arXiv:2305.01248v2 [cs.LO] 4 May 2023

# 逆向工　　程：由 LTL 本体中介的时序查询

Marie Fortin[1] , Boris Konev[2] , Vladislav Ryzhikov[3] , Yury Savateev[4] ,Frank Wolter[2] 和 Michael Zakharyaschev[3]1巴黎西岱大学´，法国国家科学研究中心，IRIF，法国2利物浦大学计算机科学系，英国3伦敦大学伯贝克学院计算机科学与信息系统系，英国4南安普顿大学电子与计算机科学学院，英国 mfortin@irif.fr, {boris.konev,wolter}@liverpool.ac.uk, {vlad,michael}@dcs.bbk.ac.uk, y.savateev@soton.ac.uk

## 摘要

在数据库查询的逆向工程中，我们旨在根据给定的一组答案与非答案构造查询；随后可用该查询进一步探索数据，或解释这些答案与非答案。我们研究针对带时间戳数据、以线性时态逻辑 LTL 的正片段表述的查询的“按查询”问题，重点考察合适查询语言的设计，以及判定给定语言中是否存在能够区分给定答案与非答案的查询这一问题的组合复杂度和数据复杂度。我们同时考虑纯 LTL 查询和由 LTL 本体中介的查询。

## 1 引言

自21世纪初以来，如何根据查询的答案与非答案示例构造查询，以帮助数据库用户，一直是一个重要的研究领域 [Martins, 2019]。在数据库领域，研究主要关注 SQL、图查询语言和 SPARQL 等标准查询语言 [Zhang et al., 2013; Weiss and Cohen, 2017; Kalashnikov et al., 2018; Deutch and Gilad, 2019; Staworko and Wieczorek, 2012; Barcel´o and Romero, 2017; Cohen and Weiss, 2016; Arenas et al., 2016]。知识表示领域则关注在开放世界语义下，根据示例构造查询，并以本体提供背景知识 [Guti´errez-Basulto et al., 2018; Ortiz, 2019; Cima et al., 2021; Jung et al., 2021; Jung et al., 2022]。两个领域都研究过的一个基本问题称为可分性或示例查询（QBE）；这一术语由 Zloof 提出 [1977]:

给定：由对（$\mathcal{D}$, $\boldsymbol{d}$）构成的集合 $E^+$ 和 $E^-$，数据库实例 $\mathcal{D}$ 以及其中的元组 $\boldsymbol{d}$（$\mathcal{D}$），一个（可能为空的）本体 $\mathcal{O}$，以及一种查询语言 $\mathcal{Q}$。
问题：判断是否存在一个查询 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$，能够以如下意义区分（$E^+$, $E^-$）：对于所有（$\mathcal{D}$, $\boldsymbol{d}$）$\in E^+$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{D} \models \boldsymbol{q}(\boldsymbol{d})$；并且对于所有（$\mathcal{D}$, $\boldsymbol{d}$）$\in E^-$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{D} \not\models \boldsymbol{q}(\boldsymbol{d})$。
如果这样的 $\boldsymbol{q}$ 存在，那么$(E^+, E^-)$通常称为关于 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{O}$下可满足，而 $\boldsymbol{q}$ 的构造则称为学习。

在许多应用中，输入数据带有时间戳，查询自然会用包含时态算子的语言来表述。本文研究基于示例的时态查询，重点关注一种基础但非常实用的情况：数据 $\mathcal{D}$ 是带时间戳的原子命题集合。我们的查询语言是线性时序逻辑 LTL 的正片段，包含时态算子 $\Diamond$（最终）、$\bigcirc$（下一时刻）和 U（直到），并采用严格语义 [Demri et al., 2016]进行解释。为确保泛化能力，我们不允许 $\vee$。因此，表达能力最强的查询语言 $\mathcal{Q}$[U] 定义为由原子经 $\wedge$ 和 U 构造而成的公式集合（通过它们可以表达 $\bigcirc$ 和 $\Diamond$）；片段 $\mathcal{Q}[\Diamond]$ 和 $\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$ 的定义也类似。本体可以用完整的 LTL 或其片段 $\text{LTL}^{\Box\Diamond}$（称为 Prior 逻辑 [Prior, 1956]）给出，后者仅使用算子 $\Box$（未来始终）和 $\Diamond$；还可以用霍恩片段 $\text{LTL}^{\Box\bigcirc}_{\text{霍恩}}$ 给出，该片段包含形如 $C_1 \wedge \cdots \wedge C_k \to C_{k+1}$ 的公理，其中 $C_i$ 是原子，可能带有前缀 $\Box$ 和 $\bigcirc$，适用于$i \leq k+1$，也可能带有前缀 $\Diamond$，适用于 $i \leq k$。本体公理被假定在所有时刻都成立。事实上，在对象域中个体之间的交互并不重要、可以在数据建模中忽略的现实情境下，仅这一基础的“一维”时态本体中介查询形式体系就已具备足够的表达能力；参见 [Artale 等人，2021] 以及例1和此前的参考文献。

在这一时序场景中，我们对基于示例的查询问题的潜在应用持广义看法。一方面，有些非专家用户希望通过查询来探索数据，但并不熟悉时序逻辑。不过，他们通常能够提供数据示例，以说明自己想要的查询。QBE 可帮助这类用户构造所需的查询。另一方面，正数据示例和负数据示例可能来自某个应用，而用户感兴趣的是对这些示例的可能解释。此时，可以通过一个时序查询来区分正例和负例，从而给出解释。在这种情况下，我们的目标与近期关于可解释规划和程序合成中学习线性时序逻辑公式的研究类似 [Lemieux 等人，2015; Neider 和 Gavran，2018年；Camacho 和 McIlraith，2019；Fijalkow 和 Lagarde，2021年；Raha 等人，2022年；Fortin 等人，2022]。

例1。设想一位工程师，其任务是用定性传感器数据来解释受监控设备的行为（例如，发动机为何停止），例如“温度低”（$T$）、“强烈振动”（$V$）等。假设发动机在以下运行 $\mathcal{D}_1^+$ 和 $\mathcal{D}_2^+$ 之后停止，但在运行 $\mathcal{D}_1^-$、$\mathcal{D}_2^-$、$\mathcal{D}_3^-$ 之后没有停止。这里假设运行从 0 开始，测量值在 0、1、2.....这些时刻记录：

$$\mathcal{D}_1^+ = \{T(2), V(4)\}, \mathcal{D}_2^+ = \{T(1), V(4)\},$$
$$\mathcal{D}_1^- = \{T(1)\}, \mathcal{D}_2^- = \{V(4)\}, \mathcal{D}_3^- = \{V(1), T(2)\}.$$

$\Diamond$-查询 $\boldsymbol{q} = \Diamond(T \wedge \Diamond\Diamond V)$ 在 $\mathcal{D}_i^+$ 中于时刻 0 为真，在$\mathcal{D}_i^-$中为假，因此可以解释导致引擎故障的可能原因。示例集 ( $\{\mathcal{D}_3^+, \mathcal{D}_4^+\}, \{\mathcal{D}_4^-\}$)，其中

$$\mathcal{D}_3^+ = \{T(1), V(2)\},\ \mathcal{D}_4^+ = \{T(1), T(2), V(3)\},$$
$$\mathcal{D}_4^- = \{T(1), V(3)\}$$

可由 U-查询 $T \mathsf{U} V$ 解释。利用背景知-识，我们可以弥补传感器故障造成的不-完备数据。举例来说，假设 $\mathcal{E}_1^+ = \{H(3)\ V(4)\}$，其中 $H$ 表示“加热器已开启”。如果本体 $\mathcal{O}$ 包含公理 $\bigcirc H \to T$，指出加热器只能由前一时刻的低温触发，那么在 $\mathcal{O}$ 下，同一个 $\boldsymbol{q}$ 会将 $\{\mathcal{E}_1^+, \mathcal{D}_2^+\}$ 与 $\{\mathcal{D}_1^-, \mathcal{D}_2^-, \mathcal{D}_3^-\}$ 区分开来。⊣

例1中的查询 $\boldsymbol{q}$ 采用一种特定的“线性”形式，其中原子的顺序固定，不像“分支” $\Diamond T \wedge \Diamond V$那样留有开放空间。更准确地说，类 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$ 中的路径$\bigcirc\Diamond$-查询采用以下形式

$$\boldsymbol{q} = \rho_0 \wedge \boldsymbol{o}_1(\rho_1 \wedge \boldsymbol{o}_2(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{o}_n\rho_n)), \qquad (1)$$

其中，$\boldsymbol{o}_i \in \{\bigcirc, \Diamond\}$ 和 $\rho_i$ 是原子合取式；$\mathcal{Q}_p[\Diamond]$将 $\boldsymbol{o}_i$ 限制为 $\{\Diamond\}$；路径 U 查询 $\mathcal{Q}_p[\mathsf{U}]$ 的形式如下

$$\boldsymbol{q} = \rho_0 \wedge (\lambda_1 \,\mathsf{U}\, (\rho_1 \wedge (\lambda_2 \,\mathsf{U}\, (\ldots (\lambda_n \,\mathsf{U}\, \rho_n) \ldots)))), \qquad (2)$$

其中，$\lambda_i$ 是原子合取式或 $\bot$。路径查询的动机源于两个观察。首先，如果一种查询语言允许查询的合取——这与我们的路径查询类别不同——那么，与 $\vee$的过拟合相反，多个负例会变得多余：如果对于每个 $\mathcal{D} \in E^-$，$\boldsymbol{q}_\mathcal{D}$ 都能区分（$E^+$，$\{\mathcal{D}\}$），那么$\bigwedge_{\mathcal{D} \in E^-} \boldsymbol{q}_\mathcal{D}$ 就能区分（$E^+$，$E^-$）。其次，应用中已知的许多自然查询类型都可以用路径查询来表示。例如，正例（视为词）存在一个公共子序列，且该子序列不是任何负例的子序列，这等价于存在一个分离的 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$查询，其$\rho_0 = \top$ 和 $\rho_i \neq \top$ 分别为 $i > 0$；而正例存在一个公共子词，且该子词不是任何负例的子词，这等价于存在一个形式为 $\Diamond(\rho_1 \wedge \bigcirc(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \bigcirc\rho_n)$)的分离查询。这些及类似的查询是数据比较程序的基础，广泛应用于计算语言学、生物信息学和版本控制系统 [（Bergroth 等，2000；Chowdhury 等，2010；Blum 等，2021]）。

在许多应用中，路径查询能够表达事件的预期可分模式；但如果事件的顺序与可分性无关，就需要分支查询。

例2。在例1的设定中，分支 $\mathcal{Q}[\Diamond]$查询$\Diamond T \wedge \Diamond V$能够将正例 $\{T(2)\ V(4)\}$ 和 $\{V(1)\ T(4)\}$ 与负例 $\{T(1)\}$ 和 $\{V(4)\}$ 区分开来，而没有任何路径查询能够做到这一点。⊣

分支 $\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$-查询表达了直观的存在条件，可视为线性时序逻辑合取查询。然而，左侧嵌套了 U 的分支 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}]$-查询对应着带有多个 $\exists$ 和 $\forall$量词交替的复杂一阶公式，难以理解。因此，我们也考虑语言 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s] \supseteq \mathcal{Q}_p[\mathsf{U}]$，其中包含不带此类嵌套的“简单” $\mathcal{Q}[\mathsf{U}]$-查询。

本文初步探讨了示例查询问题 QBE($\mathcal{L}, \mathcal{Q}$) 的复杂性，尤其是其可行性，其中涉及 $\mathcal{L}$ 一个本体和 $\mathcal{Q}$一种查询语言。我们尤其关注路径查询与分支查询在复杂性上是否存在差异，以及能否通过限制正例或负例的数量来降低复杂性。我们在无本体情形下的结果汇总于表1，其中

| QBE 的 | b+，b− | b+ | b− 或无界 |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{Q}_p[\Diamond]/\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$ | ≤P | =NP | =NP |
| $\mathcal{Q}[\Diamond]/\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$ | ≤P | ≤P | =NP |
| $\mathcal{Q}_p[\mathsf{U}]$ | =NP | | |
| $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$ | ≤P | ≤P | ≥NP，≤PSPACE |
| $\mathcal{Q}[\mathsf{U}]$ | ≤PSPACE | | |

表1：无本体情形下的复杂性。

b+ / b− 表示正例/负例的数量有界[1]。请注意，当正例数量有界时，路径查询确实比分支查询更难；但在无界情况下则并非如此。我们的证明技巧包括归约到公共子序列存在性问题 [Maier, 1978; Fraser, 1996] 以及动态规划；还包括根据迁移系统的包含关系和模拟，仿照路径查询和分支 U-查询来刻画可分性 [Kupferman 和 Vardi, 1996]。NP 上界的关键在于相应语言的多项式分离性质（PSP）：任何可分的示例集都能由一个多项式大小的查询分离。$\mathcal{Q}_p[\Diamond]$, $\mathcal{Q}[\Diamond]$的复杂性也可以从 [Fijalkow 和 Lagarde, 2021] 的研究中得到，他们研究了由大小有界的 $\mathcal{Q}[\Diamond]$-查询实现的可分性。

在本体存在的情况下，我们区分 QBE($\mathcal{L}, \mathcal{Q}$) 的组合复杂度（此时数据和本体都被视为输入）与数据复杂度（此时本体被视为固定的，或与数据相比可忽略不计）。我们获得了令人鼓舞的结果：由 $\mathrm{LTL}^{\Box\Diamond}$-本体介导的 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$ 查询和 $\mathcal{Q}[\Diamond]$ 查询，以及由 $\mathrm{LTL}^{\Box\bigcirc}_{horn}$-本体介导的所有查询，都具有与表1相同的数据复杂度。迄今为止，我们得到的带有 $\mathrm{LTL}^{\Box\bigcirc}_{horn}$-本体的查询的组合复杂度结果见表2。有趣的是，仅含$\Diamond$ 和 $\bigcirc$ 的查询类的 QBE 是 PSPACE 完全的——其难度不高于可满足性。该上界通过为这些查询类建立指数分离性质，并利用规范（即最小）模型性质而得到，

