求解带奇异势且边界条件中含多项式的反斯图姆-刘维尔问题

Egor E. Chitorkin*，Natalia P. Bondarenko

摘要。本文首次对谱参数以多项式形式出现在边界条件中的复值奇异势反斯图姆-刘维尔问题给出了构造性解。证明了由Weyl函数唯一恢复势和多项式的唯一性。获得并论证了一种求解反问题的算法。具体而言，我们将非线性反问题化为有界无限序列巴拿赫空间中的线性方程，进而推导出问题系数的重构公式；即使在正则势情形下，这些公式也是新的。需要指出的是，本文研究的谱问题采用一般的非自伴形式，我们的方法不要求谱是单的。未来，我们的结果可用于研究反问题的可解性与稳定性，以及发展用于重构的数值方法。

arXiv:2305.01231v2 [math.SP] 8 Sep 2023

关键词：反谱问题；斯图姆–刘维尔算子；边界条件中的多项式；奇异势；唯一性定理；构造性算法。

AMS 数学学科分类（2020）：34A55 34B07 34B09 34B24 34L4

1 引言

本文考虑具有奇异复值势 $q \in W_2^{-1}(0,\pi)$ 的斯图姆–刘维尔微分表达式 $\mathrm{l}y = -y'' + q(x)y$。这意味着 $q = \sigma'$，其中 $\sigma \in L_2(0,\pi)$，导数按分布意义理解。于是，该微分表达式 $\mathrm{l}y$ 可表示为以下形式：

$$ly = -(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]} - \sigma^2(x)y,$$

其中，$y^{[1]}(x) := y'(x) - \sigma(x)y(x)$ 是所谓的拟导数。

我们研究 Sturm-Liouville 方程的逆谱问题。

$$ly = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \tag{1.1}$$

满足边界条件（BCs）

$$p_1(\lambda)y^{[1]}(0) - p_2(\lambda)y(0) = 0, \quad r_1(\lambda)y^{[1]}(\pi) + r_2(\lambda)y(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

其中 λ 是谱参数，$p_1(\lambda)$、$p_2(\lambda)$、$r_1(\lambda)$和 $r_2(\lambda)$是多项式 .

谱分析反问题旨在根据谱信息恢复微分算子的系数。这类问题在量子力学、地球物理学、化学、电子学以及科学和工程学的其他分支中有着广泛应用。针对边界条件中含常系数的斯图姆–刘维尔算子的反谱理论已得到相当充分的发展（参见专著 [1–4]）。此外，还有一些研究探讨了谱参数多项式依赖的特征值问题，其中...

边界条件。后者问题出现于各种物理应用中，例如机械工程学、扩散和电路问题（参见 [5,6] 及其中的参考文献）。

含边界条件多项式的反斯图姆-刘维尔问题已在 [7–22] 及其他论文中得到研究。该方向的大多数研究都涉及自伴问题，其边界条件中包含谱参数的有理 Herglotz-Nevanlinna 函数（例如，参见 [8,9,16–20]）。不难验证，这类边界条件可以化为对谱参数呈多项式依赖的形式。

Freiling 和 Yurko [12] 通过使用谱映射方法，获得了具有一般非自伴形式多项式边界条件的有限区间上反斯图姆-刘维尔问题的一个构造性解。这是一种通用方法，能够将各种类型的反谱问题归约为适当巴拿赫空间中的线性方程。利用该方法，研究者针对高阶微分算子、微分方程组、二次斯图姆-刘维尔算子铅笔、图上的微分算子等获得了一系列结果（参见 [23]）。然而，将谱映射方法应用于不同的算子类别具有各自的特点，因此需要进行单独研究。特别地，文献 [13] 研究了半直线上边界条件中含有多项式的一个反问题。我们指出，Freiling 和 Yurko [12,13] 的结果仅涉及正则（可积）势。

近年来，具有奇异（分布）系数的微分算子的谱分析引起了数学家们的广泛关注（见 [17,24–37]）。 [24–33] 等论文研究了具有奇异系数的微分方程的谱特征及其解。关于具有奇异势的斯图姆–刘维尔算子，反问题理论已取得最为全面的研究成果（见 [26–30,34–37]）。特别是，Hryniv 和 Mykytyuk [26,27,34] 利用变换算子方法，将多项经典结果推广到了 W_2^{-1}-势的情形。Savchuk 和 Shkalikov [30]证明了势属于 W_2^α 的反斯图姆-刘维尔问题具有一致稳定性，其中 $\alpha > -1$。在 [35] 和 [37] 中，谱映射方法被推广到势属于 W_2^{-1} 类的斯图姆–刘维尔算子。需要指出的是，这类分布包含狄拉克 δ-函数和库仑势 $\frac{1}{x}$，它们被用于对量子力学中的粒子相互作用建模（见 [38]）。此外，也有研究探讨了二次斯图姆–刘维尔算子束（见 [39–43]）和矩阵斯图姆–刘维尔算子（见 [44–46]）中具有奇异势的反问题。

最近，Guliyev [17] 获得了具有 $W_2^{-1}(0,\pi)$ 势、且边界条件中包含 λ 的 Herglotz-Nevanlinna 函数的自伴 Sturm–Liouville 算子的谱数据刻画。 [17] 的方法基于 Darboux 变换，并要求算子具有自伴性。据作者所知，具有奇异势且边界条件中含有多项式的非自伴逆 Sturm-Liouville问题此前尚未得到研究。本文旨在填补这一空白。

因此，本文致力于发展具有边界条件中关于 λ 的多项式依赖关系以及具有$W_2^{-1}(0,\pi)$类奇异势的斯图姆-刘维尔问题(1.1)-(1.2)的逆谱理论。我们考虑一个反问题，即根据Weyl函数恢复函数 $\sigma(x)$以及多项式 $r_j(\lambda)$、 $j = 1$、2。假设多项式 $p_1(\lambda)$和 $p_2(\lambda)$是先验已知的。我们证明了该反问题的唯一性定理，并为其解构建了一种构造性算法。具体而言，我们将非线性反问题化简为有界无限序列巴拿赫空间中的一个线性方程，并以级数的形式获得问题系数 σ、r_1和 r_2的重构公式。通过采用逼近技术，严格证明了这些重构公式的有效性。值得注意的是，我们考虑的是一般的非自伴形式的问题，并且我们的方法不要求谱具有单重性。

我们的方法发展了谱映射方法，并借鉴了 [12] 关于构造性求解边界条件中含多项式、势为正则势 $q \in L_2(0,\pi)$ 的反斯图姆-刘维尔问题的思想，以及 [47, 48] 关于处理重特征值的研究和 [37] 关于奇异势的论文。值得注意的是，与 Freiling 和 Yurko [12], 的求解方法相比，我们的方法更简单。首先，我们将 (1.1)-(1.2) 的反问题化归为具有 $p_1(\lambda) \equiv 1$、$p_2(\lambda) \equiv 0$ 的问题，这简化了后续步骤中的技术处理。此外，我们得到了新的重构公式，即使在正则 L_2-势的情形下也是如此。这些公式将有助于未来研究反问题的可解性和稳定性。此外，依托我们求解反问题的理论算法，可以进一步发展重构的数值方法。我们提到，Ignatiev 和 Yurko [49] 已经通过谱映射方法，数值求解了边界条件系数为常数的最简单的斯图姆 - 刘维尔问题。关于求解反斯图姆-刘维尔问题的其他一些数值技术，可参见 [50, 51]。还值得一提的是，近年来，人们正在积极研究非局部算子的逆谱问题（例如，参见 [52–54] 及其中的参考文献），但对于此类算子，需要采用本质上不同的方法。

本文结构安排如下。第 2 节阐述反问题并陈述主要结果。第 3 节证明唯一性定理。第 4 节推导主方程。第 5 节证明关于重构公式的定理。第 6 节给出求解反问题的算法，并举例说明如何恢复势和多项式。第 7 节将我们的结果应用于具有正则势的反问题，其中正则势来自 [12]。

2 主要结果和方法

用 $L = L(\sigma, p_1, p_2, r_1, r_2)$ 表示边值问题 (1.1)-(1.2)，其中 $\sigma(x)$ 是定义在 $L_2(0,\pi)$ 上的复值函数，$p_1(\lambda)$ 和 $p_2(\lambda)$ 是互素多项式，$r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 也是如此。显然，边界条件中的多项式可以表示为以下形式

$$p_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{N_1} a_n \lambda^n, \quad p_2(\lambda) = \sum_{n=0}^{N_2} b_n \lambda^n, \quad N_1, N_2 \geq 0, \tag{2.1}$$

$$r_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{M_1} c_n \lambda^n, \quad r_2(\lambda) = \sum_{n=0}^{M_2} d_n \lambda^n, \quad M_1, M_2 \geq 0. \tag{2.2}$$

用 $\psi(x,\lambda)$ 表示满足初始条件 $\psi(\pi,\lambda) = r_1(\lambda)$, $\psi^{[1]}(\pi,\lambda) = -r_2(\lambda)$ 的方程 (1.1) 的解。我们引入问题 L 的 Weyl函数如下:

$$M^1(\lambda) := -\frac{\psi(0,\lambda)}{p_1(\lambda)\psi^{[1]}(0,\lambda) - p_2(\lambda)\psi(0,\lambda)}. \tag{2.3}$$

注意，对于每个固定的 $x \in [0,\pi]$，函数 $\psi(x,\lambda)$ 和 $\psi^{[1]}(x,\lambda)$ 关于 λ 都是整函数，因此 $M^1(\lambda)$ 关于 λ 是亚纯函数，其极点构成可数集，位于 (2.3) 中分母的零点处。

考虑以下反问题。

反问题 2.1。已知 Weyl函数 $M^1(\lambda)$ 以及多项式 $p_1(\lambda)$、$p_2(\lambda)$，求$q(x)$、$r_1(\lambda)$和 $r_2(\lambda)$。

注意，反问题 2.1 可以化简为不含多项式 $p_1(\lambda)$ 和 $p_2(\lambda)$ 的问题。事实上，引入边值问题 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\sigma,r_1,r_2)$：

$$ly(x)=\lambda y(x),\quad x\in(0,\pi),$$
$$y^{[1]}(0)=0,\quad r_1(\lambda)y^{[1]}(\pi)+r_2(\lambda)y(\pi)=0.$$

相应的Weyl函数具有如下形式

$$M(\lambda)=-\frac{\psi(0,\lambda)}{\psi^{[1]}(0,\lambda)}. \tag{2.4}$$

反问题 2.2。给定Weyl函数 $M(\lambda)$，求 $q(x)$、$r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$。

由 (2.3) 和 (2.4) 可得

$$M(\lambda)=\frac{p_1(\lambda)M^1(\lambda)}{1+p_2(\lambda)M^1(\lambda)}. \tag{2.5}$$

虽然 (2.5) 的分母可能有可数多个零点，但在复平面的其他点上，函数 $M(\lambda)$ 由 (2.5) 唯一确定。因此，$M(\lambda)$ 可以解析延拓到除其极点之外的所有 λ。于是，不失一般性，我们可以从反问题 2.1 转而考虑反问题 2.2。因此，下面我们重点研究反问题 2.2。

我们将多项式 $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 规范化。若 $\deg(r_1)\geq\deg(r_2)$，则不失一般性，我们假设 (2.2) 中 $c_{M_1}=1$ 和 $M_1=M_2$。系数 d_{M_2} 可以等于零（此时多项式 $r_2(\lambda)$ 的次数较低）。若 $\deg(r_1)<\deg(r_2)$，则不失一般性，我们假设 $d_{M_2}=1$ 和 $M_1=M_2-1$。在这种情况下，c_{M_1} 可以等于零（此时多项式 $r_1(\lambda)$ 的次数较低）。如果多项式 $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 满足这些条件，我们就记作 $(r_1,r_2)\in\mathcal{N}$。

除了问题 $\mathcal{L}(r_1,r_2)$，其形式与 $\mathcal{L}$ 相同，但其多项式 $\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$ 不同。我们约定，如果某个符号 γ 表示一个与 $\mathcal{L}$ 相关的对象，那么带波浪号的符号 $\tilde{\gamma}$ 就表示与 $\tilde{\mathcal{L}}$ 相关的类似对象。注意，分别对应问题 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 的拟导数 $y^{[1]}=y'-\sigma(x)y$ 和 $y^{[1]}=y'-\tilde{\sigma}(x)y$ 彼此不同。此外，我们假设 $(r_1,r_2)\in\mathcal{N}$ 且 $(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)\in\mathcal{N}$。

本文的第一个结果是关于反问题 2.2 的以下唯一性定理。

定理 2.3 设 $\tilde{\mathcal{L}}$。如果 $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$，那么在 $(0,\pi)$ 上几乎处处有 $\sigma(x)=\tilde{\sigma}(x)$，且 $r_j(\lambda)\equiv\tilde{r}_j(\lambda)$，$j=1,2$。

定理 2.3 的证明基于谱映射方法（见 [4, 37]）。显然，定理 2.3 蕴含了以下关于反问题 2.2 解的唯一性的推论。

推论 2.4。若 $M^1(\lambda)=\tilde{M}^1(\lambda)$ 且 $p_j(\lambda)\equiv\tilde{p}_j(\lambda)$，$j=1,2$，则 $\sigma(x)=\tilde{\sigma}(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上几乎处处成立，且 $r_j(\lambda)\equiv\tilde{r}_j(\lambda)$，$j=1,2$。

对于反问题的构造性解，使用离散谱数据比使用Weyl函数更方便。问题 $\mathcal{L}$ 的谱由以下引理描述。

引理 2.5. 边值问题 $\mathcal{L}$ 的谱是一个可数的特征值集合，可根据其渐近行为编号为 $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$（按重数计）：

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = \begin{cases} n - M_1 - 1 + \varkappa_n, & M_1 \geq M_2, \\ n - M_2 - \dfrac{1}{2} + \varkappa_n, & M_1 < M_2, \end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $\{\varkappa_n\} \in l_2$。

注意，序列 $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ 可以包含有限个重特征值。不失一般性，我们假设重特征值彼此相邻，即 $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+m_k-1}$，其中 m_k 是 λ_k 的重数。令 $I := \{1\} \cup \{n > 1 \colon \lambda_{n-1} \neq \lambda_n\}$。

