arXiv:2305.01228v1 [math.PR] 2 May 2023

平坦环面上从属分数布朗运动的经验测度的Wasserstein收敛

Li Huaiqian* Wu Bingyao†

天津大学应用数学中心，中国天津 300072

摘要

我们估计了从属分数布朗运动所对应的经验测度在Wasserstein距离下收敛到平坦环面上均匀分布的收敛速率 $\mathbb{W}_p$，对所有 $p \geq 1$均成立。特别地，我们的结果与近期关于扩散过程和分数布朗运动的研究结果一致。作为应用，我们为时间离散化的从属分数布朗运动给出了类似的结果。

1 引言与主要结果

设 $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ 为赋有距离的 d维平坦环面

$$\rho(x,y) = \min_{k\in\mathbb{Z}^d} |x-y-k|, \quad x,y \in \mathbb{T}^d,$$

其中， $|x| = \sqrt{\langle x、 x\rangle}$ 表示 $x \in \mathbb{R}^d$的欧几里得范数， $\langle \cdot、 \cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^d$上的内积。设 $\mathscr{P}$ 为 $\mathbb{T}^d$上Borel概率测度的类。给定 μ、 $\nu \in \mathscr{P}$，对于任意 $p \in (0,\infty)$，由 ρ 诱导的 μ 与 ν 之间的 p 阶Wasserstein（或 Kantorovich）距离定义为

$$\mathbb{W}_p(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\mathscr{C}(\mu,\nu)} \Big(\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} \rho(x,y)^p \, \pi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \Big)^{\min\{1,1/p\}},$$

其中， $\mathscr{C}(\mu,\nu)$是乘积空间 $\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$上所有边缘分布分别为 μ 和 ν的概率测度的集合。关于Wasserstein距离的研究已有大量文献，尤其是其与最优传输理论的联系；更多详情请参见例如 [8, 第 5] 章及 [32] 。

令 $\mathfrak{m}$ 为环面 $\mathbb{T}^d$上的均匀分布。本文的主要目的是研究与从属分数布朗运动及 $\mathfrak{m}$相关的经验测度之间 Wasserstein距离的收敛速率。为介绍主要结果，我们先介绍一些关于从属分数布朗运动的基础知识。例如，关于从属分数布朗运动的进一步研究，可参阅 [10, 24] 。

*电子邮箱： huaiqianlee@gmail.com

†电子邮箱： bingyaowu@163.com

我们先给出分数布朗运动（简称 fBM）的定义。令 $H \in (0,1)$。我们用 $X^H := (X_t^H)_{t\geq 0}$ 表示定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的赫斯特指数为 H的分数布朗运动，即 X^H 是一个均值为零的连续时间高斯过程，其协方差矩阵为

$$\frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H})\,\mathrm{I}_d, \quad s,t \geq 0,$$

其中 I_d 是 $d \times d$ 单位矩阵。众所周知，X^H 一般既不是马尔可夫过程，也不是半鞅。然而，特别地，如果 $H = 1/2$，那么 X^H 确实是 $\mathbb{R}^d$上的标准布朗运动。d环面上的分数布朗运动 $\mathbb{T}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的分数布朗运动的自然投影。有关分数布朗运动的更多性质，参见例如 [26, 第 5] 章和 [25] 。

现在我们回顾一些关于伯恩斯坦函数和子ordinator的基础知识。若函数B从 $C([0,\infty);\ [0,\infty)) \cap C^\infty((0,\infty);\ [0,\infty))$，则称其为伯恩斯坦函数；对于每个$k \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^{k-1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k}B(\lambda) \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

众所周知，每个满足 $B(0) = 0$ 的伯恩斯坦函数 B 都由唯一的 L´évy–Khintchine 表示刻画

$$B(\lambda) = b\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y})\,\nu(\mathrm{d}y), \quad \lambda \geq 0, \tag{1.1}$$

其中某个常数为 $b \geq 0$，且 ν 是定义在 $(0,\infty)$ 上的 L´évy 测度（即 $(0,\infty)$ 的 Borel σ-代数上的拉东测度，满足 $\int_0^\infty \frac{x}{1+x}\,\nu(\mathrm{d}x) < \infty$）。我们需要以下这类伯恩斯坦函数（参见例如 [37]），即

$$\mathbf{B} := \big\{B:\ B \text{ is a Bernstein function with } B(0) = 0,\, B'(0) > 0\big\}.$$

令 $B \in \mathbf{B}$。众所周知，还存在一个与 B 对应的唯一子ordinator，记作 $S^B = (S_t^B)_{t\geq 0}$，即一个具有平稳独立增量、取值于 $[0,\infty)$ 和 $S_0^B = 0$ 的递增随机过程，使得 B 是 S^B 的拉普拉斯指数，定义为

$$\mathbb{E}e^{-\lambda S_t^B} = e^{-tB(\lambda)}, \quad t,\lambda \geq 0. \tag{1.2}$$

例如，指标为 $\alpha \in (0,1)$ 的特定稳定子ordinator是过程 S^B，对应于 $B(\lambda) = \lambda^\alpha$，其表示式为 (1.1)，其中有 $b = 0$ 并且

$$\nu(\mathrm{d}y) = \frac{-1}{\Gamma(-\alpha)}y^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}y,$$

其中，$\Gamma(\cdot)$表示伽马函数，而 $-\alpha\Gamma(-\alpha) = \Gamma(1-\alpha)$。下文中，我们用 $\mathbb{P}(S_t^B \in \cdot)$表示 S_t^B 的分布。还需要用到B的以下子类；参见例如 [21]。对于任意 $\alpha \in [0,1]$，令

$$\mathbf{B}^\alpha = \Big\{B \in \mathbf{B}:\ \liminf_{\lambda\to\infty}\lambda^{-\alpha}B(\lambda) > 0\Big\}, \quad \mathbf{B}_\alpha = \Big\{B \in \mathbf{B}:\ \limsup_{\lambda\to\infty}\lambda^{-\alpha}B(\lambda) < \infty\Big\}.$$

对于每个 $\alpha \in (0,1]$, 典型例子 $B(\lambda) = \lambda^\alpha$ 属于 $\mathbf{B}^\alpha$ 与 $\mathbf{B}_\alpha$的交集。关于许多其他有趣的例子，可参阅 [27, 第 16]章中的表格。此外，容易验证存在一个常数 $c > 0$，使得对于任意满足 $\alpha \in [0,1]$的 $B \in \mathbf{B}^\alpha$（分别为 $B \in \mathbf{B}_\alpha$），

$$B(\lambda) \geq c\min\{\lambda^\alpha, \lambda\} \ (\text{resp. } B(\lambda) \leq c\lambda^\alpha), \quad \lambda \geq 0; \tag{1.3}$$

例如参见 [21]中的 (4.11) 和 (5.8)。

从属分数布朗运动（缩写为 sfBM）定义为对分数布朗运动进行如下时间变换。设 $B \in$ B、 $H \in$ (0, 1) 以及 S^B 是与 B 对应的子ordinator，使得 S^B 与分数布朗运动 X^H 相互独立。令

$$X_t^{B,H} := X^H_{S_t^B}, \quad t \geq 0.$$

过程 $X^{B,\ H}$:=($X^{B,\ t}$ ^{H})$_{t\geq 0}$ 称为与伯恩斯坦函数 B 对应的、指标为 H 的从属分数布朗运动。特别地，当 $H = \frac{1}{2}$、 X^B : $X^{B\,H}$ $=$ B ，时，它是与对应的从属布朗运动（缩写为 sBM）；当 B 是恒等映射时， $X^{B,\ H}$ 与 X^H 重合。关于从属过程和伯恩斯坦函数的更多细节，请参阅 [7, 27, 3] 。

我们关注与 sfBM $X^{B,\ H}$ 相关的经验测度，将其记为

$$\mu_t^{B,H} = \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X^{B,\ s}\ H}\,\mathrm{d}s, \qquad t > 0.$$

特别地，当 $H = 1/2$ 时，为简便起见，我们用 μ_t^B 代替 $\mu^{B,\ t}$ $^{1/2}$ 。

为陈述我们的主要结果，还需要引入一些额外的记号。我们记 $a \lesssim b$ 或 $b \gtrsim a$，如果存在一个正数常量 c ，使得 $a \leq cb$，其中 c 可能取决于参数 p、d 以及伯恩斯坦函数 B。如果 $a \lesssim b$ 和 $b \lesssim a$ 同时成立，我们记为 $a \asymp b$ 。

现在我们可以介绍主要结果。首先，对于一般的 $H \in$ (0,1)，我们给出与 sfBM 相关的经验测度在 Wasserstein距离 下收敛至 $\mathfrak{m}$ 的收敛速率上界。

定理 1.1（上界估计）。假设】【。

(i) $H = 1/2$ 和 $B \in \mathrm{B}^\alpha$ ，其中 $\alpha \in [0, 1]$,

(ii) $H \neq 1/2$, 且 B 由 (1.1) 给出，并满足 $\nu(\mathrm{d}y) \geq cy^{-1-\alpha}\mathrm{d}y$ ，其中 $c > 0$ 和 $\alpha \in$ (0, 1) 为常数。

令 $X^{B,H}$ 为一个取值于 $\mathbb{T}^d$ 的 sfBM，其指标为 H ，对应于 B。那么对于任意 $p \geq 1$ 及任意充分大的 $t > 0$,

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{W}_p\big(\mu_t^{B,H}, \mathfrak{m}\big)\big] \lesssim \begin{cases} t^{-1/2}, & d < 2 + \alpha/H, \\ \big(\frac{\log t}{t}\big)^{1/2}, & d = 2 + \alpha/H, \\ t^{-\frac{1}{d-\alpha/H}}, & d > 2 + \alpha/H. \end{cases} \tag{1.4}$$

注 1.2. 令 $\alpha \in$ (0, 1)，且 B 是由 (1.1) 给出的伯恩斯坦函数。若对某个常数 $c > 0$, 有 $\nu(\mathrm{d}y) \geq cy^{-1-\alpha}\mathrm{d}y$ ，则 $B \in \mathrm{B}^\alpha$。事实上，一方面，根据控制收敛定理,

$$B'(\lambda) = b + \int_0^\infty e^{-\lambda y} y\,\nu(\mathrm{d}y) \geq b + c\int_0^\infty y^{-\alpha}e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y, \quad \lambda > 0,$$

这显然意味着 $B'(0) = \lim_{\lambda\to 0^+} B'(\lambda) > 0$, 另一方面,

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda^\alpha} \geq \liminf_{\lambda\to\infty} \Big[b\lambda^{1-\alpha} + c\int_0^\infty (1 - e^{-t})t^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}t\Big] > 0.$$

然而，逆命题似乎并不成立。下面给出一个反例。令 $\alpha \in$ (0,1)˜ ˜并取 $B(\lambda) = (1 + \lambda)^\alpha - 1$ 对每个 $\lambda \geq 0$成立，我们很容易验证 $B \in \mathrm{B}^\alpha$，并且

与 $\tilde{B}$ 对应的 Lévy 测度为 $\tilde{\nu}(\mathrm{d}y) = \Gamma^{\alpha}{}_{(1-\alpha)} e^{-y} y^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}y$。但显然，我们不可能找到任何常数 $C>0$ 和 $\beta \in (0,1)$，使得 $\tilde{\nu}(\mathrm{d}y) \geq C y^{-1-\beta}\,\mathrm{d}y$。其他反例可参见例如 *[27, 第 16]* 章。

接下来，我们给出与 sfBM 相关的经验测度 μ^{B}_{t} 之间 H 的下界估计，如下所示。

定理 1.3（下界估计）。设 $H \in (0,1)$ 且 $B \in \mathbb{B}$。令 $X^{B,H}$ 为一个取值于 $\mathbb{T}^d$ 的 sfBM，其指标为 H，对应于 B。

（1）假设对于某个 $\alpha \in [0,1]$，有 $H = 1/2, B \in \mathbb{B}_\alpha \cap \mathbb{B}^\alpha$。那么，对于任意 $p \geq 1$ 以及任意充分大的 $t>0$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{W}_p\left(\mu_t^B, \mathfrak{m}\right)\right] \gtrsim \begin{cases} t^{-1/2}, & d < 2(1+\alpha), \\ \left(\frac{\log t}{t}\right)^{1/2}, & d = 2(1+\alpha), \\ t^{-\frac{1}{d-2\alpha}}, & d > 2(1+\alpha). \end{cases} \tag{1.5}$$

（2）假设对于某个 $\alpha \in (0,1]$ 和 $d > \alpha/H$，有 $B \in \mathbb{B}_\alpha$。那么，对于任意 $p>0$ 以及任意充分大的 $t>0$,

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{W}_p\big(\mu_t^{B,H}, \mathfrak{m}\big)\big] \gtrsim t^{-\frac{\min\{1,p\}}{d-\alpha/H}}. \tag{1.6}$$

注 1.4。（1）当 $H=1/2$ 且 $p=2$ 时，上述收敛速率与 *[37]* 中通过一种完全不同的方法得到的结果一致，该结果针对紧黎曼流形上的从属扩散过程。此外，我们应当强调，对于伯恩斯坦函数 B 的假设比 *[37]* 中的假设更弱，因为我们不另外要求 $B \in \mathbb{B}$，其中

$$\mathbb{B} := \Big\{ B \in \mathbf{B} : \int_1^\infty s^{\frac{d}{2}-1} e^{-rB(s)}\,\mathrm{d}s < \infty \ \textit{for all}\ r>0 \Big\}.$$

关于 $\mathbb{B}$ 与 $\mathbb{B}^\alpha$、$\mathbb{B}_\alpha$ 之间关系的更多细节，可参见 *[21, 注 1.1]*，其中还将结果推广到了可能带有边界的完备（但不一定紧致）黎曼流形。

(2) 一方面，作为定理 1.1 和 1.3 的直接推论，当$H = 1/2$ 和 $B \in \mathbb{B}_\alpha \cap \mathbb{B}^\alpha$ 满足某个 $\alpha \in [0,1]$时，我们对所有 $p \geq 1$ 及所有维数都建立了 $\mathbb{W}_p$ 的上界和量级相当的下界，

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{W}_p\left(\mu_t^B, \mathfrak{m}\right)\right] \asymp \begin{cases} t^{-1/2}, & d < 2(1+\alpha), \\ \left(\frac{\log t}{t}\right)^{1/2}, & d = 2(1+\alpha), \\ t^{-\frac{1}{d-2\alpha}}, & d > 2(1+\alpha). \end{cases}$$

