{n/2})\,2\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(4i-3)}$，且 $J^w(\mathbf{X}^{(n)}_{minRSSU}) \geq -(n!)^2(\kappa_f^{n/2})\,2\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(4i-3)}$.

证明 由（2.5）并利用柯西-施瓦茨不等式，可得:

$$
\begin{aligned}
J^w(\mathbf{X}^{(n)}_{maxRSSU}) &= -\frac{(n!)^2}{2(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (2i-1)u^{2i-2}w(F^{-1}(u))f(F^{-1}(u))du\right)\\
&\geq -\frac{(n!)^2}{2(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{n}\left[\int_0^1 (2i-1)^2u^{4i-4}du\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^1 w^2(F^{-1}(u))f^2(F^{-1}(u))du\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= -\frac{(n!)^2\kappa_f^{n/2}}{2(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{n}\left[\int_0^1 (2i-1)^2u^{4i-4}du\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= -\frac{(n!)^2\kappa_f^{n/2}}{2(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(2i-1)^2}{4i-3}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= -\frac{(n!)^2\kappa_f^{n/2}}{2\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(4i-3)}}.
\end{aligned}
$$

类似地，由（2.3）可得其余部分的证明。 ■

6 结论

本文研究了不等样本量的排序集抽样的 GWJ，并得到了最小RSSU和maxRSSU的 GWJ 表达式。在关于权重$w(x)$的一些假设下，我们比较了最小RSSU和maxRSSU的 GWJ 值。基于一些随机序假设，给出了最小RSSU和maxRSSU的 GWJ 行为。利用指数分布的递减失效率（DFR）性质，推导出了最小RSSU和maxRSSU的 GWJ 界。在某些假设下，我们证明了最小RSSU和maxRSSU的 GWJ 随样本量增加而递减。我们还得到了最小RSSU、maxRSSU、秩集抽样和简单随机抽样的 GWJ 之间的界。

资助

Santosh Kumar Chaudhary谨向印度科学与工业研究委员会（CSIR）和印度政府致谢，感谢其提供经费资助（文件编号：09/0081 (14002)/2022-EMR-I）。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Biradar, B.S. 和 Santosha, C.D.，2014年。使用不等样本最大秩集抽样估计指数分布的均值。《开放统计学期刊》，4(08)，第641页。[2] Rahmani, H. 和 M. Razmkhah。2017年。移动极值秩集抽样中的完美排序检验。《统计学论文》58 (3)：855–75。doi:10.1007/s00362-015-0729-4。[3] Al-Odat, M.T. 和 Al-Saleh, M.F.，2001年。秩集抽样的一种变体。《应用统计科学杂志》，10(2)，第137-146页。[4] Chaudhary, S. K. 和 Gupta, N.（2023）。不等样本最小值（最大值）秩集抽样的一般加权累积剩余（过去）熵。arXiv预印本 arXiv:2301.13561。[5] Al-Saleh, M.F. 和 Diab, Y.A.，2009年。使用秩集抽样方案估计Downton二元指数分布的参数。《统计规划与推断杂志》，139(2)，第277-286页。[6] Tseng, Y.L. 和 Wu, S.W.，2007年。用于正态均值和指数均值的基于秩集样本的检验。《统计通讯——模拟与计算®》，36(4)，第761-782页。[7]Gupta, N. 和 Chaudhary, S.K.，2023年。关于秩集抽样的一般加权外熵。《统计通讯——理论与方法》，第1-14页。DOI：10.1080/03610926.2023.2179888[8] Qiu, G. 和 Eftekharian, A.（2021）。不等样本最大值和最小值秩集抽样的外熵信息。《统计通讯——理论与方法》，50(13)，2979-2995。[9] McIntyre, G.A.，1952年。一种使用秩集进行无偏选择性抽样的方法。《澳大利亚农业研究杂志》，3(4)，第385-390页。[10] Lynne Stokes, S.，1977年。伴随变量下的秩集抽样。《统计通讯——理论与方法》，6(12)，第1207-1211页。[11] Chacko, M. 和 George, V.，2022年。排序不完美时秩集样本的外熵性质。《统计通讯——理论与方法》，第1-24页。DOI：10.1080/03610926.2022.2150825。[12]Ahmed, A.N.、Alzaid, A.、Bartoszewicz, J. 和 Kochar, S.C.，1986年。离散序与超可加序。《应用概率进展》，18(4)，第1019-1022页。[13] Bagai, I. 和 Kochar, S.C.，1986年。关于尾序与失效率比较。《统计通讯——理论与方法》，15(4)，第1377-1388页。[14]Shaked, M. 和 Shanthikumar, J.G. 编，2007年。随机序。纽约，NY：Springer New York。[15] Lad, F.、Sanfilippo, G. 和 Agr`o, G.，2015年。外熵：熵的互补对偶。《统计科学》，30(1)，第40-58页。

[16] Raqab, M.Z. 和 Qiu, G., 2019。《排序集抽样的外熵性质》。《统计》，53(1)，第210-226页。[17] Al-Saleh, M.F. 和 Diab, Y.A., 2009。使用秩集抽样方案估计 Downton 二元指数分布的参数。《统计规划与推断杂志》，139(2)，第277-286页。[18] Al-Nasser, A.D., 2007。L 排序集抽样：一种用于稳健视觉抽样的通用推广程序。《统计通讯——模拟与计算》，36(1)，第33-43页。[19] Chen, Z., Bai, Z. 和 Sinha, B.K., 2004。《排序集抽样：理论与应用》（第176卷）。纽约：Springer。.. ..[20] Ozt¨urk, O. 和 Wolfe, D.A., 2000。用于单峰和多峰分布的排序集抽样最优分配程序。《环境与生态统计》，7(4)。[21] Bain, L. J. 和 M. Engelhardt。2017年。《可靠性与寿命试验模型的统计分析：理论与方法》。Routledge。[22] Jemain, A.A., Al-Omari, A.I. 和 Ibrahim, K., 2007。用于估计总体中位数的多阶段中位数排序集抽样。《数学与统计学杂志》，3(2)，第58-64页。