与 [12], 中的引理 2 类似，可以证明以下引理。

引理 2.6。成立以下表示式：

$$M(\lambda) = \sum_{k\in I} \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{\alpha_{k+j}}{(\lambda - \lambda_k)^{j+1}}, \tag{2.7}$$

其中 α_{k+j} 是 Weyl函数 $M(\lambda)$ 在极点 λ_k 邻域内的主部系数。级数 (2.6) 在不含 $\mathcal{L}$ 的特征值的紧集上绝对且一致收敛。

根据特征值渐近式 (2.6)，当 $|\lambda|$ 充分大时， $M(\lambda)$ 的极点是单极点。因此，在公式 (2.7) 中，当 k 充分大时， $m_k = 1$ 。

我们称数 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$ 为问题 $\mathcal{L}$ 的谱数据。由公式 (2.7) 可知，谱数据唯一确定 Weyl函数，反之亦然。因此，可以不研究反问题 2.2，而转而研究以下问题。

反问题 2.7。给定谱数据 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$，求 $\sigma(x)$、 $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$。

为求解反问题 2.7，我们发展了非自伴斯图姆-刘维尔算子的谱映射方法的思想（见 [4, 37, 47]）。下面简要描述其解。为明确起见，我们考虑情形 $M_1 = M_2$。另一种情形类似。除问题 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\sigma, r_1, r_2)$ 外，我们还考虑模型问题 $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(0, \lambda^{M_1}, 0)$。将满足初始条件 $\varphi(0, \lambda) = 1$、 $\varphi^{[1]}(0, \lambda) = 0$ 的方程 (1.1) 的解记为 $\varphi(x, \lambda)$。引入以下记号

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{n0} = \lambda_n, \quad \lambda_{n1} = \tilde{\lambda}_n, \quad \rho_{n0} = \rho_n, \quad \rho_{n1} = \tilde{\rho}_n, \quad \alpha_{n0} = \alpha_n, \quad \alpha_{n1} = \tilde{\alpha}_n, \\ &I_0 = I, \quad I_1 = \tilde{I}, \quad m_{n0} = m_n, \quad m_{n1} = \tilde{m}_n, \quad \varphi_j(x, \lambda) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \lambda^j}\varphi(x, \lambda), \\ &\varphi_{n+j,i}(x) = \varphi_j(x, \lambda_{ni}), \quad \tilde{\varphi}_{n+j,i}(x) = \tilde{\varphi}_j(x, \lambda_{ni}), \quad n \in I_i, \quad j = \overline{0, m_{ki}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

通过在 λ 平面上进行围道积分，我们推导出以下关系（见引理 4.1）：

$$\tilde{\varphi}_{n,i}(x) = \varphi_{n,i}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{Q}_{n,i;k,0}(x)\varphi_{k,0}(x) - \tilde{Q}_{n,i;k,1}(x)\varphi_{k,1}(x)), \quad n \geq 1, \ i = 0, 1, \tag{2.9}$$

~ ~其中 $Q_{n,\ i;k,\ j}(x)$ 是一些仅使用模型问题 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{L}$ 的谱数据 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$ 构造的函数。

关系 (2.9) 可视为关于未知值 $\{\varphi_{n,i}(x)\}_{n\geq 1,\ i=0,\ 1}$ 的无限线性系统，其中每个 $x \in [0,\pi]$ 固定。然而，使用 (2.9) 研究反问题的可解性并不方便，因为 (2.9) 中的级数仅“带括号”收敛。为了实现绝对收敛，我们将 (2.9) 转化为适当巴拿赫空间中的线性方程。

令 m 为有界无限序列 $a = (a_{ni})_{n\geq 1,\, i=0,1}$ 构成的巴拿赫空间，其范数为$\|a\| = \sup |a_{ni}|$。在第 4 节中，系统 (2.9) 被化简为 $m_{n,i}$中的所谓主方程，其形式为

$$\tilde{\psi}(x) = (E + \tilde{H}(x))\psi(x), \quad x \in [0,\pi], \tag{2.10}$$

其中，$\tilde{\psi}(x)$ 和 $\psi(x)$ 是由 m构成的序列，$\tilde{H}(x)$ 对每个固定的 $x \in [0,\pi]$都是 m 中的紧算子，而 E 是 m 中的恒等算子。序列 $\tilde{\psi}(x)$、$\psi(x)$ 以及算子 $\tilde{H}(x)$ 分别通过对项 $\varphi_{n,i}(x)$、$\tilde{\varphi}_{n,i}(x)$ 和 $Q_{n,i;k,j}(x)$ 进行分组而得到。因此，$\tilde{\psi}(x)$ 和 $H(x)$ 由模型问题 $\mathcal{L}$ 和谱数据 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$ 构造，而序列 $\psi(x)$ 则与问题 $\mathcal{L}$ 的未知系数 $\sigma(x)$、$r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 有关。利用谱映射方法的标准技巧，可以证明主方程具有唯一可解性。

求解主方程 (2.10)，我们得到序列 $\psi(x)$，可用于构造 $\{\varphi_{n,i}(x)\}_{n\geq 1,\ i=0,\ 1}$。本文的主要结果是以下定理，该定理给出了 $\sigma(x)$、$r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 的重构公式。令 $M(\lambda) = M(\lambda) - M(\lambda)$。考虑围道 $\Gamma_N := \left\{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\lambda| = \left(N + \frac{1}{2}\right)^2\right\}$，其中 N是满足$\lambda_{ni} \in \operatorname{int}\Gamma_N$ if $m_{ni} > 1$的整数。因此，该圆包含所有重数大于一的特征值。

定理 2.8。在 $M_1 = M_2$ 的情况下，反问题 2.7 的解可由重构公式求得。

$$\begin{aligned}\sigma(x) = &-\frac{1}{\pi i}\oint_{\Gamma_N}\left(\tilde{\varphi}(x,\mu)\varphi(x,\mu) - \frac{1}{2}\right)\hat{M}(\mu)d\mu \\ &- 2\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\alpha_{kj}\left(\tilde{\varphi}_{k,j}(x)\varphi_{k,j}(x) - \frac{1}{2}\right),\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}r_1(\lambda) = &\prod_{k=1}^{M_1}(\lambda - \lambda_{k0})\prod_{k=M_1+1}^{\infty}\frac{\lambda - \lambda_{k0}}{\lambda - \lambda_{k1}}\left(1 - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{\tilde{\varphi}'(\pi,\mu)\varphi(\pi,\mu)}{\lambda - \mu}M(\mu)d\mu\right. \\ &\left. - \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi_{k,0}(\pi)}{\lambda - \lambda_{k0}}\right),\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}r_2(\lambda) = &\prod_{k=1}^{M_1}(\lambda - \lambda_{k0})\prod_{k=M_1+1}^{\infty}\frac{\lambda - \lambda_{k0}}{\lambda - \lambda_{k1}}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{\tilde{\varphi}'(\pi,\mu)\varphi^{[1]}(\pi,\mu)}{\lambda - \mu}M(\mu)d\mu\right. \\ &- \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}(\tilde{\varphi}(\pi,\mu)\varphi(\pi,\mu) - 1)\hat{M}(\mu)d\mu + \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi^{[1]}_{k,0}(\pi)}{\lambda - \lambda_{k0}} \\ &\left. - \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\alpha_{kj}(\tilde{\varphi}_{k,j}(\pi)\varphi_{k,j}(\pi) - 1)\right),\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中，(2.11) 中的级数在 $L_2(0,\pi)$ 中收敛，而 (2.12) 和 (2.13) 中的级数及无穷乘积在 $\mathbb{C}\setminus\{\lambda_{ni}\}_{n\geq 1,\ i=0,\ 1}$ 的紧集上一致绝对收敛。

Not明，我们可以利用留数定理求出 (2.11) 中的围道积分：

$$\sigma(x)=-2\sum_{i=0}^{1}\sum_{k\in I_i}(-1)^i\left(\sum_{j=0}^{m_{ki}-1}\alpha_{k+j,i}\sum_{p=0}^{j}\tilde{\varphi}_{k+p,i}(x)\varphi_{k+(j-p),i}(x)-\frac{1}{2}\alpha_{ki}\right),$$

其中，I_i 和 m_{ki} 在 (2.8) 中定义。

类似地，可以计算 (2.12)–(2.12) 中的围道积分，但在本文中，使用围道积分表示式更为方便。

公式 (2.11) 中 $\sigma(x)$ 的推导基于将级数 (2.9) 代入方程 (1.1) 这一思路。接着，我们将问题 $\mathcal{L}$ 的 Weyl解构造成类似于 (2.9) 的级数，并利用它得到多项式的公式 (2.12) 和 (2.13)。这一思路有助于我们猜测重构公式的形式。然而，由于级数不绝对收敛且势是奇异的，采用这一思路进行严格证明并不方便。因此，我们使用逼近方法证明定理 2.8。具体而言，我们利用有限谱数据 $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=1}^{K}$ 构造 (σ,r_1,r_2) 的逼近 (σ^K,r_1^K,r_2^K)，并在 $K\to\infty$ 时取极限。这些逼近也可用于反问题的数值求解。

根据主方程 (2.10) 和定理 2.8 的重构公式，我们得到求解反问题 2.1 的算法 6.1。需要指出的是，即使对于正则势 $q\in L_2(0,\pi)$ 的情形，我们的重构公式也是全新的；这一情形曾由 Freiling 和 Yurko [12] 研究。因此，在第 7 节中，我们将结果应用于正则情形。

3 预备知识与唯一性

本节将介绍一些预备知识，并证明唯一性定理（定理 2.3）。本文中，我们使用以下记号：

1. $\lambda=\rho^2$, $\tau:=\operatorname{Im}\rho$, $\rho_n=\sqrt{\lambda_n}$, $\arg\rho_n\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

2. 记号 $\varkappa_a(\rho)$ 用于表示 ρ 中各种指数型不超过 a 且满足 $\int_{\mathbb{R}}|\varkappa_a(\rho)|^2d\rho<\infty$ 的整函数。根据 Paley-Wiener 定理，

$$\varkappa_a(\rho)=\int_{-a}^{a}f(x)e^{i\rho x}dx,\quad f\in L_2(-a,a).$$

接下来，我们还需要估计 $\varkappa_a(\rho)=o(e^{|\tau|a})$，当 $|\rho|\to\infty$ 时，该估计关于 arg ρ 一致成立。

3. 记号 $\{\varkappa_n\}$ 用于表示来自 l_2 的各种序列：$\sum_n|\varkappa_n|^2<\infty$。

考虑边值问题 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\sigma,r_1,r_2)$。回顾一下，$\varphi(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$ 是方程 (1.1) 满足初始条件的解：$\varphi(0,\lambda)=1$, $\varphi^{[1]}(0,\lambda)=0$,$\psi(\pi,\lambda)=r_1(\lambda)$, $\psi^{[1]}(\pi,\lambda)=-r_2(\lambda)$。容易看出，问题 $\mathcal{L}$ 的特征值与整特征函数的零点重合。

$$\Delta(\lambda)=\psi(x,\lambda)\varphi^{[1]}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\psi^{[1]}(x,\lambda),\tag{3.1}$$

其不依赖于变量 x。将 $x=\pi$ 代入（3.1），我们得到如下表示式：

$$\Delta(\lambda)=r_1(\lambda)\varphi^{[1]}(\pi,\lambda)+r_2(\lambda)\varphi(\pi,\lambda). \tag{3.2}$$

为了得到 $\Delta(\lambda)$ 的渐近性，我们需要以下命题。

命题 3.1（ [37]）。函数 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\varphi^{[1]}(x,\lambda)$ 可以表示如下：

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_0^x \mathcal{K}_1(x,t)\cos\rho t\,dt,$$
$$\varphi^{[1]}(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+\rho\int_0^x \mathcal{K}_2(x,t)\sin\rho t\,dt+\mathcal{C}(x),$$

其中，函数 $\mathcal{K}_j(x,t)$、$j=1$、2 属于 $\mathcal{D}_{0,\pi}$，而函数 $\mathcal{C}(x)$ 在$[0,\pi]$上连续。这里及下文中，$\mathcal{D}_{0,\pi}$ 表示函数 $\mathcal{K}(x,t)$ 的类，这些函数在区域 $\{(x,t):\ 0<t<x<\pi\}$ 上平方可积，并满足条件 $\mathcal{K}(x,.)\in L_2(0,x)$，对每个固定的$x\in(0,\pi]$，且 $\sup_x\|\mathcal{K}(x,.)\|_{L_2(0,x)}<\infty$。

将命题 3.1 的渐近性代入 (3.2)，得到

$$\Delta(\lambda)=\begin{cases}-\rho^{2M_1+1}\sin\rho\pi+\rho^{2M_1+1}\varkappa_\pi(\rho)+O(|\rho|^{2M_1}e^{\pi|\tau|}), & M_1\geq M_2,\\ \rho^{2M_2}\cos\rho\pi+\rho^{2M_2}\varkappa_\pi(\rho)+O(|\rho|^{2M_2-1}e^{\pi|\tau|}), & M_1<M_2.\end{cases} \tag{3.3}$$

现在我们可以证明关于特征值渐近的引理 2.5 了。

引理 2.5 的证明。为明确起见，假设 $M_1\geq M_2$。相反的情形可以类似地研究。根据 (3.3)，整特征函数 $\Delta(\lambda)$ 的渐近性为

$$\Delta(\lambda)=-\rho^{2M_1+1}\sin\rho\pi+\rho^{2M_1+1}\varkappa_\pi(\rho)+O(|\rho|^{2M_1}e^{\pi|\tau|}). \tag{3.4}$$

采用基于鲁歇定理的标准方法（例如参见 [4, 定理 1.1.3]），可以很容易地证明，$\Delta(\lambda)$ 的零点渐近地接近下列函数的零点：

$$\Delta^0(\lambda)=-\rho^{2M+1}\sin\rho\pi=-\lambda^{M+1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}},$$

它们是 $\lambda_1^0=\lambda_2^0=\cdots=\lambda_{M+1}^0=0$, $\lambda_n^0=(n-M_1-1)^2$, $n>M_1+1$。也就是说，我们得到

$$\rho_n=n-M_1-1+\varepsilon_n,\quad \varepsilon_n=o(1),\quad n\to\infty. \tag{3.5}$$

