arXiv:2305.01235v1 [math.NT] 2 May 2023

亚纯尖点形式的海克特征形式

KATHRIN BRINGMANN、BEN KANE 和 MICHAEL H. MERTENS

摘要。本文为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上亚纯尖点形式的两个族的商空间构造海克特征形式。我们证明，第一族（分别为第二族）中的每个商空间作为赫克模，同构于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上具有相同权的尖点形式（分别为全纯模形式）空间 S_{2k} （分别为 M_{2k}）。

1. 引言与结果陈述

全纯模形式的海克理论是（全纯）模形式最富有成效的工具之一。因此，自然会尝试为更一般的亚纯模形式空间寻找某种海克结构。对于空间 $M^!_{2-2k}$ 的弱全纯模形式，即其极点（如果存在）仅位于尖点处的亚纯模形式，Guerzhoy 已在 [12] 中实现了这一目标。与全纯理论的主要区别在于，海克算子会提高 $i\infty$ 处的极点阶数，因此，严格意义上并不存在真正的弱全纯特征形式。相反，Guerzhoy [12] 通过一个适当的赫克稳定子空间取商，并为所得商空间定义了特征形式。该子空间具有多方面的特殊性质。对于素数 p 以及满足 $p \mid n$ 的 $n \in \mathbb{N}$，其元素的 n 次傅里叶系数可被 p 的高次幂整除，从而为弱全纯模形式的系数 [13] 导出同余关系。此外，该空间中的元素基本上会导出消失的周期多项式 [5]。

例如，考虑权为 6 的弱全纯模形式。

$$f_{6,i\infty}(z) := \frac{E_6(z)^3}{\Delta(z)} + 1488E_6(z) = q^{-1} - 73764q - 86241280q^2 + O\left(q^3\right).$$

此处及全文中，我们令 $q := e^{2\pi iz}$ 并定义权重 $2k$ *Eisenstein* 级数 s

$$E_{2k}(z) := 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n,$$

日期：2023年5月3日。2020 数学主题分类11F11,11F25,11F37。关键词与短语：调和 Maass 形式、海克特征形式、亚纯模形式的提升映射、亚纯尖点形式。

其中 $\sigma_r(n) := \sum_{d|n} d^r$，且 B_k 为第 k 个伯努利数。此外，$\Delta(z) := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} =: \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权 12 的唯一归一化 Hecke 特征形式。由于 $f_{6,i\infty}$ 的傅里叶展开中的常数项为零，$f_{6,i\infty}$ 属于弱全纯尖点形式的子空间 $S_6^! \subseteq M_6^!$，即常数项为零的弱全纯模形式。令 $D := \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$，并利用 D^{2k-1} 将 $M_{2-2k}^!$ 映至 $S_{2k}^!$ 这一事实（见 [9, 定理 1.2]），可以验证，

$$D^5\left(\frac{E_8(z)}{\Delta(z)}\right) = -f_{6,i\infty}(z).$$

由于

$$\frac{E_8(z)}{\Delta(z)} = q^{-1} + 504 + 73764q + 2695040q^2 + O\left(q^3\right),$$

我们看到 $\frac{E_8}{\Delta} \notin S_{-4}^!$，因此 $f_{6,\ i\infty} \notin D^5(S_{-4}^!)$，因为微分方程 $D^5(F) = -f_{6,\ i\infty}$ 的任意解与 $\frac{E_8}{\Delta}$ 相差一个关于 z 的次数至多为 5 的多项式，因此 $\frac{E_8}{\Delta}$ 是唯一的模解。然而，对于 $m \in \mathbb{N}$，事实证明我们有

$$f_{6,i\infty}\big|T_m - \sigma_5(m)f_{6,i\infty} \in D^5\left(S_{-4}^!\right), \tag{1.1}$$

其中 T_m 表示在（2.5）中定义的 m阶海克特算子。记

$$\mathbb{J}_{2k}^{i\infty} := D^{2k-1}\left(M_{2-2k}^!\right) \qquad \text{and} \qquad \mathbb{J}_{2k,0}^{i\infty} := D^{2k-1}\left(S_{2-2k}^!\right), \tag{1.2}$$

我们看到，$f_{6,\ i\infty}$ 在 $S_6^!/\mathbb{J}_{6\,0,}^{i\infty}$ 中的海克特算子 T_m 作用下具有特征值 $\sigma_5(m)$。这些特征值与 E_6 的特征值相符，证明了这样一个事实：

$$\left(S_{2k}^! \cap S_{2k}^{\perp}\right)\Big/\mathbb{J}_{2k}^{i\infty} \cong S_{2k} \qquad \text{and} \qquad \left(S_{2k}^! \cap S_{2k}^{\perp}\right)\Big/\mathbb{J}_{2k,0}^{i\infty} \cong M_{2k}$$

作为赫克模（见 [5, 定理 1.2]）。这里，$S_{2k}^{\perp}$ 表示与 S_{2k} 在（适当正则化的）Petersson 彼得松内积下正交的形式所构成的子空间。特别地，若 $k = 3$，则第二个同构左侧的商空间由 $f_{6,\ i\infty}$ 张成，而 M_6 由 E_6 张成（注意 $S_6 = \{0\}$，因此 $S_6^! \cap S_6^{\perp} = S_6^!$）。

受（1.1）以及艾希勒–志村理论 [5] 和同余性质 [13], 等应用的启发，我们构造适当的子空间，将 $\mathbb{J}_{2k}^{i\infty}$ 和 $\mathbb{J}_{2k,0}^{\infty}$ 推广到亚纯模形式。亚纯尖点形式最初由 Petersson [20],研究，近年来也已成为一个蓬勃发展的研究领域（例如参见 [1, 2, 3, 6]）。这些形式在上半平面 $\mathbb{H}$ 中可能有极点，但在趋向 $i\infty$ 时呈指数衰减。在这一背景下，寻找海克特特征形式概念的主要问题之一在于，海克特算子会移动极点，这使得寻找一个适合取商的良好空间变得更加复杂。因此，我们将亚纯尖点形式空间分解为若干自然的赫克稳定

子空间，然后考察海克算子在这些子空间上的作用。注意，对于函数 $f\colon \mathbb{H}\to\mathbb{C}$，空间

$$\mathbb{S}_{2k}(f) := \langle f|_{2k}T_m \,:\, m\in\mathbb{N}\rangle$$

是包含 f 的最小赫克稳定子空间。我们研究了针对 f 的某些自然选择所得到的这类子空间。具体而言，对于固定的 $\mathfrak{z}\in\mathbb{H}$ 和 k、$\ell\in\mathbb{N}$（其中 $k\geq 2$），我们选择权为 $2k$ 的椭圆庞加莱级数 $\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k}$ 作为 f，$-\ell$，其定义见（2.8）。这些庞加莱级数由其在 $\mathfrak{z}$ 处的增长性质刻画，并且根据 [21, Satz 7–8]（另见引理 2.2），张成与全纯尖点形式正交的亚纯尖点形式子空间。我们将其简写为

$$\mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell} := \mathbb{S}_{2k}\left(\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}\right) = \left\langle \Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}|_{2k}T_m \,:\, m\in\mathbb{N}\right\rangle.$$

我们将 $\mathbb{J}^{i\infty}_{2k}$ 和 $\mathbb{J}^{i\infty}_{2k,\,0}$ 推广到 $\mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,\,-\ell}$ 子空间的工作，受 Gross 和 Zagier 的代数性猜想 [11, 猜想（4.4）], 的启发；该猜想最近已由 Li[16, 定理 1.1] 和 Bruinier–Li–Yang [8] 证明。为说明这一点，设 $(\lambda_m)_{m\geq 1}$ 是一个序列，使得仅对有限多个 m 有 $\lambda_m\neq 0$。设 λ_m 的选取满足：对于任意权为 $2k$ 的尖点形式 f，其傅里叶展开为 $f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}c_f(m)q^m$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m c_f(m)=0. \tag{1.3}$$

Gross 和 Zagier 利用这类数列构造自守格林函数[1] $G_s(z,\mathfrak{z})$在不同点处取值的线性组合。随后，他们猜想，由这类数列构造的线性组合具有某些代数性质。例如，代数性猜想的一个特例指出，若 $\mathfrak{z}$ 是基本判别式为 D 的 CM 点，且 $(\lambda_m)_{m\geq 1}$ 满足 (1.3)，那么

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m G_k(\mathfrak{z},\mathfrak{z})\big|_0 T_m = u^2 D^{1-k}\log|\beta|, \tag{1.4}$$

其中，β 是一个代数数，属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的类域，而 $u\in\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 中单位根个数的一半（参见 [11, 第 317] 页猜想 4.4）。