[1]我们不考虑仅包含 $\bigcirc$ 的查询，因为可分性显然属于 P，且无法检测到任何有用的模式。

| | |
|---|---|
| $\mathcal{Q}[\Diamond]$ / $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$ | = PSPACE |
| $\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$ / $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$ | $\geq$ PSPACE, $\leq$ EXPTIME |
| $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$ | $\geq$ 非确定性指数时间 $\leq$ 指数空间 |
| $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$ | $\geq$ PSPACE, $\leq$ 2EXPTIME |
| $\mathcal{Q}[\mathrm{U}]$ | |

表 2：有界和无界情形下 QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}$) 的组合复杂度。

霍恩线性时序逻辑。U 查询的上界可通过归约到指数规模迁移系统的模拟问题和包含问题来获得。对于任意 LTL-本体，这一技术只能为 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$ 给出双指数时间上界，为 $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$ 给出双指数空间上界。在 LTL$^{\Box\Diamond}$ 本体下，通过（路径）◇查询实现的可分性事实证明是 $\Sigma_2^p$-完备的，其上界通过建立 PSP 得到。

与非时序 QBE 相比，我们的结果非常令人鼓舞：对于标准关系数据库上的合取查询（CQs），QBE 是 CONEX-PTIME 完备的[Willard, 2010; ten Cate and Dalmau, 2015]，而对于 $\mathcal{ELI}$ 或 $\mathcal{ALC}$ 本体下的 CQs，甚至是不可判定的 [Funket al., 2019; Jung et al., 2020]。

## 2 其他相关工作

现在，我们简要介绍其他几个相关的研究领域。其中之一是描述逻辑（DL）中的概念学习，该方向由 [Badea and Nienhuys-Cheng, 2000]提出。他们受到归纳逻辑程序设计的启发，使用细化算子，在 DL ABox 中构造能够分离正例和负例的概念。人们对这一方法产生了浓厚兴趣[Lehmann and Haase, 2009; Lehmann and Hitzler, 2010; Lisi and Straccia, 2015; Sarker and Hitzler, 2019; Lisi, 2012; Rizzo et al., 2020]。其中的代表性系统包括 DL LEARNER [B¨uhmann et al., 2016],DL-FOIL [Fanizzi et al., 2018] 及其扩展 DL-FOCL [Rizzo et al., 2018], SPa-CEL [Tran et al., 2017], YINYANG [Iannone et al., 2007],PFOIL-DL [Straccia and Mucci, 2015], 以及 EV-OLEARNER [Heindorf et al., 2022]。然而，这项工作没有考察可分性的复杂性。另一个密切相关的方向是使用较弱的（例如，可由 FO 定义的）语言来分离两个形式语言（例如，正规语言）的研究 [Place and Zeitoun, 2016; Hofman and Martens, 2015; Place and Zeitoun, 2022]。将其转化为逻辑可分性问题后，与我们的结果相比，主要区别在于：对于所有 $(\mathcal{D}, \boldsymbol{d}) \in E^-$，前者要求 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \neg \boldsymbol{q}(\boldsymbol{d})$，而不仅仅是 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \not\models \boldsymbol{q}(\boldsymbol{d})$。

## 3 预备知识

LTL 公式由原子 $A_i$, $i < \omega$ 构成，使用布尔联结词以及（未来时）时态算子 ○,◇, □, U，并在严格语义下对其进行解释 [Gabbay et al., 2003; Demri et al., 2016]。LTL 解释 $\mathcal{I}$ 确定在每个时刻为真的原子 $A_i$ $n \in \mathbb{N}$，记作 $\mathcal{I}, n \models A_i$。原子的真值关系通过归纳扩展到 LTL 公式，具体如下：

$\mathcal{I}, n \models \varphi \,\mathrm{U}\, \psi$ 当且仅当 $\mathcal{I}, m \models \psi$ 对某个 $m > n$ 成立，且 $\mathcal{I}, k \models \varphi$ 对所有 $k \in (n, m)$ 均成立；此外，还采用布尔联结词的标准语义规则，以及等价关系 $\bigcirc\varphi \equiv \bot \,\mathrm{U}\, \varphi$, $\Diamond\varphi \equiv \top \,\mathrm{U}\, \varphi$ 和 $\Box\varphi \equiv \neg\Diamond\neg\varphi$，其中布尔常量 $\bot$ 和 $\top$ 分别表示“假”和“真”。

LTL 本体 $\mathcal{O}$ 是任意有限个 LTL 公式的集合，称为 $\mathcal{O}$ 的公理。如果 $\mathcal{O}$ 的所有公理在 $\mathcal{I}$ 的所有时刻都为真，则解释 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{O}$ 的模型。正如引言中所述，除了完整的 LTL，我们还考虑其先验 □◇-片段 LTL$^{\Box\Diamond}$ 和 LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩，其公理的形式为

$$C_1 \wedge \cdots \wedge C_k \;\rightarrow\; C_{k+1} \tag{3}$$

其中 $C_i$ 由 $C ::= A_i \mid \bot \mid \Box C \mid \bigcirc C$给出。事实上，我们可以允许在（3）的左侧使用 ◇，因为 $\Diamond C \rightarrow C'$ 可以替换为 $\bigcirc C \rightarrow A$、$\bigcirc A \rightarrow A$、$A \rightarrow C'$，并使用新的 $A$。

数据实例是一个有限集合 $\mathcal{D}$，包含带有时间戳 $\ell \in \mathbb{N}$ 的原子 $A_i(\ell)$；$\max \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的最大时间戳。我们通过 LTL 类比形式的合取查询访问数据：我们的查询 $\varkappa$ 由原子 $\bot$ 和 $\top$ 使用 $\wedge$、 ○、 ◇ 和 U 构造而成。只使用来自 $\Phi \subseteq \{\bigcirc, \Diamond, \mathrm{U}\}$ 的算子的查询类记作 $\mathcal{Q}[\Phi]$； $\mathcal{Q}_p[\Phi]$ 是其路径查询子类，其形式为 (1) 或 (2)；而 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$ 包含 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}]$ 中不包含带有 U 在 $\varkappa_1$ 中出现的子查询 $\varkappa_1 \,\mathrm{U}\, \varkappa_2$ 的简单查询。注意，$\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}] \subseteq \mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$。 $\varkappa$ 的时间深度 tdp($\varkappa$) 是 $\varkappa$ 中嵌套时态算子的最大数量。

如果 $\mathcal{I}$ 对于所有 $A_i(\ell)$都有 $\in \mathcal{D}$，那么解释 $\mathcal{I}$ 就是数据实例 $\mathcal{D}$ 的一个模型。 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$ 一致，当且仅当它们有一个模型。我们称 $k \leq \max \mathcal{D}$ 为本体中介查询($\mathcal{O}, \varkappa$)在 $\mathcal{D}$ 上的（确定）答案，并记作 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa(k)$，如果在 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$的所有模型 $\mathcal{I}$中， $\mathcal{I}, k \models \varkappa$都成立。

设 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{Q}$ 分别为上文定义的本体和查询语言。本文关注的示例查询问题 QBE($\mathcal{L}, \mathcal{Q}$)表述如下：

给定一个 $\mathcal{L}$-本体 $\mathcal{O}$ 以及一个示例集 $E = (E^+, E^-)$，其中包含有限的正数据实例集 $E^+$ 和负数据实例集 $E^-$，

判断 $E$ 是否在 $\mathcal{O}$ 下可 $\mathcal{Q}$-分离，即是否存在一个 $\mathcal{Q}$-查询 $\varkappa$，使得对于所有 $\mathcal{D} \in E^+$都有 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa(0)$，且对于所有 $\mathcal{D} \in E^-$都有 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \not\models \varkappa(0)$。

如果 $\mathcal{L} = \emptyset$，我们将 QBE($\emptyset, \mathcal{Q}$) 简写为 QBE($\mathcal{Q}$)。我们还考虑输入示例集中的正例和/或负例数量有界的基于示例的查询问题，记作 QBE$^{\mathrm{b}+}$($\mathcal{L}, \mathcal{Q}$)、QBE$_{\mathrm{b}-}$($\mathcal{L}, \mathcal{Q}$) 或 QBE$_{\mathrm{b}}^{\mathrm{b}+}$($\mathcal{L}, \mathcal{Q}$)。类似 QBE$_1^{2+}$($\mathcal{L}, \mathcal{Q}$) 的记法应当不言自明。 $\mathcal{O}$、 $E$、 $\varkappa$ 的大小分别记作 $|\mathcal{O}$、 $|E|$、 $|\varkappa|$，即其中符号的数量，时间戳以一元形式给出。

下一个示例阐明了定义，以及具有不同时间算子的查询的相对表达能力。

例3。（a）令 $E = (\{\mathcal{D}_1\}, \{\mathcal{D}_2\})$，其中 $\mathcal{D}_1 = \{A(1)\}$,$\mathcal{D}_2 = \{A(2)\}$。那么 $\bigcirc A$ 可区分 $E$，但不存在任何 $\mathcal{Q}[\Diamond]$-查询可以做到这一点。对于 $\mathcal{O} = \{\bigcirc A \rightarrow A\}$，不存在任何查询 $\varkappa$ 能够区分 $E$，因为 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_1 \models \varkappa(0)$ 蕴含 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_2 \models \varkappa(0)$。

(b) 令 $E = (\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\}, \{\mathcal{D}_3\})$，其中 $\mathcal{D}_1 = \{A(1)\ B(2)\}$、$\mathcal{D}_2 = \{A(2)\ B(3)\}$、 $\mathcal{D}_3 = \{A(3)\ B(5)\}$。那么，查询$\Diamond(A \wedge \bigcirc B)$ 可以区分 $E$，但 $\mathcal{Q}[\Diamond]$ 中没有查询可以做到这一点。

(c) $A\mathrm{U}\ B$将（$\{\{B(1)\}$， $\{A(1)\ B(2)\}\}$， $\{\{B(2)\}\}$）区分开来，但没有任何 $\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$-查询能够做到这一点。⊣

现在我们将确立一些重要的多项式时间归约 $\leq_p$，它们适用于各种查询类中的 QBE 问题，包括形式为的 $\mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$-查询。

$$\varkappa = \rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_n)), \tag{4}$$

其中每个 $\rho_i$ 都是一个 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc]$-查询（即 $\Diamond$-无关的 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc,\Diamond]$-查询）。定理 4。以下多项式时间归约成立：(i.1) QBE($\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}$) $\leq_p$ QBE$_{1\text{-}}(\mathcal{L}, \mathcal{Q})$，对于任意在 $\wedge$ 下 $\mathcal{Q}$ 闭的，以及任意 $\mathcal{L}$（包括 $\mathcal{L} = \emptyset$）；(i.2) QBE($\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}$) $\leq_p$ QBE$^{2+}(\mathcal{L}, \mathcal{Q})$，对于 $\mathcal{L} \in \{$LTL、LTL$^{\Box\Diamond}\}$；(i.3) QBE($\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}[\bigcirc,\Diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$) 以及 QBE($\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}[\Diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$)，对于任意 $\mathcal{L}$；(ii.1) QBE($\mathcal{Q}_p[\Diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{Q}_p[\bigcirc,\Diamond]$) 以及 QBE($\mathcal{Q}_p[\Diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{Q}_p[$U$]$) $\leq_p$ QBE$_{1\text{-}}(\mathcal{Q}_p[$U$])$；(ii.2) QBE($\mathcal{Q}[\bigcirc,\Diamond]$) $=_p$ QBE($\mathcal{Q}[\Diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{Q}[$U$_s]$)。

($i$.1)–($i$.3) 的归约适用于组合复杂度；($i$.1)、($i$.3) 也适用于数据复杂度。这些归约保持正例/反例数量有界。

证明。对于 (i.1)，$(E^+, E^-)$ 与 $E^- = \{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n\}$ 在 $\mathcal{O}$ 下可由 $\mathcal{Q}$ 分离，当且仅当每个 $(E^+, \{\mathcal{D}_i\})$ 都可以，因为如果 $\varkappa_i$ 分离了 $(E^+, \{\mathcal{D}_i\})$，那么 $\varkappa_1 \wedge \cdots \wedge \varkappa_n$ 就分离了 $(E^+, E^-)$。

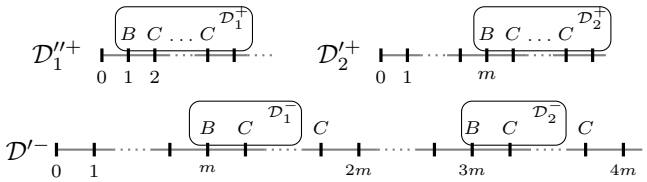
在 (i.2) 中，带有 $E^+ = \{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n\}$、$n > 1$ 的 $(E^+, E^-)$ 在 $\mathcal{O}$ 下是 $\mathcal{Q}$-可分的，当且仅当 $(E'^+, E^-)$ 在 $\mathcal{O}'$ 下是 $\mathcal{Q}$-可分的，其中 $\mathcal{O}'$ 通过以下公理扩展了 $\mathcal{O}$，以模拟 $E^+$：

$$S_1 \to A_1 \vee \cdots \vee A_n, \quad S_2 \to A_1 \vee \cdots \vee A_n,$$
$$C_i \wedge \Diamond A_j \to X, \quad D_i \wedge \Diamond A_j \to X, \text{ for } X(i) \in \mathcal{D}_j,$$