为了获得余项的更精确估计，我们在 (3.4) 中取 $\rho=\rho_n$，其中 n 充分大：

$$\rho_n^{-(2M_1+1)}\Delta(\rho_n^2)=-\sin\rho_n\pi+\varkappa_\pi(\rho_n)+O\left(n^{-1}\right)=0. \tag{3.6}$$

利用零点处的泰勒级数，我们得到

$$\sin\rho_n\pi=(-1)^m\sin(\varepsilon_n\pi)=(\varepsilon_n\pi+O(\varepsilon_n^3)),\quad m:=n-M_1-1,$$
$$\varkappa_\pi(\rho_n)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{i(n+\varepsilon_n)x}dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx+i\varepsilon_n\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)e^{inx}dx+O(\varepsilon_n^2)=\varkappa_n+o(\varepsilon_n).$$

将这些表示式代入 (3.6)，可得 $\varepsilon_n=\varkappa_n$。结合 (3.5)，证明至此完成。

□

类似地，我们得到权数的以下渐近公式：

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} + \varkappa_n, \quad n \geq 1. \tag{3.7}$$

利用这一渐近性 (3.3)，在 $M_1 \geq M_2$ 的情况下，我们可以得到以下不等式（见 [12] 中的公式 (16)）：

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\rho|^{2M_1+1} e^{\pi|\tau|}, \quad \rho \in G_\delta = \{\rho : |\rho - n| \geq \delta, n \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.8}$$

我们引入方程 (1.1) 的 Weyl解：

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

其满足边界条件

$$\Phi^{[1]}(0,\lambda) = 1, \quad r_1(\lambda)\Phi^{[1]}(\pi,\lambda) + r_2(\lambda)\Phi(\pi,\lambda) = 0. \tag{3.9}$$

此外，记 $S(x,\lambda)$ 为满足初始条件 $S(0,\lambda) = 0$, $S^{[1]}(0,\lambda) = 1$ 的方程 (1.1) 的解。容易证明

$$\Phi(x,\lambda) = S(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda), \tag{3.10}$$

其中， $M(\lambda)$ 是由 (2.4) 定义的 Weyl函数。

下面证明唯一性定理。

~定理 2.3 的证明。考虑两个边值问题 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\sigma, r_1, r_2)$ 和 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\tilde{\sigma}, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$，满足 $(r_1, r_2) \in \mathcal{N}$、$(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \in \mathcal{N}$，且 $M(\lambda) \equiv M(\lambda)$。定义谱映射矩阵 $P(x,\lambda)$ 如下：

$$P(x,\lambda)\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(x,\lambda) & \tilde{\Phi}(x,\lambda) \\ \tilde{\varphi}^{[1]}(x,\lambda) & \tilde{\Phi}^{[1]}(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda) \\ \varphi^{[1]}(x,\lambda) & \Phi^{[1]}(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

因此，我们得到：

$$\begin{cases} P_{11}(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\varphi}^{[1]}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda), \\ P_{11}(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\Phi}^{[1]}(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda). \end{cases} \tag{3.11}$$

该系统的行列式等于 1，因此

$$\begin{cases} P_{11}(x,\lambda) = \tilde{\Phi}^{[1]}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) - \Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}^{[1]}(x,\lambda), \\ P_{12}(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \tilde{\Phi}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda). \end{cases} \tag{3.12}$$

我们还可以得到 P_{11} 和 P_{12} 的其他表示式：

$$\begin{cases} P_{11}(x,\lambda) = 1 + \varphi(x,\lambda)(\tilde{\Phi}^{[1]}(x,\lambda) - \Phi^{[1]}(x,\lambda)) + \Phi(x,\lambda)(\varphi^{[1]}(x,\lambda) - \tilde{\varphi}^{[1]}(x,\lambda)), \\ P_{12}(x,\lambda) = -\dfrac{\tilde{\varphi}(x,\lambda)\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \dfrac{\varphi(x,\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}. \end{cases} \tag{3.13}$$

记住，$M(\lambda) = -\overline{\psi(0,\lambda)\,\psi^{[1]}(0,\lambda)}$。容易证明，函数 $\psi(0,\lambda)$ 和$\psi^{[1]}(0,\lambda)$ 没有公共零点（见 [12]中的引理1）。由于 $M(\lambda) \equiv \tilde{M}(\lambda)$，它们的极点

˜重合： $\lambda_n = \lambda_n,\quad n \geq 1$ （按重数计）。将渐近性 (2.6) 纳入˜考虑后，我们得出结论：这两个问题 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 具有相同的类型（要么是 $M_1 = M_2$，要么是˜$M_1 = M_2 - 1$）。此外， $M_j = M_j,\quad j = 1,\ 2$。

为明确起见，考虑 $M_1 = M_2$ 的情形。另一种情形的证明类似。利用命题 3.1，得到：

$$\varphi(x,\lambda) = O(e^{x|\tau|}),\quad \varphi^{[1]}(x,\lambda) = O(|\rho|e^{x|\tau|}),$$
$$\varphi^{[1]}(x,\lambda) - \tilde{\varphi}^{[1]}(x,\lambda) = o(|\rho|e^{x|\tau|}),\quad |\rho| \to \infty.$$

类似地，可以得到以下估计：

$$\psi(x,\lambda) = O(|\rho|^{2M_1}e^{(\pi-x)|\tau|}),\quad \psi^{[1]}(x,\lambda) = O(|\rho|^{2M_1+1}e^{(\pi-x)|\tau|}),$$
$$\psi^{[1]}(x,\lambda) - \tilde{\psi}^{[1]}(x,\lambda) = o(|\rho|^{2M_1+1}e^{(\pi-x)|\tau|}),\quad |\rho| \to \infty.$$

结合这些估计以及 (3.8) 和 (3.13)，得到

$$P_{11}(x,\lambda) = 1 + o(1),\quad P_{12}(x,\lambda) = o(1),\quad \rho \in G_\delta,\ |\rho| \to \infty. \tag{3.14}$$

˜根据 (3.10)、(3.12) 以及 $M(\lambda) = M(\lambda)$，得到：

$$P_{11} = \varphi(x,\lambda)\tilde{S}^{[1]}(x,\lambda) - S(x,\lambda)\tilde{\varphi}^{[1]}(x,\lambda),$$
$$P_{12} = S(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\tilde{S}(x,\lambda),$$

因此， $P_{11}(x,\lambda)$ 和 $P_{12}(x,\lambda)$ 关于 λ 是整函数，由刘维尔定理可知 $P_{11}(x,\lambda) \equiv 1$, $P_{12}(x,\lambda) \equiv$˜0。因此，$\varphi(x,\lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x,\lambda)$，$\Phi(x,\lambda) \equiv \Phi(x,\lambda)$。

将 $\varphi(x,\lambda)$ 代入 $\mathrm{l}y = \lambda y$ 和 $\tilde{\mathrm{l}}y = \lambda y$，我们得到

$$((\sigma(x) - \tilde{\sigma}(x))\varphi(x,\lambda))' = (\sigma(x) - \tilde{\sigma}(x))\varphi'(x,\lambda).$$

函数（$\sigma(x) - \tilde{\sigma}(x)$）$\varphi(x,\lambda)$ 在 $[0,\pi]$ 上绝对连续。取满足 $\varphi(x,\lambda) \neq 0$,$x \in [0,\pi]$ 的 λ。于是，函数（$\sigma(x) - \tilde{\sigma}(x)$）在 $[0,\pi]$ 上绝对连续，且（$\sigma(x) - \tilde{\sigma}(x)$）$' = 0$。因此（$\sigma(x) - \tilde{\sigma}(x)$）是常数。由于 $\varphi^{[1]}(0,\lambda) = \tilde{\varphi}^{[1]}(0,\lambda) = 0$，所以我们得到 $\sigma(0) - \tilde{\sigma}(0) =$0。由于 $\sigma(x) - \tilde{\sigma}(x)$ 是常数，因此 $\sigma(x) \equiv \tilde{\sigma}(x)$。

˜由于 $\Phi(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)$，根据 Weyl解的右端边界条件 (3.9)，我们得到：

$$r_1(\lambda)\tilde{r}_2(\lambda) - r_2(\lambda)\tilde{r}_1(\lambda) = 0. \tag{3.15}$$

回想一下， $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$，以及 $\tilde{r}_1(\lambda)$ 和 $\tilde{r}_2(\lambda)$ 是互素多项式，且 (r_1, r_2)、$(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \in \mathcal{N}$。因此，由 (3.15) 可得 $r_1(\lambda) \equiv \tilde{r}_1(\lambda)$，且 $r_2(\lambda) \equiv \tilde{r}_2(\lambda)$。 □

4 主方程

在本节中，我们在由有界无限序列构成的巴拿赫空间 m 中得到反问题 2.7 的主方程。首先，我们选择模型问题。其次，我们沿 λ 平面中的特殊围道对谱映射矩阵的矩阵元 $P_{11}(x,\lambda)$ 和 $P_{12}(x,\lambda)$ 进行积分，并推导出无限线性系统 (4.6)。最后，我们将 (4.6) 转换为 m 中的线性方程。

从本节开始，我们约定 $M_1 = M_2$。情形 $M_1 = M_2 - 1$ 也可类似地考虑。

˜我们引入模型问题 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\tilde{\sigma}, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$:

$$\tilde{l}y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi),$$
$$y^{[1]}(0) = 0, \quad \tilde{r}_1(\lambda) y^{[1]}(\pi) + \tilde{r}_2(\lambda) y(\pi) = 0,$$

其中 $M_1 = \tilde{M}_1$。例如，我们可以取 $\tilde{\sigma}(x) \equiv 0$, $\tilde{r}_1(\lambda) = \lambda^{M_1}$ 和 $\tilde{r}_2(\lambda) \equiv 0$。因此，我们得到˜如下问题 $\mathcal{L}$:

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad y'(0) = 0, \quad \lambda^{M_1} y'(\pi) = 0. \tag{4.1}$$

我们约定，如果某个符号 γ 表示与 $\mathcal{L}$相关的对象，那么带˜波浪号的符号 $\tilde{\gamma}$ 表示与 $\mathcal{L}$ 和 ˆ $\gamma = \gamma - \tilde{\gamma}$相关的类似对象。

容易证明，问题 (4.1) 具有如下谱数据:

$$\tilde{\lambda}_n = \begin{cases} (n - M_1 - 1)^2, & n > M_1, \\ 0, & 1 \le n \le M_1, \end{cases} \qquad \tilde{\alpha}_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & n > M_1 + 1, \\ 0, & 2 \le n \le M_1 + 1, \\ \frac{1}{\pi}, & n = 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

˜ ˜此外，方程 $ly = \lambda y$的解为 $\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \cos \rho x$和 $\psi(x, \lambda) = \lambda^{M_1} \cos \rho(\pi - x)$。因此，问题 $\tilde{\mathcal{L}}$ 的 Weyl函数和 Weyl解具有如下形式

$$\tilde{M}(\lambda) = \frac{\cos \rho\pi}{\rho \sin \rho\pi}, \quad \tilde{\Phi}(x, \lambda) = \frac{\cos \rho(\pi - x)}{\rho \sin \rho\pi}, \tag{4.3}$$

˜分别。注意， $M(\lambda)$ 与问题的 Weyl函数一致

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

˜然而，为方便起见，我们添加 M_1 零特征值，并考虑 $\mathcal{L}$形式为(4.1)的模型问题。

引入记号 $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$。定义辅助函数。

$$\tilde{D}(x, \lambda, \mu) = \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} = \int_0^x \tilde{\varphi}(t, \lambda) \tilde{\varphi}(t, \mu) dt, \quad \tilde{A}(x, \lambda, \mu) = \tilde{D}(x, \lambda, \mu) \hat{M}(\mu). \tag{4.4}$$

此外，回顾记号（2.8）。

与 [12], 中的引理 3 类似，我们得到以下结果。

引理 4.1。以下表示式成立:

$$\tilde{A}(x, \lambda, \mu) = \sum_{j=0}^{m_{ki}-1} \frac{\tilde{A}_{k+j,i}(x, \lambda)}{(\mu - \lambda_{ki})^{j+1}} + \tilde{A}^0_{k,i}(x, \lambda, \mu),$$

其中 $\tilde{A}_{k+j,\ i}(x, \lambda) = \operatorname{Res}_{\mu = \lambda_{ki}} \tilde{A}(x, \lambda, \mu)(\mu - \lambda_{ki})^j$ 是 $\tilde{A}(x, \lambda, \mu)$ 在点 $\mu = \lambda_{kj}$ 的邻域内的主部系数，而 $\tilde{A}^0_{k,\ i}(x, \lambda, \mu)$ 关于 μ 在 λ_{kj} 附近是解析的。

记作

$$\tilde{Q}_{n+p,i;k,j}(x) = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \tilde{A}_{k,j}(x, \lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_{n,i}}, \quad n \in I_i, \quad p = \overline{0, m_{ni} - 1}, \quad i = 0, 1.$$

引理 4.2. 以下关系适用于 $x \in [0,\pi]$:

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \sum_{i=0}^{1}(-1)^i \sum_{k\in I_i} \sum_{j=0}^{m_{k_i}-1} \tilde{A}_{k+j,i}(x,\lambda)\varphi_{k+j,i}(x), \quad n \geq 1, \tag{4.5}$$

$$\tilde{\varphi}_{n,i}(x) = \varphi_{n,i}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{Q}_{n,i;k,0}(x)\varphi_{k,0}(x) - \tilde{Q}_{n,i;k,1}(x)\varphi_{k,1}(x)). \tag{4.6}$$

(4.5) 中的级数按如下意义收敛

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{i=0}^{1}(-1)^i \sum_{k\in I_i,\, k\leq K} (\dots) \tag{4.7}$$

关于 λ 在 $\mathbb{C}$ 的紧集上一致收敛。

证明。定义区域

$$\Xi = \{\lambda = \rho^2 : 0 < \operatorname{Im}\rho < \tau_1\}, \quad c_N = \Big\{\lambda : |\lambda| < \Big(N + \frac{1}{2}\Big)^2\Big\}, \quad N \in \mathbb{N},$$