若 g 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 $2\ell-2k$ 的模形式，则定义[2]

$$\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z}) = \mathcal{G}_{2k,-\ell,g}(z,\mathfrak{z}) := \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-\ell} g(\mathfrak{z})\big|_{2\ell-2k}T_m q^m. \tag{1.5}$$

[1]自守格林函数定义于 (2.10)，是一个权为零的非全纯模形式，并且是拉普拉斯算子的特征函数（参见 (2.2)）。[2]注意，该和并非处处收敛；关于 z中的亚纯延拓，详见引理 4.1。

若上下文清楚，我们会省略对 k 和 ℓ 的依赖。固定满足 $k \geq 2$ 和 $\mathfrak{z} \in \mathbb{H}$ 的 k、$\ell \in \mathbb{N}$。条件 (1.3) 自然引出对这些空间的考察：[3]

$$\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell} := \left\{ \mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z}) : g \in R^{\ell-1}_{2-2k}\left(M^!_{2-2k}\right) \right\}, \tag{1.6}$$

$$\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell,0} := \left\{ \mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z}) : g \in R^{\ell-1}_{2-2k}\left(S^!_{2-2k}\right) \right\}. \tag{1.7}$$

这里，全文记 $z = x + iy$

$$R^{\ell-1}_{2-2k} := R_{2\ell-2k-2} \circ \cdots \circ R_{2-2k} \quad \text{with} \quad R_{2\kappa} := 2i\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\kappa}{y}$$

表示重复 $\ell - 1$ 次的 ***Maass*** 升算子。它将模对象的权从 $2-2k$ 提升至 $2\ell - 2k$。对于 $\ell = 2k$，Bol 恒等式（见 [9, 引理 2.1]）给出

$$R^{2k-1}_{2-2k} = -(4\pi)^{2k-1} D^{2k-1}, \tag{1.8}$$

因此，这些空间模拟了式 (1.2) 中定义的空间。我们在定理 1.1 中证明，$\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,\,-\ell}$ 和 $\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,\,-\ell,\,0}$ 是 $\mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,\,-\ell}$ 的子空间。因此，可以将式 (1.6) 和 (1.7) 中的空间视为映射 $f \mapsto \mathcal{G}_{R^{\ell-1}(f)}(z,\mathfrak{z})$ 的像，该映射将权为 $2-2k$ 的弱全纯模形式映到权为 $2k$ 的亚纯尖点形式。存在具有指定趋向 $i\infty$ 的增长性质的弱全纯模形式，由权为$2k$ 的尖点形式的傅里叶系数决定（见 [20, Satz 7]），从而与式 (1.3) 建立联系。

接下来，我们考察一个模拟 (1.1) 中行为的例子。设

$$f_{6,i}(z) := \frac{\Delta(z)}{E_6(z)} = q + 480q^2 + 258804q^3 + 138542080q^4 + O\left(q^5\right), \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} g_5(z) &:= \frac{1}{\alpha}\frac{E_8(z)}{\Delta(z)}\left(j(z)^4 - 3480j(z)^3 + 3838860j(z)^2 - 1425282400j(z) + 114237825024\right), \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(q^{-5} - 3126q^{-1} + 26994415788736q + 5196150942833049 60q^2\right) + O\left(q^3\right) \in S^!_{-4}, \\ g_7(z) &:= \frac{1}{\alpha}\frac{E_8(z)}{\Delta(z)}\left(j(z)^6 - 4968j(z)^5 + 9176868j(z)^4 - 7736486240j(z)^3\right. \\ &\qquad \left. + 2925506969154j(z)^2 - 411526489432464j(z) + 12317318339088384\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(q^{-7} - 16808q^{-1} + 10625045828793993q + 168969117252135734476 8q^2\right) \\ &\qquad + O\left(q^3\right) \in S^!_{-4}, \end{aligned}$$

[3]对于一个详情 详细说明，请参见注 4.4。

其中 $\alpha := \frac{E_8(i)}{\Delta(i)} = 1187.006489\ldots$，$j(z) := \frac{E_4(z^3)}{\Delta(z)}$ 是模 j-函数，且傅里叶展开对 $y > 1$ 成立。经过直接计算可得

$$f_{6,i}(z)|_6 T_5 - \sigma_5(5) f_{6,i}(z) = -2^{-10}\mathcal{G}_{g_5}(z,i) \in \mathbb{J}^i_{6,-1,0},$$
$$f_{6,i}(z)|_6 T_7 - \sigma_5(7) f_{6,i}(z) = -2^{-10}\mathcal{G}_{g_7}(z,i) \in \mathbb{J}^i_{6,-1,0}.$$

这种行为与 (1.1) 类似，并非孤立现象。与 $f_{6,i\infty}$ 类似，函数 $f_{6,i} \in \mathbb{S}^i_{6,-1}$ 生成一维商空间 $\mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{6,-1}/\mathbb{J}^i_{6,-1,0}$；以下定理给出了空间 S_{2k}、M_{2k} 与商空间之间的赫克模同构，这些商空间由 $\mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}$ 除以 (1.6) 和 (1.7) 中定义的 $\mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}$ 的子空间得到。

定理 1.1. 对于 $k, \ell \in \mathbb{N}$，若满足 $k \geq 2$，则空间 $\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}$ 和 $\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell,0}$ 是 $\mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}$ 的赫克稳定子空间，并且下列同构是赫克模同构：

$$\mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}\Big/\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell} \cong S_{2k}, \qquad \mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}\Big/\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell,0} \cong M_{2k}.$$

例子 $f_{6,i}$ 在第二个同构 $\mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}/\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell,0} \cong M_{2k}$ 下对应于 E_6，其中 $k = 3$、$\ell = 1$ 和 $\mathfrak{z} = i$。我们将在第 5 节进一步阐述这一点，并且还将证明

$$G(z) := \frac{\Delta(z)^2}{E_4(z)^3 + 15^3\Delta(z)} = q^2 - 4143q^3 + 16868385q^4 - 68686682635q^5 + O\left(q^6\right) \quad (1.10)$$

在第一个同构映射下映射到 $\Delta \mathbb{S}^{\mathfrak{z}}_{2k,\,-\ell}/\mathbb{J}^{\mathfrak{z}}_{2k,\,-\ell} \cong S_{2k}$ 对于 $k = 6$、$\ell = 1$ 和 $\mathfrak{z} = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$。

本文组织如下。在第 2 节中，我们介绍一些非全纯和亚纯模形式空间，例如调和 Maass 形式和亚纯尖点形式，为这些空间构造基，并回顾某些算子。在第 3 节中，我们回顾 Petersson[20, 21] 最初研究的椭圆庞加莱级数的一些性质。在第 4 节中，我们研究 $\mathcal{G}_g(z, \mathfrak{z})$ 并证明定理 1.1。最后，在第 5 节中，我们说明如何利用用于证明定理 1.1 的同构构造亚纯海克特征形式，并通过解释如何选择 $f_{6,\,i}$ 来展示这一构造。

致谢

第一作者受到德国研究基金会（DFG）项目资助，项目编号为 BR 4082/5-1。第二作者的研究受到中国香港特别行政区研究资助局的项目资助（项目编号：HKU 17303618 和 17314122）。

2. 预备知识

2.1. 亚纯模形式与调和 Maass 形式。 我们令 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ 通过分式线性变换作用于 $\mathbb{H}$。照例，对于 $\kappa \in \mathbb{Z}$ 和函数 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$，我们定义 权 2κ 斜线算子

$$f(z)\big|_{2\kappa}\gamma := \det(\gamma)^{\kappa}(cz+d)^{-2\kappa} f(\gamma z). \tag{2.1}$$

如果变量无法从上下文中明确得出，我们会在斜算子 $|_{2\kappa}$、z 及其他算子的记号中包含变量 z。如果对于每个 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 都有 $f|_{2\kappa}\gamma = f$，则称 f 满足对 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的权重 2κ 模性。若 f 在 $\mathbb{H}$ 上是亚纯的，满足对 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的权重 2κ 模性，并且存在 $n_0 \in \mathbb{Z}$ 使得当 $z \to i\infty$ 时，$f(z) \asymp e^{-2\pi n_0 y}$，则称 f 是一个权重为 2κ 的亚纯模形式（对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$）。如果 $n_0 < 0$，则称 f 在 $i\infty$ 处有极点。若 $n_0 > 0$，则亚纯模形式是亚纯尖点形式。另一方面，如果 f 在 $\mathbb{H}$ 中没有极点，则 f 是弱全纯模形式。（全纯）模形式是满足 $n_0 \geq 0$ 的弱全纯模形式，而尖点形式是满足 $n_0 > 0$ 的全纯模形式。