其中 $S_1$, $S_2$, $A_k$, $C_l$, $D_l$ 均为新鲜变量，对 $l \leq n' = \max_i \max \mathcal{D}_i$ 而言也是如此；$E'^+$ 由 $\{C_0(0) \dots, C_k(n')\ S_1(n'+1)\}$ 和 $\{D_0(0) \dots, D_k(n')\ S_2(n'+1)\}$ 组成。

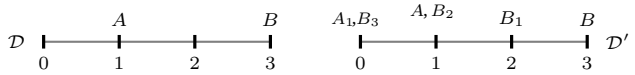
(i.3) 使用 $[\rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \bigwedge_i \Diamond\varkappa_i)] \equiv [\rho_0 \wedge \bigwedge_i \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond\varkappa_i)]$，$\bigcirc\Diamond\varkappa \equiv \Diamond\bigcirc\varkappa$ 和 $\bigcirc(\varkappa \wedge \varkappa') \equiv (\bigcirc\varkappa \wedge \bigcirc\varkappa')$，我们可以在多项式时间内将每个 $\mathcal{Q}[\bigcirc,\Diamond]$-查询转换为等价的 $\mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$-查询合取。因此，对于每个 $\mathcal{D} \in E^-$，存在分离 $(E^+, E^-)$ 的 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}[\bigcirc,\Diamond]$，当且仅当存在多项式规模的 $\boldsymbol{q}_\mathcal{D} \in \mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$ 分离 $(E^+, \{\mathcal{D}\})$。

(ii.1) 前两个归约的证明方法是：对于某个 $\mathcal{D}$，向 $E^+ \ni \mathcal{D}$ 添加数据实例 $\mathcal{D}' = \{A(mn) \mid A(n) \in \mathcal{D}\}$，其中 $m = \max \mathcal{D} + 2$。现在，如果 $\mathcal{D} \models \varkappa(0)$ 和 $\mathcal{D}' \models \varkappa(0)$，对于 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[$U$]$，，那么 $\varkappa$ 等价于一个 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$-查询。第三个归约如下所示，以 $E^+ = \{\mathcal{D}_1^+, \mathcal{D}_2^+\}$ 和 $E^- = \{\mathcal{D}_1^-, \mathcal{D}_2^-\}$ 为例，将 $E$ 转换为两个正例和一个负例，方法是使用由新原子 $B, C$ 构成的“填充项”。我们证明




即 $E$ 是 $\mathcal{Q}_p[$U$]$-可分的，当且仅当 $(\{\mathcal{D}_1''^+, \mathcal{D}_2'^+\}, \{\mathcal{D}'^-\})$ 是。

（ii.2）第一个归约通过修改给定 $E$ 中的每个 $\mathcal{D}$ 来建立，如下所示，使用新原子 $A_i$ 和 $B_j$ 分别编码 $\bigcirc^i A$ 和 $\bigcirc^j B$：




当且仅当 $E'$ 是 $\mathcal{Q}[\Diamond]$-可分离的，$E$ 才是 $\mathcal{Q}[\bigcirc,\Diamond]$-可分离的。反向论证和第二个归约与（ii.1）类似。⊣

## 4 不使用本体的 QBE

我们首先研究线性时序逻辑查询的 QBE 问题的复杂性，具体从不借助本体的查询入手。

定理 5. 对于上述定义的查询类别（采用空本体），QBE 问题属于表1所示的复杂性类别。

我们将在本节余下部分对证明进行评论。

$\bigcirc\Diamond$-查询。NP 困难性通过将一致子序列存在性问题 [Fraser, 1996，定理 2.1、2.2] 与定理 4 结合进行归约而得；属于 NP 则源于这样一个事实：分离查询（若存在）总可以取为多项式大小。

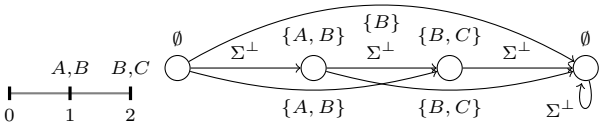
可解性通过动态规划证明。我们针对 QBE$_{\text{b}}^{\text{b}+}(\mathcal{Q}_p[\bigcirc,\Diamond])$、$E^+ = \{\mathcal{D}_1^+, \mathcal{D}_2^+\}$和$E^- = \{\mathcal{D}_1^-, \mathcal{D}_2^-\}$说明其思路。假设 $\varkappa$ 具有形式 (1)，且$\rho_n \neq \top$。那么，$\mathcal{D} \models \varkappa(0)$ 当且仅当存在一个严格单调映射$f$：$[0, n] \to [0, \max \mathcal{D}]$，满足 $f(0) = 0$、$f(i+1) = f(i) + 1$（若 $\boldsymbol{o}_i = \bigcirc$），以及 $\rho_i \subseteq t_\mathcal{D}(f(i)) = \{A \mid A(f(i)) \in \mathcal{D}\}$。我们称这样的 $f$ 为 $\varkappa$ 在 $\mathcal{D}$ 中的一个满足赋值。令 $S_{i,\ j}$ 为满足以下条件的元组（$k$、$\ell_1$、$\ell_2$、$n_1$、$n_2$）的集合：$\ell_1 \leq i \leq \max \mathcal{D}_1^+$、$\ell_2 \leq j \leq \max \mathcal{D}_2^+$，并且存在 $\varkappa = \rho_0 \wedge \boldsymbol{o}_1(\rho_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{o}_k\rho_k)$，使得 (a) 存在 $\mathcal{D}_1^+$和$\mathcal{D}_2^+$中的满足赋值 $f_1$、$f_2$，分别满足 $f_1(k) = \ell_1$ 和 $f_2(k) = \ell_2$；(b) $n_1$ 是 $\mathcal{D}_1^-$中对 $\varkappa$有满足赋值 $f$ 且满足 $f(k) = n_1$的最小值；若不存在这样的 $f$，则 $n_1 = \infty$；对于 $n_2$、$\mathcal{D}_2^-$也类似。只需计算 $S_{\max \mathcal{D}^+\text{，最大值 } \mathcal{D}_2^-}$ 在多项式时间内。可以通过增量方式完成：首先观察到 $S_{0,\ j}$ 只能包含 (0, 0, 0, 0, 0)，当且仅当存在 $\rho_0 \subseteq t_{\mathcal{D}_1^+}(0)$、$\rho_0 \subseteq t_{\mathcal{D}_2^+}(0)$ 和 $\rho_0 \not\subseteq t_{\mathcal{D}_1^-}(0)$，$\rho_0 \not\subseteq t_{\mathcal{D}_2^-}(0)$（对于 $S_{i,\ 0}$ 同样如此）。

U 查询。对于 $\mathcal{Q}_p[$U$]$、$\mathcal{Q}[$U$_s]$ 的 NP 困难性，可由定理 4（$ii$.1）、（$ii$.2）以及 $\bigcirc\Diamond$-查询的 NP 困难性得出。

上界通过将 $\mathcal{Q}_p[$U$]$-可分性和 $\mathcal{Q}[$U$_s]$-可分性归约为迁移系统的模拟问题和包含问题来证明 [Kupferman 和 Vardi, 1996]。迁移系统 $S$ 是一个有向图，其中每个节点和边分别由来自节点字母表或边字母表的某个符号集合标记；$S$ 还具有一个指定的初始节点集合 $S_0$。$S$ 的一次运行是有向图 $S$ 中从 $S_0$ 开始的一条路径，以及该路径上的所有标签。$S$ 的计算树是对 $S$ 进行树展开得到的树 $\mathfrak{T}_S$。对于定义在相同字母表上的系统 $S$ 和 $S'$，如果对于 $S$ 的每一次运行 $r$，都存在 $S'$ 的一次运行 $r'$，使得 $r$ 和 $r'$ 具有相同的长度，并且 $r$ 中状态和边上的标签包含于 $r'$ 中相应的标签之中，则称 $S$ 包含于 $S'$。如果 $\mathfrak{T}_S$ 可以按照有限嵌入的意义嵌入 $\mathfrak{T}_{S'}$，即 $\mathfrak{T}_S$ 的每个有限子树 [2] 都可以通过保留节点和边标签（的包含关系）的同态映射到 $\mathfrak{T}_{S'}$ 中，则称 $S$ 被 $S'$ 模拟。

[2]子树是 $\mathfrak{T}_S$ 的节点集合中的一个凸子集，并带有一个起始节点。

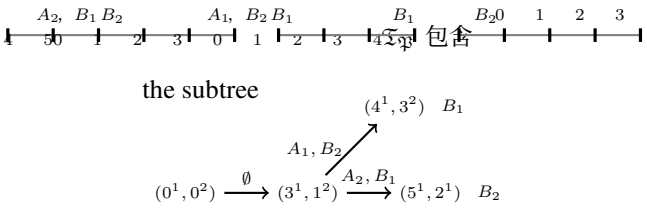
现在，设 $E=(E^+,E^-)$ 带有 $E^\sigma=\{\mathcal{D}_i \mid i\in I^\sigma\}$，对于 $\sigma\in\{+,-\}$ 以及不相交的 $I^+$ 和 $I^-$，并设 $\Sigma$ 为 $E$的签名。对于每个 $i\in I^+\cup I^-$，我们取一个迁移系统$\mathcal{S}^i$，其状态为 $0^i,\dots,(\max\mathcal{D}_i+1)^i$，其中 $(\max\mathcal{D}_i+1)^i$用 $\emptyset$标记，其余状态 $j^i$用 $\{A\mid A(j)\in\mathcal{D}_i\}$标记。转移为 $j^i\to k^i$，对于 $0\le j<k\le \max\mathcal{D}_i+1$，它们分别用 $\{A\in\Sigma\cup\{\bot\}\mid A(n)\in\mathcal{D}_i,\ n\in(j,k)\}$ 和 $(\max\mathcal{D}_i+1)^i\to(\max\mathcal{D}_i+1)^i$ 标记，标签为 $\Sigma^\bot=\Sigma\cup\{\bot\}$。因此，下面左侧所示的 $\mathcal{D}_i$会产生右侧的 $\mathcal{S}^i$：




我们构造直积（同步组合）$\mathfrak{P}$ of$\{\mathcal{S}^i\mid i\in I^+\}$，对于 $I^+=\{1,\dots,l\}$，其状态是状态 $s_i\in S^i$的向量$(s_1,\dots,s_l)$，这些状态由 $S^i$中 $s_i$ 的标签交集标记；若对于所有 $i$，$s_i\to p_i$ in $S^i$，则转移 $(s_1,\dots,s_l)\to(p_1,\dots,p_l)$也由各组成部分转移标签的交集标记。另一方面，我们取 $S^i$的不交并 $\mathfrak{N}$，对于$i\in I^-$，并建立以下可分离性判据：

定理6.（$i$） $E$不是 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$-可分的，当且仅当 $\mathfrak{P}$ 被 $\mathfrak{N}$ 模拟。（$ii$） $E$不是 $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$-可分的，当且仅当 $\mathfrak{P}$ 包含于 $\mathfrak{N}$。

示例7. 对于下方所示的示例集，其中唯一的负例位于右侧，



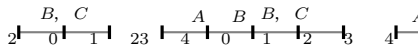

其中仅标出 $\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$-节点（一个序列）的最后一个 $\mathfrak{P}$-节点，并同时标出在节点上和边上为真的原子。直观地说，$\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ “表示”所有可能的 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$-查询，其路径表示满足$\mathcal{O}$、$\mathcal{D}\models\varkappa(0)$（对所有 $\mathcal{D}\in E^+$）的 $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$-查询 $\varkappa$。上方子树给出的 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$-查询为 $\varkappa=\Diamond\big(((A_1\wedge B_2)\mathrm{U}B_1)\wedge((A_2\wedge B_1)\mathrm{U}B_2)\big)$。该子树无法嵌入 $\mathfrak{T}_\mathfrak{N}$（由否定实例得到），因此 $\varkappa$区分 $E$。注意，$\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$中的每条路径（以及上方子树中的每条路径）都可以嵌入 $\mathfrak{T}_\mathfrak{N}$。

通过检查 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{N}$ 的结构，我们发现，如果$\mathfrak{P}$ 存在一个无法嵌入 $\mathfrak{N}$任何运行中的运行，那么我们可以找到一个长度为 $\le M=\min\{\max\mathcal{D}_i\mid i\in I^+\}$的此类运行（任何更长的运行在第 $M$个状态之后，其状态都带有 $\emptyset$标签）。因此，我们可以猜测所需的运行，并在 P 时间内检查其是否正确，从而确立 $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$的 NP 上界。要证明 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$的 PSPACE 上界，我们注意到，如果 $\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ 存在一个无法嵌入 $\mathfrak{T}_\mathfrak{N}$的有限子树，那么深度为 $M$的完整子树 $\mathfrak{T}^M_\mathfrak{P}$也无法嵌入 $\mathfrak{T}_\mathfrak{N}$；我们可以通过逐分支构造 $\mathfrak{T}^M_\mathfrak{P}$，同时检查这些分支到 $\mathfrak{T}_\mathfrak{N}$中的所有可能嵌入来验证这一点。最后，对于正例数量有界的情形，我们得到 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$ 的 P 上界，因为 $\mathfrak{P}$ 可以在多项式时间内构造，而检查转移系统之间的模拟是 P 完备的 [Kupferman 和 Vardi, 1996]。有趣的是，我们能够构造的最小分离查询

在这种情况下，大小与 $\mathfrak{T}^M_\mathfrak{P}$相同，即关于$|E^+|$呈指数级；然而，我们可以在多项式时间内检查其是否存在。

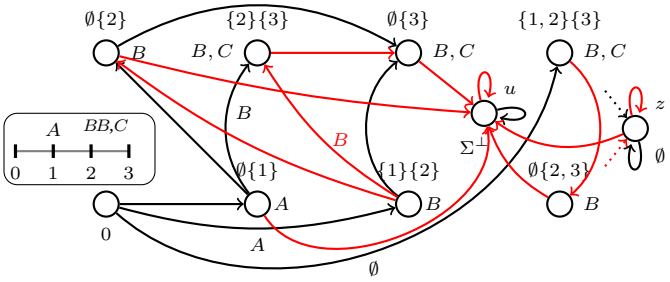
$\mathcal{Q}[\mathrm{U}]$ 的 PSPACE 上界需要在迁移系统之间采用一种更复杂的模拟概念。