其中 τ_1 的选取满足：对所有 $n \geq 1$, $i = 0, 1$, 均有 $\lambda_{ni} \in \Xi$。分别用 Υ_N^+、 Υ_N^- 和 Γ_N 表示区域 $(\Xi \cap c_N)$、$(c_N \setminus \Xi)$ 和 c_N 的边界（见图 1）。围道 Υ_N^+、Υ_N^- 和 Γ_N 均按逆时针方向绕行。

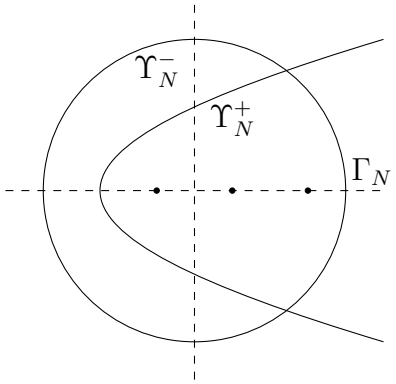

图 1. 围道

注意，由 (3.12) 给出的函数 $P_{11}(x,\lambda)$ 和 $P_{12}(x,\lambda)$ 的极点为 $\{\lambda_{ni}\}_{n\geq 1,\ i=0,\ 1}$，对每个固定的 $x \in [0,\pi]$ 均如此。根据柯西积分公式，对于 $\lambda \notin \Xi$ 以及足够大的整数 N，我们得到

$$P_{11}(x,\lambda) - 1 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Upsilon_N^-} \frac{P_{11}(x,\mu)-1}{\lambda-\mu}d\mu = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Upsilon_N^+} \frac{P_{11}(x,\mu)}{\lambda-\mu}d\mu - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N} \frac{P_{11}(x,\mu)-1}{\lambda-\mu}d\mu,$$

$$P_{12}(x,\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Upsilon_N^-} \frac{P_{12}(x,\mu)}{\lambda-\mu}d\mu = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Upsilon_N^+} \frac{P_{12}(x,\mu)}{\lambda-\mu}d\mu - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N} \frac{P_{12}(x,\mu)}{\lambda-\mu}d\mu.$$

然后，利用 (3.11))，我们得到

$$\varphi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Upsilon_N^+} \frac{P_{11}(x,\mu)\tilde{\varphi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\mu)\tilde{\varphi}^{[1]}(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\mu + \varepsilon_N(x,\lambda), \tag{4.8}$$

其中

$$\varepsilon_N(x,\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N} \frac{(P_{11}(x,\mu)-1)\tilde{\varphi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\mu)\tilde{\varphi}^{[1]}(x,\lambda)}{\lambda-\mu} d\mu.$$

由 (3.14)，我们有 $P_{11}(x,\lambda) = 1 + o(1)$ 且 $P_{12}(x,\lambda) = o(1)$，因此 $\varepsilon_N(x,\lambda) \to 0, N \to \infty$。将 (3.10) 和 (3.12) 代入 (4.8)，可得

$$\varphi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Upsilon_N^+} \tilde{\varphi}(x,\mu)\tilde{A}(x,\lambda,\mu)d\mu + \varepsilon_N(x,\lambda), \tag{4.9}$$

根据引理 4.1 表示 (4.9) 中的 $A(x,\lambda,\mu)$，利用留数定理计算 (4.9) 中的积分，并令 $N \to \infty$ 时取极限。于是，对于 $\lambda \notin \Xi$，我们得到 (4.5)。利用谱数据的渐近性 (2.6) 和 (3.7)，可以证明 (4.5) 中的级数按照 (4.7) 的意义关于 λ 在紧集上一致收敛。通过解析延拓，我们得出关系 (4.5) 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 均成立。代入 $\lambda = \lambda_{ni}$，并先对重特征值对应的 (4.5) 两边求导，可得 (4.6)。 □

同理，我们可以得到公式

$$\tilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda) + \sum_{i=0}^{1}(-1)^i \sum_{k\in I_i}\sum_{j=0}^{m_{k_i}-1} \tilde{B}_{k+j,i}(x,\lambda)\varphi_{k+j,i}(x), \tag{4.10}$$

其中 $\tilde{B}(x,\lambda,\mu) = \dfrac{\langle \Phi(x,\lambda) \quad \tilde{\varphi}\ x\ \mu \rangle(\,,\,)\hat{}M(\mu)}{\lambda-\mu}$，且该级数在意义（4.7）下关于 λ 在 $\mathbb{C}\setminus\{\lambda_{ni}\}_{n\geq 1,\ i=0,\ 1}$ 中的紧集上一致收敛。

下面推导主方程。记

$$\xi_n = |\rho_n - \tilde{\rho}_n| + |\alpha_n - \tilde{\alpha}_n|, \quad \chi_n = \begin{cases} \xi_n^{-1}, & \xi_n \neq 0, \\ 0, & \xi_n = 0, \end{cases} \quad n \geq 1.$$

根据谱数据的渐近性（2.6）和（3.7），有 $\{\xi_n\} \in l^2$.

设 V为指标集合 $u = (n,i)$，其中 $n \geq 1, i = 0, 1$。定义向量 $\psi(x) = (\psi_v(x))_{v\in V}$，其中

$$\begin{pmatrix} \psi_{n0}(x) \\ \psi_{n1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{n,0}(x) \\ \varphi_{n,1}(x) \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

类似地，将 $\varphi_{n,\,i}(x)$ 替换为 $\tilde{\varphi}_{n,\,i}(x)$，定义 $\tilde{\psi}(x)$。此外，定义无限矩阵 $\tilde{H}(x) = (H_{u,v}(x))_{u,\,v\in V}$：

$$\begin{pmatrix} \tilde{H}_{n0,k0}(x) & \tilde{H}_{n0,k1}(x) \\ \tilde{H}_{n1,k0}(x) & \tilde{H}_{n1,k1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{n,0;k,0}(x) & \tilde{Q}_{n,0;k,1}(x) \\ \tilde{Q}_{n,1;k,0}(x) & \tilde{Q}_{n,1;k,1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

利用命题 3.1、(2.6)、(3.4) 和 (3.7)，我们可以得到以下估计

$$|\psi_{ni}(x)| \leq C, \quad |\tilde{\psi}_{ni}(x)| \leq C, \quad |\tilde{H}_{ni,kj}(x)| \leq \frac{C\xi_k}{|n-k|+1}, \quad (n,i),(k,j) \in V, \tag{4.13}$$

其中 C 是一个正的常数，与 n、i、k、j 和 x 无关。

考虑由有界无限序列 $a = (a_v)_{v\in V}$ 组成的巴拿赫空间 m，其范数为 $\sup_v |a_v|$。由 (4.13) 可知，对于每个固定的 $x \in [0,\pi]$， $\psi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都属于 m； $H(x)$ 是从 m 到 m 的线性有界算子，并且

$$\|\tilde{H}(x)\|_{m\to m} \le C \sup_n \sum_k \frac{\xi_k}{|n-k|+1} < \infty.$$

回想一下， E 是 m中的恒等算子。

T定理 4.3. 对每个固定的 $x \in [0,\pi]$，向量 $\psi(x) \in m$ 满足方程

$$\tilde{\psi}(x) = (E + \tilde{H}(x))\psi(x) \tag{4.14}$$

在巴拿赫空间中 space m。方程（4.14）称为反问题的主方程。 .

证明。根据构造，我们有以下关系：

$$\tilde{\psi}_{n0} = \chi_n \left(\varphi_{n,0} - \varphi_{n,1} + \sum_k (\tilde{Q}_{n,0;k,0}\varphi_{k,0} - \tilde{Q}_{n,0;k,1}\varphi_{k,1} - \tilde{Q}_{n,1;k,0}\varphi_{k,0} + \tilde{Q}_{n,1;k,1}\varphi_{k,1}) \right),$$
$$\tilde{\psi}_{n1} = \varphi_{n,1} + \sum_k (\tilde{Q}_{n,1;k,0}\varphi_{k,0} - \tilde{Q}_{n,1;k,1}\varphi_{k,1}).$$

不难注意到，

$$\tilde{\psi}_{ni} = \psi_{ni} + \sum_{k,j} \tilde{H}_{ni,kj}(x)\psi_{kj}, \quad (n,i),(k,j) \in V,$$

这等价于（4.14）。 □

定理 4.4。对于每个固定的 $x \in [0,\pi]$，算子（$E+H(x)$）具有有界逆算子。因此，方程（4.14）有唯一解。

定理 4.4 的证明与 [12],中的定理 2 类似，故省略证明。

5 重构公式

在本节中，我们证明定理 2.8，该定理给出了问题 $\mathcal{L}$ 的系数 $\sigma(x)$、$r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 的重构公式。首先，我们证明定理 2.8 中级数和乘积的收敛性。然后，我们需要说明公式 (2.11)–(2.13) 的右端分别等于 $\mathcal{L}$ 的系数 $\sigma(x)$、 $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$。为此，我们采用逼近方法。我们考虑有限谱数据 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^K$ 以及对应的主方程，其中 K 充分大。我们证明主方程有唯一解。此外，我们利用有限数据 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^K$ 构造解 $\varphi^K(x,\lambda)$ 和 $\Phi^K(x,\lambda)$，研究它们的性质，然后构造函数 $\sigma^K(x)$、 $r_1^K(\lambda)$ 和 $r_2^K(\lambda)$。我们证明它们在相应空间中分别收敛到 $\sigma(x)$、 $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$。最后，我们得出公式 (2.11)–(2.13) 成立。

定理 2.8 的证明由引理 5.1–5.9 组成。

引理 5.1. 级数 (2.11) 在 $L_2(0,\pi)$ 中收敛。

证明。考虑级数的收敛性。

$$\mathscr{S}(x) := \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{1} (-1)^j \alpha_{kj} \left(\tilde{\varphi}_{k,j}(x) \varphi_{k,j}(x) - \frac{1}{2} \right), \tag{5.1}$$

其中， N 足够大，使得所有重特征值都位于圆 Γ_N 内部。

在此证明中，我们使用记号 $\{\theta_k(x)\}$ 表示各种序列，使得级数$\sum_k |\theta_k(x)|$关于 $x \in [0,\pi]$一致收敛，并且 $\delta_x(k) = \int_0^x \mathcal{K}(x,t) \cos ktdt$，其中 $\mathcal{K}(x,t) \in \mathcal{D}_{0,\pi}$ （类 $\mathcal{D}_{0,\pi}$ 在命题 3.1 中定义）。

由命题 3.1、(2.6)、(4.2) 以及关系 $\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \cos \rho x$，我们得到

$$\varphi_{k,0}(x) = \cos kx - \varkappa_k x \sin kx + \delta_x(k+\varkappa_k) + \theta_k(x), \quad \varphi_{k,1}(x) = \cos kx + \delta_x(k), \tag{5.2}$$

$$\tilde{\varphi}_{k,0}(x) = \cos kx - \varkappa_k x \sin kx + \theta_k(x), \quad \tilde{\varphi}_{k,1}(x) = \cos kx. \tag{5.3}$$

回想一下，对于 $k > N$，$\alpha_{k,1} = \frac{2}{\pi}$。令 $\varepsilon_n := \alpha_{n,0} - \alpha_{n,1}$。由 (3.7) 可得 $\{\varepsilon_n\} \in l_2$。因此，将 (5.2) 和 (5.3) 代入 (5.1) 并化简，得到

$$\mathscr{S}(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi} \varkappa_k x \sin 2kx + \frac{1}{2} \varepsilon_k \cos 2kx + \frac{2}{\pi} (\delta_x(k+\varkappa_k) - \delta_x(k)) + \theta_k(x) \right).$$

由于 $\{\varepsilon_k\}, \{\varkappa_k\} \in l_2$ 和

$$\delta_x(k+\varkappa_k) - \delta_x(k) = -\int_0^x \mathcal{K}(x,t) \varkappa_k t \sin ktdt + \theta_k(x),$$

我们得到，级数 $\mathscr{S}(x)$ 在 $L_2(0,\pi)$ 中收敛。 □

引理 5.2. (2.12) 和 (2.13) 中的级数与乘积在紧集 $|\lambda| \le C$, $|\lambda - \lambda_{ki}| \ge \delta$, $C, \delta > 0$ 上绝对且一致收敛。

证明. 首先考虑这些乘积。由于有限乘积不会影响收敛性，因此我们只考虑乘积

$$\mathscr{P}(x) := \prod_{k=M_1+1}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_{k0}}{\lambda - \lambda_{k1}} = \prod_{k=M_1+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{k1} - \lambda_{k0}}{\lambda - \lambda_{k1}} \right).$$

由 (2.6) 和 (4.2) 可得 $\lambda_{k0} = (k+\varkappa_k)^2$, $\lambda_{k1} = k^2$。因此

$$\frac{\lambda_{k1} - \lambda_{k0}}{\lambda - \lambda_{k1}} \sim \frac{\varkappa_k}{k}.$$

因此，乘积 $\mathscr{P}(x)$ 在不含特征值的紧集上一致且绝对收敛。

接下来，考虑（2.13）中的级数:

$$\mathscr{S}_1(\lambda) := \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_{k0} \tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi) \varphi^{[1]}_{k,0}(\pi)}{\lambda - \lambda_{k0}},$$

$$\mathscr{S}_2 := \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{1} (-1)^j \alpha_{kj} (\tilde{\varphi}_{k,j}(\pi) \varphi_{k,j}(\pi) - 1).$$

(2.12) 中级数的证明是类似的，而且更加简单。利用命题 3.1 和 (2.6)，我们得到

$$\varphi_{k,0}^{[1]}(\pi) = k\varkappa_{k,0}, \quad \tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi) = k\varkappa_{k,1}, \quad \{\varkappa_{k,0}\}, \{\varkappa_{k,1}\} \in l_2.$$

如果 $|\lambda|$ 有界且 k 充分大，则 $|\lambda - \lambda_{k0}| \geq ck^2$, $c > 0$。因此

$$|\mathscr{S}_1(\lambda)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} C|\varkappa_{k,0}||\varkappa_{k,1}| < \infty.$$