我们还需要某些非全纯模形式。按照 [7], ，若实解析函数 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 是权 2κ （对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$）的调和 *Maass* 形式，则它满足：
(1) 函数 f 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权 2κ 的模形式。(2) 函数 f 被权 2κ 双曲拉普拉斯算子湮灭

$$\Delta_{2\kappa} := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2i\kappa y\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{2.2}$$

(3) 存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得当 $y \to \infty$时，$f(z) = O(e^{cy})$。
对于 $\kappa < 0$，权 2κ 的调和 Maass 形式具有傅里叶展开（对于某个 $n_0 \in \mathbb{Z}$）

$$f(z) = \sum_{n \geq -n_0} c_f^+(n) q^n + c_f^-(0) y^{1-2\kappa} + \sum_{\substack{n \leq n_0 \\ n \neq 0}} c_f^-(n)\Gamma(1-2\kappa, -4\pi n y) q^n,$$

其中，对于满足 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 的 $s \in \mathbb{C}$，我们令 $\Gamma(s,y) := \int_y^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ 表示不完全伽马函数。f 在 $i\infty$ 处的主部 为

$$\sum_{n<0} c_f^+(n) q^n + c_f^-(0) y^{1-2\kappa} + \sum_{n>0} c_f^-(n)\Gamma(1-2\kappa, -4\pi n y) q^n.$$

定义 $\xi_{2\kappa} := 2iy^{2\kappa}\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}$，我们有

$$\Delta_{2\kappa} = -\xi_{2-2\kappa} \circ \xi_{2\kappa},$$

并且，$\xi_{2\kappa}$ 将权重为 2κ 的调和 Maass 形式映射为权重为 $2-2\kappa$ 的弱全纯模形式（见 [7, 命题 3.2]）。我们用 $H_{2\kappa}^{\mathrm{cusp}}$ 表示调和 Maass

形式在 $\xi_{2\kappa}$作用下映射为尖点形式。注意，调和 Maass 形式 f 属于 $H_{2\kappa}^{\text{cusp}}$，当且仅当存在多项式 $P \in \mathbb{C}[q]$，使得 $f(z) - P(q)$ 在 $y \to \infty$时有界。

2.2. 算子。对于 $m \in \mathbb{N}$， V-算子 定义为

$$f(z)\big|V_m := f(mz) = m^{-\kappa} f(z)\Big|_{2\kappa} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

我们将 U-算子 定义为

$$f(z)\big|U_m := m^{\kappa-1} \sum_{j=1}^{m} f(z)\Big|_{2\kappa} \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & m \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

注意，若 f 是平移不变的，则 f 具有如下形式的（局部）傅里叶展开：$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n;\, y)\, q^n$。我们有

$$f(z)\big|V_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c\,(n; my)\, q^{mn} \quad \text{and} \quad f(z)\big|U_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c\left(mn; \frac{y}{m}\right) q^n.$$

结合这些算子，可定义 m 阶海克算子[4] $(m \in \mathbb{N})$

$$f(z)\big|_{2\kappa} T_m := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{r\mid \gcd(m,n)} r^{2\kappa-1} c\left(\frac{mn}{r^2}; \frac{r^2 y}{m}\right) q^n = \sum_{r\mid m} r^{2\kappa-1} f(z)\big|U_{\frac{m}{r}} \circ V_r. \tag{2.5}$$

如果 f 满足 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的权 2κ 模性，那么 $f|_{2\kappa}T_m$ 也满足（例如参见 [19, 命题 2.3]）。对于 $m \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{M}_m := \{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \,:\, \det(M) = m\} \tag{2.6}$$

表示行列式为 m 的 2×2 整数矩阵集合，并选取一组代表元

$$\mathcal{R}_m := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : ad = m,\ d > 0,\ b \pmod d \right\}$$

作为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_m$ 中右陪集的代表元（例如参见 [22, 第 38]页）。由（2.5）、（2.4）和（2.3），可得

$$f(z)\big|_{2\kappa} T_m = m^{\kappa-1} \sum_{M\in\mathcal{R}_m} f(z)\big|_{2\kappa} M. \tag{2.7}$$

我们还需要众所周知的交换子关系。

引理 2.1。设 $f:\ \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 是权 $2\kappa \in 2\mathbb{Z}$ 的实解析模形式，即定义在 $\mathbb{H}$ 上、按权 2κ 的模形式变换的实解析函数。那么

$$R_{2\kappa}\left(f\big|_{2\kappa} T_m\right) = \frac{1}{m} R_{2\kappa}(f)\big|_{2\kappa+2} T_m.$$

[4]注意，文献中 T_m 存在多种归一化方式（相差 m的某个幂）。采用上述定义（2.5）是为了保持 $\kappa \in \mathbb{N}$的傅里叶系数的整数性。

证明。 将最后几个等式代入 (2.3) 和 (2.4)，再代入 (2.5)，并利用升算子与 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 上的斜杠算子可交换，即可得证。□

2.3. 椭圆庞加莱级数。 对于 z、$\mathfrak{z} \in \mathbb{H}$，令 $X_{\mathfrak{z}}(z) := \frac{z-\mathfrak{z}}{z-\overline{\mathfrak{z}}}$, $r_{\mathfrak{z}}(z) := |X_{\mathfrak{z}}(z)|$。对于 $\kappa \in \mathbb{Z}$， f 的权为 2κ 关于 $\mathfrak{z}$ 的椭圆展开：定义 $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 为

$$f(z) = (z-\overline{\mathfrak{z}})^{-2\kappa} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{\mathfrak{z}}\left(r_{\mathfrak{z}}(z), n\right) X_{\mathfrak{z}}(z)^n,$$

当 $r = r_{\mathfrak{z}}(z)$ 足够小时。[5] 如果 f 在 $\mathbb{H}$ 上是亚纯的，则存在 $n_{\mathfrak{z},\,0}$ 使得 $c_{\mathfrak{z}}(r,n) = 0$ 对于 $n < n_{\mathfrak{z},\,0}$，且 $c_{\mathfrak{z}}(r,n)$ 与 r 无关；在此情况下，我们简单地记作 $c_{\mathfrak{z}}(n)$。 f 在 $\mathfrak{z}$ 附近的主部 为

$$(z-\overline{\mathfrak{z}})^{-2\kappa} \sum_{n=n_{\mathfrak{z},0}}^{-1} c_{\mathfrak{z}}(n) X_{\mathfrak{z}}(z)^n.$$

对于 $k \in \mathbb{N}$ 在满足 $k \geq 2$ 和 $\ell \in \mathbb{Z}$的条件下，我们将权为 $2k$ 的椭圆庞加莱级数 定义为

$$\Psi_{2k,\ell}^{\mathfrak{z}}(z) := \sum_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \psi_{2k,\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\Big|_{2k,z} \gamma, \tag{2.8}$$

以种子函数

$$\psi_{2k,\ell}^{\mathfrak{z}}(z) := (z-\overline{\mathfrak{z}})^{-2k} X_{\mathfrak{z}}(z)^{\ell}. \tag{2.9}$$

记 $\omega_{\mathfrak{z}}$ 为 $\mathfrak{z}$ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中稳定子群阶数的一半。Petersson 的 [21, Satz 7] 证明，若 $\ell \neq -k$ （模 $\omega_{\mathfrak{z}}$），则 $\Psi_{2k,\ell}^{\mathfrak{z}}$ 恒等于零。此外，对于满足 $\ell \equiv -k$ （模 $\omega_{\mathfrak{z}}$）的 $\ell < 0$，[21, Satz 7] 蕴含 $\Psi_{2k,\ell}^{\mathfrak{z}}$ 在点 $\mathfrak{z}$ 附近的椭圆展开中主部为 $2\omega_{\mathfrak{z}}(z-\overline{\mathfrak{z}})^{-2k} X_{\mathfrak{z}}(z)^{\ell}$，并且在 $\mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ 中不与 $\mathfrak{z}$ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 下等价的点处全纯。此外，Petersson 在 [21, Sätze 7–9] 中证明，这些庞加莱级数生成 $\mathbb{S}_{2k}$ （另见 [15, Section 4.3]）。

引理 2.2。 空间 $\mathbb{S}_{2k}$ 由 $\{\Psi_{2k,\ell}^{\mathfrak{z}}$ 生成： $\ell \in \mathbb{Z}$， $\mathfrak{z} \in \mathbb{H}\}$。

我们还需要一个双变量庞加莱级数，它在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 下保持不变，在 $\mathbb{H}$ 处有奇点，并且在两个变量下都是拉普拉斯算子 Δ_0 的特征函数。对于 z、$\mathfrak{z} \in \mathbb{H}$ 和 $s \in \mathbb{C}$，且 $\mathrm{Re}(s) > 1$，自守格林函数 定义为

$$G_s(z,\mathfrak{z}) := \sum_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} g_s^{\mathbb{H}}(z, \gamma\mathfrak{z}). \tag{2.10}$$