例8. 下面的示例集，其中只有最右侧的实例为负例，由 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}]$-查询分隔。




$(A\,\mathrm{U}\,B)\mathrm{U}\,C$；但根据定理6，它并非 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$-可分离的。⊣

我们使用迁移系统证明一个 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}]$-不可分离性判据，其中非初始状态/汇状态是由数字集合构成的有序对，且转移分为两种类型。下图展示了一个数据实例及其诱导的迁移系统（其中 $z$ 从所有状态接收由 $\Sigma^\bot$ 标记的入边。




但 $u$（它们都已省略）。从 0 出发的每条箭头都指向一个状态 $\{1,\dots,n-1\}\{n\}$；它表示一个在 0 处为真的公式 $\varphi\,\mathrm{U}\,\psi$，箭头标签表示 $\varphi$ 中非嵌套的原子，状态标签表示 $\psi$ 中的原子。从 $s_1s_2$ 到 $s_1's_2'$ 的每条黑色（分别为红色）箭头都表示一个在 $s_2$（分别为 $s_1$）所有点上为真的 U 公式 $\alpha_{s_2\to s_1's_2'}$（分别为 $\alpha_{s_1\to s_1's_2'}$）。黑色和红色转移的排列方式使得，从 $s_1''s_2''$ 到 $s_1s_2$、箭头标签为 $\lambda$ 且 $s_1s_2$ 标签为 $\mu$ 的转移表示 U 公式 $(\lambda\wedge\bigwedge\alpha_{s_1\to s_1's_2'})\,\mathrm{U}\,(\mu\wedge\bigwedge\alpha_{s_2\to s_1's_2'})$；从 0 出发的转移也同理。完整论文中给出了关于 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}]$ 的定理6版本以及一个 PSPACE 算法。

## 5 使用线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}_{\text{霍恩}}$-本体的 QBE

回顾 [Artale 等人 2021] 的结论：对于任意线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}_{\text{霍恩}}$-本体 $\mathcal{O}$ 以及与其 $\mathcal{O}$一致的数据实例 $\mathcal{D}$，存在一个$\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 的典范模型 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$，使得对于任意查询$\varkappa$和任意 $k\in\mathbb{N}$，都有 $\mathcal{O}\mathcal{D}\models\varkappa(k)$ 当且仅当 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}\models\varkappa(k)$。

令 $\mathrm{sub}_\mathcal{O}$ 为 $\mathcal{O}$ 的公理 (3) 中 $C_i$ 及其否定所构成的子公式集合。对于 $\mathcal{O}$，类型是任意满足以下条件的极大子集：$\mathrm{tp}\subseteq\mathrm{sub}_\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{O}$一致。令 $\boldsymbol{T}$ 为 $\mathcal{O}$的所有类型构成的集合。给定一个解释 $\mathcal{I}$，我们用 $\mathrm{tp}_\mathcal{I}(n)$ 表示在 $\mathcal{I}$中 $n\in\mathbb{N}$ 处成立的 $\mathcal{O}$ 的类型。对于与 $\mathcal{D}$一致的 $\mathcal{O}$，我们将 $\mathrm{tp}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$ 简写为 $\mathrm{tp}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$。典范模型具有如下意义上的周期性结构：

命题 9。对于任意线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}_{\text{霍恩}}$本体 $\mathcal{O}$ 以及与 $\mathcal{O}$一致的任意数据实例 $\mathcal{D}$，存在 $s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}\le 2^{|\mathcal{O}|}$ 和$p_{\mathcal{O},\mathcal{D}}\le 2^{2|\mathcal{O}|}$，使得对于所有 $n\ge\max\mathcal{D}+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$，$\mathrm{tp}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}(n)=\mathrm{tp}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}(n+p_{\mathcal{O},\mathcal{D}})$。对于二元 $\ell$和原子合取式 $\xi$，判定 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}\models\xi(\ell)$ 属于组合复杂度下的 PSPACE 完全 / 数据复杂度下的 P。

现在我们证明，在有界和无界情形下，带有◇-和 ○,◇-查询的 QBE 的组合复杂度都是 PSPACE 完全，即其复杂性与线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}_{\text{霍恩}}$推理相当。

定理 10. 设 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}[\bigcirc,\Diamond], \mathcal{Q}[\Diamond], \mathcal{Q}_p[\bigcirc,\Diamond], \mathcal{Q}_p[\Diamond]\}$。那么，对于 combinedcomplexity，QBE(线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}$霍恩 $\mathcal{Q}$) 和 QBE$^{\text{b+}}_{\text{b-}}$(线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}$霍恩 $\mathcal{Q}$) 均为 PSPACE 完全。

证明。PSPACE 困难性继承自线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}_{\text{霍恩}}$。我们简要概述利用定理 4 ($i$.3) 的归约证明相应上界的过程。我们可以假设，对于任意 $\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-$，$\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$ 一致。因为若 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D} \in E^-$ 不一致，则在 $\mathcal{O}$ 下，$E$ 不可 $\mathcal{Q}$-分离，因为对于所有 $\varkappa \in \mathcal{Q}$，$\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa(\mathbf{0})$；若 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D} \in E^+$ 不一致，则 $E$ 可分离当且仅当 $(E^+ \setminus \{\mathcal{D}\}, E^-)$ 可分离。已知一致性检查是 PSPACE 完全的。

给定一个线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}_{\text{霍恩}}$本体 $\mathcal{O}$ 和一个示例集 $E$，令

$$k = \max_{\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-} (\max \mathcal{D} + s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}), \quad m = \prod_{\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-} p_{\mathcal{O},\mathcal{D}},$$

其中 $s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 和 $p_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 在 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 均来自命题 9。我们证明，若 $E$ 在 $\mathcal{Q}[\bigcirc,\Diamond]$下可分，则它可由一个合取分隔，该合取包含 $|E^-|$ 个 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p^{\circ}[\Diamond]$，其深度为 ◇和 ○，如式 (4) 所示。事实上，在这种情况下，对于任意 $\mathcal{D} \in E^-$，任意 $(E^+, \{\mathcal{D}\})$ 在 $\mathcal{O}$ 下均可由某个形如 (4) 的$\varkappa$ 分隔，其中 ○的深度为 $\leq k + m$，因为带有 $\ell > k + m$ 的$\rho_l = \bigwedge_{i=0}^{\ell} \bigcirc^i \lambda_i$ 可以替换为

$$\bigwedge_{i=0}^{k} \bigcirc^i \lambda_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \bigcirc^{k+j} \bigwedge_{i \leq \ell, j=(i-k) \bmod m} \lambda_i.$$

此外，若 $n > k$ 属于式 (4)，则 $(E^+, \{\mathcal{D}^-\})$ 可由以下内容分隔：

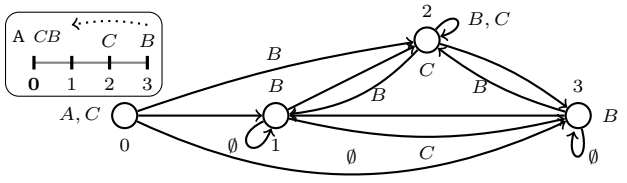
$$\rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_k)) \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{n} \Diamond^{k+1} \rho_i,$$

因此，通过某个 $\rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(\rho_k \wedge \Diamond\rho_j))$，且满足$k < j \leq n$。我们的非确定性 PSPACE 算法逐步猜测 $\rho_l$，并检查它们在相关$\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$中$\mathcal{D}$ 的相关部分是否可满足，其范围由 $k + m$限定。⊣

对于包含 U 的查询，情况则大不相同：

定理 11. 对于合并复杂性，QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$霍恩 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$) 属于 ExpTime，QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$霍恩 $\mathcal{Q}_p[\mathsf{U}]$) 属于 ExpSpace，而 QBE$^{\text{b+}}_{\text{b-}}$ (LTL$^{\Box\bigcirc}$霍恩 $\mathcal{Q}_p[\mathsf{U}]$) 是 NExpTime困难的。

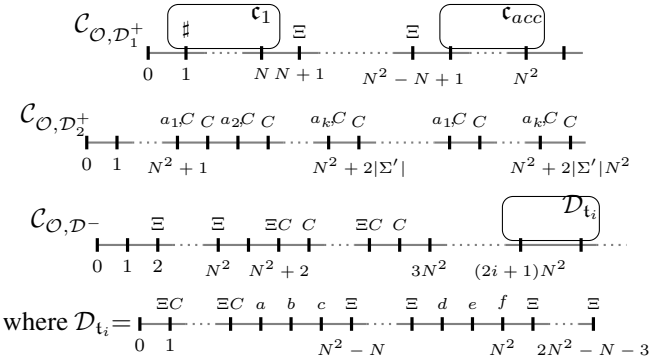
证明。对于上界，我们再次假设对所有 $\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-$，$\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$ 都是一致的。注意，在存在 LTL$^{\Box\bigcirc}_{\text{霍恩}}$本体 $\mathcal{O}$ 的情况下，定理6仍然成立，但我们需要采用不同的迁移系统构造 $S^i$，以表示由 $\mathcal{O}$ 在 $\mathcal{D}_i$ 上介导的所有 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$-查询。下面以 $\mathcal{O} = \{A \to C \wedge \bigcirc B,\ B \to \bigcirc^2 B,\ B \to \bigcirc C\}$ 和 $\mathcal{D}_i = \{A(\mathbf{0})\}$ 为例进行说明：左图展示了 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i$ 的典范模型（见命题 9），旁边是 $S^i$（转移上的省略标签为 $\Sigma^{\perp}$）。




一般而言，$S^i$ 的大小为 $|\mathcal{D}_i| + O(2^{|\mathcal{O}|})$，而 $S^i$、$\mathcal{D}_i \in E^+$ 的乘积大小为 $O(2^{|\mathcal{O}|+|E^+|})$。这些上界现在可由 P 以及检查迁移系统的模拟和包含关系的 PSPACE 完备性得出。

现在我们简述下界的证明。设 $\boldsymbol{M}$ 是一台非确定性图灵机，它在 $N = 2^{poly(|\boldsymbol{x}|)}$ 步内接受 $\Sigma$-词$\boldsymbol{x} = x_1 \dots x_n$，并在成功计算后擦除磁带。我们用一个长度为 $N - 1$ 的词（末尾有足够多的空白符）表示 $\boldsymbol{M}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上的一次计算的配置 $\mathfrak{c}$；其中，活动单元格中的 $y$ 被替换为 $(q, y)$，并带有当前状态 $q \in Q$。$\boldsymbol{M}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上的一次接受计算，可编码为一个由 $\Xi = \Sigma \cup (Q \times \Sigma) \cup \{\sharp\}$ 构成的长度为 $N^2$ 的词$w = \sharp \mathfrak{c}_1 \sharp \mathfrak{c}_2 \sharp \dots \sharp \mathfrak{c}_{N-1} \sharp \mathfrak{c}_N$。因此，长度为 $N^2$ 的词 $w$ 编码了一次接受计算，当且仅当它以初始配置 $\mathfrak{c}_1$（前面带有 $\sharp$）开头，以接受配置 $\mathfrak{c}_{acc}$结尾，并且任意两个相距 $N$ 的长度为 3 的子词构成一个合法的元组 [（Sipser，1997年，定理 7.37]）。

我们定义 $\mathcal{O}$ 和 $E = (\{\mathcal{D}_1^+, \mathcal{D}_2^+\}, \{\mathcal{D}^-\})$，使它们的典范模型如下所示，其中 $\Xi = \{a_1, \dots, a_k\}$:




where $\mathcal{D}_{\mathfrak{t}_i} =$




并且 $\mathfrak{t}_i = (a, b, c, d, e, f)$ 是按字典序排列的第 $i$ 个非法元组。上文所示的典范模型部分规模呈指数级；然而，由于它们具有重复性，可以用多项式规模的线性时序逻辑霍恩本体 $\mathcal{O}$ 来描述，如 [Ryzhikov 等人， 2021]所示。我们证明，$\mathcal{Q}_p[\mathsf{U}]$-查询

$$\varkappa = \Diamond(\rho_1 \wedge C \,\mathsf{U}\, (\rho_2 \wedge C \,\mathsf{U}\, (\dots (\rho_{N^2-1} \wedge (C \,\mathsf{U}\, \rho_{N^2})) \dots))),$$

其中 $\rho_1 \dots \rho_{N^2}$ 编码了 $\boldsymbol{M}$在$\boldsymbol{x}$上的一次接受计算，是唯一能够在 $\mathcal{O}$下区分 $E$ 的查询类型。⊣

至于数据复杂度，我们证明线性时序逻辑霍恩本体几乎是免费的：

定理 12。定理 5 的结果对由固定的线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}$霍恩本体中介的查询仍然成立。

直观地说，原因在于，给定一个固定的线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}_{\text{霍恩}}$-本体 $\mathcal{O}$，我们可以根据命题 9，在关于 $E$的多项式时间内，计算一致的 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$的典范模型$\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$的类型；其中第 4 节中的长度 $M$ 关于 $E$是多项式的。检查 $\mathcal{D}$ 与固定的 $\mathcal{O}$ 是否一致，已知属于 P [Artale 等人， 2021]。