因此，级数 $\mathscr{S}_1(\lambda)$ 在紧集上一致绝对收敛。由(5.2)和(5.3)可得

$$\varphi_{k,0}(\pi)\tilde{\varphi}_{k,0}(\pi) = 1 + \delta_\pi(k + \varkappa_k) + \theta_k, \quad \varphi_{k,1}(\pi)\tilde{\varphi}_{k,1}(\pi) = 1 + \delta_\pi(k) + \theta_k,$$

其中 $\delta_\pi(k) = \int_0^\pi f(t)\cos kt\,dt$, $f \in L_2(0,\pi)$，而 $\{\theta_k\}$ 表示由 l_1构成的各种序列。此外，回顾可知 $\alpha_{k0} = \frac{2}{\pi} + \varepsilon_k$, $\alpha_{k1} = \frac{2}{\pi}$，其中 $\{\varepsilon_k\} \in l_2$。因此

$$\mathscr{S}_2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}(\delta_\pi(k + \varkappa_k) - \delta_\pi(k)) + \varepsilon_k \delta_\pi(k + \varkappa_k) + \theta_k \right).$$

注意到

$$\{\delta_\pi(k)\} \in l_2, \quad \{(\delta_\pi(k + \varkappa_k) - \delta_\pi(k))\} \in l_1.$$

这意味着级数 $\mathscr{S}_2$绝对收敛。 □

为了证明定理 2.8，还需证明级数(2.11)、(2.12)和(2.13)分别收敛到系数 $\sigma(x)$、 $r_1(\lambda)$和 $r_2(\lambda)$。为此，我们采用逼近方法。考虑数值 $\{\lambda_n^K, \alpha_n^K\}_{n\geq 1}$，其中 K 是充分大的自然数:

$$\lambda_n^K = \begin{cases} \lambda_n, & n \leq K, \\ \tilde{\lambda}_n, & n > K, \end{cases}, \quad \alpha_n^K = \begin{cases} \alpha_n, & n \leq K, \\ \tilde{\alpha}_n, & n > K. \end{cases} \tag{5.4}$$

与 $\tilde{H}(x)$ 类似，我们引入算子 $\tilde{H}^K(x) = (\tilde{H}^K_{u,\,v}(x))_{u,\,v\in V}$:

$$\tilde{H}^K_{ni,kj}(x) = \begin{cases} 0, & k > K, \\ \tilde{H}_{ni,kj}(x), & k \leq K. \end{cases}$$

引理 5.3. 对每个固定的 $x \in [0,\pi]$，算子 $(E + \tilde{H}^K(x))$ 都有一个有界逆算子。

证明. 设 f 是 m 的一个元素。则

$$(\tilde{H}^K(x)f)_{ni} = \sum_{k=1}^{K}(\tilde{H}_{ni,k0}(x)f_{k0} + \tilde{H}_{ni,k1}(x)f_{k1}), \quad n \geq 1, i = 0, 1.$$

因此我们可以估计范数

$$\|\tilde{H}(x) - \tilde{H}^K(x)\|_{m\to m} \leq C \sup_n \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{|n-k|+1} \leq C\sqrt{\sum_{k=K+1}^{\infty} \xi_k^2}.$$

由于 $\{\xi_k\} \in l_2$，因此当 $K \to \infty$ 时， $\|\tilde{H}(x) - \tilde{H}^K(x)\|_{m\to m} \to 0$。结合定理 4.4，即可得到所述结论。 □

根据引理 5.3，方程

$$\tilde{\psi}(x) = (E + \tilde{H}^K(x))\psi^K(x)$$

对于每个固定的 $x \in [0, \pi]$，都有唯一解。其解 $\psi^K(x)$ 的前几个元素 $\psi^K_{ni}(x)$、$n = \overline{1}$、K、$i = 0$、1 满足有限线性方程组

$$\tilde{\psi}_{ni}(x) = \psi^K_{ni}(x) + \sum_{k=1}^{K}(\tilde{H}_{ni,k0}(x)\psi^K_{k0}(x) + \tilde{H}_{ni,k1}(x)\psi^K_{k1}(x)), \quad n = \overline{1,K}, i = 0, 1. \tag{5.5}$$

由于系统 (5.5) 中的所有函数都是无穷可微的，因此其解也是无穷可微的。定义

$$\varphi^K_{n,0}(x) = \xi_n\psi^K_{n0}(x) + \psi^K_{n1}(x), \quad \varphi^K_{n,1}(x) = \psi^K_{n1}(x), \quad n = \overline{1,K}. \tag{5.6}$$

利用 (5.5) 和 (5.6)，我们得到类似于 (4.6) 的关系：

$$\tilde{\varphi}_{n,i}(x) = \varphi^K_{n,i}(x) + \sum_{k=1}^{K}(\tilde{Q}_{n,i;k,0}(x)\varphi^K_{k,0}(x) - \tilde{Q}_{n,i;k,1}(x)\varphi^K_{k,1}(x)), \quad n = \overline{1,K}. \tag{5.7}$$

根据以下公式构造函数 $\varphi^K(x,\lambda)$ 和 $\Phi^K(x,\lambda)$，它们分别类似于 (4.5) 和 (4.10)：

$$\varphi^K(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda) - \sum_{i=0}^{1}\sum_{k\in I_i,\, k\le K}\sum_{j=0}^{m_{ki}-1}\tilde{A}_{k+j,i}(x,\lambda)\varphi^K_{k+j,i}(x,\lambda), \tag{5.8}$$

$$\Phi^K(x,\lambda) = \tilde{\Phi}(x,\lambda) - \sum_{i=0}^{1}\sum_{k\in I_i,\, k\le K}\sum_{j=0}^{m_{ki}-1}\tilde{B}_{k+j,i}(x,\lambda)\varphi^K_{k+j,i}(x,\lambda).$$

由 (5.7) 和 (5.8) 可得 $\varphi^K_{n+j,\ i}(x) = \varphi^K_j(x,\lambda_{ni})$，其中 $\varphi^K_j(x,\lambda) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\varphi^K(x,\lambda)$。我们还可以得到积分表示

$$\varphi^K(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_K}\tilde{A}(x,\lambda,\mu)\varphi^K(x,\mu)d\mu, \tag{5.9}$$

$$\Phi^K(x,\lambda) = \tilde{\Phi}(x,\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_K}\tilde{B}(x,\lambda,\mu)\varphi^K(x,\mu)d\mu. \tag{5.10}$$

构造函数

$$\begin{aligned}\sigma^K(x) = &-\frac{1}{\pi i}\oint_{\Gamma_N}\left(\tilde{\varphi}(x,\mu)\varphi^K(x,\mu) - \frac{1}{2}\right)\hat{M}(\mu)d\mu \\ &- 2\sum_{k=N+1}^{K}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\alpha_{kj}\left(\tilde{\varphi}_{k,j}(x)\varphi^K_{k,j}(x) - \frac{1}{2}\right),\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$r^K_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{M_1}(\lambda - \lambda_{k0})\prod_{k=M_1+1}^{K}\frac{\lambda - \lambda_{k0}}{\lambda - \lambda_{k1}}\left(1 - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{\tilde{\varphi}'(\pi,\mu)\varphi^K(\pi,\mu)}{\lambda - \mu}M(\mu)d\mu\right.$$

$$- \sum_{k=N+1}^{K} \frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi^K_{k,0}(\pi)}{\lambda-\lambda_{k0}}\Bigg), \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} r_2^K(\lambda) = &\prod_{k=1}^{M_1}(\lambda-\lambda_{k0}) \prod_{k=M_1+1}^{K} \frac{\lambda-\lambda_{k0}}{\lambda-\lambda_{k1}} \Bigg(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N} \frac{\tilde{\varphi}'(\pi,\mu)\varphi^{K[1]}(\pi,\mu)}{\lambda-\mu} M(\mu)d\mu \\ &- \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N} (\tilde{\varphi}(\pi,\mu)\varphi^K(\pi,\mu)-1)\hat{M}(\mu)d\mu + \sum_{k=N+1}^{K} \frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi^{K[1]}_{k,0}(\pi)}{\lambda-\lambda_{k0}} \\ &- \sum_{k=N+1}^{K}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\alpha_{kj}(\tilde{\varphi}_{k,j}(\pi)\varphi^K_{k,j}(\pi)-1)\Bigg). \end{aligned} \tag{5.13}$$

（5.13）中的准导数定义为 $y^{[1]} := y' - \sigma^K y$。

引理 5.4。 $r_1^K(\lambda)$ 是一个次数为 M_1 的多项式，首项系数为 1，而 $r_2^K(\lambda)$ 是一个次数不大于 M_1 的多项式。

证明。为简单起见，假设特征值 $\{\lambda_{k0}\}_{k\geq 1}$ 和 $\lambda_{k0} \neq \lambda_{n1}$ 均为单重。一般情形需要进行一些技术性修改。于是

$$r_1^K(\lambda) = \prod_{k=1}^{M_1}(\lambda-\lambda_{k0}) \prod_{k=M_1+1}^{K} \frac{\lambda-\lambda_{k0}}{\lambda-\lambda_{k1}} \Bigg(1 - \sum_{k=1}^{K} \frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi^K_{k,0}(\pi)}{\lambda-\lambda_{k0}} \Bigg), \tag{5.14}$$

(5.14) 式中括号内的表达式可以表示如下：

$$\mathscr{E}(\lambda) := 1 - \sum_{k=1}^{K} \frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi^K_{k,0}(\pi)}{\lambda-\lambda_{k0}} = \frac{\prod_{k=1}^{K}(\lambda-\lambda_{k0}) - \sum_{k=1}^{K-1} s_k\lambda^k}{\prod_{k=1}^{K}(\lambda-\lambda_{k0})} = \frac{\sum_{k=1}^{K} s_k^*\lambda^k}{\prod_{k=1}^{K}(\lambda-\lambda_{k0})},$$

其中 s_k、 $s_k^* \in \mathbb{C}$ 和 $s_K^* = 1$。然后，我们得到

$$r_1^K(\lambda) = \frac{S^*(\lambda)}{\prod_{k=M_1+1}^{K}(\lambda-\lambda_{k1})}, \qquad S^*(\lambda) := \sum_{k=1}^{K} s_k^*\lambda^k. \tag{5.15}$$

让我们证明，对于所有 $n = \overline{1, K}$， $S^*(\lambda_{n1}) = 0$。由 (5.9) 可得：

$$\varphi^K_{n,1}(\pi) = \tilde{\varphi}_{n,1}(\pi) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_K} \tilde{A}(\pi,\lambda_{n1},\mu)\varphi^K(\pi,\mu)d\mu.$$

利用留数定理计算围道积分，并考虑关系 $\tilde{\varphi}_{n,1}(\pi) = 1$，我们得到

$$\varphi^K_{n,1}(\pi) = 1 - \sum_{k=1}^{K} \frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi^K_{k,0}(\pi)}{\lambda_{n1}-\lambda_{k0}} + \varphi^K_{n,1}(\pi), \quad n = \overline{1, K},$$

因此,

$$\mathscr{E}(\lambda_{n1}) = 1 - \sum_{k=1}^{K} \frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi^K_{k,0}(\pi)}{\lambda_{n1} - \lambda_{k0}} = 0 \quad n = \overline{1, K}.$$

因此， $S^*(\lambda_{n1}) = 0, n = \overline{1, K}$，所以可以约去分式 (5.15) 中的公因式，得到一个多项式。由于分子次数为 K，分母次数为 $(K - M_1)$，因此 $r_1^K(\lambda)$ 是一个次数为 M_1 的多项式。

关于 $r_2^K(\lambda)$ 的证明类似。唯一的区别是， $r_2^K(\lambda)$ 的首项系数不一定等于 1。

□

考虑边值问题 $\mathcal{L}^K := \mathcal{L}(\sigma^K, r_1^K, r_2^K)$。显然，函数 $\sigma^K(x)$ 无穷可微，因此问题 $\mathcal{L}^K$ 可表示如下:

$$-y'' + \frac{d}{dx}\sigma^K(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, \pi),$$

$$y'(0) - \sigma^K(0)y(0) = 0, \quad r_1^K(\lambda)(y'(\pi) - \sigma^K(\pi)y(\pi)) + r_2^K(\lambda)y(\pi) = 0.$$

引理 5.5. 以下关系成立:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi^K(x,\lambda) + \frac{d}{dx}\sigma^K(x)\varphi^K(x,\lambda) = \lambda\varphi^K(x,\lambda), \quad x \in (0,\pi),$$

$$\varphi^K(0,\lambda) = 1, \quad \frac{d}{dx}\varphi^K(0,\lambda) = \sigma^K(0),$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Phi^K(x,\lambda) + \frac{d}{dx}\sigma^K(x)\Phi^K(x,\lambda) = \lambda\Phi^K(x,\lambda), \quad x \in (0,\pi),$$

$$\frac{d}{dx}\Phi^K(0,\lambda) - \sigma^K(0)\Phi^K(0,\lambda) = 0,$$

$$r_1^K(\lambda)\left(\frac{d}{dx}\Phi^K(\pi,\lambda) - \sigma^K(\pi)\Phi^K(\pi,\lambda)\right) + r_2^K(\lambda)\Phi^K(\pi,\lambda) = 0.$$

因此， $\Phi^K(x, \lambda)$ 是问题 $\mathcal{L}^K$ 的 Weyl解。

引理 5.5 可通过直接计算证明。

引理 5.6. $\{\lambda_n^K, \alpha_n^K\}_{n\geq 1}$ 是边值问题 $\mathcal{L}^K$的谱数据 .