此处 $g_s^{\mathbb{H}}(z,\mathfrak{z}) := -Q_{s-1}(1 + \frac{|z-\mathfrak{z}|^2}{2y_{\mathfrak{z}}})$，其中 Q_s 是第二类勒让德函数（见 [17, 14.2.1]），且 $d(z,\mathfrak{z}) := \log(\frac{|z-\overline{\mathfrak{z}}|+|z-\mathfrak{z}|}{|z-\overline{\mathfrak{z}}|-|z-\mathfrak{z}|})$ 表示 z 与 $\mathfrak{z}$ 之间的双曲距离。有关 $G_s(z,\mathfrak{z})$ 的更多性质，请参见 [10, 14]。

[5] 由 Petersson 在 [20, (2a.16)] 中针对全纯函数研究。

2.4. 调和庞加莱级数。 我们还需要一族特殊的调和 Maass 形式。为描述它，对 $w>0$ 令

$$\mathcal{M}_{\kappa,s}(-w) := w^{-\frac{\kappa}{2}} M_{-\frac{\kappa}{2},s-\frac{1}{2}}(w),$$

其中 $M_{a\ b}(c)$ 表示 M-惠特克函数（参见 [17, 13.14.2]）。对于 $k,\ m\in\mathbb{N}$，定义

$$\varphi_{2-2k,-m}(z) := -\mathcal{M}_{2-2k,k}(-4\pi my)e^{-2\pi imx}.$$

对于 $k\geq 2$ 我们令 $\mathcal{F}_{2-2k,\ -m}$ 为权重 $2-2k$ 调和马斯–庞加莱级数

$$\mathcal{F}_{2-2k,-m}(z) := \frac{1}{(2k-1)!}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \varphi_{2-2k,-m}(z)\big|_{2-2k}\gamma,$$

其中 $\Gamma_\infty := \{\pm\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) :\ n\in\mathbb{Z}\}$。函数 $\mathcal{F}_{2-2k,-m}$ 的主部为 $e^{-2\pi imz}$（参见 [4, 推论 6.12]之前的注释），且 $\{\mathcal{F}_{2-2k,-m} : m\in\mathbb{N}\}$ 是空间 H^{cusp}_{2-2k} 的一组基。

3. Properties of elliptic Poincaré series

为证明定理 1.1，我们需要椭圆庞加莱级数的一些性质。我们首先研究 z 中 $\mathfrak{z}$ 上的 $\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ \ell}(z)$ 上的海克特算子之间的关系。

命题 3.1。 对于满足 $k\geq 2$、$\ell\in\mathbb{Z}$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 的 $k\in\mathbb{N}$，我们有，$_{\mathbb{\lambda}} := \mathrm{Im}(\mathfrak{z})$ 处处成立，

$$\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z)\Big|_{2k,z} T_n = \left(\frac{n}{\mathbb{\lambda}}\right)^{2k+\ell}\left(_{\mathbb{\lambda}}{}^{2k+\ell}\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z)\right)\Big|_{-2k-2\ell,\mathfrak{z}} T_n.$$

为了证明命题 3.1，我们还需要另一个庞加莱级数。对于 $n\in\mathbb{N}$，我们选取 $\mathcal{M}_n/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中左陪集的一组代表元（见 (2.6)），

$$\mathcal{L}_n := \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} : ad=n,\ d>0,\ b\pmod a\right\}$$

并定义

$$\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell,n}(z) := n^{k-1}\sum_{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\sum_{M\in\mathcal{L}_n}\psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z)\Big|_{2k,z} M\gamma \tag{3.1}$$

其中 $\psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ \ell}$ 如 (2.9) 中所示。不难看出，$\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ \ell,\ n}$ 是良定义的。它们可由函数 $\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ \ell}$ 如下构造。

引理 3.2。 我们有

$$\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell,n}(z) = \Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z)\big|_{2k,z} T_n.$$

证明。 将 (3.1) 中出现的左陪集代表元 $\mathcal{L}_n$ 替换为右陪集代表元 $\mathcal{R}_n$，并结合 (2.7) 和 (2.8)，即可得到结论。□

$\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ \ell}$ 与 $\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ \ell,\ n}$之间有如下关系。

引理 3.3。对于满足 $k \geq 2$, $\ell \in \mathbb{Z}$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 的 $k \in \mathbb{N}$，有

$$n^{2k+\ell} \left(\lambda^{2k+\ell} \Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z) \right) \Big|_{-2k-2\ell,\mathfrak{z}} T_n = \lambda^{2k+\ell} \Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell,n}(z).$$

证明。由 （2.5）中，代入（2.4）和（2.3）以计算 U-算子和 V-算子，我们得到

$$\left(\lambda^{2k+\ell} \Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z) \right) \Big|_{-2k-2\ell,\mathfrak{z}} T_n = n^{-2k-\ell-1} \lambda^{2k+\ell} \sum_{r|n} r^{2k} \sum_{j=0}^{\frac{n}{r}-1} \Psi^{\frac{r}{n}(r\mathfrak{z}+j)}_{2k,\ell}(z). \tag{3.2}$$

另一方面，我们可以将（3.1）中的种子乘以 $\lambda^{2k+\ell}$ 后重写为

$$\lambda^{2k+\ell} n^{k-1} \sum_{M \in \mathcal{L}_n} \psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z) \Big|_{2k,z} M = \lambda^{2k+\ell} \frac{1}{n} \sum_{r|n} r^{2k} \sum_{j=0}^{r-1} \psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell} \left(\frac{r^2 z + rj}{n} \right).$$

We 作变量代换 $r \mapsto \frac{n}{r}$ 并代入 $\psi^{\mathfrak{z}}_{2k}$的定义, ℓ 得到

$$\begin{aligned}
&\lambda^{2k+\ell} \frac{1}{n} \sum_{r|n} \left(\frac{n}{r} \right)^{2k} \sum_{j=0}^{\frac{n}{r}-1} \psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell} \left(\frac{\left(\frac{n}{r}\right)^2 z - \frac{n}{r} j}{n} \right) \\
&\quad = \lambda^{2k+\ell} n^{2k-1} \sum_{r|n} r^{-2k} \sum_{j=0}^{\frac{n}{r}-1} \left(\frac{nz - rj}{r^2} - \overline{\mathfrak{z}} \right)^{-2k} X_{\mathfrak{z}} \left(\frac{nz - rj}{r^2} \right)^{\ell} \\
&\quad = \lambda^{2k+\ell} \frac{1}{n} \sum_{r|n} r^{2k} \sum_{j=0}^{\frac{n}{r}-1} \left(z - \frac{r^2 \overline{\mathfrak{z}} + rj}{n} \right)^{-2k} X_{\frac{r^2\mathfrak{z}+rj}{n}}(z)^{\ell} = \lambda^{2k+\ell} \frac{1}{n} \sum_{r|n} r^{2k} \sum_{j=0}^{\frac{n}{r}-1} \psi^{\frac{r^2\mathfrak{z}+rj}{n}}_{2k,\ell}(z).
\end{aligned}$$

因此，将其代入（3.1），利用（2.8），并与（3.2）比较，我们得到

$$\begin{aligned}
\lambda^{2k+\ell} \Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell,n}(z) &= \lambda^{2k+\ell} \frac{1}{n} \sum_{r|n} r^{2k} \sum_{j=0}^{\frac{n}{r}-1} \sum_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \psi^{\frac{r^2\mathfrak{z}+rj}{n}}_{2k,\ell}(z) \Big|_{2k,z} \gamma \\
&= \lambda^{2k+\ell} \frac{1}{n} \sum_{r|n} r^{2k} \sum_{j=0}^{\frac{n}{r}-1} \Psi^{\frac{r^2\mathfrak{z}+rj}{n}}_{2k,\ell}(z) = n^{2k+\ell} \left(\lambda^{2k+\ell} \Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z) \right) \Big|_{-2k-2\ell,\mathfrak{z}} T_n. \quad \square
\end{aligned}$$

现在我们可以证明命题 3.1。

命题 *3.1* 的证明。结合引理 3.2 和引理 3.3，我们得出结论：

$$\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z) \Big|_{2k,z} T_n = \Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell,n}(z) = \left(\frac{n}{\lambda} \right)^{2k+\ell} \left(\lambda^{2k+\ell} \Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,\ell}(z) \right) \Big|_{-2k-2\ell,\mathfrak{z}} T_n. \quad \square$$

我们还需要 $\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}$ 和 $\mathcal{F}_{2-2k,-m}$之间的以下关系。