## 6 使用线性时序逻辑$^{\Box\Diamond}$-本体进行 QBE

在本节中，我们研究 LTL$^{\Box\Diamond}$ 本体下通过 ◇ 查询实现的可分性。值得注意的是，我们证明，对于数据复杂度，即使允许任意布尔运算符，LTL$^{\Box\Diamond}$ 本体也不会带来额外代价；参见 [Schaerf、 1993]。

定理 13. 设 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}_p[\Diamond], \mathcal{Q}[\Diamond]\}$。如果 $E$ 在 LTL$^{\Box\Diamond}$-本体 $\mathcal{O}$ 下是 $\mathcal{Q}$-可分的，那么 $E$ 可以在 $\mathcal{O}$ 下通过一个在 $E$ 和 $\mathcal{O}$ 中具有多项式规模的 $\mathcal{Q}$-查询实现可分。QBE(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}$) 和 QBE$^{\mathsf{b}+}_{\mathsf{b}-}$(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}$) 对组合复杂性是 $\Sigma^p_2$ -完备的。LTL$^{\Box\Diamond}$-本体的存在不会影响数据复杂度，其复杂度仍与定理 5 中相同。

我们针对 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$ 评述该定理的证明。考虑到检查 $\mathcal{O}$ 是否与 $\mathcal{D}$ 一致是 NP-完全的，而对于固定的 $\mathcal{O}$ [，该问题可高效求解（Artale 等人， 2021], ），因此我们可以像定理 10 中那样，假设对于每个 $\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-$， $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$ 都一致。首先注意，如果在一个 LTL$^{\Box\Diamond}$-本体 $\mathcal{O}$ 下， $E$ 可被形式为 (1) 的 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[\Diamond]$ 可分，那么根据 [Ono 和 Nakamura， 1980], 对任意 $\mathcal{D} \in E^-$，都存在一个 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$ 的模型 $\mathcal{J}_\mathcal{D} \not\models \varkappa(0)$，其类型构成一个序列

$$tp_0, \dots, tp_k, tp_{k+1}, \dots, tp_{k+l}, \dots, tp_{k+1}, \dots, tp_{k+l}, \dots \quad (5)$$

取最大值 $\mathcal{D} \le k \le \max \mathcal{D} + |\mathcal{O}|$ 和 $l \le |\mathcal{O}|$。这使我们能够在 $E$、$\mathcal{O}$ 中找到一个多项式规模的分离 $\varkappa$。事实上，令 $K$ 为 (5) 中所有 $\mathcal{D} \in E^-$ 上的最大 $k$。如果 $\varkappa$ 的深度 $n$ 为 $\le K$，则问题解决。若 $n > K$，我们按如下方式缩短 $\varkappa$。考虑由 $\rho_0$、.....、$\rho_K$ 构成的 $\varkappa$ 的前缀 $\varkappa'$。如果对所有 $\mathcal{D} \in E^-$ 都有 $\mathcal{J}_\mathcal{D} \not\models \varkappa'(0)$，则问题解决。否则，对每个 $\mathcal{D} \in E^-$，我们选取一个 $\rho_i$、$i > K$，使得对于任意 $j \le l$，都有 $\rho_i \not\subseteq \mathsf{tp}^{k+j}$；由于 $\mathcal{J}_\mathcal{D} \not\models \varkappa(0)$，这样的对象必定存在。然后，我们通过从 $\varkappa$ 中省略所有不同于 $\varkappa'$ 中对应对象、且不同于所选 $\rho_i$（满足 $i > K$）的 $\rho_l$，来构造 $\varkappa''$。显然， $\varkappa''$ 符合要求。

$\Sigma^p_2$ -算法猜测 $\varkappa$ 和 $\mathcal{J}_\mathcal{D}$，对于 $\mathcal{D} \in E^-$，并在多项式时间内检查 $\mathcal{J}_\mathcal{D} \models \mathcal{O}$、$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{J}_\mathcal{D} \not\models \varkappa(0)$，且在 CONP 中 [Ono 和 Nakamura， 1980] 确认对所有 $\mathcal{D} \in E^+$， $\mathcal{O}$、$\mathcal{D} \models \varkappa(0)$。下界通过将全量化布尔公式 $\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi$ 的有效性问题归约得到，其中 $\boldsymbol{p} = p_1$、.....、$p_k$ 和 $\boldsymbol{q} = q_1$、.....、$q_m$ 都是 $\psi$ 中的命题变量。我们可以假设 $\psi$ 不是重言式，并且对于 $x \in \{p_i, \neg p_i, q_j, \neg q_j \mid i \le k, j \le m\}$， $\neg\psi \not\models x$。令 $E = (E^+, E^-)$，其中 $E^+ = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\}$、$E^- = \{\mathcal{D}_3\}$，

$$\mathcal{D}_1 = \{B_1(0)\},\ \mathcal{D}_2 = \{B_2(0)\},\ \mathcal{D}_3 = \{q_1(0), \dots, q_m(0)\},$$

并令 $\mathcal{O}$ 包含以下带有新原子的公理 $B_1, B_2, A_i, A_i$，对于 $i = 1, \dots, k$:

$$B_1 \lor B_2 \to \neg\psi, \quad p_i \to \Diamond\big(\bar{A}_i \land \textstyle\bigwedge_{j \ne i}(A_j \land \bar{A}_j)\big),$$
$$\neg p_i \to \Diamond\big(A_i \land \textstyle\bigwedge_{j \ne i}(A_j \land \bar{A}_j)\big).$$

那么， $\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi$ 有效当且仅当 $E$ 在 $\mathcal{O}$下是 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$-可分的。

我们使用与 $\Sigma^p_2$ -上界相同的论证，并注意到在数据复杂度下，检查 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa(0)$ 属于 P，从而得到 NP 数据复杂度上界。NP 下界沿袭自无本体情形。P 上界的证明则更为复杂。我们以不含时态算子、但允许任意布尔公式的 $\mathcal{O}$ 为例说明这一思路。在这种情况下，可以证明（这并非易事）： $\mathcal{O}$, $\mathcal{D} \models \varkappa(0)$ 当且仅当 $\mathcal{I}_{\mathcal{O},\mathcal{D}} \models \varkappa(0)$，其中 $\mathcal{I}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 是 $\mathcal{D}$的完备化：若满足 $\ell(\ell) \in \mathcal{D}\} \models A$，则它包含 $A(\ell)$。例如，若 $\mathcal{O} = \{A \lor B\}$ and$\mathcal{D} = \{A(1)\ B(1)\ A(3)\ B(3)\}$，那么完备化 $\mathcal{I}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 就是将 $\mathcal{D}$ 视为一种解释（因此 $\mathcal{I}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 不必是 $\mathcal{O}$的模型）。它可以在关于 $\mathcal{D}$ 的多项式时间内构造出来，并且由于根据上述等价关系，可使用它通过动态规划证明 P 上界。该等价关系不适用于 LTL$^{\Box\Diamond}$，但可以将这一技术应用于以某些类型扩充的数据集，从而加以推广。

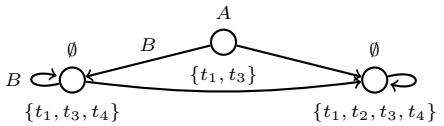
请注意，完备化技术不适用于 $\bigcirc$,$\Diamond$-查询。例如，对于上文定义的 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{O}$， $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \Diamond(A \land \bigcirc B)$，因此等价关系不成立。事实上，基于 $\bigcirc\Diamond$-查询的可分性复杂性仍未解决。

## 7 基于 LTL 本体的 QBE

对于具有任意线性时序逻辑公理的本体，我们得到:

定理 14. (*i*) 对任意 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}[\Diamond], \mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond], \mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]\}$，QBE(LTL $\mathcal{Q}$) 属于 2ExpTime。(*ii*) 对任意 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}_p[\Diamond], \mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond], \mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]\}$，QBE(LTL $\mathcal{Q}$) 属于 2ExpSpace。

证明需要进一步修改定理6中的迁移系统 $S^i$。我们通过一个例子来说明。设$\mathcal{O} = \{A \to \Diamond B, \top \to A \lor B, A \land B \to \bot\}$ 的集合为$\mathcal{O}$-类型 $\boldsymbol{T}_\mathcal{O} = \{\mathsf{tp}_1, \mathsf{tp}_2, \mathsf{tp}_3\}$，其中 $\mathsf{tp}_1 = \{A, \neg B, \Diamond B\}$、$\mathsf{tp}_2 = \{\neg A, B, \neg\Diamond B\}$、$\mathsf{tp}_3 = \{A, \neg B, \neg\Diamond B\}$ 和 $\mathsf{tp}_4 = \{\neg A, B, \Diamond B\}$; 我们省略了诸如$A \lor B$ 这类在所有类型中都为真或都为假的子公式。对于非空集合$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2 \subseteq \boldsymbol{T}_\mathcal{O}$和 $\Gamma \subseteq \Sigma^\bot$，我们取关系 $\boldsymbol{T}_1 \to_\Gamma \boldsymbol{T}_2$。直观来说，该关系表示：如果在 $\mathcal{O}$的所有模型 $\mathcal{I}$中都存在时刻 $n_\mathcal{I}$，使得 $\{\mathsf{tp}_\mathcal{I}(n_\mathcal{I}) \mid \mathcal{I} \models \mathcal{O}, \mathcal{D}\} = \boldsymbol{T}_1$，那么就存在 $m_\mathcal{I} > n_\mathcal{I}$，使得 $\{\mathsf{tp}_\mathcal{I}(m_\mathcal{I}) \mid \mathcal{I} \models \mathcal{O}, \mathcal{D}\} = \boldsymbol{T}_2$，且对所有 $\mathcal{I}$ 和 $n_\mathcal{I} < m < m_\mathcal{I}\}$ 都有$\Gamma = \{A \in \Sigma^\bot \mid \mathcal{I}, m \models A$。在我们的例子中，有 $\{\mathsf{tp}_1, \mathsf{tp}_3\} \to_{\Sigma^\bot} \{\mathsf{tp}_1, \mathsf{tp}_2, \mathsf{tp}_3, \mathsf{tp}_4\}$，以及 $\{\mathsf{tp}_1, \mathsf{tp}_3\} \to_{\{B\}} \{\mathsf{tp}_1, \mathsf{tp}_3, \mathsf{tp}_4\}$ （等等）。接着，我们构造如下迁移系统 $S^i$ ，例如针对$\mathcal{D}_i = \{A(0)\}$，它利用 $\boldsymbol{T}' \subseteq \boldsymbol{T}_\mathcal{O}$ 作为状态，反映关于 $\mathcal{O}$、$\mathcal{D}_i$ 的所有 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$-查询（初始状态为 $\{\mathsf{tp}_1, \mathsf{tp}_3\}$，因为 $A(0) \in \mathcal{D}_i$）：




$S^i$ 可在 $|\mathcal{D}_i| + |\mathcal{O}|$内用双指数时间构造（对于给定的 $\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$和 $\Gamma$，检查 $\boldsymbol{T}_1 \to_\Gamma \boldsymbol{T}_2$可在指数空间内完成）。此外，对于 $\mathcal{D}_i \in E^+$， $S^i$的乘积可在 $|\mathcal{D}_i| + |E^+|$内用双指数时间构造。

## 8 结论

我们已开始研究线性时序逻辑查询主要类别的示例查询计算复杂性，涵盖有本体中介和无本体中介的情形。我们的结果令人鼓舞：我们展示了一些重要情形，其数据复杂性是可处理的，而组合复杂度不高于可满足性问题。许多有趣且在技术上颇具挑战的问题仍未解决。尤其值得关注的是带 U 的查询。例如，我们仍需确定 Horn 本体下最小分离 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$ 查询和 $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$ 查询的大小。对不受限制的 U 查询进行示例查询的精确复杂性也仍未解决。一般而言，这类查询可能过于复杂，不适用于实际应用；不过，它们可以表达有用的析取模式，例如“在至多 $n$ 个时刻内”。还需注意，数据实例中存在较大间隔的稀疏数据.....