另一方面，对于一般的 $H \in (0,1)$，若 $d > 2 + \alpha/H$ 且 B 由 (1.2) 给出，并满足 $\nu(\mathrm{d}y) \geq c y^{-1-\alpha}\mathrm{d}y$，其中常数 $c>0$ 和 $\alpha \in (0,1)$，我们还得到如下精确的收敛速率

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{W}_p\big(\mu_t^{B,H}, \mathfrak{m}\big)\big] \asymp t^{-\frac{1}{d-\alpha/H}}, \quad p \geq 1.$$

作为一项应用，在下一个定理中，我们给出定理 1.3 和定理 1.1 的离散时间逼近版本，这或许对 sfBM 的数值模拟有所助益；例如，参见一篇关于平均场 Ornstein–Uhlenbeck 过程数值模拟的最新论文 [13] 。对于任意非负数 a，令 $\lfloor a \rfloor$ 表示小于或等于 a的最大整数。

定理 1.5. 假设

(1) $H = 1/2$ 和 $B \in \mathsf{B}^\alpha$，其中某个 $\alpha \in [0,1]$，(2) $H \in (0,1/2)\cup(1/2,1)$，且 B 是由 (1.1) 表示的伯恩斯坦函数，满足 $\nu(\mathrm{d}y) \geq cy^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}y$，其中常数 $c>0$ 和 $\alpha \in (0,1)$。

设 $X^{B,H}$ 是一个指标为 H、对应于 B 的取值于 $\mathbb{T}^d$ 的 sfBM。令 $\beta > 0$ 并设 $\tau \asymp t^{-\beta}$ 对任意 $t>0$ 成立。那么对于足够大的 $t>0$,

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{W}_2\big(\mu^{B,H}_{\tau,t},\mathfrak{m}\big)\big] \lesssim \begin{cases} t^{-1/2}, & d \leq 2, \\ t^{-\min\{1/2,(1+\beta)/d\}}, & 2 < d < 2+\alpha/H, \\ \max\Big\{\sqrt{\frac{\log t}{t}}, t^{-\frac{1+\beta}{d}}\Big\}, & d = 2+\alpha/H, \\ t^{-\min\left\{d-\frac{\alpha}{H},\frac{1+\beta}{d}\right\}}, & d > 2+\alpha/H, \end{cases}$$

其中

$$\mu^{B,H}_{\tau,t} := \frac{1}{\lfloor t/\tau \rfloor}\sum_{k=1}^{\lfloor t/\tau\rfloor}\delta_{X^{B,H}_{k\tau}}, \quad t \geq \tau > 0.$$

上述研究的直接动机有两个方面。一方面，近期已有研究考察了在 $\mathbb{W}_2$ 条件下，紧黎曼流形和非紧黎曼流形上从属扩散过程所对应的经验测度的收敛速率，乃至精确极限，其中马尔可夫性质发挥着关键作用；参见 [37, 21, 22, 23]。然而，在上述论文的框架下，关于一般 Wasserstein距离 $\mathbb{W}_p$，尤其是针对 $p>2$ 的相关问题，仍未解决。另一方面，最近，文献 [17]得出了与分数布朗运动相关的经验测度的收敛速率。因此，研究 sfBM 所对应的经验测度在 Wasserstein距离下的收敛速率应当很有意义。

在相关文献中，关于与独立同分布随机变量相关的经验测度和参考测度之间 Wasserstein距离的渐近行为，尤其是收敛速率的估计，已受到广泛关注；例如参见 [15, 31, 12, 16, 1]。在具有开创性意义的论文 [2] （其中证明了精确极限）中，作者提出了一种新的偏微分方程方法，这启发了近期许多关于经验测度在 Wasserstein距离下收敛的研究；独立同分布（包括弱相关）随机变量的情形参见 [40, 6, 5, 20, 29, 30, 4, 19]，扩散过程的情形参见 [34, 35, 33, 38]，随机偏微分方程的情形参见 [36]。

本文其余部分安排如下。第 2 节简要介绍 $\mathbb{T}^d$ 上的傅里叶分析基础知识，并回顾一些用于证明主要结果的已知结论。第 3、4、5 节分别用于证明定理 1.1、1.3 和 1.5。需要指出的是，本文的证明受到上述近期工作 [17] 和 [37]的启发。为方便读者，文中附有一个附录，其中给出了一些篇幅较长但初等的计算，作为引理 3.1 的证明的补充。

2 准备工作

本节首先回顾环面上傅里叶分析所需的基本知识 $\mathbb{T}^d$，然后介绍后文将用到的一些已知结果。我们可以将 $\mathbb{T}^d$ 视为 $\mathbb{R}^d$ 中的立方体 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d$，并将 $\mathbb{T}^d$ 上的测度视为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d$ 上勒贝格测度 $\mathrm{d}x$ 的限制。$\mathbb{T}^d$ 上的函数可以看作定义在 f 上的函数

，满足 f在每个变量上均为 1-周期函数，即对于所有 $x \in \mathbb{T}^d$和 $\xi \in \mathbb{Z}^d$， $f(x+\xi) = f(x)$。关于平坦环面上的傅里叶分析的详细研究，参见例如 [14]。令$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$。

对于每个 $p \in [1, \infty]$，将 $\mathbb{T}^d$ （分别为 $\mathbb{Z}^d$）上的经典 L^p （分别为 l^p）空间记为 L^p（$\mathbb{T}^d$）（分别为 l^p（$\mathbb{Z}^d$）），其范数为$\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}$ （分别为$\|\cdot\|_{l^p(\mathbb{Z}^d)}$）。令 $\mathscr{M}$ 为 $\mathbb{T}^d$ 上所有有限有符号博雷尔测度构成的类。我们用 i 表示虚数单位。

对于任意 $\mu \in \mathscr{M}$ 和任意 $f \in L^1$（$\mathbb{T}^d$），我们用

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^d} \exp(-2\pi \mathrm{i}\langle \xi, x\rangle)\, \mu(\mathrm{d}x), \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^d} \exp(-2\pi \mathrm{i}\langle \xi, x\rangle) f(x)\, \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{Z}^d,$$

分别表示 μ 和 f 的傅里叶变换。对于向量值函数，我们将其傅里叶变换定义为各分量的傅里叶变换。于是，根据傅里叶逆变换，对于 $\mathbb{T}^d$ 上足够光滑的函数 f，可将 f 表示为绝对收敛的傅里叶级数，即

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \exp(2\pi \mathrm{i}\langle \xi, x\rangle) \hat{f}(\xi), \quad x \in \mathbb{T}^d.$$

由此并结合正交性，即

$$\int_{\mathbb{T}^d} \exp(2\pi \mathrm{i}\langle \xi, x\rangle) \mathrm{d}x = \delta_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}^d,$$

据此可验证（见 [17, (2.2)]），对于任意 $f \in L^{2n}$（$\mathbb{T}^d$）及任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{T}^d} |f|^{2n}(x) \mathrm{d}x = \sum_{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{2n} \in \mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^{2n} \hat{f}(\xi_i) \delta_0\Big(\sum_{i=1}^{2n} \xi_i\Big), \tag{2.1}$$

其中 δ_0 表示原点处的狄拉克测度。特别地，当 $n = 1$时，(2.1)化为帕塞瓦尔恒等式

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \|\hat{f}\|_{l^2(\mathbb{Z}^d)}, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d). \tag{2.2}$$

ˆ 结合 (2.2) 与简单不等式$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \le \|f\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)}$，由黎斯–托林插值定理（参见例如 [9, 第 3] 页），我们立即得到以下豪斯多夫–杨不等式，即

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^d} |f|^p(x) \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}|^q(\xi)\Big)^{1/q}, \quad f \in L^p(\mathbb{T}^d), \tag{2.3}$$

当且仅当 $p \in [2, \infty]$和 $q := \frac{p}{p-1}$时。

设 $(P_t)_{t \ge 0}$ 是对应于 $\mathbb{T}^d$上标准布朗运动的热半群/流。那么，对每个 $\mu \in \mathscr{M}$， $P_t\mu$ 都可以表示为 μ 与 $\mathbb{T}^d$上的高斯核 q_t 的卷积，即

$$P_t\mu(x) = \int_{\mathbb{T}^d} q_t(x-y)\, \mu(\mathrm{d}y), \quad x \in \mathbb{T}^d,\, t > 0,$$

其中

$$q_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \exp\Big(-\frac{|x-k|^2}{2t}\Big), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{T}^d.$$

通过傅里叶变换，我们有

$$\widehat{P_t\mu}(\xi) = \exp(-2\pi^2 t|\xi|^2)\hat{\mu}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}^d,\, t > 0. \tag{2.4}$$

设 $\mu \in \mathscr{M}$ 满足 $\mu(\mathbb{T}^d) = 0$。假设 h 是 $\mathbb{T}^d$上的泊松方程的解，即，

$$-\Delta u = \mu.$$

显然， h、 ∇h 和 μ 的傅里叶变换之间存在如下密切关系，即对于每个 $\xi \in \mathbb{Z}^d$,

$$4\pi^2|\xi|^2\hat{h}(\xi) = \hat{\mu}(\xi),$$

因此

$$2\pi|\xi|^2\widehat{\nabla h}(\xi) = \mathrm{i}\xi\hat{\mu}(\xi). \tag{2.5}$$

对于每个 $\epsilon > 0$，定义

$$\phi_\epsilon(\xi) = \frac{\exp(-\epsilon|\xi|^2)}{|\xi| + 1}, \quad \xi \in \mathbb{Z}^d.$$

采用极坐标，经过仔细计算，我们得到以下估计（详细证明见 [17, Lemma3.3] ）。

引理 2.1。对于任意 $d \geq 1$、 $\epsilon > 0$ 和 $p \geq 1$,

$$\|\phi_\epsilon\|_{l^p(\mathbb{Z}^d)} \asymp \begin{cases} 1, & d < p, \\ |\log \epsilon|^{1/p}, & d = p, \\ \epsilon^{-\frac{1}{2}(d/p-1)}, & d > p. \end{cases}$$

我们现在借用引理 [17, 引理 2。1], 也可参考 [38, 命题 5。3] 以及 [35, 附录], ，其中给出了 Wasserstein距离的上界和下界 $\mathbb{W}_p$ ，由 L^p 热流正则化的泊松方程解的梯度范数给出（P_t）$_{t>0}$ 在 $\mathbb{T}^d$上。令 $H^1(\mathbb{T}^d)$为如下定义的 Sobolev 空间:

$$H^1(\mathbb{T}^d) = \Big\{u \in L^2(\mathbb{T}^d) : \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big(1 + |k|^2\big)|\hat{u}(k)|^2 < \infty\Big\}.$$

引理 2.2. 令 μ、 $\nu \in \mathscr{P}$，并对任意 $\varepsilon > 0$，令 $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{T}^d)$ 为以下在 $\mathbb{T}^d$上的泊松方程的解，即,

$$-\Delta u = P_\varepsilon(\mu - \nu).$$

那么，存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$\mathbb{W}_1(\mu, \nu) \leq c \inf_{\varepsilon>0} \big\{\varepsilon^{1/2} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\big\}, \tag{2.6}$$

and

$$\mathbb{W}_1(\mu, \nu) \geq \sup_{\kappa,\varepsilon>0} \Big\{\frac{1}{\kappa}\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} - \frac{c}{\kappa^3}\|\nabla u_\varepsilon\|^4_{L^4(\mathbb{T}^d)}\Big\}. \tag{2.7}$$

此外，若 $\nu = \mathfrak{m}$，则对于任意 $p > 1$，存在一个常数 $C > 0$ ，使得

$$\mathbb{W}^p_p(\mu, \mathfrak{m}) \leq C \inf_{\varepsilon>0} \Big\{\varepsilon^{p/2} + \|\nabla u_\varepsilon\|^p_{L^p(\mathbb{T}^d)}\Big\}. \tag{2.8}$$

在下文中，对每个 $m \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{S}_m$ 表示集合$\{1, 2, \cdots, m\}$的所有排列构成的群。

3 上界

由（2.8）可知，为了证明定理 1.1 中的上界，只需估计 $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}$ 的上界，其中对每个 $\varepsilon>0$，u_ε 都是下列正则化泊松方程的解，即，

$$-\Delta u = P_\varepsilon(\mu_t^{B,H} - \mathfrak{m}). \tag{3.1}$$

为此，我们首先建立子ordinator的如下矩估计，这一结果本身也可能具有一定的研究价值。

引理 3.1. 设 S^B 是一个子ordinator，其伯恩斯坦函数 B 由 (1.1) 给出。假设 $\nu(\mathrm{d}y) \geq cy^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}y$，其中 $c>0$ 和 $\alpha\in$ 是某些常数，且 $\alpha\in\in(0,1)$。那么，对任意 $\delta>0$，存在一个仅依赖于 c、α、δ 的常数 $c_1>0$，使得对任意 $t>0$ 和任意 $\lambda>0$,

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda(S_t^B)^\delta}] \leq \begin{cases} e\cdot\exp\Big(-c_1\lambda^{\frac{\alpha}{(1-\delta)\alpha+\delta}}t^{\frac{\delta}{(1-\delta)\alpha+\delta}}\Big), & \delta\in(0,1], \\ e\cdot\exp\Big(-c_1\lambda^{\frac{\alpha}{(1-\delta)\alpha+\delta^2}}t^{\frac{\delta}{(1-\delta)\alpha+\delta^2}}\Big), & \delta\in(1,\infty). \end{cases}$$

注 3.2. 参数 λ 的显式依赖关系对我们的目的至关重要；见下文定理 1.1 的证明。至于 $\delta\in(0,1]$, 的情形，上述估计改进了 *[11,* 定理 2.*1],* 中的结果；后者曾被有效地用于研究从属马尔可夫过程的遍历性质（见 *[11,* 定理 1.*1]*）。该估计是锐利的，因为当 $\delta=1$ 时，取 $B(\lambda)=\lambda^\alpha$、$\alpha\in\in(0,1)$，$\lambda$ 和 t 的幂与 (1.2) 一致。

引理 3.1 的证明。当 $\delta>1$ 时，我们给出详细证明。当 $\delta\in(0,1]$ 时的情形证明类似；另见 [11, 第 168–170] 页。

(i) 不失一般性，我们可以假设子ordinator $(S_t^B)_{t\geq0}$ 没有漂移部分，即 $(S_t^B)_{t\geq0}$ 的无穷小生成元记为 L，其表达式为

$$Lg(x) = \int_0^\infty [g(x+y)-g(x)]\,\nu(\mathrm{d}y), \quad g\in C_b^1(\mathbb{R}),\, x\in\mathbb{R}.$$