证明. 由引理 5.5可知， $\Phi^K(x, \lambda)$是问题 $\mathcal{L}^K$的Weyl解。因此，我们可以得到Weyl函数为 $\Phi^K(0, \lambda)$。由(5.10)可得

$$M^K(\lambda) = \tilde{M}(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_K} \frac{M(\mu)}{\lambda - \mu}d\mu - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_K} \frac{\tilde{M}(\mu)}{\lambda - \mu}d\mu.$$

代入 g (2.6)，并利用留数定理计算围道积分，我们得到

$$M^K(\lambda) = \sum_{k\in I}\sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{\alpha_{k+j}^K}{(\lambda - \lambda_k^K)^{j+1}},$$

因此， $\{\lambda_n^K, \alpha_n^K\}_{n\geq 1}$ 是边值问题 $\mathcal{L}^K$的谱数据。 □

接下来，我们将系数 (σ^K, r_1^K, r_2^K) 转换为 (σ, r_1, r_2)。

引理 5.7. $\sigma^K(x)$ 在 $L_2(0,\pi)$ 中 $\to \sigma(x)$, $r_1^K(\lambda) \to r_1(\lambda)$, 且 $r_2^K(\lambda) \to r_2(\lambda)$ 在紧集上一致成立，其中 $K \to \infty$ （即相应多项式的系数收敛），$\sigma(x)$、$r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$ 分别由 (2.11)、(2.12) 和 (2.13) 定义。

证明。对于 $\sigma(x)$的证明是将 [37] 中的引理 5.6 的证明推广到重特征值情形。因此，我们简要概述其证明。

引入以下函数 $\theta^K(x) = (\theta_{ni}^K(x))_{(n,i)\in V}$:

$$\theta_{ni}^K(x) = \begin{cases} \varphi_{n,i}(x) - \varphi_{n,i}^K(x), & n \le K, \\ 0, & n > K, \end{cases}$$

以及 $\zeta_K(x) = \{\zeta_{ni}^K(x)\}_{(n,i)\in V}$:

$$\zeta_{ni}^K(x) = \begin{cases} -\sum_{k=K+1}^{\infty}(\tilde{Q}_{n,i;k,0}(x)\varphi_{k,0}(x) - \tilde{Q}_{n,i;k,1}(x)\varphi_{k,1}(x)), & n \le K, \\ 0, & n > K, \end{cases}$$

根据方程组 (4.6) 和 (5.7)，对于 $n \le K$, $i = 0, 1$，有:

$$\tilde{\varphi}_{n,i}(x) = \varphi_{n,i}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{Q}_{n,i;k,0}(x)\varphi_{k,0}(x) - \tilde{Q}_{n,i;k,1}(x)\varphi_{k,1}(x)),$$
$$\tilde{\varphi}_{n,i}(x) = \varphi_{n,i}^K(x) + \sum_{k=1}^{K}(\tilde{Q}_{n,i;k,0}(x)\varphi_{k,0}^K(x) - \tilde{Q}_{n,i;k,1}(x)\varphi_{k,1}^K(x)).$$

相减可得

$$\theta_{ni}^K(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{Q}_{n,i;k,0}(x)\theta_{k,0}^K(x) - \tilde{Q}_{n,i;k,1}(x)\theta_{k,1}^K(x)) + \zeta_{ni}^K(x).$$

以与 [37], 中相同的方式利用后一个关系，可得

$$\lim_{K\to\infty} \|\theta^K(x)\|_{l_2} = 0, \quad \lim_{K\to\infty} \|\{\theta_{n0}^K(x) - \theta_{n1}^K(x)\}\|_{l_1} = 0, \tag{5.16}$$

由 $x \in [0,\pi]$ 一致地。

我们还引入函数 $\theta^K(x,\lambda) := \varphi(x,\lambda) - \varphi^K(x,\lambda)$。利用 (4.5) 和 (5.8)，可得:

$$\theta^K(x,\mu) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^i \sum_{k\in I_i, k\le K} \sum_{j=0}^{m_{k_i}-1} \tilde{A}_{k+j,i}(x,\lambda)(\varphi_{k+j,i}^K(x) - \varphi_{k+j,i}(x))$$
$$-\sum_{i=0}^{1}(-1)^i \sum_{k\in I_i, k>K} \sum_{j=0}^{m_{k_i}-1} \tilde{A}_{k+j,i}(x,\lambda)\varphi_{k+j,i}(x).$$

由 (5.16) 以及 (4.5) 中级数的收敛性可知

$$\lim_{K\to\infty} \theta^K(x,\mu) = 0. \tag{5.17}$$

在紧集 Γ_N 上关于 $x \in [0,\pi]$ 和 μ 一致地。

将（5.11）减去（2.11），得到

$$\sigma(x)-\sigma^K(x)=-\frac{1}{\pi i}\oint_{\Gamma_N}\tilde{\varphi}(x,\mu)(\varphi(x,\mu)-\varphi^K(x,\mu))\hat{M}(\mu)d\mu-2\sum_{k=N+1}^{K}(\tilde{\varphi}_{k,0}(x)\theta_{k0}^K(x)\alpha_{k0}$$
$$-\tilde{\varphi}_{k,1}(x)\theta_{k1}^K(x)\alpha_{k1})-2\sum_{k=K+1}^{\infty}\left(\alpha_{k0}\left(\tilde{\varphi}_{k,0}(x)\varphi_{k,0}(x)-\frac{1}{2}\right)-\alpha_{k1}\left(\tilde{\varphi}_{k,1}(x)\varphi_{k,1}(x)-\frac{1}{2}\right)\right)$$

由于级数 (2.11) 根据引理 5.1 收敛，因此其余项在 $L_2(0,\pi)$ 和 $K\to\infty$ 中趋于零。考虑到 (5.16) 和 (5.17)，我们得出结论：$\sigma^K(x)\to\sigma(x)$ 在$L_2(0,\pi)$ 中。

考虑如下差值

$$r_1(\lambda)-r_1^K(\lambda)=\frac{\prod_{k=1}^{K}(\lambda-\lambda_{k0})}{\prod_{k=M_1+1}^{K}(\lambda-\lambda_{k1})}\left(\prod_{k=K+1}^{\infty}\frac{\lambda-\lambda_{k0}}{\lambda-\lambda_{k1}}\left(1-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{\tilde{\varphi}'(\pi,\mu)\varphi(\pi,\mu)}{\lambda-\mu}M(\mu)d\mu\right.\right.$$
$$\left.-\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi_{k,0}(\pi)}{\lambda-\lambda_{k0}}\right)-1+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{\tilde{\varphi}'(\pi,\mu)\varphi^K(\pi,\mu)}{\lambda-\mu}M(\mu)d\mu-\left.\sum_{k=N+1}^{K}\frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi^K_{k,0}(\pi)}{\lambda-\lambda_{k0}}\right).$$

由于无穷乘积收敛（见引理 5.2），因此

$$\lim_{K\to\infty}\prod_{k=K+1}^{\infty}\frac{\lambda-\lambda_{k0}}{\lambda-\lambda_{k1}}=1.$$

此处及下文中，收敛性由 λ 在排除特征值的紧集上一致成立。

$K\prod(\lambda-\lambda_{k0})$ 将有限乘积 $\frac{k=1}{K}$ 记为 $g(\lambda)$。$\prod($
$\lambda-\lambda_{k1})_{k=M_1+1}$

因此，我们可以得到：

$$\lim_{K\to\infty}(r_1(\lambda)-r_1^K(\lambda))=-g(\lambda)\lim_{K\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{\tilde{\varphi}'(\pi,\mu)\theta^K(\pi,\mu)}{\lambda-\mu}\hat{M}(\mu)d\mu\right.$$
$$\left.+\sum_{k=N+1}^{K}\frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\theta^K_{k,0}(\pi)}{\lambda-\lambda_{k0}}+\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi)\varphi^K_{k,0}(\pi)}{\lambda-\lambda_{k0}}\right).$$

回顾一下，根据引理 5.2，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}{}^{\alpha_{k0}\tilde{\varphi}'_k}{}_{,0}(\pi)\varphi_k^K{}_{,0}(\pi)\,\lambda-\lambda_{k0}$ 收敛。考虑到 (5.16) 和 (5.17)，我们得出 $r_1(\lambda)-r_1^K(\lambda)\to 0$, $K\to\infty$。对 $r_2^K(\lambda)$ 的证明类似。因此，我们证明了其在 $\mathbb{C}\setminus\{\lambda_{ni}\}_{n\geq 1,\,i=0,1}$ 中紧集上的绝对一致收敛。由于 $r_1^K(\lambda)$ 和 $r_2^K(\lambda)$ 是多项式，因而没有奇点，所以它们在整个 λ-平面紧集上一致收敛。

□

注 5.8。引理 5.4 和 5.7 共同表明，(2.12) 和 (2.13) 的右端项分别是次数为 M_1 和不超过 M_1 的多项式。此外，由 (2.12) 给出的多项式的首项系数为 1。

此外，可以证明关于谱数据对 σ、 r_1和 r_2的连续依赖性的以下引理。

引理 5.9. 设 $\sigma^K(x)$ 和 $\sigma(x)$ 是 $L_2(0,\pi)$ 上的任意函数，且 $r_j^K(\lambda)$ 和 $r_j(\lambda)$（$j=1,2$）是任意多项式（不一定由公式 (2.11)–(2.13)、(5.11)–(5.13) 给出），满足 $\sigma^K(x)\to\sigma(x)$ 在 $L_2(0,\pi)$ 中成立，且 $r_1^K(\lambda)\to r_1(\lambda)$ 和 $r_2^K(\lambda)\to r_2(\lambda)$ 在紧集上一致收敛；当 $K\to\infty$, $r_1^K(\lambda)$ 的次数为 M_1 且首项系数为 1，而 $r_2^K(\lambda)$ 的次数不超过 M_1 时，则 $\{\lambda_n^K,\alpha_n^K\}\to\{\lambda_n,\alpha_n\}$ 在以下意义下成立：对于每个固定的 $n\ge 1$, $\lambda_n^K\to\lambda_n$，若 λ_n^K的重数与 λ_n的重数相同，则 $\alpha_n^K\to\alpha_n$ 当 $K\to\infty$。

定理 2.8 的证明。根据引理 5.1 和引理 5.2，(2.11)、(2.12) 和 (2.13) 的右端以适当的意义收敛。分别将它们的极限记为 $\sigma^\diamond(x)$、 $r_1^\diamond(\lambda)$ 和 $r_2^\diamond(\lambda)$。我们需要证明 $\sigma^\diamond=\sigma$、 $r_1^\diamond=r_1$ 和 $r_2^\diamond=r_2$。考虑问题$\mathcal{L}^\diamond:=\mathcal{L}(\sigma^\diamond$、 $r_1^\diamond$、 $r_2^\diamond)$。将其谱数据记为 $\{\lambda_n^\diamond,\alpha_n^\diamond\}_{n\ge1}$。此外，考虑数据 $\{\lambda_n^K,\alpha_n^K\}_{n\ge1}$ 以及对所有充分大的K所对应的函数 $\sigma^K(x)$、 $r_1^K(\lambda)$ 和 $r_2^K(\lambda)$。根据引理 5.7，系数 (σ^K、 r_1^K、 r_2^K) 在 $K\to\infty$ 时收敛到 ($\sigma^\diamond$、 $r_1^\diamond$、 $r_2^\diamond$)。于是，引理 5.9 蕴含 $\{\lambda_n^K,\alpha_n^K\}\to\{\lambda_n^\diamond,\alpha_n^\diamond\}$、 $K\to\infty$。另一方面，由 (5.4) 可知 $\{\lambda_n^K,\alpha_n^K\}\to\{\lambda_n,\alpha_n\}$、 $K\to\infty$。因此，对于所有 $n\ge1$，有 $\lambda_n=\lambda_n^\diamond$ 和 $\alpha_n=\alpha_n^\diamond$。根据唯一性定理（定理 2.3），我们得出，在 $(0,\pi)$ 上几乎处处有 $\sigma(x)=\sigma^\diamond(x)$，并且 $r_j(\lambda)\equiv r_j^\diamond(\lambda)$， $j=1$, 2。这证明了系数 $\mathcal{L}$ 的重构公式 (2.11)–(2.13) 的有效性。 □

6 反问题的解

本节给出求解反问题 2.1 的重构过程，并通过一个简单的例子加以说明。定理 2.8 的证明方法导出了以下构造性算法。

算法 6.1. 设已知 $M^1(\lambda)$、 $p_1(\lambda)$ 和 $p_2(\lambda)$，并为明确起见， $M_1=M_2$。我们需要求出 $\sigma(x)$、 $r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$。

1. 利用 (2.5) 求出 $M(\lambda)$： $M(\lambda)=\dfrac{p_1(\lambda)M^1(\lambda)}{1+p_2(\lambda)M^1(\lambda)}$。

2. 根据 $M(\lambda)$ 求出 $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\ge1}$： $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ 是 $M(\lambda)$ 的极点，并且

$$\alpha_{k+j}=\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k}M(\lambda)(\lambda-\lambda_k)^j,\quad k\in I,\quad j=\overline{0,m_k-1}.$$

3. 利用 $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ 的渐近性 (2.6) 求出 M_1：

$$M_1=\lim_{n\to\infty}(n-1-\sqrt{\lambda_n}). \tag{6.1}$$

4. 取模型问题 (4.1)，由 (4.2) 求出 $\{\lambda_n,\tilde\alpha_n\}_{n\ge1}$、 $\tilde\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x$、 $M(\lambda)$，并由 (4.3) 求出 $\tilde\Phi(x,\lambda)$。

5. 根据 (4.4) 求出 $A(x,\lambda,\mu)$，即函数

$$\tilde A_{k+j,i}(x,\lambda)=\operatorname*{Res}_{\mu=\lambda_{ki}}\tilde A(x,\lambda,\mu)(\mu-\lambda_{ki})^j,\quad k\in I_i,\quad j=\overline{0,m_k-1},\quad i=0,1, \tag{6.2}$$

$$\text{and } \tilde Q_{n+p,i;k,j}(x)=\tfrac{1}{p!}\tfrac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\tilde A_{k,j}(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_{n,i}},\quad n\in I_i,\quad p=\overline{0,m_{ni}-1},\quad i=0,1..$$

6. 使用 (4.11) 构造 $\tilde{\psi}(x) = (\psi_v(x))_{v\in V}$，以及算子 $H(x) = (H_{u,v}(x))_{u,v\in V}$ 使用 (4.12) 构造。

7. 求解主方程 (4.14)，从而求得 $\psi(x) = (\psi_v(x))_{v\in V}$。

8. 根据 $\psi_{ni}(x)$、$n \geq 1$、$i = 0$、1 求得 $\varphi_{n,i}(x)$：

$$\varphi_{n,1}(x) = \psi_{n1}(x), \quad \varphi_{n,0}(x) = \xi_n \psi_{n0}(x) + \psi_{n1}(x).$$