时间戳可能需要其二进制表示，而我们某些结果的证明无法适用于这种情况。

我们的研究成果和技术为研究具有完整关系组件的时态数据库上的 QBE 与（本体介导的）查询提供了良好的起点[Chomicki 等人，2001；Chomicki 和 Toman，2018；Artale 等人， 2022]，也为构造满足额外条件的分离查询提供了良好的起点，例如最长/最短分离器[Blum 等人，2021；Fijalkow 和 Lagarde， 2021]，或最具体/最一般的分离器 [ten Cate 等人， 2022]。

## 致谢

本研究得到英国工程与物理科学研究委员会资助项目 EP/S032207、EP/S032282 和 EP/W025868 的支持。

## 参考文献

[Arenas 等人， 2016] M. Arenas、G. I. Diaz 和 E. Kostylev。SPARQL 查询的逆向工程。载于 WWW 会议论文集，第 239–249 页，2016。

[Artale 等人， 2021] A. Artale、R. Kontchakov、A. Kov- tunova、V. Ryzhikov、F. Wolter 和 M. Zakharyaschev。线性时态逻辑中本体介导查询的一阶可重写性。《人工智能》，299:103536，2021年。

[Artale 等人， 2022] A. Artale、R. Kontchakov、A. Kov- tunova、V. Ryzhikov、F. Wolter 和 M. Zakharyaschev。二维时序本体介导查询的一阶可重写性与复杂性。《人工智能研究杂志》，75:1223–1291，2022。

[Badea and Nienhuys-Cheng， 2000] L. Badea 和 S. Nienhuys-Cheng。描述逻辑的一个细化算子。载于 ILP 会议论文集，第 40–59 页，2000。

[Barcel´o 和 Romero， 2017] P. Barcel´o 和 M. Romero。合取查询逆向工程问题的复杂性。载于 ICDT 会议论文集，第 7:1–7:17 页，2017。

[Bergroth 等人， 2000] L. Bergroth、H. Hakonen 和 T. Raita。最长公共子序列算法综述。载于字符串处理与信息检索国际研讨会论文集，第 39–48 页，2000。

[Blum 等人， 2021] C. Blum、M. Djukanovic、A. Santini、H. Jiang、C. Li、F. Many`a 和 G. Raidl。通过转换为最大团问题求解最长公共子序列问题。《计算机与运筹研究》，125:105089，2021年。

[B¨uhmann 等人， 2016] L. B¨uhmann、J. Lehmann 和 P. Westphal。DL-learner——一个用于语义网归纳学习的框架。《网络语义学杂志》，39:15–24，2016。

[Camacho 和 McIlraith， 2019] A. Camacho 和 S. McIl- raith。《用线性时态逻辑表达的可解释模型学习》。载于 ICAPS 论文集，第 621–630 页，2019。

[Chen 和 Lin， 1994] C.-C. Chen 和 I-Peng Lin. 模态命题逻辑中模态霍恩子句可满足性的计算复杂性。《理论计算机科学》，129(1):95–121，1994。

[Chomicki 和 Toman， 2018] J. Chomicki 和 D. Toman. 数据库查询语言中的时序逻辑。载于《数据库系统百科全书》。施普林格，2018年。

[Chomicki 等， 2001] J. Chomicki、D. Toman 和 M. B¨ohlen。《使用时序逻辑查询 ATSQL数据库》。美国计算机协会《数据库系统汇刊》，26(2)：145–178，2001。

[Chowdhury 等， 2010] R. Chowdhury、H.-S. Le 和 V. Ramachandran。《面向生物信息学的缓存无关动态规划》。IEEE/美国计算机协会《计算生物学与生物信息学汇刊》，7(3)：495–510，2010。

[Cima 等， 2021] G. Cima、F. Croce 和 M. Lenzerini。《本体数据管理中的查询可定义性及其近似》。载于 CIKM 论文集，第 271–280 页。美国计算机协会，2021年。

[Cohen 和 Weiss， 2016] S. Cohen 和 Y. Weiss. 从示例图学习树模式的复杂性。美国计算机协会数据库系统汇刊，41(2):14:1–14:44，2016。

[Demri et al.， 2016] S. Demri、V. Goranko 和 M. Lange.《计算机科学中的时序逻辑》。剑桥大学出版社，2016。

[Deutch 和 Gilad， 2019] D. Deutch 和 A. Gilad. 根据溯源示例反向工程合取查询。载于 EDBT 会议论文集，第 277–288 页，2019。

[Fanizzi et al.， 2018] N. Fanizzi、G. Rizzo、C. d'Amato 和 F. Esposito. DLFoil：重新审视类表达式学习。载于 EKAW 会议论文集，第 98–113 页，2018年。

[Fijalkow 和 Lagarde， 2021] N. Fijalkow 和 G. Lagarde。从示例中学习线性时序公式的复杂性。载于第 15 届语法推理国际会议论文集，PMLR 第 153 卷，第 237–250 页，2021年。

[Fortin 等人， 2022] M. Fortin、B. Konev、V. Ryzhikov、Y. Savateev、F. Wolter 和 M. Zakharyaschev。时序实例查询的唯一可刻画性与可学习性。载于 KR 会议论文集，2022。

[Fraser， 1996] C. Fraser。一致子序列与超序列。《理论计算机科学》，165(2):233–246，1996年。

[Funk 等人， 2019] M. Funk、J. C. Jung、C. Lutz、H. Pulcini 和 F. Wolter。描述逻辑概念学习：何时正例与负例可分？载于 IJCAI 会议论文集，第 1682–1688 页，2019。

[Gabbay et al.， 2003] D. Gabbay、A. Kurucz、F. Wolter 和 M. Zakharyaschev。《多维模态逻辑：理论与应用》，逻辑研究第 148 卷。爱思唯尔，2003。

[Guti´errez-Basulto et al.， 2018] V. Guti´errez-Basulto、J. Ch. Jung 和 L. Sabellek。《本体增强系统中的查询逆向工程：表达性霍恩描述逻辑本体案例》。载于 IJCAI 论文集，2018年。

[Heindorf 等人， 2022] S. Heindorf、L. Bl¨ubaum、N. D¨usterhus、T. Werner、V. N. Golani、C. Demir 和 A.-C. Ngonga Ngomo。《Evolearner：使用进化算法学习描述逻辑》。载于 WWW 会议论文集，第 818–828 页。美国计算机协会，2022 年。

[Hofman 和 Martens， 2015] P. Hofman 和 W. Martens。通过短子序列和子词实现可分性。载于 ICDT 会议论文集，LIPIcs 第 31 卷，第 230–246 页，2015。[Iannone 等， 2007] L. Iannone、I. Palmisano 和 N. Fanizzi。基于反事实的语义网概念学习算法。应用智能，26(2):139–159，2007。[Jung 等， 2020] J. Ch. Jung、C. Lutz 和 F. Wolter。描述逻辑中的最不一般泛化：验证与存在性。载于 AAAI 会议论文集，2020。[Jung 等， 2021] J. Ch. Jung、C. Lutz、H. Pulcini 和 F. Wolter。通过受限签名的描述逻辑概念分离数据示例。载于 KR 会议论文集，2021。[Jung 等， 2022] J. Ch. Jung、C. Lutz、H. Pulcini 和 F. Wolter。本体下带标签数据示例的逻辑可分性。人工智能，313（2022）。[Kalashnikov 等， 2018] D. Kalashnikov、L. Lakshmanan 和 D. Srivastava。Fastqre：快速查询逆向工程。载于 SIGMOD 会议论文集，第 337–350 页，2018。[Kupferman 和 Vardi， 1996] O. Kupferman 和 M. Vardi。公平迁移系统的验证。载于 CAV 会议论文集，LNCS 第 1102 卷，第 372–382 页。施普林格，1996年。[Kurtonina 和 de Rijke， 1997] N. Kurtonina 和 M. de Rijke。时序逻辑的双模拟。逻辑、语言与信息学杂志，6(4):403–425，1997年。[Lehmann 和 Haase， 2009] J. Lehmann 和 Ch. Haase。描述逻辑中的理想向下细化。载于 ILP 会议论文集，第 73–87 页，2009。[Lehmann and Hitzler， 2010] J. Lehmann 和 P. Hitzler。使用细化算子的描述逻辑概念学习。机器学习，78:203–250，2010。[Lemieux 等， 2015] C. Lemieux、D. Park 和 I. Beschastnikh。通用线性时序逻辑规范挖掘（T）。载于 ASE 会议论文集，第 81–92 页。IEEE，2015。[Lisi and Straccia， 2015] F. Lisi 和 U. Straccia。模糊具体域中的描述逻辑学习。Fundamenta Informaticae，140(3-4):373–391，2015。[Lisi， 2012] F. Lisi。描述逻辑中概念学习的形式化刻画。载于 DL 会议论文集，2012。[Maier， 1978] D. Maier。关于子序列和超序列的若干问题的复杂性。ACM学报，25(2):322–336，1978年。[Martins， 2019] D. Martins。从示例逆向工程数据库查询：研究现状、挑战与研究机会。信息系统，83:89–100，2019。[Neider 和 Gavran， 2018] D. Neider 和 I. Gavran。学习线性时序性质。载于 FMCAD 会议论文集，第 1–10 页。IEEE，2018年。[Ono 和 Nakamura， 1980] H. Ono 和 A. Nakamura。若干线性模态逻辑与时态逻辑的反驳克里普克模型规模。逻辑研究，第 325–333 页，1980年。[Ortiz， 2019] M. Ortiz。从示例构造本体介导查询：窥探 DL-Lite 案例。载于 GCAI 会议论文集，第 1–14 页，2019。

[Place and Zeitoun， 2016] T. Place and M. Zeitoun。使用一阶逻辑分离正则语言。《计算机科学中的逻辑方法》，12(1)，2016年。[Place and Zeitoun， 2022] T. Place and M. Zeitoun。无需量词交替即可通过一阶逻辑进行分离的通用多项式时间方法。载于 FSTTCS 会议录，LIPIcs 第250卷，第43:1–43:22页，2022。[Prior， 1956] A. Prior。《时间与模态》。牛津大学出版社，1956年。[Raha et al.， 2022] R. Raha、R. Roy、N. Fijalkow 和 D. Neider。用于学习线性时态逻辑片段的可扩展随时算法。载于 TACAS 会议录，LNCS 第13243卷，第263–280页。施普林格，2022。[Rizzo et al.， 2018] G. Rizzo、N. Fanizzi、C. d'Amato 和 F. Esposito。解决数据网络上概念学习短视性的框架。载于 EKAW 会议录，第338–354页。施普林格，2018年。[Rizzo et al.， 2020] G. Rizzo、N. Fanizzi 和 C. d'Amato。类表达式归纳作为概念空间探索：从 DL-FOIL 到 DL-FOCL。《未来一代计算机系统》，108:256–272，2020。[Ryzhikov et al.， 2021] V. Ryzhikov、Y. Savateev 和 M. Zakharyaschev。在线性时态逻辑中判定本体介导查询的一阶逻辑可重写性。载于 TIME 会议录，LIPIcs 第206卷，第10:1–10:15页，2021。[Sarker and Hitzler， 2019] Md. K. Sarker 和 P. Hitzler。描述逻辑的高效概念归纳。载于 AAAI 会议录，第3036–3043页，2019。[Schaerf， 1993] A. Schaerf。带存在量化的概念语言中实例检查问题的复杂性。《智能信息系统杂志》，2:265–278，1993。[Sipser， 1997] M. Sipser。《计算理论导论》。PWS出版公司，1997年。[Staworko and Wieczorek， 2012] S. Staworko 和 P. Wieczorek。学习枝和路径查询。载于 ICDT 会议录，第140–154页，2012。[Straccia and Mucci， 2015] U. Straccia 和 M. Mucci。pFOIL-DL：使用概率集成估计从清晰OWL数据中学习（模糊） $\mathcal{EL}$ 概念描述。载于 SAC 会议录，第345–352页，2015。[ten Cate and Dalmau， 2015] B. ten Cate 和 V. Dalmau。积同态问题及其应用。载于 ICDT 会议录，第161–176页，2015。[ten Cate et al.， 2022] B. ten Cate、V. Dalmau、M. Funk 和 C. Lutz。合取查询的极值拟合问题。CoRR，abs/2206.05080，2022。[Tran et al.， 2017] An C. Tran、J. Dietrich、H. W. Guesgen 和 S. Marsland。并行对称类表达式学习。《机器学习研究杂志》，18:64:1–64:34，2017。[Vardi， 2007] M. Vardi。用于时序推理的自动机理论技术。载于《模态逻辑手册》，第971–989页。北荷兰出版社，2007。[Weiss and Cohen， 2017] Y. Weiss 和 S. Cohen。从示例逆向工程 SPJ查询。载于 PODS 会议录，第151–166页，2017。

[Willard， 2010] R. Willard。测试可表达性很困难。载于 CP 会议录，LNCS 第6308卷，第9–23页。施普林格，2010。[Zhang et al.， 2013] M. Zhang、H. Elmeleegy、C. Procopiuc 和 D. Srivastava。复杂连接查询的逆向工程。载于 SIGMOD 会议录，第809–820页，2013。[Zloof， 1977] M. Zloof。示例查询：一种数据库语言。《IBM系统杂志》，16(4):324–343，1977年。

# 附录：证明

## 第 3 节的证明

定理 4. 以下多项式时间归约成立：
(i.1) 对任意在 $\wedge$ 下封闭的 $\mathcal{Q}$，以及任意 $\mathcal{L}$（包括 $\mathcal{L}=\emptyset$），QBE($\mathcal{L},\mathcal{Q}$) $\leq_p$ QBE$_{1\text{-}}(\mathcal{L},\mathcal{Q})$；(i.2) 对于 $\mathcal{L}\in$ {线性时序逻辑，LTL$^{\Box^\diamond}$}，QBE($\mathcal{L},\mathcal{Q}$) $\leq_p$ QBE$^{2^+}(\mathcal{L},\mathcal{Q})$；(i.3) QBE($\mathcal{L},\mathcal{Q}[\bigcirc,\diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}_p^\circ[\diamond]$) 和 QBE($\mathcal{L},\mathcal{Q}[\diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{L},\mathcal{Q}_p[\diamond]$)，对任意 $\mathcal{L}$ 均成立；(ii.1) QBE($\mathcal{Q}_p[\diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{Q}_p[\bigcirc,\diamond]$ 和 QBE($\mathcal{Q}_p[\diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$) $\leq_p$ QBE$_{1\text{-}}(\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}])$；(ii.2) QBE($\mathcal{Q}[\bigcirc,\diamond]$) $=_p$ QBE($\mathcal{Q}[\diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$)。

归约 ($i.1$)–($i.3$) 适用于组合复杂性，而 ($i.1$) 和 ($i.3$) 也适用于数据复杂性。这些归约保持正例/负例数量有界。

证明。(i.1) 注意，如果 $\mathcal{Q}$ 在 $\wedge$、$E=(E^+,E^-)$ 和 $E^-=\{\mathcal{D}_1^-,\dots,\mathcal{D}_n^-\}$ 下封闭，那么 $E$ 在 $\mathcal{O}$ 下可被 $\mathcal{Q}$ 分离，当且仅当每个 $(E^+,\{\mathcal{D}_i^-\})$、$1\leq i\leq n$ 都可被分离。事实上，如果 $\varkappa_i$ 分离了 $(E^+,\{\mathcal{D}_i^-\})$，那么 $\varkappa_1\wedge\dots\wedge\varkappa_n$ 就分离了 $E$。因此，对于这样的 $\mathcal{Q}$，我们可以假设 $E^-$ 只包含一个数据实例。注意，$\mathcal{Q}_p[\bigcirc,\diamond]$ 和 $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$ 在 $\wedge$ 下并不封闭。