令 $\delta>1$ 和 $\lambda>0$。设

$$g(x) := e^{-\lambda x^\delta}, \quad x\geq0.$$

由于 $\nu(\mathrm{d}y) \geq cy^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}y$ 且 $\alpha\in(0,1)$，由初等不等式可得

$$1-e^{-r} \geq \frac{e-1}{e}\min\{1,r\}, \quad (1+r)^\delta \geq 1+r^\delta, \qquad r\geq0,\,\delta>1,$$

我们有

$$\begin{aligned} Lg(x) &= \int_0^\infty \left(e^{-\lambda(x+y)^\delta} - e^{-\lambda x^\delta}\right)\nu(\mathrm{d}y) \\ &\leq cx^{-\alpha}e^{-\lambda x^\delta}\int_0^\infty \left(e^{-\lambda x^\delta[(1+z)^\delta-1]}-1\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{1+\alpha}} \\ &\leq \frac{c(1-e)}{e}x^{-\alpha}e^{-\lambda x^\delta}\int_0^{(1+\lambda^{-1}x^{-\delta})^{1/\delta}-1}\frac{\lambda x^\delta[(1+z)^\delta-1]}{z^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}z \\ &\leq \frac{c\lambda(1-e)}{e}x^{\delta-\alpha}e^{-\lambda x^\delta}\int_0^{(1+\lambda^{-1}x^{-\delta})^{1/\delta}-1} z^{\delta-\alpha-1}\,\mathrm{d}z \\ &= -C_1\psi(g(x)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $C_1 := \frac{c\lambda^{\alpha/\delta}}{(e-1)\ e\ (\delta-\alpha)}$ 以及

$$\psi(u) := u\left[(1-\log u)^{1/\delta} - (-\log u)^{1/\delta}\right]^{\delta-\alpha}, \quad 0 < u \le 1.$$

根据Dynkin公式和(3.2)，对于每个 $s \in [0,t]$，我们有

$$\mathbb{E}[g(S_t^B)] - \mathbb{E}[g(S_s^B)] \le -C_1\mathbb{E}\Big\{\int_s^t \psi\big((g(S_u^B))\,\mathrm{d}u\Big\} \le -C_1\int_s^t \psi\big(\mathbb{E}g(S_u^B)\big)\,\mathrm{d}u,$$

其中，最后一个不等式是因为 ψ 在$(0,1]$ 上是凸的（见附录中的引理A.1）。令

$$h(t) := \mathbb{E}g(S_t^B), \quad t \ge 0.$$

Then

$$\frac{h(t)-h(s)}{t-s} \le -\frac{C_1}{t-s}\int_s^t \psi(h(u))\,\mathrm{d}u, \quad 0 \le s \le t.$$

Noti注意到 h 在 $[0,\infty$上绝对连续），由最后一个不等式可得 t

$$h'(s) \le -C_1\psi(h(s)), \quad \text{a.e. } s \ge 0.$$

应用 [11, 引理2.1] 或 [28, 引理 5], ，由于 ψ 在$(0,1]$ 上递增（另见引理A.1），我们有

$$G(h(t)) \le G(1) - C_1 t, \quad t \ge 0,$$

其中

$$G(v) := -\int_v^1 \frac{\mathrm{d}u}{\psi(u)}, \quad 0 < v \le 1.$$

容易看出， G 严格递增，且$\lim_{r\to 0^+} G(r) = -\infty$ ， $G(1) = 0$。事实上，根据中值定理,

$$(1-\log u)^{1/\delta} - (-\log u)^{1/\delta} \le \delta^{-1}(-\log u)^{1/\delta-1}, \quad u \in (0,1],$$

因此，根据变量替换公式,

$$\int_v^1 \frac{\mathrm{d}u}{\psi(u)} \ge \delta^{\delta-\alpha}\int_v^1 \frac{\mathrm{d}u}{u(-\log u)^{(1/\delta-1)(\delta-\alpha)}} = \frac{\delta^{\delta-\alpha}(-\log v)^{1-(1/\delta-1)(\delta-\alpha)}}{1-(1/\delta-1)(\delta-\alpha)} \to \infty, \quad v \to 0^+,$$

whe最后一行是由此得出的，因为对于任意 $\delta > 1$，都有 $(1/\delta-1)(\delta-\alpha) < 0$。因此，我们得到的是

$$h(t) \le G^{-1}(G(1) - C_1 t) = G^{-1}(-C_1 t), \quad t \ge 0, \tag{3.3}$$

其中， G^{-1} 表示 G 的反函数。

接下来，我们给出 $G(v)$ 的下界。根据变量替换公式,

$$\begin{aligned} G(v) &= -\int_v^1 \frac{[(1-\log u)^{1/\delta} - (-\log u)^{1/\delta}]^{\alpha-\delta}}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^{-\log v} [(1+s)^{1/\delta} - s^{1/\delta}]^{\alpha-\delta}\,\mathrm{d}s, \quad 0 < v \le 1. \end{aligned}$$

由于 $\delta > 1$，对于任意 $s \ge 0$，我们有,

$$(1+s)^{1/\delta} - s^{1/\delta} = \frac{1}{\delta}\int_s^{1+s} u^{(1-\delta)/\delta}\,\mathrm{d}u \ge \frac{1}{\delta}(1+s)^{(1-\delta)/\delta}.$$

这意味着，对于任意 $v \in (0,1]$,

$$\int_0^{-\log v} [(1+s)^{1/\delta} - s^{1/\delta}]^{\alpha-\delta}\,\mathrm{d}s \le \int_0^{-\log v} \Big[\frac{1}{\delta}(1+s)^{\frac{1-\delta}{\delta}}\Big]^{\alpha-\delta}\mathrm{d}s$$
$$= C_2\Big[(1-\log v)^{\frac{\alpha-\delta\alpha+\delta^2}{\delta}} - 1\Big],$$

其中 $C_2 := \underline{\qquad}^{\delta^{1+\delta-\alpha}}_{(1-\delta)\alpha+\delta^2} > 0$。因此，对于任意 $v \in (0,1]$,

$$G(v) \ge -C_2\Big[(1-\log v)^{\frac{\alpha-\delta\alpha+\delta^2}{\delta}} - 1\Big]. \tag{3.4}$$

因此，由 (3.3) 和 (3.4) 可得

$$\mathbb{E}g(S_t^B) \le \exp\Big[1 - \Big(\frac{C_1}{C_2}t + 1\Big)^{\frac{\delta}{(1-\delta)\alpha+\delta^2}}\Big] \le e \cdot \exp\Big(-C_3\lambda^{\frac{\alpha}{(1-\delta)\alpha+\delta^2}} t^{\frac{\delta}{(1-\delta)\alpha+\delta^2}}\Big),$$

其中某个常数 $C_3 > 0$ 仅依赖于 c, α, δ。

(ii) 令 $\delta \in (0,1]$ 且 $\lambda > 0$。定义

$$f(x) = e^{-\lambda x^\delta}, \quad x \ge 0,$$

and

$$\varphi(u) = u\Big[(1-\log u)^{1/\delta} - (-\log u)^{1/\delta}\Big]^{-\alpha}, \quad 0 < u \le 1.$$

Let

$$F(v) = -\int_v^1 \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)}, \quad 0 < v \le 1,$$

并令 F^{-1} 表示 F 的反函数。显然， F 在 $(0,1], \lim_{r\to 0^+} F(r) = -\infty$ 上严格递增，且 $F(1) = 0$。事实上，由变量替换公式,

$$\int_v^1 \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)} = \int_0^{-\log v} \Big[(1+r)^{1/\delta} - r^{1/\delta}\Big]^\alpha \mathrm{d}r \ge -\log v \to +\infty, \quad v \to 0^+.$$

根据 [11, 定理 2.1], 的证明，我们有

$$\mathbb{E}[f(S_t^B)] \le F^{-1}(-C_4 t), \quad t \ge 0. \tag{3.5}$$

其中 $C_4 := c(1-e^{-1})\alpha^{-1}\lambda^{\alpha/\delta}$。

此外，显然

$$F(v) = -\int_0^{-\log v} \Big[(1+s)^{1/\delta} - s^{1/\delta}\Big]^\alpha \mathrm{d}s, \quad v \in (0,1].$$

由于

$$(1+s)^{1/\delta} - s^{1/\delta} = \frac{1}{\delta}\int_s^{1+s} u^{(1-\delta)/\delta}\,\mathrm{d}u \le \frac{1}{\delta}(1+s)^{(1-\delta)/\delta}, \quad s \ge 0,$$

我们有

$$\int_0^{-\log v} \Big[(1+s)^{1/\delta} - s^{1/\delta}\Big]^\alpha \mathrm{d}s \le \frac{1}{\delta^\alpha}\int_0^{-\log v} (1+s)^{\frac{(1-\delta)\alpha}{\delta}}\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{\delta^{1-\alpha}}{(1-\delta)\alpha+\delta}\Big[(1-\log v)^{\frac{(1-\delta)\alpha+\delta}{\delta}} - 1\Big], \quad v \in (0,1].$$

因此

$$F(v) \geq -\frac{\delta^{1-\alpha}}{(1-\delta)\alpha+\delta}\Big[(1-\log v)^{\frac{(1-\delta)\alpha+\delta}{\delta}}-1\Big], \quad v\in(0,1]. \tag{3.6}$$

令

$$C_4 t = \frac{\delta^{1-\alpha}}{(1-\delta)\alpha+\delta}\Big[(1-\log v)^{\frac{(1-\delta)\alpha+\delta}{\delta}}-1\Big],$$

我们得到:

$$v = \exp\Big[1-\Big(\frac{C_4[(1-\delta)\alpha+\delta]}{\delta^{1-\alpha}}t+1\Big)^{\frac{\delta}{(1-\delta)\alpha+\delta}}\Big].$$

根据式 (3.6) 以及 F 的单调性，我们得到

$$F^{-1}(-C_4 t) \leq \exp\Big[1-\Big(\frac{C_4[(1-\delta)\alpha+\delta]}{\delta^{1-\alpha}}t+1\Big)^{\frac{\delta}{(1-\delta)\alpha+\delta}}\Big], \quad t>0. \tag{3.7}$$

结合 (3.7) 和 (3.5)，我们得到某个常数 $C_5>0$，使得

$$\mathbb{E}[f(S_t^B)] \leq e\cdot\exp\Big[-C_5\lambda^{\frac{\alpha}{(1-\delta)\alpha+\delta}}t^{\frac{\delta}{(1-\delta)\alpha+\delta}}\Big], \quad t>0,$$

其中， C_5 仅取决于 α、δ和 c。 □

子ordinator 的矩估计在证明以下引理的过程中发挥着重要作用。

引理 3.3. 在定理 1.1 中的假设下，对于任意 $p\in\mathbb{N}$ 和任意 ξ_1、$\cdots$、$\xi_p\in\mathbb{Z}^d$,

$$\Big|\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{p}\widehat{\mu_t^{B,H}}(\xi_j)\Big]\Big| \lesssim \frac{1}{t^p}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p}\prod_{j=1}^{p}\min\Big\{\frac{1}{|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}|^{\alpha/H}},t\Big\}, \quad t>0.$$

证明。我们将证明分为两部分。

第 1 部分。我们首先考虑存在某个 $\alpha\in[0,1]$，使得 $H=1/2$ 和 $B\in\mathrm{B}^\alpha$ 的情形。令 $t>0$ 和 $p\in\mathbb{N}$。那么对于任意 $j=1$、2、$\cdots$、p，我们有

$$\widehat{\mu_t^B}(\xi_j) = \frac{1}{t}\int_0^t \exp(-2\pi\mathrm{i}\langle\xi_j, X_s^B\rangle)\,\mathrm{d}s, \quad \xi_j\in\mathbb{Z}^d.$$

因此

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{p}\widehat{\mu_t^B}(\xi_j) &= \frac{1}{t^p}\prod_{j=1}^{p}\Big(\int_0^t \exp(-2\pi\mathrm{i}\langle\xi_j,X_s^B\rangle)\,\mathrm{d}s\Big)\\ &= \frac{1}{t^p}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p}\int_{\Delta_\sigma}\exp\Big(-2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{p}\langle\xi_j,X_{t_j}^B\rangle\Big)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_p,\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中，对于每个 $\sigma\in\mathcal{S}_p$,

$$\Delta_\sigma := \{(t_{\sigma_1},t_{\sigma_2},\cdots,t_{\sigma_p})\in\mathbb{R}^p:\ 0\leq t_{\sigma_1}\leq t_{\sigma_2}\leq\cdots\leq t_{\sigma_p}\leq t\}.$$

换句话说，我们将 $[0,t]^p$ 划分为 $p!$ 个互不相同的单形。

令 $t_{\sigma_0}=0$，且 $(t_{\sigma_1},t_{\sigma_2},\cdots,t_{\sigma_p})\in\Delta_\sigma$。注意到 $(X_t^B)_{t\geq0}$具有独立增量，并且对于每个 $t\geq s\geq0$， $X_t^B-X_s^B$和 X_{t-s}^B 具有相同分布，因此得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\exp(-2\pi\mathrm{i}\langle\xi_j,X_{t_j}^B\rangle)|X_{t_{j-1}}^B\Big] &= e^{-2\pi\mathrm{i}\langle\xi_j,X_{t_{j-1}}^B\rangle}\mathbb{E}\Big[-2\pi\mathrm{i}\langle\xi_j,X_{t_j}^B-X_{t_{j-1}}^B\rangle|X_{t_{j-1}}^B\Big]\\ &= e^{-2\pi\mathrm{i}\langle\xi_j,X_{t_{j-1}}^B\rangle}\mathbb{E}\Big[-2\pi\mathrm{i}\langle\xi_j,X_{t_j-t_{j-1}}^B\rangle\Big], \quad j=1,2,\cdots,p.\end{aligned}$$

Then

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{p}\langle\xi_j, X^B_{t_j}\rangle\Big)\Big] = \prod_{j=1}^{p}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-2\pi\mathrm{i}\Big\langle X^B_{t_{\sigma_j}-t_{\sigma_{j-1}}}, \sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big\rangle\Big)\Big]. \tag{3.9}$$

注意，根据独立性、布朗运动的性质以及（1.2），

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-2\pi\mathrm{i}\Big\langle X^B_{t_{\sigma_j}-t_{\sigma_{j-1}}}, \sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big\rangle\Big)\Big] &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-2\pi^2\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^2 S^B_{t_{\sigma_j}-t_{\sigma_{j-1}}}\Big)\Big]\\ &= \exp\Big[-B\Big(2\pi^2\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^2\Big)(t_{\sigma_j}-t_{\sigma_{j-1}})\Big].\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{p}\langle\xi_j, X^B_{t_j}\rangle\Big)\Big] = \prod_{j=1}^{p}\exp\Big[-B\Big(2\pi^2\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^2\Big)(t_{\sigma_j}-t_{\sigma_{j-1}})\Big].$$