9. 使用 (4.5) 构造函数 $\varphi(x,\lambda)$。

10. 使用 (2.11)–(2.13) 求得 $\sigma(x)$、$r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$。

算法 6.1 是理论性的。依托该算法，可以研究反问题解的存在性与稳定性，并开发用于重建的数值方法。不过，这些问题需要另行研究。需要注意的是，在实际中只能获得有限数量的谱数据 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^K$。因此，可以使用有限线性系统 (5.5) 代替主方程 (4.14)，然后应用公式 (5.11)、(5.12) 和 (5.13)，求得近似解 (σ^K, r_1^K, r_2^K)。此外，值得注意的是，在数值算法中，无须显式求解主方程。可以使用 [49] 的迭代技术。

例子。假设 α_2 和 λ_2 是给定的非零复数，$\lambda_2 \neq n^2, n \in \mathbb{N}$。令 $p_1(\lambda) = 1$, $p_2(\lambda) = 0$, $M^1(\lambda) = \dfrac{\alpha_2}{\lambda - \lambda_2} + \cos\rho\pi$ $\sin\rho\pi$。那么 (2.5) 意味着

$$M(\lambda) = \frac{\alpha_2}{\lambda - \lambda_2} + \frac{\cos\rho\pi}{\rho\sin\rho\pi} = \frac{1}{\pi\lambda} + \frac{\alpha_2}{\lambda - \lambda_2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\lambda - (n-2)^2}.$$

根据引理 2.6，特征值和权数相等

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2, \quad \lambda_n = (n-2)^2,\ n \geq 3, \quad \text{and} \quad \alpha_1 = \frac{1}{\pi}, \quad \alpha_2, \quad \alpha_n = \frac{2}{\pi},\ n \geq 3,$$

分别。换言之，对于 $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$，谱数据 $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ 与模型问题的谱数据 $\{\lambda_n, \tilde{\alpha}_n\}$ 重合（见 (4.2)）；对于 $n = 2$，则与给定的复数 $\{\lambda_2, \alpha_2\}$重合。

由公式 (6.1)，可得 $M_1 = 1$。接下来，我们可以根据 (4.4) 构造函数 $A(x,\lambda,\mu)$：

$$\tilde{A}(x,\lambda,\mu) = \frac{\alpha_2}{\mu - \lambda_2}\int_0^x \tilde{\varphi}(t,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\mu)dt.$$

回顾 $\tilde{\varphi}(t,\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}t)$。由于 $\tilde{A}(x,\lambda,\mu)$ 只有一个极点 $\mu = \lambda_2$，因此 (6.2) 蕴含

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_{2,0}(x,\lambda) = \alpha_2 \textstyle\int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}t)\cos(\sqrt{\lambda_2}t)dt, \\ &\tilde{A}_{k,i}(x,\lambda) = 0, \quad (k,i) \neq (2,0). \end{aligned} \tag{6.3}$$

此外，由于 $\lambda_{n0} = \lambda_{n1}$ 和 $\alpha_{n0} = \alpha_{n1}$ 对于 $n \neq 2$，很容易验证（2.9）和（2.11）中关于 $k \neq 2$ 的求和项均为零。因此，我们可以不考虑无限系统（2.9），而改为考虑以下规模为（2×2）的系统：

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{2,0}(x) = \varphi_{2,0}(x) + \tilde{Q}_{2,0;2,0}(x)\varphi_{2,0}(x) - \tilde{Q}_{2,0;2,1}(x)\varphi_{2,1}(x), \\ \tilde{\varphi}_{2,1}(x) = \varphi_{2,1}(x) + \tilde{Q}_{2,1;2,0}(x)\varphi_{2,0}(x) - \tilde{Q}_{2,1;2,1}(x)\varphi_{2,1}(x). \end{cases} \tag{6.4}$$

请注意，在这个简单的情形下，我们不将系统 (6.4) 转换为主方程 (4.14)，因为 (2.9) 中的级数会变成有限和，因此我们无需分析它们的˜收敛性。利用 (6.3)，我们可以求得 (6.4) 中使用的矩阵元 $Q_{n,i;k,j}(x)$：

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{2,0;2,0}(x) &= \frac{\alpha_2}{4}\Big(\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_2}x)}{\sqrt{\lambda_2}} + 2x\Big),\\
\tilde{Q}_{2,1;2,0}(x) &= \frac{\alpha_2}{\lambda_2}\Big(\frac{\sin(\sqrt{\lambda_2}x)}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_2}x^2\sin(\sqrt{\lambda_2}x) - x\cos(\sqrt{\lambda_2}x)\Big),\\
\tilde{Q}_{2,1;2,0}(x) &= \tilde{Q}_{2,1;2,1}(x) = 0.
\end{aligned}$$

求解主方程 (6.4)：

$$\begin{aligned}
\varphi_{2,0}(x) &= \frac{\cos(\sqrt{\lambda_2}x)}{1 + \frac{\alpha_2}{4}\Big(\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_2}x)}{\sqrt{\lambda_2}} + 2x\Big)}, \qquad (6.5)\\
\varphi_{2,1}(x) &= 1 - \tilde{Q}_{2,1;2,0}(x)\varphi_{2,0}(x).
\end{aligned}$$

显然，当且仅当以下条件成立时，解才是良定义的

$$1 + \frac{\alpha_2}{4}\Big(\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_2}x)}{\sqrt{\lambda_2}} + 2x\Big) \neq 0 \qquad (6.6)$$

对所有 $x \in [0,\pi]$ 均成立。我们必须对给定的数 λ_2 和 α_2施加这一要求。注意，对于每个复数 $\lambda_2 \neq 0$，关系 (6.6) 对所有绝对值充分小的复数 $\alpha_2 \neq 0$ 均成立。

接着，由 (2.11) 得到 $\sigma(x)$：

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= -2\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\alpha_{2j}\left(\tilde{\varphi}_{2,j}(x)\varphi_{2,j}(x) - \frac{1}{2}\right)\\
&= \alpha_2 - \frac{8\alpha_2\sqrt{\lambda_2}\cos^2(\sqrt{\lambda_2}x)}{4\sqrt{\lambda_2} + \alpha_2\sin(2\sqrt{\lambda_2}x) + 2x\sqrt{\lambda_2}}. \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

接下来，考虑关于多项式的重构公式 (2.12) 和 (2.13)。˜ ˜ ˜积分部分消失，因为所有特征值 $\{\lambda_n\}$ 和 $\{\lambda_n\}$ 都是简单的。（虽然 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，但我们有 $\tilde{\alpha}_2 = 0$，所以实际上，$\lambda = 0$ 是 $M(\lambda)$ 的简单极点。）因此，可以取 $N = 0$。回顾一下，对于 $k \neq 2$，有 $\lambda_{k0} = \lambda_{k1}$。于是，$\tilde{\varphi}'_{k,0}(\pi) = \tilde{\varphi}'_{k,1}(\pi) = 0, k \neq 2$。因此，重构公式 (2.12) 和 (2.13) 化为

$$\begin{aligned}
r_1(\lambda) &= (\lambda - \lambda_{20})\left(1 - \frac{\alpha_{20}\tilde{\varphi}'_{2,0}(\pi)\varphi_{2,0}(\pi)}{\lambda - \lambda_{20}}\right),\\
r_2(\lambda) &= (\lambda - \lambda_{20})\left(\frac{\alpha_{20}\tilde{\varphi}'_{2,0}(\pi)\varphi^{[1]}_{2,0}(\pi)}{\lambda - \lambda_{20}} - \sum_{j=0}^{1}(-1)^j\alpha_{2j}(\tilde{\varphi}_{2,j}(\pi)\varphi_{2,j}(\pi) - 1)\right).
\end{aligned}$$

计算表明，

$$\begin{aligned}
r_1(\lambda) =& \lambda - \lambda_2 + \frac{2\alpha_2\lambda_2\sin(2\sqrt{\lambda_2}\pi)}{4\sqrt{\lambda_2} + \alpha_2\sin(2\sqrt{\lambda_2}\pi) + 2\pi\sqrt{\lambda_2}},\\
r_2(\lambda) =& \alpha_2\lambda\big(1 - \varphi_{2,0}(\pi)\cos(\sqrt{\lambda_2}\pi)\big) + \alpha_2\big(\lambda_2\varphi_{2,0}(\pi)\cos(\sqrt{\lambda_2}\pi) - \lambda_2\\
&+ \varphi'_{2,0}(\pi)\sin(\sqrt{\lambda_2}\pi) - \sigma(\pi)\varphi_{2,0}(\pi)\sin(\sqrt{\lambda_2}\pi)\big),
\end{aligned}$$

其中，$\varphi_{2,0}(x)$ 和 $\sigma(x)$ 分别由 (6.5) 和 (6.7) 给出。因此，我们恢复了 1 次多项式。

7 正则势

定理 2.8 的重构公式即使对于正则势$q \in L_2(0,\pi)$ 的情形也是新颖的，该情形由 Freiling 和 Yurko [12] 研究过。因此，在本节中，我们考虑来自 [12] 的命题，并将我们的结果应用于这个反问题。

引入边值问题 $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(q, p_1, p_2, \check{r}_1, \check{r}_2)$：

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{7.1}$$
$$p_1(\lambda)y'(0) - p_2(\lambda)y(0) = 0, \quad \check{r}_1(\lambda)y'(\pi) + \check{r}_2(\lambda)y(\pi) = 0, \tag{7.2}$$

是 q $L_2(0,\pi)$ 的复值势， $x = 0$ 处的边界条件 (7.2) 包含互素多项式 $p_j(\lambda)$、 $j = 1$、2，可表示为形式 (2.1)； $x = \pi$处的边界条件包含互素多项式 $\check{r}_j(\lambda)$、 $j = 1$、2，可表示为形式 (2.2)。我们还假设 $N_1 = N_2$、 $M_1 = M_2$、 $a_{N_1} = c_{M_1} = 1$ 和 $b_{N_2} \neq 0$。

定义函数 $\psi(x,\lambda)$ 为方程 (7.1) 的解，并满足初始条件 $\psi(\pi,\lambda) = \check{r}_1(\lambda)$， $\psi'(\pi,\lambda) = -\check{r}_2(\lambda)$。容易看出，问题 $\mathscr{L}^1$ 的特征值与整特征函数的零点重合。

$$\Delta^1(\lambda) = p_1(\lambda)\psi'(0,\lambda) - p_2(\lambda)\psi'(0,\lambda).$$

引入辅助问题 $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_0(q, \check{r}_1, \check{r}_2)$：

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,\pi),$$
$$y(0) = 0, \quad \check{r}_1(\lambda)y'(\pi) + \check{r}_2(\lambda)y(\pi) = 0.$$

该问题的特征函数具有如下形式 $\Delta_0(\lambda) = \psi(0,\lambda)$。下面引入 Weyl函数 $M^1(\lambda)$：

$$M^1(\lambda) = -\frac{\Delta_0(\lambda)}{\Delta^1(\lambda)}.$$

注意，Freiling 和 Yurko 在 [12] 中假设多项式 $p_1(\lambda)$ 和 $p_2(\lambda)$ 的零点是先验已知的。这意味着多项式 $p_1(\lambda)$ 是已知的（其首项系数等于 1），而如果恢复多项式 $p_2(\lambda)$ 的首项系数，就可以很容易地确定该多项式。因此， [12] 的反问题可以表述如下。

反问题 7.1。给定 Weyl函数 $M^1(\lambda)$、多项式 $p_1(\lambda)$ 以及 $p_2(\lambda)$ 的零点$\{z_j\}_{j=1}^{N_2}$，求 $q(x)$、$\check{r}_1(\lambda)$、$\check{r}_2(\lambda)$ 和 b_{N_2}。

我们可以根据 $M^1(\lambda)$ 的渐近性求出系数 b_{N_2} （见 [12]）：

$$M^1(\lambda) = \frac{1}{i\rho\lambda^{N_1}}\left(1 - \frac{b_{N_2}}{i\rho} + o(\rho^{-1})\right). \tag{7.3}$$

众所周知， $M^1(\lambda)$、 $p_1(\lambda)$、 $p_2(\lambda)$，因此对于问题 $\mathscr{L} = \mathscr{L}(q, \check{r}_1, \check{r}_2)$，我们可以利用公式 (2.5) 求出 $M(\lambda)$：

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,\pi),$$
$$y'(0) = 0, \quad \check{r}_1(\lambda)y'(\pi) + \check{r}_2(\lambda)y(\pi) = 0,$$

该问题等价于下面的问题：

$$-(y^{[1]})'(x) - \sigma(x)y^{[1]}(x) - \sigma^2(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{7.4}$$

$$y^{[1]}(0)=0,\quad r_1(\lambda)y^{[1]}(\pi)+r_2(\lambda)y(\pi)=0, \tag{7.5}$$

其中 $\sigma(x)=\int_0^x q(t)\,dt$, $\sigma\in W_2^1[0,\pi]$, $\sigma(0)=0$, $r_1(\lambda)=\check{r}_1(\lambda)$, 且 $r_2(\lambda)=\check{r}_2(\lambda)+\sigma(\pi)$。显然, $\deg(r_2)=\deg(\check{r}_2)$。

因此, 我们得到求解反问题 7.1 的以下算法。

算法 7.2。给定 Weyl函数 $M^1(\lambda)$、多项式 $p_1(\lambda)$ 和零点 $\{z_j\}_{j=1}^{N_2}$, 我们需要求出 $\sigma(x)$、$r_1(\lambda)$、$r_2(\lambda)$ 和 b_{N_2}。

1. 使用 (7.3) 求出 b_{N_2}。

2. 构造 $p_2(\lambda)=b_{N_2}\prod_{j=1}^{N_2}(z-z_j)$。

3. 使用 (2.5) 求出 $M(\lambda)$, 从而转到问题 (7.4)–(7.5)。

4. 使用 $M(\lambda)$, 按照算法 6.1 的第 2–10 步, 构造 $\sigma(x)$、$r_1(\lambda)$ 和 $r_2(\lambda)$。