(i.2) 设 $E^+=\{\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n\}$，并设 $k=\max_i\max\mathcal{D}_i$。我们通过取新原子 $A_1$、……、$A_n$、$C_0$、……、$C_k$、$D_0$、……、$D_k$、$S_1$、$S_2$，并将以下公理添加到给定本体 $\mathcal{O}$ 中，来构造本体 $\mathcal{O}'$：

$$S_1\to A_1\vee\dots\vee A_n,\quad S_2\to A_1\vee\dots\vee A_n,$$
$$C_i\wedge\diamond A_j\to X,\quad D_i\wedge\diamond A_j\to X,\ \text{for } X(i)\in\mathcal{D}_j.$$

令 $E'^+$ 由 $\mathcal{D}_1'=\{C_0(0)\dots,C_k(n')\ S_1(n'+1)\}$ 和 $\mathcal{D}_2'=\{D_0(0)\dots,D_k(n')\ S_2(n'+1)\}$组成。那么，$\mathcal{O}',\mathcal{D}_1'$ 或 $\mathcal{O}',\mathcal{D}_2'$ 的每个模型都包含至少一个 $\mathcal{O},\mathcal{D}_i$ 的模型；反过来，任何 $\mathcal{O},\mathcal{D}_i$ 的模型都可以通过仅添加新引入的符号，转换为 $\mathcal{O}',\mathcal{D}_1'$ 或 $\mathcal{O}',\mathcal{D}_2'$ 的模型。因此，如果在本体 $\mathcal{O}$下存在针对 $(E^+,E^-)$ 的分离查询，那么同一个查询也能在本体 $\mathcal{O}'$下分离 $(E'^+,E^-)$。如果在本体 $\mathcal{O}'$下存在针对 $(E'^+,E^-)$ 的分离查询，那么它不能包含 sig($\mathcal{O}'$) \ sig($\mathcal{O}$) 中的任何符号，因此它能在本体 $\mathcal{O}$下分离 $(E^+,E^-)$。

(i.3) 回想论文正文中的结论：$[\rho_0\wedge\diamond(\rho_1\wedge\bigwedge_i\diamond\varkappa_i)]\equiv[\rho_0\wedge\bigwedge_i\diamond(\rho_1\wedge\diamond\varkappa_i)]$、$\bigcirc\diamond\varkappa\equiv\diamond\bigcirc\varkappa$ 以及 $\bigcirc(\varkappa\wedge\varkappa')\equiv(\bigcirc\varkappa\wedge\bigcirc\varkappa')$，因此每个 $\mathcal{Q}[\bigcirc,\diamond]$-查询都可以在多项式时间内等价地转换为 $\mathcal{Q}_p^\circ[\diamond]$-查询的合取。如果 $E^-$ 是单元素集合，那么在本体 $\mathcal{O}$ 下，$\mathcal{Q}_p^\circ[\diamond]$ 中的查询合取能够分离 $(E^+,E^-)$，当且仅当单个合取项能够在 $\mathcal{O}$下分离 $(E^+,E^-)$。因此，对于每个 $\mathcal{D}\in E^-$，存在能够在 $\mathcal{O}$ 下分离任意 $(E^+,E^-)$ 的 $\boldsymbol{q}\in\mathcal{Q}[\bigcirc,\diamond]$，当且仅当存在多项式规模的 $\boldsymbol{q}_\mathcal{D}\in\mathcal{Q}_p^\circ[\diamond]$，能够在 $\mathcal{O}$下分离 $(E^+,\{\mathcal{D}\})$。第二个归约通过从上述论证中去掉 $\bigcirc$ 得到。

在 (ii.1) 中，前两个归约可通过向 $E^+\ni\mathcal{D}$ 添加对于某个 $\mathcal{D}$ 的数据实例 $\mathcal{D}'=\{A(mn)\mid A(n)\in\mathcal{D}\}$with $m=\max\mathcal{D}+2$ 来证明。现在，如果 $\mathcal{D}\models\varkappa(0)$ 且 $\mathcal{D}'\models\varkappa(0)$，对于 $\varkappa\in\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}],$，那么 $\varkappa$ 等价于一个 $\mathcal{Q}_p[\diamond]$-查询。

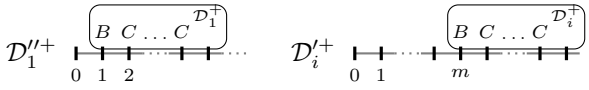
对于第三个归约，我们首先注意到，不失一般性，可以假设正例不包含形如 $X(0)$ 的原子。事实上，设 $E=(E^+,E^-)$、$E^+=\{\mathcal{D}_1^+,\dots,\mathcal{D}_n^+\}$ 和 $E^-=\{\mathcal{D}_1^-,\dots,\mathcal{D}_k^-\}$。令
$\rho=\bigcap_{i=1}^n\{X\mid X\ 0\ \in\mathcal{D}_i^+\}$ $E'^-=\{\mathcal{D}\in E^-\mid\mathcal{D}\not\models\rho\}$ $D=\ D^+\ D^-$ $D^+=\{\mathcal{D}\setminus\{X\ 0\ \mid X\in\ E\}\mid(),$、, 并令 ( , ), 其中 ( ) $\mathcal{D}\in E^+\}$ $D^-=\{\mathcal{D}\setminus\{X\ 0\ \mid X\in\ E\}\mid\mathcal{D}\in E'^-\}$ $\varphi=\rho_0\wedge\lambda_1$ $\rho_1\wedge\lambda_2$ $\dots$ $\rho_{l-1}\wedge\ \lambda_l$ $\rho_l$ $\dots$
sig( ) 且 ( ) sig( )。如果 U ( U ( ( ( U ) ) ) ) 将 $E$ 分离，那么 $\varphi'$（即将 $\rho_0$ 替换为 $\emptyset$ 后的 $\varphi$）将 $D$ 分离。如果 $\psi=\rho_0\wedge\lambda_1\,\mathrm{U}\,(\rho_1\wedge\lambda_2\,\mathrm{U}\,(\dots($ $\rho_{l-1}\wedge(\lambda_l\,\mathrm{U}\ \rho_l))\dots))$ 将 $D$ 分离，那么 $\rho_0=\emptyset$ 和 $\psi'$（即将 $\rho_0$ 替换为 $\rho$ 后的 $\psi$）将 $E$ 分离。

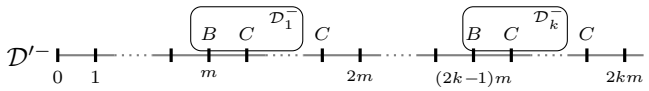
现在，假设对于任意 $X$和$i$，$E=(E^+,E^-)$、$E^+=\{\mathcal{D}_1^+,\dots,\mathcal{D}_n^+\}$、$n>1$ 和 $E^-=\{\mathcal{D}_1^-,\dots,\mathcal{D}_k^-\}$，且 $X(0)\notin\mathcal{D}_i^+$。令 $B$、$C$为新原子，并令 $m=\max_{\mathcal{D}\in E^+\cup E^-}(\max(\mathcal{D}))+2$。我们定义 $E'^+=\{\mathcal{D}_1'^+,\mathcal{D}_2'^+,\dots,\mathcal{D}_n'^+\}$，其中

$$\mathcal{D}_i'^+=\{X(j+m)\mid X(j)\in\mathcal{D}_i^+\}\cup\{B(m)\}\cup\{C(j)\mid m<j<m+\max(\mathcal{D}_i^+)\},$$
$$\mathcal{D}_1'^+=\{X(j+1)\mid X(j)\in\mathcal{D}_1^+\}\cup\{B(1)\}\cup\{C(j)\mid 1<j<1+\max(\mathcal{D}_1^+)\}.$$

我们还定义 $E'^-=\{\mathcal{D}'^-\}$，其

$\mathcal{D}'^-=\{X((2i-1)m+j)\mid X(j)\in\mathcal{D}_i^-,i\in[1,k]\}\cup\{B((2i-1)m)\mid i\in[1,k]\}\cup\{C(i)\mid(2i-1)m<i<2im,i\in[1,k]\}$.下图为示意图。






设 $E = (E'^+, E'^-)$。我们证明 $E$ 和 $E'$ 等可分性。

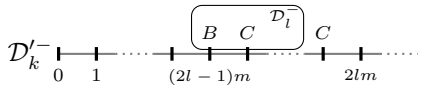
($\Rightarrow$) 假设 $\varphi = \rho_0 \wedge \lambda_1 \mathsf{U}(\rho_1 \wedge \lambda_2 \mathsf{U}(\ldots(\rho_{l-1} \wedge (\lambda_l \mathsf{U}\, \rho_l))\ldots))$，且 $l < m$ 将 $E$分隔开。那么 $\rho_0 = \top$（因为 $X(0) \notin \mathcal{D}_i^+$，对于任意 $X$）。考虑查询 $\Diamond\varphi'$，其中 $\varphi'$ 是将 $\rho_0$ 替换为 $B$、将 $\lambda_i \neq \bot$ 替换为 $\lambda_i \wedge C$后的 $\varphi$。由于 $\mathcal{D}_j^+ \models \varphi$，我们对所有 $\mathcal{D} \in E'^+$都有 $\mathcal{D} \models \varphi'$。如果 $\mathcal{D}'^- \models \Diamond\varphi'$，那么对于某个 $j$，有 $\mathcal{D}'^- \models \varphi'((2j-1)m)$。由于所有 $\lambda'$都包含 $C$和 $l < m$，因此有 $\mathcal{D}_j^- \models \varphi$，这不可能成立。因此，$\Diamond\varphi'$ 将 $E'$分隔开。

($\Leftarrow$) 假设 $\psi = \rho_0 \wedge \lambda_1 \mathsf{U}\,(\rho_1 \wedge \lambda_2 \mathsf{U}\,(\ldots(\rho_{l-1} \wedge (\lambda_l \mathsf{U}\ \rho_l))\ldots))$，且 $\rho_l \neq \top$ 将 $E'$分隔开。由于 $\mathcal{D}_1''^+ \models \psi$，我们有 $l < m$。找出满足 $\rho_i \neq \top$的最小 $i$。由于 $\mathcal{D}_2'^+ \models \psi$，存在满足 $\lambda_{i'} = \top$的 $i' \leq i$。

若 $B \in \rho_i$，那么由于 $\mathcal{D}_1''^+ \models \psi$，我们有 $i = 1$ 和 $\lambda_1 = \top$。令 $\psi' = \lambda_2' \mathsf{U}\,(\rho_2' \wedge \lambda_3' \mathsf{U}\,(\ldots(\rho_{l-1}' \wedge (\lambda_l \mathsf{U}\ \rho_l))\ldots))$，其中 $\rho_j' = \rho_j \setminus \{C\}$ 且 $\lambda_j' = \lambda_j \setminus \{C\}$。我们可以看到，在这种情况下 $\mathcal{D}_j'^+ \models \psi'(m)$，因此对所有 $j$，都有 $\mathcal{D}_j^+ \models \psi'$。此外，由于 $\mathcal{D}'^- \not\models \psi$，我们有 $\mathcal{D}_j^- \not\models \psi'$，因此 $\psi'$ 将 $E$ 分离。

若 $B \notin \rho_i$，令 $\psi' = \Diamond(\rho_i \wedge \lambda_{i+1} \mathsf{U}\,(\rho_{i+1} \wedge \lambda_{i+2} \mathsf{U}\,(\ldots(\rho_{l-1} \wedge (\lambda_l \mathsf{U}\ \rho_l))\ldots)))$。那么对所有 $\mathcal{D}^+ \in E'^+$，都有 $\mathcal{D}^+ \models \psi'$。若 $\mathcal{D}'^- \models \psi'$，则由于 $\lambda_{i'} = \top$，我们有 $\mathcal{D}'^- \models \psi$，因此 $\psi'$ 也将 $E'$ 分离。考虑下面所示的实例 $\mathcal{D}_l'^-$（对应于某个 $\mathcal{D}_l^-$）：

$$\mathcal{D}_l'^- = \{X((2l-1)m + j) \mid X(j) \in \mathcal{D}_l^-\} \cup \{B((2l-1)m)\} \cup \{C(j) \mid (2l-1)m < j < 2lm\}.$$




由于 $\mathcal{D}_l'^- \subseteq \mathcal{D}'^-$，我们有 $\mathcal{D}_l'^- \not\models \psi'$，因此 $\mathcal{D}_l^- \not\models \psi''$，其中 $\psi''$ 是将 $\rho_j$ 替换为 $\rho_j \setminus \{C\}$ 且将 $\lambda_j$ 替换为 $\lambda_j \setminus \{B, C\}$ 后的 $\psi'$，对于 $\lambda_j \neq \emptyset$。显然，对于所有 $\mathcal{D}^+ \in E^+$，$\mathcal{D}^+ \models \psi''$ 成立，因此 $\psi''$ 将 $E$ 分隔开。

($ii.2$) 为展示 QBE($\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{Q}[\Diamond]$)，假设给定了 $E = (E^+, E^-)$。令 $m$ 为所有满足 $\mathcal{D} \in E^+$ 的 $\max \mathcal{D}$ 中的最大值。对于每个满足 $A(\ell) \in \mathcal{D}$ 对某个 $\mathcal{D} \in E^+$ 成立的 $A$，引入一个新原子 $A_k$, $0 < k \leq m$，并通过在 $\mathcal{D}$ 中添加 $A_k(\ell)$（若 $A(k + \ell) \in \mathcal{D}$）将任意 $\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-$ 扩展为数据实例 $\mathcal{D}'$。令 $F^+ = \{\mathcal{D}' \mid \mathcal{D} \in E^+\}$ 和 $F^- = \{\mathcal{D}' \mid \mathcal{D} \in E^-\}$。则显然，$E$ 是 $\mathcal{Q}[\Diamond\bigcirc]$-可分的，当且仅当 $F$ 是 $\mathcal{Q}[\Diamond]$-可分的。