对上述等式两边在 Δ_σ 上积分，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\Delta_\sigma}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{p}\langle\xi_j, X^B_{t_j}\rangle\Big)\Big]\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_p\\ &= \int_{\Delta_\sigma}\exp\Big[-\sum_{j=1}^{p}B\Big(2\pi^2\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^2\Big)(t_{\sigma_j}-t_{\sigma_{j-1}})\Big]\,\mathrm{d}t_{\sigma_1}\mathrm{d}t_{\sigma_2}\cdots\mathrm{d}t_{\sigma_p}\\ &\le \int_{[0,t]^p}\exp\Big[-\sum_{j=1}^{p}B\Big(2\pi^2\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^2\Big)s_j\Big]\,\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_p\\ &\le \prod_{j=1}^{p}\min\Big\{\frac{1}{B(2\pi^2|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}|^2)}, t\Big\}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

因此，根据 (3.8) 和 (3.11)，利用 (1.3)，可得

$$\Big|\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{p}\widehat{\mu^B_t}(\xi_j)\Big]\Big| \lesssim \frac{1}{t^p}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p}\prod_{j=1}^{p}\min\Big\{\frac{1}{|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}|^{2\alpha}}, t\Big\}, \tag{3.12}$$

这就证明了当 $H = 1/2$ 时所需的结果。

第 2 部分。在定理1.1(ii)的条件下，还需讨论 $H \neq 1/2$ 的情形。

显然，过程 $(X^{B,\ H}_t)_{t\ge0}$ 不再具有独立增量。因此，等式 (3.9) 不再适用。为克服这一困难，我们利用第 2 节 [39, 中介绍的分数布朗运动 X^H 的局部非确定性，即

$$\mathrm{Cov}(X^H_{t_1}-X^H_{t_0}, X^H_{t_2}-X^H_{t_1}, \cdots, X^H_{t_p}-X^H_{t_{p-1}}) \gtrsim \mathrm{diag}(|t_1-t_0|^{2H}, |t_2-t_1|^{2H}, \cdots, |t_p-t_{p-1}|^{2H}), \tag{3.13}$$

对于任意 $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_p \le t$，其中左侧为 $p\times p$ 协方差矩阵，右侧为 $p\times p$ 对角矩阵。然后由 (3.13) 可得，独立性

根据 $(X_t^H)_{t\geq 0}$、$(S_t^B)_{t\geq 0}$ 和引理 3.1，我们可以找到一些常数 C_1、$C_2>0$，使得对于任意 $H\in(0,1/2)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_\sigma}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{p}\langle\xi_j,X_{t_j}^{B,H}\rangle\Big)\Big]\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_p\\
&\leq\int_{\Delta_\sigma}\mathbb{E}\exp\Big[-C_1\sum_{j=1}^{p}\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^2\Big(S_{t_{\sigma_j}}^B-S_{t_{\sigma_{j-1}}}^B\Big)^{2H}\Big]\,\mathrm{d}t_{\sigma_1}\mathrm{d}t_{\sigma_2}\cdots\mathrm{d}t_{\sigma_p}\\
&\lesssim\int_{\Delta_\sigma}\prod_{j=1}^{p}\exp\Big(-C_2\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^{\frac{2\alpha}{(1-2H)\alpha+2H}}(t_{\sigma_j}-t_{\sigma_{j-1}})^{\frac{2H}{(1-2H)\alpha+2H}}\Big)\,\mathrm{d}t_{\sigma_1}\mathrm{d}t_{\sigma_2}\cdots\mathrm{d}t_{\sigma_p}\quad(3.14)\\
&\lesssim\prod_{j=1}^{p}\int_{[0,t]}\exp\Big(-C_2\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^{\frac{2\alpha}{(1-2H)\alpha+2H}}s_j^{\frac{2H}{(1-2H)\alpha+2H}}\Big)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_p\\
&\lesssim\prod_{j=1}^{p}\min\Big\{\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^{-\alpha/H},t\Big\},
\end{aligned}$$

其中，在等式中我们用到了 $(S_t^B)_{t\geq 0}$ 具有平稳独立增量这一事实。与 (3.14) 中的论证相同，对于每个 $H\in(1/2,1)$，我们也有

$$\int_{\Delta_\sigma}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{p}\langle\xi_j,X_{t_j}^{B}\rangle\Big)\Big]\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_p\lesssim\prod_{j=1}^{p}\min\Big\{\Big|\sum_{i=j}^{p}\xi_{\sigma_i}\Big|^{-\alpha/H},t\Big\}.\quad(3.15)$$

因此，结合 (3.12)、(3.14) 和 (3.15)，引理 3.3 的证明即告完成。 □

一般而言，我们给出 $\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}^p]$ 在 $p\in\mathbb{N}$ 为偶数时的上界。为此，我们需要以下由引理 3.5], 改编而来的 Young 卷积不等式的推广版本，该结果可直接通过应用 H¨older 不等式和 Young 卷积不等式证明。

引理 3.4. 设 $p\in\mathbb{N}$、$p\geq 2$、f_1、f_2、$\cdots$、$f_p\colon\mathbb{Z}^d\to[0,\infty]$、$g_2$、$g_3$、$\cdots$、$g_p\colon\mathbb{Z}^d\to[0,\infty]$ 为可测函数，并选取 λ_i、$\Lambda_j\in[1,\infty]$、$i\in\{1,2,\cdots,p\}$ 和 $j\in\{2,3,\cdots,p\}$ 使得

$$\begin{cases}\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\Lambda_2}=2,\\ \frac{1}{\lambda_k}+\frac{1}{\Lambda_k}=1,\quad 3\leq k\leq p.\end{cases}$$

Then

$$\|T_p\|_{l^1(\mathbb{Z}^{d\times p})}\leq\prod_{i=1}^{p}\|f_i\|_{l^{\lambda_i}(\mathbb{Z}^d)}\prod_{j=2}^{p}\|g_j\|_{l^{\Lambda_j}(\mathbb{Z}^d)},$$

其中

$$T_p(\xi_1,\cdots,\xi_p):=\prod_{i=1}^{p}f_i(\xi_i)\prod_{j=2}^{p}g_j\Big(\sum_{i=1}^{j}\xi_i\Big),\quad(\xi_1,\cdots,\xi_p)\in(\mathbb{Z}^d)^p.$$

命题 3.5. 在定理 1.1 的假设下，若 u_ε 是泊松方程 (3.1) 的解，则对于任意足够大的偶数 $p\in\mathbb{N}$，有 $t>0$

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}^p]\lesssim\varepsilon^{\frac{p}{2}},\quad(3.16)$$

其中

$$\varepsilon=\begin{cases}t^{-1}, & d<2+\alpha/H,\\ t^{-1}\log t, & d=2+\alpha/H,\\ t^{-\frac{2}{d-\alpha/H}}, & d>2+\alpha/H.\end{cases}\quad(3.17)$$

证明。设 p 为一个正偶整数。结合 (2.4)、(2.5)、(2.1) 和引理 3.3，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|^p_{L^p(\mathbb{T}^d)}] &\lesssim \sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\prod_{i=1}^p \frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|}\Big|\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^p \widehat{\mu_t^{B,H}}(\xi_i)\Big]\Big|\delta_0\Big(\sum_{i=1}^p \xi_i\Big)\\
&\lesssim \frac{1}{t^p}\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\prod_{i=1}^p \frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p}\prod_{j=1}^p \min\Big\{\Big|\sum_{i=j}^p \xi_{\sigma_i}\Big|^{-\alpha/H}, t\Big\}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^p \xi_i\Big)\\
&= \frac{1}{t^{p-1}}\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\prod_{i=1}^p \frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p}\prod_{j=2}^p \min\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{j-1} \xi_{\sigma_i}\Big|^{-\alpha/H}, t\Big\}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^p \xi_{\sigma_i}\Big)\\
&= \frac{1}{t^{p-1}}\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\prod_{i=1}^p \frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p}\prod_{j=1}^{p-1} \min\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{j} \xi_{\sigma_i}\Big|^{-\alpha/H}, t\Big\}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^p \xi_{\sigma_i}\Big),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中，第一个等式是因为 $\sum_{j=1}^p \xi_{\sigma_j} = \sum_{j=1}^p \xi_j = 0$。

我们先讨论最简单的情形，即 $p = 2$。根据 (3.18) 和引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}] &\lesssim \frac{1}{t}\sum_{\xi_1,\xi_2\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\prod_{i=1}^2 \frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_2}\min\big\{|\xi_{\sigma_i}|^{-\alpha/H}, t\big\}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^2 \xi_{\sigma_i}\Big)\\
&\lesssim \frac{1}{t}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\frac{\exp(-\varepsilon|\xi|^2)}{|\xi|^{2+\alpha/H}} \lesssim \frac{1}{t}\|\phi_{c\varepsilon}\|^{2+\frac{\alpha}{H}}_{l^{2+\frac{\alpha}{H}}(\mathbb{Z}^d)} \lesssim \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中 ε 如 (3.17) 中所定义。

还需验证 (3.16) 对 $p \geq 4$ 成立。令

$$\Xi := \Big\{(\xi_1,\cdots,\xi_p)\in(\mathbb{Z}^d\setminus\{0\})^p : \sum_{i=1}^j \xi_i \neq 0, j = 1,2,\cdots,p-1\Big\}.$$

不失一般性，我们只考虑 σ 是恒等置换的情形。于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\Xi}\prod_{i=1}^p \frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|}\prod_{j=1}^{p-1}\Big|\sum_{i=1}^j \xi_i\Big|^{-\alpha/H}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^p \xi_i\Big)\\
&\lesssim \sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d}\prod_{i=1}^p \frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|+1}\prod_{j=1}^{p-1}\Big(\Big|\sum_{i=1}^j \xi_i\Big|+1\Big)^{-\alpha/H}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^p \xi_i\Big)\\
&\lesssim \sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d}\prod_{i=1}^p \frac{\exp\Big(-c\varepsilon|\xi_i|^2\Big)}{|\xi_i|+1}\prod_{j=1}^{p-1}\frac{\exp\Big(-\frac{c\alpha\varepsilon}{H}\Big|\sum_{i=1}^j \xi_i\Big|^2\Big)}{\Big(\Big|\sum_{i=1}^j \xi_i\Big|+1\Big)^{\alpha/H}}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^p \xi_i\Big),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

对于某个正数常量 c，第一项是因为对于每个 $a \geq 1$ 都有 $a \geq (a+1)/2$，而第三项则由此可得

$$\prod_{i=1}^p \exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2) \leq \Big\{\prod_{i=1}^p \exp\Big(-c\varepsilon|\xi_i|^2\Big)\Big\}\prod_{j=1}^{p-1}\exp\Big(-\frac{c\alpha\varepsilon}{H}\Big|\sum_{i=1}^j \xi_i\Big|^2\Big), \tag{3.20}$$

对于某个常量 $c>0$。事实上，根据基本不等式

$$\Big|\sum_{i=1}^{j}\xi_i\Big|^2\le j\sum_{i=1}^{j}|\xi_i|^2,\quad j\in\mathbb{N},$$

我们有

$$\frac{\alpha}{H}\sum_{j=1}^{p-1}\Big|\sum_{i=1}^{j}\xi_i\Big|^2+\sum_{i=1}^{p}|\xi_i|^2\le\Big[\frac{\alpha p(p-1)}{2H}+1\Big]\sum_{i=1}^{p}|\xi_i|^2,$$

这立即推出，对于某个常数 $c\le(\alpha p(p-1)/H+2)^{-1}$，式 (3.20) 成立。令

$$\begin{cases}f_1=\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H},\quad f_2=\cdots=f_{p-1}=\phi_{c\varepsilon},\\ g_2=\cdots=g_{p-2}=\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H},\quad g_{p-1}=\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H},\quad p\ge3,\end{cases}$$

并从 $[1,\infty]$ 中选取 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{p-1},\Lambda_2,\cdots,\Lambda_{p-1}$，使得

$$\begin{cases}\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\Lambda_2}=2,\\ \frac{1}{\lambda_k}+\frac{1}{\Lambda_k}=1,\qquad\qquad 3\le k\le p-1,\end{cases}\tag{3.21}$$

由引理 3.4，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d}\prod_{i=1}^{p}\frac{\exp\Big(-c\varepsilon|\xi_i|^2\Big)}{|\xi_i|+1}\prod_{j=1}^{p-1}\frac{\exp\Big(-\frac{c\alpha\varepsilon}{H}\Big|\sum_{i=1}^{j}\xi_i\Big|^2\Big)}{\Big(\Big|\sum_{i=1}^{j}\xi_i\Big|+1\Big)^{\alpha/H}}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^{p}\xi_i\Big)\\
&=\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d}\phi_{c\varepsilon}(\xi_1)\Big\{\prod_{i=2}^{p-1}\phi_{c\varepsilon}(\xi_i)\Big\}\phi_{c\varepsilon}(\xi_p)\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}(\xi_1)\Big\{\prod_{j=2}^{p-2}\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\Big(\sum_{i=1}^{j}\xi_i\Big)\Big\}\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\Big(\sum_{i=1}^{p-1}\xi_i\Big)\delta_0\Big(\sum_{i=1}^{p}\xi_i\Big)\\
&=\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d}\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}(\xi_1)\Big\{\prod_{i=2}^{p-1}\phi_{c\varepsilon}(\xi_i)\Big\}\Big\{\prod_{j=2}^{p-2}\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\Big(\sum_{i=1}^{j}\xi_i\Big)\Big\}\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\Big(\sum_{i=1}^{p-1}\xi_i\Big)\\
&\le\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{\lambda_1}(\mathbb{Z}^d)}\Big\{\prod_{i=2}^{p-1}\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{\lambda_i}(\mathbb{Z}^d)}\Big\}\Big\{\prod_{j=2}^{p-2}\|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^{\Lambda_j}(\mathbb{Z}^d)}\Big\}\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{\Lambda_{p-1}}(\mathbb{Z}^d)}\\
&=:\ I,\end{aligned}\tag{3.22}$$

其中，在第二个等式中，我们用到了这一事实：

$$\phi_\varepsilon(\xi_p)=\phi_\varepsilon\Big(-\sum_{i=1}^{p-1}\xi_i\Big)=\phi_\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{p-1}\xi_i\Big),\quad\varepsilon>0.$$

现在我们逐一证明该断言。在下文中，我们牢记根据 (3.17) 的选取，t 很大，因此 ε 很小。

(1) 设 $d<2+\alpha/H$。我们将此情形分为两部分。

第 (i) 部分 设 $d=1$。通过取

$$\begin{cases}\lambda_1=1,\\ \lambda_k=1,\ \Lambda_k=\infty,\quad 2\le k\le p-1,\end{cases}$$