Lemma 3.4. 对于 $\ell \in \mathbb{N}$ 和 $y > \max\{\mathrm{Im}(\gamma\mathfrak{z}) : \gamma \in \Gamma\}$，我们有傅里叶展开 n

$$\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}(z) = \frac{(-1)^k 2^{3-2k}\pi_{\lambda}{}^{\ell-2k}}{(\ell-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} R^{\ell-1}_{2-2k}(\mathcal{F}_{2-2k,-m}(\mathfrak{z}))\, q^m.$$

证明。 我们用归纳法进行证明。情形 $\ell = 1$ 即为 [6, (3.10) 和 (3.11)]。

现在假设该引理对某个 $\ell \in \mathbb{N}$成立。我们将引理两边乘以 $_{\lambda}{}^{2k-\ell}$，并在 $\mathfrak{z}$中对权重 $2\ell-2k$ 应用升算子（对于所有 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $y > \mathrm{Im}(\gamma\mathfrak{z})$），得到

$$\sum_{\gamma\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left((z-\overline{\mathfrak{z}})^{-2k} R_{2\ell-2k,\mathfrak{z}}\left({}_{\lambda}{}^{2k-\ell} X_{\mathfrak{z}}(z)^{-\ell}\right)\right)\Big|_{2k,z}\gamma$$
$$= \frac{(-1)^k 2^{3-2k}\pi}{(\ell-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} R^{\ell}_{2-2k}(\mathcal{F}_{2-2k,-m}(\mathfrak{z}))e^{2\pi i m z}.$$

接下来我们计算

$$R_{2\ell-2k,\mathfrak{z}}\left({}_{\lambda}{}^{2k-\ell} X_{\mathfrak{z}}(z)^{-\ell}\right) = \frac{{}_{\lambda}{}^{2k-\ell-1}(z-\overline{\mathfrak{z}})^{\ell}}{(z-\mathfrak{z})^{\ell+1}}((2k-\ell)(z-\mathfrak{z}) + 2i\ell_{\lambda} + (2\ell-2k)(z-\mathfrak{z})),$$

其中，第一项来自对 $_{\lambda}{}^{2k-\ell}$求导，第二项来自对 $(z-\mathfrak{z})^{-\ell}$求导，第三项则来自项 $\underline{2\ell-2k}_{\lambda}$。接下来我们将右端改写为

$$\ell\frac{{}_{\lambda}{}^{2k-\ell-1}(z-\overline{\mathfrak{z}})^{\ell+1}}{(z-\mathfrak{z})^{\ell+1}} = \ell_{\lambda}{}^{2k-\ell-1} X_{\mathfrak{z}}(z)^{-\ell-1}.$$

因此

$$\ell_{\lambda}{}^{2k-\ell-1}\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell-1}(z) = \frac{(-1)^k 2^{3-2k}\pi}{(\ell-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} R^{\ell}_{2-2k}(\mathcal{F}_{2-2k,-m}(\mathfrak{z}))\, q^m.$$

将两边除以 $\ell_{\lambda}{}^{2k-\ell-1}$，即可得到关于 $\ell+1$ 的结论，从而完成证明。 □

4. Proof of Theorem 1.1

Befo在证明定理 1.1 之前，我们使用引理 3.4 将 $\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z})$ 的定义扩展。

引理 4.1. 设 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k \geq 2$。对于 $g \in R^{\ell-1}_{2-2k}(H^{\mathrm{cusp}}_{2-2k})$ 且 $\mathfrak{z} \in \mathbb{H}$，函数$z \mapsto \mathcal{G}_g(z, \mathfrak{z})$ 当 y 充分大时（取决于 $\mathfrak{z}$）收敛，并可亚纯延拓至 $\mathbb{H}$。

证明. 取 $F \in H_{2-2k}^{\text{cusp}}$ 使得 $g = R_{2-2k}^{\ell-1}(F)$。由于 $\{\mathcal{F}_{2-2k,-n} : n \in \mathbb{N}\}$ 是空间 H_{2-2k}^{cusp}的一个基（参见第 2.4 小节），存在 $c(n) \in \mathbb{C}$ 和 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$F = \sum_{n=1}^{n_0} c(n)\mathcal{F}_{2-2k,-n}.$$

通过比较主部，我们得到

$$n^{1-2k}\mathcal{F}_{2-2k,-n} = \mathcal{F}_{2-2k,-1}\big|_{2-2k}T_n. \tag{4.1}$$

因此我们得到

$$F = \sum_{n=1}^{n_0} c(n)n^{2k-1}\mathcal{F}_{2-2k,-1}\big|_{2-2k}T_n.$$

所以我们得到

$$g = \sum_{n=1}^{n_0} c(n)n^{2k-1}R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-1}\big|_{2-2k}T_n\right).$$

将此代入 (1.5)，对于 y 足够大的情形（取决于 $\mathfrak{z}$，此处我们利用引理 3.4 中的收敛性），有

$$\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z}) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-\ell}\sum_{n=1}^{n_0} c(n)n^{2k-1}R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z})\big|_{2-2k}T_n\right)\big|_{2\ell-2k}T_m q^m. \tag{4.2}$$

然后我们使用引理 2.1 $\ell-1$ 次，将 (4.2) 的右端改写为

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-\ell}\sum_{n=1}^{n_0} c(n)n^{2k-\ell}R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z})\right)\big|_{2\ell-2k}T_n \circ T_m q^m.$$

由于海克　算子可交换（例如，参见 [22, 方程（42）]），我们可以将其改写为

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-\ell}\sum_{n=1}^{n_0} c(n)n^{2k-\ell}R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z})\right)\big|_{2\ell-2k}T_m q^m\big|_{2\ell-2k,\mathfrak{z}}T_n.$$

接下来我们交换求和次序，这由.....的增长条件保证是合法的。

$$\left|R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z})\right)\big|_{2\ell-2k}T_m\right|$$

蕴含　由定理 3.1] 中级数的收敛性可知。因此，(4.2) 变为

$$\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z}) = \sum_{n=1}^{n_0} c(n)n^{2k-\ell}\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-\ell}R_{2-2k}^{\ell-1}(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z}))\big|_{2\ell-2k}T_m q^m\right)\Big|_{2\ell-2k,\mathfrak{z}}T_n. \tag{4.3}$$

我们再次使用引理 2.1 $\ell-1$ 次，将 (4.3) 右侧括号内的求和式改写为

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-1} R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z})\big|_{2-2k} T_m\right) q^m.$$

接下来，我们再次使用 (4.1)，然后利用引理 3.4，将其改写为

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-m}(\mathfrak{z})\right) q^m = \frac{(-1)^k 2^{2k-3}(\ell-1)!}{\pi} {}_{\lambda}^{2k-\ell}\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z).$$

将此代入 (4.3)，得到

$$\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z}) = \frac{(-1)^k 2^{2k-3}(\ell-1)!}{\pi} \sum_{n=1}^{n_0} c(n) n^{2k-\ell} \left({}_{\lambda}^{2k-\ell}\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\right)\big|_{2\ell-2k,\mathfrak{z}} T_n. \tag{4.4}$$

由于 $\Psi_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}$ 对所有 $z\in\mathbb{H}$ 都是亚纯且定义良好的，并且求和是有限的，因此我们得到 $\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z})$ 的亚纯延拓。□

To p为证明定理 1.1，我们接下来证明 $\mathbb{S}_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}$ 存在赫克稳定子空间。

L引理 4.2。 $\mathbb{J}_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}$ 和 $\mathbb{J}_{2k,\ -\ell,\ 0}^{\mathfrak{z}}$ 是 $\mathbb{S}_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}$ 的赫克稳定子空间 .