5. 求 $q(x):=\sigma'(x)$、$\check{r}_1(\lambda):=r_1(\lambda)$ 和 $\check{r}_2(\lambda):=r_2(\lambda)-\sigma(\pi)$。

特别地, 算法 7.2 给出了 $q(x)$ 的以下公式:

$$\begin{aligned} q(x)=&-\frac{1}{\pi i}\oint_{\Gamma_N}\Big(\tilde{\varphi}'(x,\mu)\varphi(x,\mu)+\tilde{\varphi}(x,\mu)\varphi'(x,\mu)\Big)\hat{M}(\mu)d\mu\\ &-2\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\alpha_{kj}(\tilde{\varphi}'_{k,j}(x)\varphi_{k,j}(x)+\tilde{\varphi}_{k,j}(x)\varphi'_{k,j}(x)). \end{aligned}\tag{7.6}$$

可以证明, (7.6) 中的级数在 $L_2(0,\pi)$ 中收敛。利用留数定理计算围道积分可知, (7.6) 类似于 [48] 恢复具有狄利克雷边界条件的斯图姆-刘维尔问题的正则势时所用的公式 (60)。当特征值为单特征值时, 公式 (7.6) 与 Freiling 和 Yurko 所著书籍 [4] 中针对具有罗宾边界条件的斯图姆-刘维尔问题给出的重构公式 (1.6.25) 一致。然而, 对于边界条件中含多项式的情形, 公式 (7.6) 是新的。

考虑特殊情形 $M_1=M_2=0$, 它对应于 Robin 边界条件 $y^{[1]}(\pi)+b_0y(\pi)=0$。根据注 5.8, 公式 (2.12) 和 (2.13) 分别给出常数$r_1(\lambda)=1$ 和 $r_2(\lambda)=b_0$。为求出常数 b_0, 我们在 (2.13) 中令$|\lambda|\to\infty$ 取极限, 从而得到公式

$$b_0=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}(\tilde{\varphi}(\pi,\mu)\varphi(\pi,\mu)-1)\hat{M}(\mu)\,d\mu-\sum_{k=N+1}^{\infty}(-1)^j\alpha_{kj}(\tilde{\varphi}_{k,j}(\pi)\varphi_{k,j}(\pi)-1),$$

该公式将 [37] 中的公式 (5.15)推广到了重特征值的情形。对于正则势, 在 Robin 边界条件 $y'(\pi)+\check{b}_0y(\pi)=0$中恢复 $\check{b}_0$ 时, 我们有

$$\check{b}_0=b_0-\sigma(\pi)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}\tilde{\varphi}(\pi,\mu)\varphi(\pi,\mu)\,d\mu+\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=N+1}^{\infty}(-1)^j\alpha_{kj}\tilde{\varphi}_{k,j}(\pi)\varphi_{k,j}(\pi).$$

该公式将关系（1.6.25）从 [4] 中针对罗宾边界条件系数 H 的求解推广到了重特征值的情形。因此, 我们的重构公式推广了

此前关于边界条件中含常系数的已知结果，而对于多项式情形，这些结果则是新的。

值得一提的是，Freiling 和 Yurko [12] 建议按如下方式恢复未知系数：

$$q(x) = \lambda + \frac{\varphi''(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)}, \qquad \frac{r_2(\lambda)}{r_1(\lambda)} = -\frac{\Phi'(\pi,\lambda)}{\Phi(\pi,\lambda)}, \tag{7.7}$$

其中， $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\Phi(x,\lambda)$ 分别通过公式 (4.5) 和 (4.10) 的类似形式求得。然而，与 (7.7) 相比，我们的重构公式 (2.11)–(2.13) 更便于研究反问题的可解性与稳定性，因为我们的公式保证所得函数 $\sigma(x)$ 属于 $L_2(0,\pi)$，且 $r_j(\lambda)$、 $j = 1$ 和 2 都是所需次数的多项式（见注 5.8）。

资助：本研究得到俄罗斯科学基金会 21-71-10001号基金资助，
https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/。

参考文献

[1] Marchenko, V.A.《斯图姆–刘维尔算子及其应用》，Naukova Dumka，基辅（1977）（俄文）；英文译本，Birkhäuser（1986）。[2] Levitan, B.M.《逆Sturm-Liouville问题》，Nauka，莫斯科（1984）（俄文）；英文译本，VNU Sci. Press，乌得勒支（1987）。[3] P¨oschel, J.; Trubowitz, E.《逆谱理论》，纽约，Academic Press（1987）。[4] Freiling, G.; Yurko, V.《逆Sturm-Liouville问题及其应用》，纽约州亨廷顿：Nova Science Publishers（2001）。[5] Fulton, C.T. 特征值参数包含在边界条件中的两点边值问题，《爱丁堡皇家学会会刊》A辑，77（1977），第3–4期，293–308。[6] Fulton, C.T. 特征值参数包含在边界条件中的奇异特征值问题，《爱丁堡皇家学会会刊》A辑，87（1980），第1–2期，1–34。[7] Chugunova, M.V. 边界条件依赖于特征值参数的斯图姆-刘维尔算子的逆谱问题。《算子理论：进展与应用》123，Birkhäuser，巴塞尔（2001），187–194。[8] Binding, P.A.; Browne, P.J.; Watson, B.A. 边界条件有理依赖于特征参数的Sturm–Liouville问题。I，《爱丁堡数学学会会刊》（第2辑）45（2002），第3期，631–645。[9] Binding, P.A.; Browne, P.J.; Watson, B.A. 边界条件有理依赖于特征参数的Sturm–Liouville问题。II，《计算与应用数学杂志》148（2002），第1期，147–168。[10] Binding, P.A.; Browne, P.J.; Watson, B.A. 边界条件有理依赖于特征参数的反斯图姆-刘维尔问题的等价性，《数学分析与应用杂志》291（2004），246–261。

[11] Chernozhukova, A.; Freiling, G. 边界条件对谱参数呈非线性依赖的边值问题唯一性定理，《逆问题、科学与工程》17（2009），第6期，777–785。[12] Freiling, G.; Yurko V. 边界条件多项式依赖于谱参数的斯图姆–刘维尔方程反问题，《逆问题》26（2010），第5期，055003。[13] Freiling, G.; Yurko, V. 由Weyl函数确定奇异微分束，《动力系统及应用进展》7（2012），第2期，171–193。[14] Wang, Y.P. 根据谱数据确定边界条件多项式依赖于特征参数的斯图姆–刘维尔算子的唯一性定理，《数学成果》63（2013），1131–1144。[15] Yang, C-F.; Xu, X.-C. 特征参数多项式依赖型Ambarzumyan定理，《数学方法与应用科学》38（2015），4411–4415。[16] Yang, Y.; Wei, G. 边界条件依赖于谱参数的斯图姆–刘维尔算子的逆散射问题，《数学札记》103（2018），第1–2期，59–66。[17] Guliyev, N.J. 具有分布势和依赖于特征值参数的边界条件的薛定谔算子，《数学物理杂志》60（2019），063501。¨Guliyev, N.J. 本质等谱变换及其应用，《纯粹与应用数学年刊》199（2020），第4期，1621–1648。[18] Guliyev, N.J. 关于双谱反问题，《美国数学会会刊》148（2020），4491–4502。[19] Guliyev, N.J. 逆平方奇点与依赖于特征参数的边界条件是同一问题的两个方面，《数学季刊》（2023），在线发表，DOI: https://doi.org/10.1093/qmath/haad004[20] Bondarenko, N.P.; Chitorkin, E.E. 边界条件中含有谱参数的逆Sturm-Liouville问题，《数学》11（2023），第5期，文章编号1138。（19页）[21] Ping, Y.W.; Shieh C.-T.; Tang, Y. 微分算子的部分逆谱问题，《数学成果》78（2023），文章编号：44。[22] Yurko, V.A.《反问题理论中的谱映射方法》，《逆问题与病态问题丛书》，乌得勒支，VNU Science（2002）。[23] Savchuk, A.M.; Shkalikov, A.A. 具有奇异势的斯图姆–刘维尔算子，《数学札记》66（1999），第6期，741–753。[24] Savchuk, A.M.; Shkalikov, A.A. 具有分布势的斯图姆–刘维尔算子，《莫斯科数学学会译丛》64（2003），143–192。[25] Hryniv, R.O.; Mykytyuk, Y.V. 具有奇异势的斯图姆–刘维尔算子的逆谱问题，《逆问题》19（2003），第3期，665–684。[26] Hryniv, R.O.; Mykytyuk, Y.V. 具有奇异势的斯图姆–刘维尔算子的逆谱问题。II. 用两个谱重构，《北荷兰数学研究》197（2004），97–114。

[28] Savchuk, A.M.; Shkalikov, A.A. 含分布势的斯图姆–刘维尔算子反问题：由两个谱重构，《俄罗斯数学物理杂志》12（2005年），第4期，507–514。[29] Savchuk, A.M.; Shkalikov, A.A. 关于与逆斯图姆–刘维尔问题相关的映射性质，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》260（2008），218–237。[30] Savchuk, A.M.; Shkalikov, A.A. Sobolev 空间中势对应的斯图姆–刘维尔算子反问题：一致稳定性，《泛函分析及其应用》44（2010），第4期，270–285。[31] Mirzoev, K.A. 斯图姆–刘维尔算子，《莫斯科数学会汇刊》75（2014），281–299。[32] Mirzoev, K.A.; Shkalikov, A.A. 具有分布系数的偶数阶微分算子，《数学札记》99（2016），第5期，779–784。[33] Konechnaja, N.N.; Mirzoev, K.A.; Shkalikov, A.A. 具有奇异系数的二项微分方程解的渐近行为，《数学札记》104（2018），第2期，244–252。[34] Hryniv, R.O.; Mykytyuk, Y.V. 具有奇异势的斯图姆–刘维尔算子的半逆谱问题，《逆问题》20（2004），第5期，1423–1444。[35] Freiling, G.; Ignatiev, M.Y.; Yurko, V.A. 星形图上具有奇异势的斯图姆–刘维尔算子的逆谱问题，《纯数学研讨会论文集》77（2008），397–408。[36] Djakov, P.; Mityagin, B.N. 具有奇异周期势的一维薛定谔算子的谱隙渐近性，《积分变换与特殊函数》20（2009），第3–4期，265–273。[37] Bondarenko, N.P. 运用 Yurko 方法求解具有奇异势的斯图姆–刘维尔算子反问题，《淡江数学杂志》（2021），52(1)，125–154。[38] Albeverio, S.; Gesztesy, F.; Hoegh-Krohn, R.; Holden, H.《量子力学中的可解模型》，第2版，AMS Chelsea 出版社，罗德岛州普罗维登斯，2005年。[39] Hryniv, R.; Pronska, N. 能量依赖的 Sturm–Liouville 方程的反谱问题，《逆问题》28（2012），085008（21页）。[40] Pronska, N. 由两个谱重构能量依赖的 Sturm–Liouville 方程，《积分方程与算子理论》76（2013），403–419。[41]Hryniv, R.O.; Manko, S.S. 能量依赖薛定谔方程在半直线上的逆散射，《逆问题》36（2020），第9期，095002。[42] Bondarenko N.P., Gaidel A.V. 二次微分铅笔反问题的可解性与稳定性，《数学》9（2021），第20期，文章编号2617。[43] Kuznetsova, M.A. 关于恢复具有奇异系数的二次铅笔以及边界条件中含整函数的情形，《数学方法与应用科学》46（2023），第5期，5086–5098。[44] Mykytyuk, Y.V.; Trush, N.S. 矩阵值势斯图姆–刘维尔算子的反谱问题，《逆问题》26（2009），第1期，015009。

[45] Eckhardt, J.; Gesztesy, F.; Nichols, R.; Sakhnovich, A.; Teschl, G. 具有分布型矩阵值势的薛定谔型算子的反谱问题，《微分与积分方程》28（2015），第5/6期，505–522。[46] Bondarenko, N.P. 具有奇异势的矩阵斯图姆–刘维尔算子反问题的解及谱数据刻画，《数学物理分析》11（2021），文章编号：145。[47] Buterin, S.A. 有限区间上非自伴斯图姆–刘维尔算子的逆谱问题，《数学分析与应用杂志》335（2007），第1期，739–749。[48] Buterin, S.A.; Shieh, C.-T.; Yurko, V.A. 具有狄利克雷边界条件的非自伴二阶微分算子的反谱问题，《边值问题》（2013），2013:180。[49] Ignatiev, M.; Yurko, V. 求解逆斯图姆–刘维尔问题的数值方法，《数学成果》52（2008），第1–2期，63–74。[50] Rundell, W.; Sacks, E. 经典逆斯图姆–刘维尔问题的重构技术，《数学计算》58（1992），第197期，161–183。[51] Kravchenko, V.V. 《正逆斯图姆–刘维尔问题》，Birkhäuser，沙姆（2020）。[52] Bondarenko, N.; Buterin, S. 卷积积分微分算子反谱问题的数值解法与稳定性，《非线性科学与数值模拟通讯》89（2020），105298。[53] Buterin, S. 具有全局延迟的几何图上的泛函微分算子及反谱问题，《数学成果》78（2023），第3期，文章编号：79。[54] Wang, Y.P.; Keskin, B.; Shieh, C.-T. 具有常延迟的非自伴斯图姆–刘维尔算子的部分逆问题，《逆问题与病态问题杂志》（2023），在线发表，DOI: https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0058。Egor Evgenevich Chitorkin 1. 信息技术与控制论研究所，萨马拉国立研究大学，俄罗斯萨马拉莫斯科公路34号，邮编443086；2. 力学与数学系，萨拉托夫国立大学，俄罗斯萨拉托夫阿斯特拉罕街83号，邮编410012，电子邮箱：chitorkin.ee@ssau.ru

Natal[illegible]ovna Bondarenko 1. 萨拉托夫国立大学力学与数学系，俄罗斯萨拉托夫市阿斯特拉罕街83号，邮编410012；2. 萨马拉国立研究大学应用数学与物理系，俄罗斯萨马拉市莫斯科公路34号，邮编443086；3. 俄罗斯人民友谊大学（俄罗斯人民友谊大学），俄罗斯莫斯科市米克卢霍-马克莱街6号，邮编117198，电子邮箱：bondarenkonp@info.sgu.ru