我们很容易看出，条件 (3.21) 得到满足。此外，

$$I = \|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z})}\Big(\prod_{i=2}^{p-1}\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^1(\mathbb{Z})}\Big)\Big(\prod_{j=2}^{p-2}\|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}\Big)\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}.$$

根据引理 2.1，我们得到

$$\begin{cases}\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z})} = \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{1+\alpha/H}(\mathbb{Z})}^{1+\alpha/H} \lesssim 1, \quad \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^1(\mathbb{Z})} \lesssim |\log\varepsilon|,\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \lesssim 1, \quad \|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \lesssim 1.\end{cases}$$

按照 (3.17) 选取 ε 后，我们得到

$$I \lesssim |\log\varepsilon|^{p-2} \lesssim |\log t|^{p-2} \lesssim t^{p-1}\varepsilon^{\frac{p}{2}}. \tag{3.23}$$

第 (ii) 部分 令 $d>1$。我们断言，存在 $1<\eta<d$ 使得

$$d < \frac{\alpha\eta}{H(\eta-1)} < \frac{\eta}{\eta-1}\Big(1+\frac{\alpha}{H}\Big). \tag{3.24}$$

事实上，只需验证第一个不等式，因为第二个不等式是显然的。如果 $d\le\alpha/H$，则第一个不等式显然成立。如果 $d>\alpha/H$，则第一个不等式等价于$\eta<d/(d-\alpha/H)$。注意到，由于 $d<2+\alpha/H$， $d/(d-\alpha/H)>d/2$，我们可以按如下方式选取 η，即

$$\begin{cases}\max\{1,\frac{d}{2}\}<\eta<d, & d\le\alpha/H,\\ \max\{1,\frac{d}{2}\}<\eta<\frac{d}{d-\alpha/H}, & d>\alpha/H.\end{cases}$$

令

$$\begin{cases}\lambda_1=1,\\ \lambda_k=\eta,\ \Lambda_k=\frac{\eta}{\eta-1}, \quad 2\le k\le p-1,\end{cases}$$

我们有

$$I = \|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)}\Big(\prod_{i=2}^{p-1}\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^\eta(\mathbb{Z}^d)}\Big)\Big(\prod_{j=2}^{p-2}\|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}\Big)\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}.$$

(ii.1) 若 $d<1+\alpha/H$，则由引理 2.1 和 (3.24) 可推得

$$\begin{cases}\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)} = \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{1+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H} \lesssim 1,\\ \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^\eta(\mathbb{Z}^d)} \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}(d/\eta-1)},\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)} = \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{\alpha\eta/(H(\eta-1))}(\mathbb{Z}^d)}^{\alpha/H} \lesssim 1,\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)} = \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{\eta(1+\alpha/H)/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H} \lesssim 1.\end{cases}$$

因此，(3.17) 和 $d<2\eta$ 意味着

$$I \lesssim \varepsilon^{-\frac{p-2}{2}(d/\eta-1)} \lesssim t^{\frac{p-2}{2}(d/\eta-1)} \lesssim t^{p-1}\varepsilon^{\frac{p}{2}}. \tag{3.25}$$

(ii.2) 若 $1+\alpha/H<d<2+\alpha/H$，则由引理 2.1 和 (3.24)，可得

$$\begin{cases}\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)} = \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{1+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H} \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-1-\alpha/H)},\\ \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^\eta(\mathbb{Z}^d)} \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}(d/\eta-1)},\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)} = \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{\alpha\eta/(H(\eta-1))}(\mathbb{Z}^d)}^{\alpha/H} \lesssim 1,\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)} = \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{\eta(1+\alpha/H)/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H} \lesssim 1.\end{cases}$$

因此，根据该结论

$$\Big(\frac{d}{\eta}-1\Big)(p-2)+d-1-\frac{\alpha}{H}<p-2,$$

我们得到

$$I\lesssim t^{\frac{1}{2}[(d/\eta-1)(p-2)+d-1-\alpha/H]}\lesssim t^{\frac{p}{2}-1}=t^{p-1}\varepsilon^{\frac{p}{2}}, \tag{3.26}$$

由于 $\varepsilon=1/t$ ，根据 (3.17)。

(ii.3) 如果 $d=1+\alpha/H$，则根据引理 2.1 和 (3.24)，我们有

$$\begin{cases}\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)}=\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{1+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H}\lesssim|\log\varepsilon|,\\ \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^\eta(\mathbb{Z}^d)}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d/\eta-1)},\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}=\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{\alpha\eta/(H(\eta-1))}(\mathbb{Z}^d)}^{\alpha/H}\lesssim1,\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}=\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{\eta(1+\alpha/H)/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H}\lesssim1.\end{cases}$$

因此，根据 (3.17) 和 $d/\eta<2$,

$$I\lesssim t^{\frac{1}{2}(d/\eta-1)(p-2)}\lesssim t^{p-1}\varepsilon^{\frac{p}{2}}. \tag{3.27}$$

(2) 设 $d=2+\alpha/H$。通过选取

$$\begin{cases}\lambda_1=1,\\ \lambda_k=d,\ \Lambda_k=\frac{d}{d-1},\quad 2\le k\le p-1,\end{cases}$$

使得条件 (3.21) 得到满足，我们有

$$I=\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)}\Big(\prod_{i=2}^{p-1}\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^d(\mathbb{Z}^d)}\Big)\Big(\prod_{j=2}^{p-2}\|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^{d/(d-1)}(\mathbb{Z}^d)}\Big)\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{d/(d-1)}(\mathbb{Z}^d)}.$$

注意到 $1+\alpha/H=d-1$，由引理 2.1 和简单计算可得

$$\begin{cases}\|\phi_{\varepsilon/c}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)}=\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{1+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{1+\alpha/H}-1\right)(1+\alpha/H)}=\varepsilon^{-\frac{1}{2}},\\ \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^d(\mathbb{Z}^d)}\lesssim|\log\varepsilon|^{1/d},\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^{d/(d-1)}(\mathbb{Z}^d)}=\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{d(d-2)/(d-1)}(\mathbb{Z}^d)}^{d-2}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}[(d-1)/(d-2)-1](d-2)}=\varepsilon^{-\frac{1}{2}},\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{d/(d-1)}(\mathbb{Z}^d)}=\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{d(1+\alpha/H)/(d-1)}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H}\lesssim|\log\varepsilon|^{1-1/d},\end{cases}$$

结合(3.17)中对 $\varepsilon=\log t/t$ 的选取可知

$$I\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}(p-2)}|\log\varepsilon|^{1+\frac{p-3}{d}}\lesssim t^{\frac{1}{2}(p-2)}(\log t)^{\frac{p-3}{d}+2-\frac{p}{2}}\lesssim t^{p-1}\varepsilon^{\frac{p}{2}}, \tag{3.28}$$

其中，最后一个不等式是由于 $p\ge2-1/(d-1)$，因为 $d=2(1+\alpha)$，且 p 是 $\mathbb{N}$ 中的偶数。

（3）设 $d>2+\alpha/H$。通过选择 $\eta<d$ 使得 $1+\alpha/H<\eta-1<d$、 η（$1+\alpha/H$）/（$\eta-1$） $<d$ ，并且

$$\begin{cases}\lambda_1=1,\\ \lambda_k=\eta,\ \Lambda_k=\frac{\eta}{\eta-1},\quad 2\le k\le p-1,\end{cases}$$

容易验证（3.21）成立。于是

$$I=\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)}\Big(\prod_{i=2}^{p-1}\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^\eta(\mathbb{Z}^d)}\Big)\Big(\prod_{j=2}^{p-2}\|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}\Big)\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}.$$

根据引理 2.1 和 η 的选取，我们得到

$$\begin{cases}\|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)}=\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{1+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{1+\alpha/H}-1\right)(1+\alpha/H)}=\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-1-\alpha/H)},\\ \|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^\eta(\mathbb{Z}^d)}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d/\eta-1)},\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}=\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{\alpha\eta/(H(\eta-1))}(\mathbb{Z}^d)}^{\alpha/H}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}[d(1-1/\eta)-\alpha/H]},\\ \|\phi_{c\varepsilon}^{1+\alpha/H}\|_{l^{\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}=\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{(1+\alpha/H)\eta/(\eta-1)}(\mathbb{Z}^d)}^{1+\alpha/H}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}[d(1-1/\eta)-1-\alpha/H]}.\end{cases}$$

因此，结合 (3.17)，不难看出 that

$$I\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}[(p-1)(d-\alpha/H)-p]}\lesssim t^{p-1}\varepsilon^{\frac{p}{2}}. \tag{3.29}$$

综合（3.18）、（3.19）和（3.22），我们得到

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}^p]\lesssim\frac{1}{t^{p-1}}\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_p\in\Xi}\prod_{i=1}^{p}\frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|}\prod_{j=1}^{p-1}\Big|\sum_{i=1}^{j}\xi_i\Big|^{-2\alpha}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^{p}\xi_i\Big)\lesssim t^{1-p}I. \tag{3.30}$$

因此，根据（3.23）、（3.25）、（3.26）、（3.27）、（3.28）和（3.29），我们立即得到

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}^p]\lesssim\varepsilon^{\frac{p}{2}}. \tag{3.31}$$

Let

$$q:=\min\Big\{j\in\{1,2,\cdots,p-1\}:\ \xi_i\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},\ i=1,\cdots,j,\ \sum_{i=1}^{j}\xi_i=0\Big\}.$$

然后，采用与（3.30）、（3.31）和（3.18）的推导类似的归纳方法，我们最终得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}^p]\\ &\lesssim\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_q\in\Xi}\prod_{i=1}^{q}\frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|}\prod_{j=1}^{q-1}\Big|\sum_{i=1}^{j}\xi_i\Big|^{-\alpha/H}\delta_0\Big(\sum_{i=1}^{q}\xi_i\Big)\times\\ &\quad\sum_{\xi_{q+1},\cdots,\xi_p\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\prod_{i=q+1}^{p}\frac{\exp(-\varepsilon|\xi_i|^2/2)}{|\xi_i|}\prod_{j=q+1}^{p-1}\min\Big\{\Big|\sum_{i=q+1}^{j}\xi_i\Big|^{-\alpha/H},t\Big\}\delta_0\Big(\sum_{i=q+1}^{p}\xi_i\Big)\\ &\lesssim\varepsilon^{\frac{q}{2}}\varepsilon^{\frac{p-q}{2}}\lesssim\varepsilon^{\frac{p}{2}},\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

定理 1.1 的证明。对于每个 $p\geq 1$，我们可以取一个偶数 $q\in\mathbb{N}$，使得 $q\geq p$。根据 (2.8) 和 (3.16)，由 $p\mapsto\mathbb{W}_p$ 的单调性可得

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_p^p(\mu_t^{B,H},\mathfrak{m})]\lesssim\varepsilon^{\frac{p}{2}}+\Big(\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{T}^d)}^q]\Big)^{p/q}\lesssim\varepsilon^{\frac{p}{2}},$$

其中，足够大的 $t>0$ 下，ε 也由 (3.17) 给出。 □

4 下界

本节中，我们先证明定理 1.3，然后为取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 sfBM 建立一个下界；这可以看作是将我们的方法从紧情形推广到非紧情形。

4.1 定理 1.3 的证明：sBM 情形

为了证明定理 1.3 中的下界估计，我们还需要$\asymp\mathbb{E}[|\mu_t^B(\xi)|^2]$上的相应下界，下面给出该下界。

引理 4.1. 假设 $B \in$B。那么对任意 $\xi \in \mathbb{Z}^d\backslash\{0\}$，有

$$\mathbb{E}\Big[|\widehat{\mu_t^B}(\xi)|^2\Big] \asymp \frac{1}{tB(2\pi^2|\xi|^2)},$$

当 $t>0$ 足够大时。

证明. 首先，我们证明上界。在 (3.12) 中取 $p=2$ 和 $\xi_1=-\xi_2=\xi\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}$，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[|\widehat{\mu_t^B}(\xi)|^2\Big] &= \Big|\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{2}\widehat{\mu_t^B}(\xi_j)\Big]\Big| \le \frac{1}{t^2}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_2}\prod_{j=1}^{2}\min\left\{\frac{1}{B(2\pi^2|\sum_{i=j}^{2}\xi_{\sigma_i}|^2)},t\right\}\\ &= \frac{1}{t}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_2}\min\left\{\frac{1}{B(2\pi^2|\xi_{\sigma_2}|^2)},t\right\} \le \frac{2}{tB(2\pi^2|\xi|^2)},\quad t>0,\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中第二个等号是因为，对于任意 $\sigma\in\mathcal{S}_2$ 和 $B\in$B，$\xi_{\sigma_1}+\xi_{\sigma_2}=0$

现在，我们转而证明下界。根据 $|\widehat{\mu_t^B}(\xi)|^2 = \widehat{\mu_t^B}(\xi)\,\widehat{\mu_t^B}(-\xi)$，我们可以将 $\mathbb{E}[|\mu_t^B(\xi)|^2]$ 分成两部分。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\widehat{\mu_t^B}(\xi)|^2] &= \frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^{s_1}\mathbb{E}\left[\exp(-2\pi^2|\xi|^2(S_{s_1}^B-S_{s_2}^B))\right]\,\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\\ &\quad+\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_{s_1}^{t}\mathbb{E}\left[\exp\big(-2\pi^2|\xi|^2(S_{s_2}^B-S_{s_1}^B)\big)\right]\,\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\\ &= \frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^{s_1}\exp\big(-B(2\pi^2|\xi|^2)(s_1-s_2)\big)\,\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\\ &\quad+\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_{s_1}^{t}\exp\big(-B(2\pi^2|\xi|^2)(s_2-s_1)\big)\,\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\\ &=: I_1+I_2,\quad t>0.\end{aligned} \tag{4.2}$$

对于 I_1，由于 $B\in$B，不难看出，对于任意 $t>1$,

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^{s_1}\exp\big(-B(2\pi^2|\xi|^2)u\big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s_1\\ &\ge \frac{1}{t^2}\int_{\frac{t}{2}}^t\int_0^{\frac{t}{2}}\exp\big(-B(2\pi^2|\xi|^2)u\big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s_1\\ &\gtrsim \frac{1}{tB(2\pi^2|\xi|^2)},\quad \xi\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

对于 I_2，同样有

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^{t-s_1} \exp\big(-B(2\pi^2|\xi|^2)u\big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s_1 \\ &\geq \frac{1}{t^2}\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{\frac{t}{2}} \exp\big(-B(2\pi^2|\xi|^2)u\big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s_1 \\ &\gtrsim \frac{1}{tB(2\pi^2|\xi|^2)}, \quad \xi\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\},\, t>1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