证明。 我们首先证明 $\mathbb{J}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$ 和 $\mathbb{J}_{2k,-\ell,0}^{\mathfrak{z}}$ 是 $\mathbb{S}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$的子空间。回顾 (1.6) 和 (1.7)，根据定义 (1.5) 中关于 g 的线性性质，以及$R_{2-2k}^{\ell-1}(M_{2-2k}^{!})$ 和 $R_{2-2k}^{\ell-1}(S_{2-2k}^{!})$ 是向量空间这一事实，这两者都是向量空间。注意到 $\mathbb{J}_{2k,-\ell,0}^{\mathfrak{z}} \subseteq \mathbb{J}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$ ，因为$R_{2-2k}^{\ell-1}(S_{2-2k}^{!}) \subseteq R_{2-2k}^{\ell-1}(M_{2-2k}^{!})$，因此只需证明 $\mathbb{J}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}} \subseteq \mathbb{S}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$。为此，取 $\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z})$，其中 $g\in R_{2-2k}^{\ell-1}(M_{2-2k}^{!})$。我们先应用引理 3.3，再应用引理 3.2，将 (4.4) 改写为

$$\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z}) = \frac{(-1)^k 2^{2k-3}(\ell-1)!}{\pi} {}_{\lambda}^{2k-\ell} \sum_{n=1}^{n_0} c(n) \Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\big|_{2k,z} T_n. \tag{4.5}$$

因此， $\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z}) \in \mathbb{S}_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}$，所以 $\mathbb{J}_{2k,\ -\ell,\ 0}^{\mathfrak{z}} \subseteq \mathbb{J}_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}} \subseteq \mathbb{S}_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}$ 是子空间。

最后，为了证明这些子空间是赫克稳定的，我们对等式 (4.5) 两边应用 $|_{2k,\ z}T_r$ ，得到

$$\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z})\big|_{2k,z} T_r = \frac{(-1)^k 2^{2k-3}(\ell-1)!}{\pi} \sum_{n=1}^{n_0} c(n) {}_{\lambda}^{2k-\ell}\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\big|_{2k,z} T_n \circ T_r. \tag{4.6}$$

由于海克特算子彼此可交换，我们可以交换它们的顺序，从而得到

$${}_{\lambda}^{2k-\ell}\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\big|_{2k,z} T_n \circ T_r = {}_{\lambda}^{2k-\ell}\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\big|_{2k,z} T_r \circ T_n. \tag{4.7}$$

接着，我们先应用引理 3.2，再应用引理 3.3（取 $\ell \mapsto -\ell$），以改写

$$\mathbb{\Lambda}^{2k-\ell}\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}(z)\big|_{2k,z}T_r = r^{2k-\ell}\left(\mathbb{\Lambda}^{2k-\ell}\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}(z)\right)\big|_{2\ell-2k,\mathfrak{z}}T_r. \tag{4.8}$$

将（4.7）和（4.8）代入（4.6）右端可得

$$\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z})\big|_{2k,z}T_r = \frac{(-1)^k 2^{2k-3}(\ell-1)!}{\pi} r^{2k-\ell}\sum_{n=1}^{n_0} c(n)\left(\mathbb{\Lambda}^{2k-\ell}\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}(z)\right)\big|_{2\ell-2k,\mathfrak{z}}T_r\big|_{2k,z}T_n.$$

接下来，我们将 T_n 中的海克算子与 T_r 中的 z 交换，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z})\big|_{2k,z}T_r &= r^{2k-\ell}\left(\frac{(-1)^k 2^{2k-3}(\ell-1)!}{\pi}\sum_{n=1}^{n_0} c(n)\left(\mathbb{\Lambda}^{2k-\ell}\Psi^{\mathfrak{z}}_{2k,-\ell}(z)\right)\big|_{2k,z}T_n\right)\big|_{2\ell-2k,\mathfrak{z}}T_r \\ &= r^{2k-\ell}\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z})\big|_{2\ell-2k,\mathfrak{z}}T_r,\end{aligned} \tag{4.9}$$

最后一步使用了（4.5）。

将（4.9）代入定义（1.5），然后交换 $\mathfrak{z}$ 中的海克算子，我们得到

$$\mathcal{G}_g(z,\mathfrak{z})\big|_{2k,z}T_r = \sum_{m=1}^{\infty}(mr)^{2k-\ell}g(\mathfrak{z})\big|_{2\ell-2k}T_r\circ T_m q^m = r^{2k-\ell}\mathcal{G}_{g|_{2\ell-2k}T_r}(z,\mathfrak{z}) \tag{4.10}$$

由于 $M^!_{2-2k}$ 和 $S^!_{2-2k}$ 都是赫克稳定的，根据引理 2.1，$R^{\ell-1}_{2-2k}$（$M^!_{2-2k}$）和 $R^{\ell-1}_{2-2k}$（$S^!_{2-2k}$）也都是赫克稳定的。□

为了证明定理 1.1，我们需要某些同构。

引理 4.3。以下空间作为赫克模同构，

$$H^{\mathrm{cusp}}_{2-2k}/M^!_{2-2k}\cong S_{2k},\qquad H^{\mathrm{cusp}}_{2-2k}/S^!_{2-2k}\cong M_{2k}.$$

证明。由 [9, 定理 1.1 和 1.2 以及引理 2.1]（归一化另见引理 2.1），D^{2k-1} 是从 H^{cusp}_{2-2k} 到 $S^!_{2k}\cap S^{\perp}_{2k}$ 的同构。根据 (1.8) 和引理 2.1，它与海克特算子本质上可交换，即

$$D^{2k-1}\left(f\big|_{2-2k}T_m\right) = m^{1-2k}D^{2k-1}(f)\big|_{2k}T_m.$$

然后，我们考虑该映射模 $D^{2k-1}(M^!_{2-2k})$（分别为 $D^{2k-1}(S^!_{2-2k})$）的约化，并使用同态定理。由于 D^{2k-1} 是从 H^{cusp}_{2-2k} 到 $S^!_{2k}\cap S^{\perp}_{2k}$的双射，因此，先后复合 D^{2k-1} 与到 $D^{2k-1}(M^!_{2-2k})$（分别为 $D^{2k-1}(S_{2-2k}!\ )$）的约化映射所得映射的核为 $M^!_{2-2k}$（分别为 $S^!_{2-2k}$）。因此

$$H^{\mathrm{cusp}}_{2-2k}/M^!_{2-2k}\cong\left(S^!_{2k}\cap S^{\perp}_{2k}\right)/D^{2k-1}\left(M^!_{2-2k}\right),$$

$$H_{2-2k}^{\mathrm{cusp}}/S_{2-2k}^{!}\cong\left(S_{2k}^{!}\cap S_{2k}^{\perp}\right)/D^{2k-1}\left(S_{2-2k}^{!}\right).$$

现在利用 [5, 定理 1。2] 中的同构即可完成证明。 □

现在我们准备好证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。 为证明这些同构，对于 $k,\ell\in\mathbb{N}$ 满足 $k\geq 2$的情形，我们考虑映射 $\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}:H_{2-2k}^{\mathrm{cusp}}\mapsto\mathbb{S}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$，其定义如下:

$$\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}(\mathcal{F})(z):=\mathcal{G}_{R_{2-2k}^{\ell-1}(\mathcal{F})}(z,\mathfrak{z}).\tag{4.11}$$

我们断言，$\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}$ 是 H_{2-2k}^{cusp} 与 $\mathbb{S}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$ 之间的双射，并且在以下意义下与海克算子本质上可交换:

$$\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}(\mathcal{F})\big|_{2k,z}T_m=m^{2k-1}\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}\left(\mathcal{F}\big|_{2-2k}T_m\right).\tag{4.12}$$

我们先说明该断言如何由此推出：注意，根据定义

$$\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}\left(M_{2-2k}^{!}\right)=\mathbb{J}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}\qquad\text{and}\qquad\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}\left(S_{2-2k}^{!}\right)=\mathbb{J}_{2k,-\ell,0}^{\mathfrak{z}}.$$

因此，若 $\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}$ 是从 H_{2-2k}^{cusp} 到 $\mathbb{S}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$的海克等变同构，则商映射 $\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}$(模 $\mathbb{J}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$)（分别地，$\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}$(模 $\mathbb{J}_{2k,-\ell,0}^{\mathfrak{z}}$））的核为 $M_{2-2k}^{!}$（分别为 $S_{2-2k}^{!}$），从而得到海克等变同构

$$\mathbb{S}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}/\mathbb{J}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}\cong H_{2-2k}^{\mathrm{cusp}}/M_{2-2k}^{!},\qquad\mathbb{S}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}\Big/\mathbb{J}_{2k,-\ell,0}^{\mathfrak{z}}\cong H_{2-2k}^{\mathrm{cusp}}/S_{2-2k}^{!}.\tag{4.13}$$

由引理 4.3，在确立 (4.13) 后，定理立即得证。

因此，接下来只需证明 $\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}$ 是一个同构，并且满足 (4.12)。由于 $g\mapsto\mathcal{G}_g$ 是线性的，只需证明它将 H_{2-2k}^{cusp} 的一组基映射为 $\mathbb{S}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$ 的一组基。根据第 2.4 小节，我们知道 $\{\mathcal{F}_{2-2k,-r}:\ r\in\mathbb{N}\}$ 是 H_{2-2k}^{cusp} 的一组基；而根据该空间的定义，$\{\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}|_{2k}T_r:r\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{S}_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}$ 的一组基。我们声称,

$$\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-r}\right)=\frac{(-1)^k2^{2k-3}(\ell-1)!}{\pi}\lambda^{2k-\ell}\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\big|_{2k,z}T_r,\tag{4.14}$$