结合 (4.1)、(4.2)、(4.3) 和 (4.4)，我们完成了证明。 □

现在，根据 (2.6) 以及引理 4.1 中关于 $\mathbb{E}[|\mu_t^B(\xi)|^2]$ 的估计，我们可以证明 $\mathbb{E}[\mathbb{W}_1(\mu_t^B,\mathfrak{m})]$ 的下界。

命题4.2。假设对于某个 $\alpha\in[0,1]$，有 $B\in\mathrm{B}_\alpha\cap\mathrm{B}^\alpha$。那么

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_1(\mu_t^B,\mathfrak{m})] \gtrsim \begin{cases} \frac{1}{t^{1/2}}, & d<2(1+\alpha), \\ \sqrt{\frac{\log t}{t}}, & d=2(1+\alpha), \\ t^{-\frac{1}{d-2\alpha}}, & d>2(1+\alpha), \end{cases} \tag{4.5}$$

当 $t>0$ 足够大时。

证明。对于每个 $\varepsilon>0$，令 u_ε 为下列泊松方程的解，该方程由定义在 $\mathbb{T}^d$ 上的热半群 $(P_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 正则化：

$$-\Delta u = P_\varepsilon(\mu_t^B-\mathfrak{m}). \tag{4.6}$$

根据 (2.2)、(2.4)、(2.5)、引理 4.1，以及这样一个事实（见 (1.3)）：对于任意 $s\geq 0$，由于 $B\in\mathrm{B}_\alpha$，有 $s^\alpha\gtrsim B(s)$，我们得到

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2] \asymp \frac{1}{t}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}}\frac{\exp(-\varepsilon|\xi|^2)}{|\xi|^2B(2\pi^2|\xi|^2)} \gtrsim \frac{1}{t}\|\phi_{c\varepsilon}\|_{l^{2(1+\alpha)}(\mathbb{Z}^d)}^{2(1+\alpha)}, \quad t>1,\,\varepsilon>0, \tag{4.7}$$

其中 $c=1/(2+2\alpha)$。由引理 2.1 和 (4.7)，我们有

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \gtrsim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & d<2(1+\alpha), \\ \frac{1}{\sqrt{t}}|\log\varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & d=2(1+\alpha), \\ \frac{1}{\sqrt{t}}\varepsilon^{-\frac{1}{4}[d-2(1+\alpha)]}, & d>2(1+\alpha), \end{cases} \tag{4.8}$$

对于足够大的 $t>0$。

令 ε 如 (3.17) 中所选取，对于足够大的 $t>0$，一方面，由 (4.8) 立即得到 $\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2]\gtrsim\varepsilon$；另一方面，根据命题 3.5，有 $\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^4(\mathbb{T}^d)}^4]\lesssim\varepsilon^2$。根据 (2.7)，有

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_1(\mu_t^B,\mathfrak{m})] \gtrsim \frac{1}{\kappa}\varepsilon - \frac{C}{\kappa^3}\varepsilon^2, \quad \kappa>0.$$

令 $\kappa=2\sqrt{C\varepsilon}$ 和 ε 按照 (3.17) 中的方式选取，我们证明 (4.5)。 □

现在，我们利用命题4.2证明定理 1.3 中的第一个结论。

定理 1.3(1) 的证明。众所周知，对于每个 $p\geq 1$，都有 $\mathbb{W}_1(\mu_t^B,\mathfrak{m})\leq\mathbb{W}_p(\mu_t^B,\mathfrak{m})$，因为 $p\mapsto\mathbb{W}_p$ 是递增的。根据假设，$B\in\mathrm{B}_\alpha\cap\mathrm{B}^\alpha$ 对某个 $\alpha\in[0,1]$ 成立，因此由 (4.5) 可知，(1.5) 成立。

□

4.2 定理 1.3 的证明：sfBM 情形

在这一部分，我们采用另一种方法来证明对所有 $p>0$， $\mathbb{W}_p$ 的下界，这一方法受到 [37, 定理 1.1(2)] 的启发。一个关键步骤是使用与时间离散化过程相关的经验测度，来逼近与原始连续时间过程相关的经验测度。

定理 1.3(2) 的证明。设 $B\in \mathrm{B}_\alpha$ for some $\alpha\in(0,1]$ and $p\in(0,\alpha)$。对于任意 $N\in\mathbb{N}$ 和 $t>N$，我们定义

$$\mu_N^{B,H}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_{t_i}^{B,H}},$$

其中 $t_i=\frac{(i-1)_N}{N}t$, $1\le i\le N$。根据 Wasserstein距离的三角不等式，我们有

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_p(\mu_t^{B,H},\mathfrak{m})]\ge \mathbb{E}[\mathbb{W}_p(\mathfrak{m},\mu_N^{B,H})]-\mathbb{E}[\mathbb{W}_p(\mu_t^{B,H},\mu_N^{B,H})] \tag{4.9}$$

首先，我们给出 $\mathbb{E}[\mathbb{W}_p(\mu^{B,\frac{t}{N}H},\mu^{B,\frac{N}{N}H})]$ 的上界。容易验证，

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^N\int_{t_i}^{t_{i+1}}\delta_{X_s^{B,H}}(\mathrm{d}x)\delta_{X_{t_i}^{B,H}}(\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}s\in\mathscr{C}(\mu_t^{B,H},\mu_N^{B,H}),$$

从而，

$$\mathbb{W}_p(\mu_t^{B,H},\mu_N^{B,H})\le\frac{1}{t}\sum_{i=1}^N\int_{t_i}^{t_{i+1}}\rho(X_s^{B,H},X_{t_i}^{B,H})^p\,\mathrm{d}s.$$

从 [37,第 17], 页我们可以看到，根据

$$\mathbb{E}[(S_r^B)^p]\lesssim r^{\frac{p}{\alpha}},\quad r\in[0,1],\,p\in(0,\alpha).$$

令 $\mathrm{Proj}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d=\mathbb{T}^d$ 为自然投影映射。那么

$$\rho\big(\mathrm{Proj}(x),\mathrm{Proj}(y)\big)\le|x-y|,\quad x,y\in\mathbb{R}^d.$$

由于 $(X^{B,\frac{t}{N}H})_{t\ge0}$ 是一个 $\mathbb{R}^d$值分数布朗运动的自然投影的从属过程，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\rho(X_s^{B,H},X_{t_i}^{B,H})^p]&=\mathbb{E}[\rho(X_{S_s^B}^H,X_{S_{t_i}^B}^H)^p]\lesssim\mathbb{E}[|S_s^B-S_{t_i}^B|^{pH}]\\&=\mathbb{E}[|S_{s-t_i}^B|^{pH}]\lesssim(s-t_i)^{\frac{pH}{\alpha}},\quad s\ge t_i.\end{aligned}$$

Thus

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_p(\mu_t^{B,H},\mu_N^{B,H})]\lesssim(tN^{-1})^{\frac{pH}{\alpha}},\quad t>N,N\in\mathbb{N}. \tag{4.10}$$

其次，由于 $\mathbb{T}^d$ 是紧的，显然

$$\mathfrak{m}(\{\rho(x,\cdot)^p\le r\})\lesssim r^{\frac{d}{p}},\quad r>0,\,x\in\mathbb{T}^d.$$

根据 [18,命题 4.2], ，这意味着

$$\mathbb{W}_p(\mu_N^{B,H},\mathfrak{m})\gtrsim N^{-\frac{p}{d}},\quad N\in\mathbb{N}. \tag{4.11}$$

最后，结合 (4.11)、(4.9) 和 (4.10)，我们得到

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_p(\mu_t^{B,H},\mathfrak{m})]\gtrsim N^{-\frac{p}{d}}-(tN^{-1})^{\frac{pH}{\alpha}},\quad t>N,\,N\in\mathbb{N}.$$

由于 $d>\alpha/H$，取 $N\asymp t^{\frac{d}{d-\alpha/H}}$，对于足够大的 $t>0$，有

$$\mathbb{E}[\mathbb{W}_p(\mu_t^{B,H},\mathfrak{m})]\gtrsim t^{-\frac{p}{d-\alpha/H}}.$$

因此，由于对每个 $0<p\le1\le q$，根据 H¨older 不等式有 $(\mathbb{W}_p)^{1/p}\le\mathbb{W}_1\le\mathbb{W}_q$，我们完成了 (1.6) 的证明。 □

4.3 $\mathbb{R}^d$上的 sfBM 下界

关于 $\mathbb{R}^d$ 上两个相互独立的 sfBM，对于所有 $p \geq 1$，我们有如下关于 $\mathbb{W}_p$ 下界的推论。我们先引入一些概念。设 M_1 和 M_2 为度量空间，且 $F\colon M_1 \to M_2$ 为 Borel可测映射。给定 M_1 上的 Borel测度 ν，我们定义推前测度 $F_*\nu$，使得对于 M_2 的任意 Borel子集 A，有 $F_*\nu(A) = \nu\big(F^{-1}(A)\big)$。对于任意 $p \geq 1$ 以及 $\mathbb{R}^d$ 上的 Borel概率测度 μ、ν，令

$$\mathbb{W}_{p,\mathbb{R}^d}(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\mathscr{C}_{\mathbb{R}^d}(\mu,\nu)} \Big(\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |x-y|^p \,\pi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\Big)^{1/p},$$

其中，$\mathscr{C}_{\mathbb{R}^d}(\mu,\nu)$ 是乘积空间 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上所有概率测度构成的集合，其边缘分布分别为 μ 和 ν。

推论4.3. 设 $B_1 \in \mathbf{B}^{\alpha_1}$ 且 $B_2 \in \mathbf{B}^{\alpha_2}$，其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$。假设$\alpha_1 \leq \alpha_2$ 和 $X^1 := (X_t^{B_1})_{t\geq 0}$ 以及 $X^2 := (X_t^{B_2})_{t\geq 0}$ 是 $\mathbb{R}^d$值的相互独立的分数布朗运动，分别对应于 B_1 和 B_2。那么，对每个 $p \geq 1$ 以及每个充分大的$t > 0$,

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{W}^p_{p,\mathbb{R}^d}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X_s^{B_1}}\,\mathrm{d}s, \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X_s^{B_2}}\,\mathrm{d}s\Big)\Big] \gtrsim \begin{cases} t^{-p/2}, & d < 2(1+\alpha_1), \\ \Big(\frac{\log t}{t}\Big)^{p/2}, & d = 2(1+\alpha_1), \\ t^{-p/(d-2\alpha_1)}, & d > 2(1+\alpha_1). \end{cases} \tag{4.12}$$

证明. 用 $\mathbb{E}_1[\cdot]$, $\mathbb{E}_2[\cdot]$ 分别表示关于 X^1 和 X^2 的期望，因此 $\mathbb{E}[\cdot] = \mathbb{E}_1[\mathbb{E}_2[\cdot]]$。由 $\mathbb{W}_p$ 的凸性（例如参见 [32, 定理4.8]），可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_2\Big[\mathbb{W}^p_{p,\mathbb{R}^d}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X_s^{B_1}}\,\mathrm{d}s, \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X_s^{B_2}}\,\mathrm{d}s\Big)\Big] &\geq \mathbb{W}^p_{p,\mathbb{R}^d}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X_s^{B_1}}\,\mathrm{d}s, \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_2[\delta_{X_s^{B_2}}]\,\mathrm{d}s\Big) \\ &= \mathbb{W}^p_{p,\mathbb{R}^d}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X_s^{B_1}}\,\mathrm{d}s, \frac{1}{t}\int_0^t \mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s\Big), \quad p \geq 1, \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中，对每个 $s > 0$，$\mathfrak{n}_s^{B_2}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的一个 Borel 概率测度，其定义为

$$\mathfrak{n}_s^{B_2}(A) = \int_A \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi u)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2u}\Big)\,\mathbb{P}(S_s^{B_2} \in \mathrm{d}u)\mathrm{d}x,$$

对于任意 Borel子集 A，属于 $\mathbb{R}^d$。

与前文一样，令 Proj: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$ 为自然投影映射。显然，Proj 是 Lipschitz连续的，且 Lipschitz常数为 1。根据定义，容易看出

$$\mathbb{W}^p_p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\mathrm{Proj}(X_s^{B_1})}\,\mathrm{d}s, \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s\Big) \leq \mathbb{W}^p_{p,\mathbb{R}^d}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X_s^{B_1}}\,\mathrm{d}s, \frac{1}{t}\int_0^t \mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s\Big), \quad p \geq 1. \tag{4.14}$$

对于每个 $p \geq 1$，根据三角不等式以及对任意 $a, b \geq 0$ 均成立的初等不等式 $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$，我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{W}^p_p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\mathrm{Proj}(X_s^{B_1})}\,\mathrm{d}s, \mathfrak{m}\Big) - \mathbb{W}^p_p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s, \mathfrak{m}\Big) \\ &\lesssim \mathbb{W}^p_p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\mathrm{Proj}(X_s^{B_1})}\,\mathrm{d}s, \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s\Big). \end{aligned} \tag{4.15}$$

令 $t>0$，并设置 $\mu_t := \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\mathrm{d}s$。对于每个 $\varepsilon>0$，令 u_ε 为 $\mathbb{T}^d$ 上泊松方程的解:

$$-\Delta u = P_\varepsilon(\mu_t - \mathfrak{m}).$$

然后，将 (2.4) 与 (2.5) 结合应用，可得

$$\widehat{\nabla u_\varepsilon}(\xi) = \frac{\mathrm{i}\xi}{2\pi|\xi|^2}\widehat{P_\varepsilon(\mu_t-\mathfrak{m})}(\xi) = \frac{\mathrm{i}\xi}{2\pi|\xi|^2}\exp(-2\pi^2\varepsilon|\xi|^2)\widehat{\mu_t-\mathfrak{m}}(\xi), \quad \xi\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}. \tag{4.16}$$

应用 (1.2)，由于根据 (1.3)，对每个 $t\geq 0$， $B_2(t)\gtrsim \min\{t^{\alpha_2},t\}$，容易看出 t

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_t(\xi) &= \frac{1}{t}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\exp(-2\pi\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle)\,\mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{t}\int_0^t\int_0^\infty \exp(-2\pi^2u|\xi|^2)\,\mathbb{P}(S_s^{B_2}\in\mathrm{d}u)\mathrm{d}s\\ &\lesssim \frac{1}{t}\int_0^t \exp\left(-(2\pi^2|\xi|^2)^{\alpha_2}s\right)\,\mathrm{d}s\\ &\lesssim \frac{1}{t|\xi|^{2\alpha_2}}, \quad \xi\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