这便立即推出 $\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}$ 是一个同构。

为证明 (4.14)，我们将 (4.1) 代入引理 3.4，然后应用引理 2.1，从而得到当 y 充分大时，我们有

$$\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z)=\frac{(-1)^k2^{3-2k}\pi\lambda^{\ell-2k}}{(\ell-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}m^{2k-\ell}R_{2-2k}^{\ell-1}(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z}))\,\big|_{2\ell-2k}T_mq^m.\tag{4.15}$$

结合（4.8）与（4.15），然后交换海克算子可得 s

$$\lambda^{2k-\ell}\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\big|_{2k,z}T_r$$

$$= \frac{(-1)^k 2^{3-2k}\pi}{(\ell-1)!} r^{2k-\ell} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-\ell} R_{2-2k}^{\ell-1}(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z}))\,\big|_{2\ell-2k} T_r \big|_{2\ell-2k} T_m q^m. \quad (4.16)$$

接着，我们使用引理 2.1 $\ell-1$ times 将其改写为

$$R_{2-2k}^{\ell-1}(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z}))\,\big|_{2\ell-2k} T_r = r^{\ell-1} R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z})\big|_{2-2k} T_r\right).$$

于是，(4.16) 的右端变为

$$\frac{(-1)^k 2^{3-2k}\pi r^{2k-1}}{(\ell-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-\ell} R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z})\big|_{2-2k} T_r\right)\,\big|_{2\ell-2k} T_m q^m.$$

接下来，我们利用 (4.1) 将其改写为

$$r^{2k-1} R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-1}(\mathfrak{z})\big|_{2-2k} T_r\right) = R_{2-2k}^{\ell-1}(\mathcal{F}_{2-2k,-r}(\mathfrak{z}))\,.$$

代回 (4.16) 得

$$\mathbb{\Delta}^{2k-\ell}\Psi_{2k,-\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\big|_{2k,z} T_r = \frac{(-1)^k 2^{3-2k}\pi}{(\ell-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-\ell} R_{2-2k}^{\ell-1}(\mathcal{F}_{2-2k,-r}(\mathfrak{z}))\,\big|_{2\ell-2k} T_m q^m.$$

将定义 (1.5) 和 (4.11) 进行比较，可得 (4.14)。接下来只需证明 (4.12) 成立。先应用 (4.10)，再应用引理 2.1，得到

$$\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}(\mathcal{F})(z)\big|_{2k,z} T_m = \mathcal{G}_{R_{2-2k}^{\ell-1}(\mathcal{F})\big|_{2\ell-2k} T_m}(z,\mathfrak{z}) = m^{2k-1}\varrho_{2-2k,\ell}^{\mathfrak{z}}\left(\mathcal{F}\big|_{2-2k} T_m\right)(z),$$

从而得到 (4.12)。 □

本节最后，我们谈谈引入此定义的动机，以及它与 Gross 和 Zagier 的猜想 [11, 猜想 4.4, 第 317] 页之间的关系。

注 4.4。 设$(\lambda_r)_r$ 是一个复数列，其中只有有限多个项是$\neq 0$。注意到

$$\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r r^{2k-1} \mathcal{F}_{2-2k,-1}|_{2-2k} T_r = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \mathcal{F}_{2-2k,-r} \in M_{2-2k}^!$$

当且仅当存在一个主部为 $\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r q^{-r}$、位于 $i\infty$ 的弱全纯模形式。应用黎曼–罗赫定理（例如，参见 [20,命题 1]），当且仅当对每个 $f \in S_{2k}$ 都成立时，这样的弱全纯模形式才存在。

$$\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r c_f(r) = 0.$$

因此 (1.3) 等价于

$$g = g_\lambda := \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r R_{2-2k}^{\ell-1}\left(\mathcal{F}_{2-2k,-r}\right) \in R_{2-2k}^{\ell-1}\left(M_{2-2k}^!\right),$$

以及 （4.5）由此类 g 的和 $\mathcal{G}_g$ 构造$\Psi_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}(z)\,|_{2k,\ z}T_n$ 类似于 *Gross* 和 *Zagier* 猜想的公式 （1.4）中出现的和，但处于高权情形。由于$\mathcal{G}_g \in \mathbb{J}_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}$ 当且仅当 $g \in R_{2-2k}^{\ell-1}$（$M_{2-2k}^!$），这构成了定义子空间 $\mathbb{J}_{2k,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}$ 和 $\mathbb{J}_{2k,\ -\ell,\ 0}^{\mathfrak{z}}$的动机。

5. 亚纯海克特征形式的例子

在本节中，我们考虑两个亚纯海克特征形式的例子，它们在定理 1.1 中的同构关系下，分别对应于全纯模形式。第一个例子，$f_{6,\ i}$ 如 (1.9) 中所定义，具有与艾森斯坦级数 E_6 相同的特征值。第二个例子，G如 (1.10) 中所定义，具有与尖点形式 Δ 相同的特征值。

5.1. 与艾森斯坦级数相关的亚纯海克特征形式。在此，我们研究引言中给出的 $f_{6,\ i}$ 并解释其定义方式。注意到 $S_6 = \{0\}$和 $M_6 = \mathbb{C}E_6$ 定理 1.1 与 (4.13) 推出，对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$

$$\{0\} = S_6 \cong \mathbb{S}_{6,-\ell}^{\mathfrak{z}}/\mathbb{J}_{6,-\ell}^{\mathfrak{z}} \cong H_{-4}^{\mathrm{cusp}}/M_{-4}^!, \qquad \mathbb{C}E_6 = M_6 \cong \mathbb{S}_{6,-\ell}^{\mathfrak{z}}/\mathbb{J}_{6,-\ell,0}^{\mathfrak{z}} \cong H_{-4}^{\mathrm{cusp}}/S_{-4}^!.$$

选取 $\mathcal{F}_{-4,\ -1}$ 作为 $H_{-4}^{\mathrm{cusp}}/S_{-4}^!$的生成元，根据 (4.12) 可知，$\varrho_{6,\ \ell}^{\mathfrak{z}}(\mathcal{F}_{-4,\ -1})$ 是 $\mathbb{S}_{6,\ -\ell}^{\mathfrak{z}}/\mathbb{J}_{6,\ -\ell,\ 0}^{\mathfrak{z}}$ 中的海克特征形式，其在 T_n下的特征值为 $n^{2k-1}\sigma_5(n)$。我们取 $\ell = 1$ 和 $\mathfrak{z} = i$，并明确计算 $\varrho_{6,\ 1}^{i}(\mathcal{F}_{-4,\ -1})$。由 (4.4) 可得

$$\varrho_{6,1}^{i}\left(\mathcal{F}_{-4,-1}\right) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}_{-4,-1}}(z,i) = -\frac{8}{\pi}\Psi_{6,-1}^{i}(z).$$

归一化后得到特征形式

$$\frac{1}{2^7\pi\alpha}\Psi_{6,-1}^{i}(z) = \frac{\Delta(z)}{E_6(z)} = f_{6,i}(z).$$

引言中的计算说明，根据定理 1.1 中的同构，$f_{6,\ i}$ 是一个亚纯海克特征形式，对应于（一个常数倍的） E_6 。具体而言，直接计算了 T_m 下 $m \in \{5,7\}$ 的特征值，并证明它们与 T_m下 E_6 的特征值 $\sigma_5(m)$ 相匹配。

5.2. 与尖点形式相关联的亚纯海克特征形式。在这个例子中，我们在定理 1.1 的同构下建立拉马努金 Δ-函数的亚纯对应形式。令 $\mathfrak{z} = \frac{1+\sqrt{7}i}{2}$ 为标准基本域中判别式为 -7 的唯一 CM 点。此外，令 $\Omega := \Omega_{-7}$ 为判别式 -7的 Chowla–Selberg 周期（关于以 Γ-函数表示的显式公式，参见例如 [22, 式 (97)]）。由此我们可以显式计算（见 [22, 第 87]页），

$$E_4(\mathfrak{z}) = 15\Omega^4, \quad E_6(\mathfrak{z}) = 27\sqrt{7}\Omega^6, \quad \Delta(\mathfrak{z}) = -\Omega^{12}, \quad j(\mathfrak{z}) = -15^3. \tag{5.1}$$

T结合价公式，这意味着权 12 模形式

$$F(z) := E_4(z)^3 + 15^3\Delta(z) = 1 + 4095q + 98280q^2 + 17805060q^3 + O\left(q^4\right) \in M_{12}$$