结合 (4.17) 和 (4.16)，可得

$$|\widehat{\nabla u_\varepsilon}|(\xi)\lesssim \frac{\exp(-2\pi^2\varepsilon|\xi|^2)}{|\xi|}\frac{1}{t|\xi|^{2\alpha_2}}\lesssim \frac{\exp(-2\pi^2\varepsilon|\xi|^2)}{t(1+|\xi|)^{1+2\alpha_2}} = \frac{1}{t}\phi_{c\varepsilon}^{1+2\alpha_2}(\xi), \quad \xi\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}, \tag{4.18}$$

其中 $c=2\pi^2/(1+2\alpha_2)$。因此，由 Hausdorff–Young不等式 (2.3) 和 (4.18)，可得

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}^p \leq \Big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}|\widehat{\nabla u_\varepsilon}|^q(\xi)\Big)^{p/q}\lesssim \frac{1}{t^p}\|\phi_{c\varepsilon}\|_{L^{q(1+2\alpha_2)}(\mathbb{Z}^d)}^{p(1+2\alpha_2)}, \quad p\geq 2, \tag{4.19}$$

其中 $q=p/(p-1)$。

设 $p\geq 2$。将 (4.19) 与引理 2.1 及 (2.8) 结合，可得

$$\mathbb{W}_p^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s,\mathfrak{m}\Big)\lesssim \begin{cases}\inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{t^p}\}, & d<q(1+2\alpha_2),\\ \inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{t^p}|\log\varepsilon|^{p-1}\}, & d=q(1+2\alpha_2),\\ \inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{t^p}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d/q-1-2\alpha_2)p}\}, & d>q(1+2\alpha_2).\end{cases}$$

若 $d<q(1+2\alpha_2)$，则令 $\varepsilon=\frac{1}{t^2}$，可得

$$\mathbb{W}_p^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s,\mathfrak{m}\Big)\lesssim \frac{1}{t^p}+\frac{1}{t^p}\lesssim\frac{1}{t^p}.$$

2若 $d=q(1+2\alpha_2)$，令 $\varepsilon=t^{-\frac{2}{d/q-2\alpha_2}}$，可容易验证

$$\mathbb{W}_p^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s,\mathfrak{m}\Big)\lesssim t^{-\frac{p}{d/q-2\alpha_2}}+t^{-p}\Big|\log t^{-\frac{2}{d/q-2\alpha_2}}\Big|^{p-1}\lesssim t^{-p}(\log t)^{p-1}.$$

2若 $d>q(1+2\alpha_2)$，令 $\varepsilon=t^{-\frac{2}{d/q-2\alpha_2}}$，则

$$\mathbb{W}_p^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s,\mathfrak{m}\Big)\lesssim t^{-\frac{p}{d/q-2\alpha_2}}+t^{-p}t^{\frac{p}{d/q-2\alpha_2}(d/q-1-2\alpha_2)}=2t^{-\frac{p}{d/q-2\alpha_2}}.$$

综合上述估计，可得

$$\mathbb{W}_p^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s,\mathfrak{m}\Big)\lesssim\begin{cases}t^{-p}, & d<q(1+2\alpha_2),\\ (\frac{\log t}{t})^p, & d=q(1+2\alpha_2),\\ t^{-\frac{p}{d/q-2\alpha_2}}, & d>q(1+2\alpha_2),\end{cases}\tag{4.20}$$

当 $t>0$ 足够大时。令 $q=\min\{2,p/(p-1)\}$。对于每个 $1\le p<2$，由于 $\mathbb{W}_p\le\mathbb{W}_2$，我们也有 (4.20)。

令 $p\ge 1$。将 (4.13)、(4.14) 和 (4.15) 合并，并对 $\mathbb{E}_1[\cdot]$ 取期望，由于 $\mathbb{W}_1\le\mathbb{W}_p$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\mathbb{W}_{p,\mathbb{R}^d}^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t\delta_{X_s^{B_1}}\mathrm{d}s,\frac{1}{t}\int_0^t\delta_{X_s^{B_2}}\,\mathrm{d}s\Big)\Big]&\gtrsim\mathbb{E}_1\Big[\mathbb{W}_1^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t\delta_{\mathrm{Proj}(X_s^{B_1})}\,\mathrm{d}s,\mathfrak{m}\Big)\Big]\\&\quad-\mathbb{W}_p^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t\mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\,\mathrm{d}s,\mathfrak{m}\Big).\end{aligned}$$

因此，利用 (4.5) 和 (4.20)，并注意到当 $t>0$ 足够大时，关于 $\mathbb{W}_1^p\big(\frac{1}{t}\int_0^t\mathrm{Proj}_*\mathfrak{n}_s^{B_2}\mathrm{d}s,\mathfrak{m}\big)$ 的估计受关于 $\mathbb{E}_1\big[\mathbb{W}_p^p\big(\frac{1}{t}\int_0^t\delta_{\mathrm{Proj}(X_s^{B_1})}\,\mathrm{d}s,\mathfrak{m}\big)\big]$ 的估计控制，我们得到

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{W}_{p,\mathbb{R}^d}^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t\delta_{X_s^{B_1}}\,\mathrm{d}s,\frac{1}{t}\int_0^t\delta_{X_s^{B_2}}\,\mathrm{d}s\Big)\Big]\gtrsim\begin{cases}t^{-p/2}, & d<2(1+\alpha_1),\\ (\log t/t)^{p/2}, & d=2(1+\alpha_1),\\ t^{-\frac{p}{d-2\alpha_1}}, & d>2(1+\alpha_1),\end{cases}$$

当 $t>0$ 足够大时，证明即告完成。 □

利用 (1.6) 和引理 3.1，通过与上文类似的论证，我们可以得到以下结果。证明的细节留给感兴趣的读者。

注 4.4. 假设 $\alpha_1\in[0,1)$、$\alpha_2\in(0,1)$，且 $B_1\in\mathbf{B}^{\alpha_1}$、$B_2\in\mathbf{B}^{\alpha_2}$。对于每个 $k=1,2$，令 $X^{B_k,H_k}:=(X_t^{B_k,H_k})_{t\ge0}$ 为一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 sfBM，其指标为 H_k，对应于 B_k。设 $\alpha_1/H_1\le\alpha_2/H_2$、$X^{B_1,H_1}$ 和 X^{B_2,H_2} 相互独立，且对应于 B_2 的 Lévy 测度满足 $\nu(\mathrm{d}y)\ge cy^{-1-\alpha_2}\mathrm{d}y$，其中 $c>0$ 为某个常数。若 $d>2+\alpha_1/H_1$，则对于任意 $p\ge1$ 以及任意足够大的 $t>0$，

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{W}_{p,\mathbb{R}^d}^p\Big(\frac{1}{t}\int_0^t\delta_{X_s^{B_1,H_1}}\,\mathrm{d}s,\frac{1}{t}\int_0^t\delta_{X_s^{B_2,H_2}}\,\mathrm{d}s\Big)\Big]\gtrsim t^{-\frac{p}{d-\alpha_1/H_1}}.$$

5 时间离散化的 sfBM 情形：定理 1.5 的证明

我们首先给出一个结果，将引理 4.1 推广到当前时间离散化的从属布朗运动情形。

引理 5.1. 假设 $B\in\mathbf{B}$。则对于任意 $0<\tau\le t$ 和 $\xi\in\mathbb{Z}^d$，

$$\mathbb{E}[|\widehat{\mu_{\tau,t}^B}(\xi)|^2]\lesssim\frac{1}{t}\Big(\frac{1}{B(2\pi^2|\xi|^2)}+\tau\Big).$$

证明。回顾一下，$\mu_{\tau,t}^B=\mu_{\tau,\tau}^{B^{1/2},t}=\frac{1}{\lfloor t/\tau\rfloor}\sum_{k=1}^{\lfloor t/\tau\rfloor}\delta_{X_{k\tau}^B}$。令 $n=\lfloor t/\tau\rfloor$。由于 X^B 具有独立增量，并且对于每个$t\ge s>0$，$X_t^B-X_s^B$和 X_{t-s}^B 具有相同分布，由 X^B 和 S^B 的独立性以及（1.2），我们有

$$\mathbb{E}[|\widehat{\mu_{\tau,t}^B}(\xi)|^2]=\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n\mathbb{E}\left[\exp(-2\pi^2|\xi|^2S_{|k\tau-l\tau|}^B)\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n\exp\left[-B(2\pi^2|\xi|^2)|k-l|\tau\right]$$

$$\leq \frac{2}{n}\Big(1+\sum_{l=1}^{\infty}\exp\Big[-B(2\pi^2|\xi|^2)l\tau\Big]\Big) \lesssim \frac{1}{n}\Big(1+\frac{1}{B(2\pi|\xi|^2)\tau}\Big), \quad \xi\in\mathbb{Z}^d,$$

由此完成证明。 □

对于 sfBM，由引理 3.1，采用与 5.1 类似的论证，可得到关于 $\mathbb{E}[|\mu_{\tau,t}^{B,H}(\xi)|^2]$ 的以下⌒上界估计。证明并不困难，但因篇幅所限，予以省略。

引理 5.2. 假设 B 是由 (1.1) 表示的伯恩斯坦函数，且其 Lévy 测度满足 $\nu(\mathrm{d}y) \geq cy^{-1-\alpha}\mathrm{d}y$，其中常数 $c>0$ 和 $\alpha\in$ 取值于 (0, 1)。那么对于任意 $0<\tau\leq t$ 和任意 $\xi\in\mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{E}[|\widehat{\mu_{\tau,t}^{B,H}}(\xi)|^2] \lesssim \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{|\xi|^{\alpha/H}}+\tau\Big).$$

现在我们给出定理 1.5 的证明。

定理 1.5 的证明。对于每个 $\varepsilon>0$、$0<\tau\leq t$ 和 $H\in$ (0,1)，令 u_ε 为泊松方程的解

$$-\Delta u = P_\varepsilon(\mu_{\tau,t}^{B,H}-\mathfrak{m}).$$

由 (2.2)、(2.4)、(2.5)、引理 5.1 和引理 5.2 以及假设可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2] &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\mathbb{E}[|\widehat{\mu_{\tau,t}^{B,H}}(\xi)|^2]\frac{\exp(-\varepsilon|\xi|^2)}{4\pi^2|\xi|^2} \lesssim \frac{1}{t}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\frac{\exp(-\varepsilon|\xi|^2)}{|\xi|^2}(|\xi|^{-\alpha/H}+\tau)\\ &\asymp \frac{1}{t}\|\phi_\varepsilon\|_{l^{2+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{2+\alpha/H}+\frac{\tau}{t}\|\phi_\varepsilon\|_{l^2(\mathbb{Z}^d)}^2 \asymp \frac{1}{t}\|\phi_\varepsilon\|_{l^{2+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{2+\alpha/H}+\frac{1}{t^{1+\beta}}\|\phi_\varepsilon\|_{l^2(\mathbb{Z}^d)}^2,\end{aligned}$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时。

(a) 令 $d<2$。应用引理 2.1，得到

$$\|\phi_\varepsilon\|_{l^{2+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{2+\alpha/H}\asymp 1, \quad \|\phi_\varepsilon\|_{l^2(\mathbb{Z}^d)}^2\asymp 1.$$

那么，根据 $\varepsilon=t^{-1}$ 的选取，可以很容易验证

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1+\beta}{2}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}}.$$

(b) 令 $d=2$。由引理 2.1,

$$\|\phi_\varepsilon\|_{l^{2+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{2+\alpha/H}\asymp 1, \quad \|\phi_\varepsilon\|_{l^2(\mathbb{Z}^d)}^2\asymp |\log\varepsilon|,$$

因此,

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1+\beta}{2}}|\log\varepsilon|^{\frac{1}{2}}.$$

根据 $\varepsilon=t^{-1}$ 的选取，我们有

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-\frac{1}{2}}.$$

(c) 设 $2<d<2+\alpha/H$。由引理 2.1 可知,

$$\|\phi_\varepsilon\|_{l^{2+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)}^{2+\alpha/H}\asymp 1, \quad \|\phi_\varepsilon\|_{l^2(\mathbb{Z}^d)}^2\asymp \varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)},$$

这意味着

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-1} + t^{-(1+\beta)}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)}. \tag{5.1}$$

此外，若 $2(1+\beta) \le d < 2+\alpha/H$，则根据 $\varepsilon = t^{-\frac{2(1+\beta)}{d}}$ 的选择，我们有 $t^{-\frac{2(1+\beta)}{d}} \gtrsim t^{-\frac{2\beta}{d-2}}$ 以及 $t^{-1} \lesssim t^{-(1+\beta)}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)}$。因此，由 (5.1) 可得

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-\frac{1+\beta}{d}}.$$

当 $t > 0$ 足够大时。若此外 $2 < d < 2(1+\beta)$，则根据 $\varepsilon = t^{-1}$ 的选择，这意味着 t^{-1} 是 (5.1) 中的主导项，(5.1) 可得

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-\frac{1}{2}}.$$

当 $t > 0$ 足够大时。

(d) 令 $d = 2 + \alpha/H$。根据引理 2.1,

$$\|\phi_\varepsilon\|^{2+\alpha/H}_{l^{2+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)} \asymp |\log\varepsilon|, \quad \|\phi_\varepsilon\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^d)} \asymp \varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)},$$

由此可得

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-1}|\log\varepsilon| + t^{-(1+\beta)}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)}. \tag{5.2}$$

此外，若 $2\beta < \alpha/H$，则根据 $\varepsilon = t^{-\frac{2}{(1+\beta)d}}$ 的选择，$t^{-(1+\beta)}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)} = t^{-\frac{2}{(1+\beta)d}}$ 是主导项，因为 $2(1+\beta)/d < 1$。因此，由 (5.2) 可得

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-\frac{1+\beta}{d}}.$$

当 $t > 0$ 足够大时。如果此外 $\alpha/H \le 2\beta$，那么根据 $\varepsilon =$ 的选择$\log_t t$，$t^{-(1+\beta)}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)} \lesssim t^{-1}|\log\varepsilon|$，因此，由 (5.2) 得到

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-\frac{1}{2}}|\log\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \lesssim \sqrt{\frac{\log t}{t}}.$$

(e) 令 $d > 2 + \alpha/H$。由引理 2.1 可知。

$$\|\phi_\varepsilon\|^{2+\alpha/H}_{l^{2+\alpha/H}(\mathbb{Z}^d)} \asymp \varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2-\alpha/H)}, \quad \|\phi_\varepsilon\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^d)} \asymp \varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)}.$$

因此

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2-\alpha/H)} + t^{-(1+\beta)}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)}.$$

如果此外 $\beta \le \frac{\alpha}{dH-\alpha}$ 成立，那么根据 $\varepsilon = t^{-\frac{2(1+\beta)}{d}}$ 的选择，$t^{-(1+\beta)}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(d-2)}$ 是主导项。因此

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-\frac{1+\beta}{d}}.$$

若此外满足 $\beta > \frac{\alpha}{dH-\alpha}$，则根据 $\varepsilon = t^{-\frac{2}{d-\alpha/H}}$、$t^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 的选取，$(d-2-\alpha/H)$ 将成为主导项。因此

$$\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}] \lesssim t^{-\frac{1}{d-\alpha/H}}.$$

因此，综合 (a)–(e) 和 (2.8)，我们完成了证明。 □

注 5.3. 采用与命题 3.5 类似的论证，应可得到对每个 $p \in \mathbb{N}$ 偶数成立的 $\mathbb{E}[\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}]$ 上界估计；其中，对每个 $\varepsilon > 0$，u_ε 是满足 $B \in \mathrm{B}^\alpha$ （其中某个 $\alpha \in [0,1]$）的方程 (4.6) 的解。结合 (2.8)，可以得到任意 $p > 2$下 $\mathbb{E}[\mathbb{W}_p^p(\mu^B_{\tau,t}, \mathfrak{m})]$ 的上界。然而，证明似乎相当冗长复杂。

致谢
作者谨向 Feng-Yu Wang教授 致谢，感谢他提出的宝贵意见。

附录

在本部分中，我们证明引理 3.1 的证明中用到的以下结果。

引理A.1. 设 $\delta > 1$, $\alpha \in (0, 1)$，且

$$g(x) = x\Big[(1-\log x)^{\frac{1}{\delta}} - (-\log x)^{\frac{1}{\delta}}\Big]^{\delta-\alpha}, \quad 0 < x \le 1.$$

那么，函数 g 在 $(0, 1]$ 上是凸且严格递增的。

证明。只需证明该结论在 (0,1) 上成立。

令 $\kappa \in (0, 1)$, $\beta > 0$，并令

$$f(z) := [(1+z)^\kappa - z^\kappa]^\beta, \quad z > 0.$$

于是，显然有 $f(z) > 0$, $z > 0$，并且

$$f'(z) = \beta\kappa \frac{(1+z)^{\kappa-1} - z^{\kappa-1}}{(1+z)^\kappa - z^\kappa} f(z) < 0, \quad z > 0. \tag{A1}$$

Then

$$\begin{aligned} f''(z) &= \beta\kappa \frac{(1+z)^{\kappa-1} - z^{\kappa-1}}{(1+z)^\kappa - z^\kappa} f'(z) \\ &\quad + \beta\kappa \frac{(\kappa-1)[(1+z)^{\kappa-2} - z^{\kappa-2}][(1+z)^\kappa - z^\kappa] - \kappa[(1+z)^{\kappa-1} - z^{\kappa-1}]^2}{[(1+z)^\kappa - z^\kappa]^2} f(z) \\ &= \beta^2\kappa^2 \Big[\frac{(1+z)^{\kappa-1} - z^{\kappa-1}}{(1+z)^\kappa - z^\kappa}\Big]^2 f(z) \\ &\quad + \beta\kappa \frac{(\kappa-1)[(1+z)^{\kappa-2} - z^{\kappa-2}][(1+z)^\kappa - z^\kappa] - \kappa[(1+z)^{\kappa-1} - z^{\kappa-1}]^2}{[(1+z)^\kappa - z^\kappa]^2} f(z), \quad z > 0. \end{aligned} \tag{A2}$$

我们声称，对所有 $z > 0$，都有 $f''(z) \ge f'(z)$。

由于 $\kappa \in (0, 1)$，显然有

$$(1+z)^{\kappa-1} - z^{\kappa-1} \le 0, \quad z > 0.$$

结合 $f(z) > 0$，可得

$$\beta^2\kappa^2 \Big[\frac{(1+z)^{\kappa-1} - z^{\kappa-1}}{(1+z)^\kappa - z^\kappa}\Big]^2 f(z) \ge \beta\kappa \frac{(1+z)^{\kappa-1} - z^{\kappa-1}}{(1+z)^\kappa - z^\kappa} f(z), \quad z > 0. \tag{A3}$$

Let

$$l(z) := (\kappa-1)[(1+z)^{\kappa-2} - z^{\kappa-2}][(1+z)^\kappa - z^\kappa] - \kappa[(1+z)^{\kappa-1} - z^{\kappa-1}]^2, \quad z > 0.$$

接下来，我们证明 $l(z) \ge 0$ 对 $z \ge 0$成立。我们将 $l(z)$ 重写为

$$l(z) = (\kappa-1)z^{\kappa-2}\Big[\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^{\kappa-2} - 1\Big] z^\kappa \Big[\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^\kappa - 1\Big] - \kappa z^{2(\kappa-1)} \Big[\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^{\kappa-1} - 1\Big]^2$$

$$= z^{2(\kappa-1)}\Big\{(\kappa-1)\Big[\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^{\kappa-2}-1\Big]\Big[\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^{\kappa}-1\Big]-\kappa\Big[\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^{\kappa-1}-1\Big]^2\Big\}.$$

令 $a := 1+1/z > 1$，并设

$$l_1(a) := (\kappa-1)[a^{\kappa-2}-1][a^{\kappa}-1]-\kappa[a^{\kappa-1}-1]^2, \quad a \geq 1.$$

Then

$$\begin{aligned} l_1(a) &= (\kappa-1)[a^{2(\kappa-1)}-a^{\kappa-2}-a^{\kappa}+1]-\kappa[a^{2(\kappa-1)}-2a^{\kappa-1}+1] \\ &= -a^{2(\kappa-1)}-(\kappa-1)a^{\kappa-2}-(\kappa-1)a^{\kappa}+\kappa-1+2\kappa a^{\kappa-1}-\kappa \\ &= -a^{2(\kappa-1)}-(\kappa-1)a^{\kappa}+2\kappa a^{\kappa-1}-(\kappa-1)a^{\kappa-2}-1. \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} &l_1'(a) = -2(\kappa-1)a^{2\kappa-3}-\kappa(\kappa-1)a^{\kappa-1}+2\kappa(\kappa-1)a^{\kappa-2}-(\kappa-1)(\kappa-2)a^{\kappa-3} \\ &= (\kappa-1)a^{\kappa-3}[-2a^{\kappa}-\kappa a^2+2\kappa a-\kappa+2] = (\kappa-1)a^{\kappa-3}[-\kappa(a-1)^2-2(a^{\kappa}-1)] \geq 0. \end{aligned}$$

这意味着 $l_1(a)$ 是 $[1,\infty)$ 上的增函数。因此，对于任意 $a \geq 1$，我们有$l_1(a) \geq l_1(1) = 0$, $a \geq 1$。于是，$l(z) = z^{2(\kappa-1)}l_1(1+1/z) \geq 0$。这与（A1）、（A2）和（A3）一起推出】【。

$$f''(z) \geq f'(z), \quad z > 0. \tag{A4}$$

令 $z := -\log x$, $0 < x < 1$, $\kappa := 1/\delta \in (0,1)$, $\beta := \delta - \alpha > 0$。设

$$h(z) := e^{-z}[(1+z)^{\kappa}-z^{\kappa}]^{\beta}, \quad z > 0.$$

注意，$h(0) = 1$, $h(z) > 0$, $z > 0$，且 $h(z) = e^{-z}f(z)$。那么

$$h'(z) = e^{-z}f'(z)-e^{-z}f(z) < 0, \quad z > 0. \tag{A5}$$

因此,

$$g'(x) = -\frac{h'(-\log x)}{x} > 0, \quad x \in (0,1),$$

这意味着 g 在 (0, 1) 上严格递增。

由 (A4) 和 (A5) 可得,

$$\begin{aligned} h''(z) &= -e^{-z}f'(z)+e^{-z}f''(z)+e^{-z}f(z)-e^{-z}f'(z) \\ &= e^{-z}[f''(z)-2f'(z)+f(z)] \geq -h'(z), \quad z > 0. \end{aligned}$$

因此,

$$g''(x) = \frac{1}{x^2}\big[h''(-\log x)+h'(-\log x)\big] \geq 0, \quad x \in (0,1),$$

这意味着 g 在 (0, 1) 上是凸的。 □

参考文献

[1] M. Ajtai、J. Koml´os、G. Tusn´ady, 《论最优匹配》, Combinatorica 4(1984), 259–264。

[2] L. Ambrosio, F. Stra, D. Trevisan, 《二维匹配问题的一种 PDE 方法》, 《概率论及相关领域》173(2019), 433–477。

[3] J. Bertoin, 《子ordinator：示例与应用》，载于：《概率与统计讲座》，圣弗卢尔概率暑期学校 XXVII-1997，数学讲义 1717(1999), 1–91。[4] S.G. Bobkov, M. Ledoux, 《一维经验测度、次序统计量与 Kantorovich 输运距离》，美国数学会回忆录 261(2019), 第 1259 号。[5] S.G. Bobkov, M. Ledoux, 《AKT 最优匹配定理的一个简单傅里叶分析证明》，应用概率年刊 31(2021), 2567–2584。[6] B. Borda, 《二次 Wasserstein 度量下紧空间上的经验测度与随机游走》，预印本 (2021), arXiv:2110.00295。[7] B. B¨ottcher, R.L. Schilling, J. Wang, 《L ´évy 型过程：构造、逼近与样本路径性质》，数学讲义，第 2099 卷，L´évy matters III，施普林格，柏林，2013。[8] M.-F. Chen, 《从马尔可夫链到非平衡粒子系统》，第二版，World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，新加坡，2004。[9] E.B. Davies, 《热核与谱理论》，剑桥数学论丛，第 92 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989。[10] C.-S. Deng, R.L. Schilling, 《由时间变换分数布朗运动驱动的 SDE 的 Harnack 不等式》，Electron. J. Probab. 22(2017), 1–23。[11]C.-S. Deng, R.L. Schilling, Y.-H. Song, 《从属化下马尔可夫过程的次几何收敛速率》，Adv. Appl. Prob. 49(2017), 162–181。[12] S. Dereich, M. Scheutzow, R. Schottstedt, 《构造性量化：经验测度逼近》，Ann. Inst. Henri Poincar´é Probab. Stat. 49(2013), 1183–1203。[13] K. Du, Y. Jiang, J. Li, 《McKean–Vlasov 不变测度的经验逼近：平均场相互作用与自相互作用》，预印本 (2022), arXiv:2112.14112。[14] H. Dym, H.P. McKean, 《傅里叶级数与积分》，概率与数理统计，第 14 号，Academic Press，纽约-伦敦，1972。[15] N. Fournier, A. Guillin, 《经验测度在 Wasserstein距离下的收敛速率》，《概率论及相关领域》162(2015), 707–738。[16] S. Graf, H. Luschgy, 《概率分布量化基础》，数学讲义 1730，施普林格，2000。[17] M. Huesmann, F. Mattesini, D. Trevisan, 《平坦环面上分数布朗运动经验测度的 Wasserstein 渐近性质》，随机过程及其应用 155(2023), 1–26。[18] B. Kloeckner, 《有限支撑测度的逼近》，ESAIM Control Optim. Calc. Var. 18(2012), 343–359。[19] M. Ledoux, 《高斯样本的最优匹配》，Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 457, Veroyatnost’ i Statistika. 25(2017), 226–264。

[20] M. Ledoux, J.-X. Zhu, 《高斯样本的最优匹配 III》，概率与数理统计，41(2021)，237–265。[21] H. Li, B. Wu, 《非紧流形上从属过程经验测度的瓦瑟斯坦收敛速率》，预印本（2022），arXiv:2201.12797，即将在理论概率学杂志发表。[22]H. Li, B. Wu, 《黎曼流形上从属狄利克雷扩散的条件经验测度的瓦瑟斯坦收敛》，预印本（2022），arXiv:2204.13559。[23] H. Li, B. Wu, 《黎曼流形上从属狄利克雷扩散的经验测度的瓦瑟斯坦收敛》，预印本（2022），arXiv:2206.03901。[24] W. Linde, Z. Shi, 《评估从属 L ´évy 过程的小偏差概率》，随机过程及其应用，113(2004)，273–287。[25] I. Nourdin, 《分数布朗运动的若干专题》，施普林格，米兰，2012。[26] D. Nualart, 《马利亚万演算及相关主题》，第二版，施普林格，纽约，2006。[27] R.L. Schilling, R. Song, Z. Vondra˘cek, 《伯恩斯坦函数：理论与应用》，第二版，德格鲁伊特数学研究丛书，第37卷，Walter de Gruyter & Co.，柏林，2012。[28] R.L. Schilling, J. Wang, 《泛函不等式与从属化：Nash不等式和Poincar ´é不等式的稳定性》，数学杂志，272(2012)，921–936。[29] S. Steinerberger, 《紧流形上的瓦瑟斯坦不等式与最小格林能量》，泛函分析杂志，281(2021)，109076。[30] S. Steinerberger, 《Wasserstein距离、傅里叶级数及其应用》，《数学月刊》，194(2021)，305–338。[31] M. Talagrand, 《随机过程的上界与下界》，现代数学综述，第60卷，施普林格出版社，柏林，2014。[32] C. Villani, 《最优传输：旧与新》，数学科学基础丛书，第338卷，施普林格，2008。[33] F.-Y. Wang, 《狄利克雷扩散过程条件经验测度在Wasserstein距离下的精确极限》，泛函分析杂志，280(2021)，108998。[34] F.-Y. Wang, 《流形上狄利克雷扩散过程经验测度在Wasserstein距离下的收敛》，预印本（2020），arXiv:2005.09290，即将在欧洲数学会杂志发表。[35] F.-Y. Wang, 《非紧流形上经验测度的瓦瑟斯坦收敛速率》，随机过程及其应用，144(2022)，271–287。[36] F.-Y. Wang, 《半线性SPDE经验测度在Wasserstein距离下的收敛》，应用概率年刊，33(2023)，70–84。[37] F.-Y. Wang, B. Wu, 《黎曼流形上从属扩散经验测度的瓦瑟斯坦收敛》，预印本（2021），arXiv:2107.11568，即将在《位势分析》发表。

[38] F.-Y. Wang, J.-X. Zhu, 《黎曼流形上扩散过程经验测度在Wasserstein距离下的极限定理》, 亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊, 59(2023), 437–475。[39] Y. Xiao, 《高斯随机场与稳定随机场的局部非决定性性质及其应用》, 《图卢兹数学科学学院年刊》, 15(2006), 157–193。[40] J.-X. Zhu, 《Jacobi模型最优匹配问题的一些结果》, 《位势分析》, 55(2021), 167–188。