在 $\mathfrak{z}$ 中有一个单零点，并且在基本域中的其他地方均不消失。

我们声称，定义于 (1.10) 中的 $G = \frac{\Delta^2}{F}$ 是一个亚纯海克特征形式，其特征值与 Δ 的特征值一致。为此，我们将 Maass–Poincaré 级数 $\mathcal{F}_{-10,-1}$ 视为 $H_{-10}^{\text{cusp}}/M_{-10}^! \cong S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ 空间的一个非平凡代表元，其中我们使用引理 4.3 中的第一个同构。与前一个例子一样，该庞加莱级数在映射 $\varrho_{12,1}^{\mathfrak{z}}$ 下的像给出椭圆庞加莱级数 $\Psi_{12,-1}^{\mathfrak{z}}$ 的一个常数倍。根据 [18,定理 1.1], 对于任意素数 p

$$\mathcal{F}_{-10,-1}|T_p - p^{-11}\tau(p)\mathcal{F}_{-10,-1}$$

是一个弱全纯模形式。令

$$g(z) := \frac{E_4(z)^2E_6(z)}{\Delta(z)^2} = q^{-2} + 24q^{-1} - 196560 - 47709536q - 3688365156q^2 + O\left(q^3\right) \in M_{-10}^!.$$

我们发现

$$\mathcal{F}_{-10,-1}|T_2 - 2^{-11}\tau(2)\mathcal{F}_{-10,-1} = 2^{-11}g,$$
$$\mathcal{F}_{-10,-1}|T_3 - 3^{-11}\tau(3)\mathcal{F}_{-10,-1} = 3^{-11}(j - 768)g.$$

为此，我们注意到两种情况下的主部都相等，因此等式两边之差必定是权为 -10 的全纯模形式，故为 0。

我们可以利用这些结果，计算$\Psi_{12,\ -1}^{\mathfrak{z}}$ 的前几个傅里叶系数，并将其表示为$\alpha := \mathcal{F}_{-10,\ -1}(\mathfrak{z})$和 $\beta := g(\mathfrak{z}) = \frac{6075\sqrt{7}}{\Omega^{10}}$ ，的形式，其中最后一个等式用到了 (5.1)。具体而言，根据引理 3.4，除一个乘法常数外，我们有

$$\Psi_{12,-1}^{\mathfrak{z}}(z) = \alpha q + (\beta - 24\alpha)q^2 + (252\alpha - 4143\beta)q^3 + O\left(q^4\right) \tag{5.2}$$

当 y 充分大时。

为了证明 G 确实是对应于 Δ 的亚纯海克特征形式，我们使用定理 1.1，并证明 G 等于（相差一个 Δ 自身的常数倍）

椭圆庞加莱级数 $\Psi_{12,\,-1}^{\mathfrak{z}}$。由于式 (1.10) 中的 $\Psi_{12,\,-1}^{\mathfrak{z}}$ 和 G 都具有权 12，并且在 $\mathfrak{z}$ 处有一个简单极点，而在基本域中的其他地方均无极点，因此可知 $\Psi_{12,\,G^{-1}}^{\mathfrak{z}}$ 是一个模函数，在 $\mathbb{H}$ 上全纯，并且在 $i\infty$ 处至多有一个简单极点。比较式 (1.10) 和 (5.2) 中的傅里叶系数，我们得到

$$\frac{\Psi_{12,-1}^{\mathfrak{z}}(z)}{G(z)} = \alpha q^{-1} + (4119\alpha + \beta) + 196884\alpha q + O\left(q^2\right) = \alpha(j(z) + 3375) + \beta = \alpha\frac{F(z)}{\Delta(z)} + \beta.$$

因此可得，仍然相差一个常数因子，

$$\Psi_{12,-1}^{\mathfrak{z}} = \beta G + \alpha\Delta.$$

由于我们可以忽略项 $\alpha\Delta$，定理 1.1 得出我们的结论： G 是一个对应于 Δ 的亚纯海克特征形式。为说明这一点，我们可以计算

$$G(z)|T_2 - (-24)G(z) = q + 16868409q^2 + 279687514914333q^3 + O\left(q^4\right), \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} 2^{11}g(z)|T_2 &= q^{-4} + 24q^{-2} + 2048q^{-1} - 402751440 - 7553771839488q + O\left(q^2\right) \\ &= g(z)\left(j(z)^2 - 1512j(z) + 374784\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} 3^{11}g(z)|T_3 &= q^{-6} + 24q^{-3} - 34820210880 - 27948629556463536q + O\left(q^2\right) \\ &= g(z)\left(j(z)^4 - 3000j(z)^3 + 2784384j(z)^2 - 842201064j(z) + 52796307708\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

正如定理 1.1 所预言的，将 (5.4) 和 (5.5) 中得到的 j 多项式代入 $\mathfrak{z}$（即 $j(\mathfrak{z}) = -15^3$）进行求值，恰好得到 (5.3) 中 q^2 和 q^3 的系数。

参考文献

[1] *P. Bengoechea*，《二次域与模形式》，博士论文，*2013*。[2] *B. Berndt*、*P. Bialek* 和 *A. Yee*，《*Ramanujan* 关于某些艾森斯坦级数商的幂级数系数的公式》，*Int. Math. Res. Not. 2002*（*2002*），*1077–1109*。[3] *P. Bialek*，《*Ramanujan* 关于某些模形式幂级数展开中系数的公式》，博士论文，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，*1995*。[4] *K. Bringmann*、*A. Folsom*、*K. Ono* 和 *L. Rolen*，《调和 *Maass* 形式与拟模形式：理论与应用》，*Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 64*，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，*2017*。[5] *K. Bringmann*、*P. Guerzhoy*、*Z. Kent* 和 *Ken Ono*，《拟模形式的艾希勒–志村理论》，*Math. Ann. 355*（*2013*），*1085–1121*。[6] *K. Bringmann* 和 *B. Kane*，《所有亚纯尖点形式的傅里叶系数的 *Ramanujan* 型公式》，*Adv. Math. 373*（*2020*），*107308*。[7] *J. Bruinier* 和 *J. Funke*，《关于两个几何西塔提升》，*Duke Math. J. 125*（*2004*），*45–90*。[8] *J. Bruinier*、*Y. Li* 和 *T. Yang*，《西塔积分的变形与 *Gross–Zagier* 猜想》[9] *J. Bruinier*、*K. Ono* 和 *R. Rhoades*，《调和弱马斯形式的微分算子与赫克特征值的消失》，*Math. Ann. 342*（*2008*），*673–693*。[10] *J. Fay*，《福克斯群的预解核的傅里叶系数》，*J. reine angew. Math. 293–294*（*1977*），*143–203*。

[11] B. Gross 和 D. Zagier，《*Heegner* 点与 L级数的导数》，Invent. Math. **84** （1986），225–320。[12] P. Guerzhoy，《弱全纯模形式的海克算子与超奇异同余》，Proc. Amer. Math. Soc. **136** （2008），3051–3059。[13] P. Guerzhoy、Z. Kent 和 K. Ono， p拟模形式与影的 -进耦合，Proc. Natl. Acad. Sci. USA **107** （2010），6169–6174。[14] D. Hejhal，《$PSL_2(\mathbb{R})$的 *Selberg* 迹公式》，Lect. Notes Math. **1001**，Springer，柏林，1983/[15] Ö. Imamoglu 和 C. O'Sullivan，《抛物型、双曲型与椭圆庞加莱级数》，Acta. Arith. **139** （2009），199–228。[16] Y. Li，《*CM* 点处高阶 *Green* 函数的代数性》，预印本 https://arxiv.org/abs/2106.13653，2021。[17] NIST 数学函数数字图书馆，http://dlmf.nist.gov/，2021-09-15 发布的 1.1.3 版。F. Olver、A. Olde Daalhuis、D. Lozier、B. Schneider、R. Boisvert、C. Clark、B. Miller、B. Saunders、H. Cohl 和 M. McClain，编。[18] K. Ono，《*Delta* 函数的一个拟 *theta* 函数》，《组合数论：2007 年 Integers 会议论文集》，de Gruyter，柏林，2009，第 141–156 页。[19] K. Ono，《模性的网络：模形式系数与 q级数的算术》，CBMS **102**，美国数学学会，2004。[20] H. Petersson，《模形式以及与某些边界圆群相关的正实维自守形式的构造和其傅里叶系数的完全确定》，S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math. Nat. Kl.（1950），415–474。[21] H. Petersson，《关于自守正交函数以及正实维自守形式的构造》，Math. Ann. **127** （1954），33–81。[22] D. Zagier，《椭圆模形式及其应用》，载于《模形式的 1-2-3》，Springer，2008。

德国科隆大学数学与计算机科学系，韦耶塔尔街86-90号，50931 科隆，德国电子邮件地址：kbringma@math.uni-koeln.de 香港薄扶林香港大学数学系电子邮件地址：bkane@hku.hk

德国科隆大学数学与计算机科学系，韦耶塔尔街86-90号，50931 科隆电子邮件地址：mmertens@math.uni-koeln.de