逆向归约以及 QBE($\mathcal{Q}[\Diamond]$) $\leq_p$ QBE($\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$) 的证明与 (ii.1) 类似。 ⊣

## B 第 4 节的证明

我们给出表1中的复杂性结果。为此，我们先引入一些关于序列问题的记号。设 $\Sigma$ 是一个由符号组成的字母表。$\Sigma$ 上的词是由 $\Sigma$中的符号构成的有限序列。如果可以通过从 $\beta$ 中任意位置删除零个或多个符号，从而得到 $\alpha$，则称词 $\alpha$ 是词 $\beta$ 的子序列。对于词集 $S$，如果词 $\alpha$ 是 $S$ 中每个词的子序列，则称其为 $S$ 的公共子序列。一致子序列问题 (CSSP) 的定义如下：

给定：字母表 $\Sigma$ 上的词集 $S^+$ 和 $S^-$。
问题：判断是否存在 $S^+$ 的一个公共子序列，它不是 $S^-$ 中任何一个词的子序列。

以下内容见 [Fraser, 1996]:

定理 15. ($i$) 即使字母表和 $S^+$ 的基数均为二，一致子序列问题仍是 NP 困难的。($ii$) 即使 $S^-$ 是单元素集合，一致子序列问题仍是 NP 困难的。

另一个我们感兴趣的问题是以下公共子序列问题（KsubS） :

给定：字母表 $\Sigma$ 上的一个单词集合 $S$，以及一个数 $k$。
问题：判断 $S$ 是否存在长度至少为 $k$的公共子序列。

以下结论见 [Maier, 1978]:

定理 16. 即使字母表的基数为 2，KsubS 仍是 NP 困难的。

现在我们可以证明表1中关于 $\bigcirc\Diamond$-查询的结果。我们先证明 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$ 的 NP 下界。实际上，我们证明的结果比表中所述略强。

**L**引理 17. 含有两个正例或一个负例的 QBE($\mathcal{Q}_p[\Diamond]$) 是 NP 困难的。

证明。通过多项式时间归约一致子序列问题（如定理 15 中所述）的证明是显而易见的。通过多项式时间归约 KsubS 来证明第二个断言（一个负例）也很有意义。该证明也直接适用于 $\mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$-查询。假设给定了字母表 $\{A, B\}$ 上 KsubS 的一个实例 $S, k$。我们定义一个形式为 $(E^+, \{\mathcal{D}^-\})$ 的 $E$，使得以下条件等价：

• 存在一个长度为 $k$ 的 $S$ 的公共子序列;

• 存在 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}_p[\Diamond]$，将（$E^+$，$\{\mathcal{D}^-\}$）分隔开;

• 存在 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$，它将 $(E^+, \{\mathcal{D}^-\})$ 分隔开。

我们将每个单词 $w \in S$ 表示为一个从时间点 1 开始的数据实例 $\mathcal{D}_w$（例如，单词 $w = ABBA$ 表示为 $\mathcal{D}_w = \{A(1)\ B(2)\ B(3)\ A(4)\}$）。现在令

$$\mathcal{D}^+ = \{A(i(k+2)), B(i(k+2)) \mid 1 \leq i \leq k\}$$

and

$$\mathcal{D}^- = \mathcal{D}^+ \setminus \{A(k(k+2)), B(k(k+2))\}$$

并令 $E^+ = \{\mathcal{D}_w \mid w \in S\} \cup \{\mathcal{D}^+\}$。首先假设存在一个长度为 $k$ 的 $S$ 的公共子序列 $C_1 \cdots C_k$。那么 $\Diamond(C_1 \wedge \Diamond(C_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond C_k))$ 将 $(E^+, \{\mathcal{D}^-\})$ 区分开来。现在假设一个查询

$$\varkappa = \rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_n)),$$

其中每个 $\rho_i$ 都是一个 $\mathcal{Q}[\bigcirc]$-查询，它分离 $(E^+, \{\mathcal{D}^-\})$。由于对于某个 $w \in S$，$\mathcal{D}_w \models \varkappa(0)$，我们有 $n \leq k$，且所有 $\rho_i$ 的深度都有上界 $k$。于是 $\rho_0 = \top$；此外，由于 $\mathcal{D}^+$ 中任意两个条目之间都有长度为 $k+1$ 的“间隔”，且由于 $\mathcal{D}^+ \models \varkappa(0)$，我们可以假设每个 $\rho_i, i > 0$ 都是形如 $\bigcirc^{m_i}\rho_i'$ 的，其中 $0 \leq m_i \leq k$，而 $\rho_i'$ 是原子合取式。注意，我们可以在 $\mathcal{D}^+$ 中满足，

- $\rho_1$ 在区间 $\{1, \ldots, k+2\}$ 中;
- $\rho_2$ 在区间 $\{(k+1)+1, \ldots, 2(k+2)\}$;
- 等等，$\rho_n$ 在区间 $\{(n-1)(k+2)+1, \ldots, n(k+2)\}$内得到满足。

特别地，如果 $\rho_i$ 是原子合取式，那么它可以在 $i(k+2)$ 中得到满足。如果 $n < k$，则可直接推出 $\mathcal{D}^- \models \varkappa(0)$，由此得到矛盾。因此 $n = k$。然后，由于 $\varkappa$ 的深度有界于 $k$，$\rho_k$ 是原子合取式。事实上，现在可以从 $\rho_{k-1}$ 开始通过归纳证明，所有 $\rho_i$、$i > 0$ 都是非空的原子合取式。否则，向左移位可得 $\mathcal{D}^- \models \varkappa(0)$，由此得到矛盾。因此 $\varkappa$ 具有 $\Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_k))$ 的形式，且所有 $\rho_i$ 均非空。由对所有 $w \in S$ 都有 $\mathcal{D}_w \models \varkappa(0)$ 可知，$\varkappa$ 定义了 $S$ 的一个长度为 $k$的公共子序列，正如所要求的。⊣

QBE($\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$) 在正例数量有界或仅有一个负例时的 NP 下界可由引理 17 和定理 4（$ii.1$）得出。

接下来，我们通过观察到，从定理 4（$i.3$）第一部分的证明可知，任何 $E^-$ 为单元素集合的 $(E^+, E^-)$ 是 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$-可分的，当且仅当它是 $\mathcal{Q}[\Diamond]$-可分的，由此得到 QBE($\mathcal{Q}[\Diamond]$) 在只有一个负例时的 NP 下界。利用定理 4（$ii.2$），可从 QBE($\mathcal{Q}[\Diamond]$) 在只有一个负例时的 NP 下界推出 QBE($\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$) 在只有一个负例时的 NP 下界。

接下来讨论 NP 上界。回顾一下，如果任意 $\mathcal{Q}$-可分示例都能由一个多项式大小的 $\mathcal{Q}$ 查询分离，那么查询语言 $\mathcal{Q}$ 在本体语言 $\mathcal{L}$ 下具有多项式分离性质（PSP）。表1中使用 $\Diamond$（和 $\bigcirc$）的查询语言的 NP 上界可直接由以下结果得出。

引理 18　。令 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}_p[\Diamond], \mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond], \mathcal{Q}[\Diamond], \mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]\}$。那么，在空本体下，$\mathcal{Q}$ 具有 PSP　　.

证明。 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}_p[\Diamond], \mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]\}$ 的证明很简单：若对某个 $\varkappa \in \mathcal{Q}$，$\mathcal{D} \models \varkappa(0)$，则 $\varkappa$ 显然等价于一个查询 in $\mathcal{Q}$ 其时间　p深度　p不超过最大时间戳　　p in $\mathcal{D}$, 因此，其在 $\mathcal{D}$ 中也是线性规模的。

对于 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}[\Diamond], \mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]\}$，论证如下。假设 $\varkappa$ 将（$E^+$，$E^-$）分离开来。我们可以假设 $\varkappa$ 是 $\mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$ 中至多由 $|E^-|$ 个查询合取而成的式子，其形式为

$$\varkappa = \rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_n)),$$

其中每个 $\rho_i$ 都是 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc]$中的一个查询。于是，$\varkappa$ 的合取项等价于满足以下条件的查询：$n$ 不超过 $E^+$ 中数据实例的最大时间戳；并且每个 $\rho_i$ 都是 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc]$ 中的一个查询，其时间深度也不超过 $E^+$中数据实例的最大时间戳。⊣

接下来，我们补充完整用于求解 $\mathrm{QBE}_{\mathsf{b}}^{\mathsf{b}+}(\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond])$ 的多项式时间算法的描述，适用于 $E^+ = \{\mathcal{D}_1^+, \mathcal{D}_2^+\}$ 和 $E^- = \{\mathcal{D}_1^-, \mathcal{D}_2^-\}$。扩展到任意 $E^+$、$E^-$ 是直接的。回顾一下，我们假设 $\varkappa$ 取形式 (1)，其中 $\rho_n \neq \top$。还要回顾一下，$S_{i,\,j}$ 是满足以下条件的元组 $(k, \ell_1, \ell_2, n_1, n_2)$ 的集合。

1. $\ell_1 \leq i \leq$ 最大值$\mathcal{D}_1^+$,
2. $\ell_2 \leq j \leq$ 最大值$\mathcal{D}_2^+$,

并且存在 $\varkappa = \rho_0 \wedge \boldsymbol{o}_1(\rho_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{o}_k\rho_k)$，使得

1. 分别存在满足赋值 $f_1, f_2$，属于 $\mathcal{D}_1^+$和 $\mathcal{D}_2^+$，且满足 $f_1(k) = \ell_1$ 和 $f_2(k) = \ell_2$，并且

2. $n_1$对于 $\varkappa$ 中的 $\mathcal{D}_1^-$，在存在满足赋值 $f$ 且使得 $f(k) = n_1$ 的情况下是最小的；如果不存在这样的 $f$，则 $n_1 = \infty$；对于 $\varkappa$ 中的 $\mathcal{D}_2^-$，在存在满足赋值 $f$ 且使得 $f(k) = n_2$ 的情况下， $n_2$ 是最小的；如果不存在这样的 $f$，则 $n_2 = \infty$。

那么显然，若存在 $k$、$\ell_1$、$\ell_2$，使得 $(k, \ell_1, \ell_2, \infty, \infty) \in S_{\max \mathcal{D}_1^+, \max \mathcal{D}_2^+}$，则存在一个 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$ 分离的 $(E^+, E^-)$。因此，只需从 $S_{0,0}$ 开始，以多项式时间递增地计算 $S_{\max \mathcal{D}_1^+, \max \mathcal{D}_2^+}$。我们已经计算出 $S_{0,j}$ 和 $S_{i,0}$。回顾一下， $t_{\mathcal{D}}(i) = \{A \mid A(i) \in \mathcal{D}\}$。为得到 $S_{i+1,j+1}$，我们将任何满足以下条件的元组 $(k, \ell_1, \ell_2, n_1, n_2)$ 添加到 $S_{i+1,j} \cup S_{i,j+1}$ 中：存在 $(k', \ell_1', \ell_2', n_1', n_2') \in S_{i+1,j} \cup S_{i,j+1}$，其中 $k' < k$，$\ell_1' < \ell_1 \leq i+1, \ell_2' < \ell_2 \leq j+1$，使得 $\ell_1 = i+1$ 或 $\ell_2 = j+1$，并且对于 $m = k - k' + 1 \geq 0$，我们有 $\ell_1 - m > \ell_1', \ell_2 - m > \ell_2'$，以及一些原子集合 $\rho_1, \ldots, \rho_m$，满足

$$\rho_1 \subseteq t_{\mathcal{D}_1^+}(\ell_1 - m) \cap t_{\mathcal{D}_2^+}(\ell_2 - m), \ldots, \rho_m \subseteq t_{\mathcal{D}_1^+}(\ell_1) \cap t_{\mathcal{D}_2^+}(\ell_2)$$

使得

- 要么 $n_1$ 是最小的，满足 $n_1 - n_1' > m$ 且

$$\rho_1 \subseteq t_{\mathcal{D}_1^-}(n_1 - m), \ldots, \rho_m \subseteq t_{\mathcal{D}_1^-}(n_1)$$

  要么，如果不存在这样的 $n_1$，则 $n_1 = \infty$，并且

- 要么 $n_2$ 是最小的，满足 $n_2 - n_2' > m$ 且

$$\rho_1 \subseteq t_{\mathcal{D}_2^-}(n_2 - m), \ldots, \rho_m \subseteq t_{\mathcal{D}_2^-}(n_2)$$

  要么，如果不存在这样的 $n_2$，则 $n_2 = \infty$。

因此，我们可以通过向 $S_{i+1,j} \cup S_{i,j+1}$ 添加任意元组来得到 $S_{i+1,j+1}$。该元组描述了一个查询，这个查询是通过将查询 $\Diamond(\rho_1 \wedge \bigcirc(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \bigcirc\rho_m))$ 与 $m \geq 0$ 关联起来，从 $S_{i+1,j} \cup S_{i,j+1}$ 中某个元组所描述的查询 $\varkappa$ 得到的。显然，$S_{i+1,j+1}$ 可以在多项式时间内根据 $S_{i+1,j}$ 和 $S_{i,j+1}$ 计算得出。至此，$\mathrm{QBE}_{\mathsf{b}^+}^{\mathsf{b}^+}(\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond])$ 的证明完成。

$\mathrm{QBE}_{\mathsf{b}^-}^{\mathsf{b}^+}(\mathcal{Q}_p[\Diamond])$ 的证明可通过从上述证明中删除 $\bigcirc$ 得到。对于正例数量有界的 $\mathrm{QBE}(\mathcal{Q}[\Diamond])$，其 P 上界可分两步证明：(1) 根据定理 4 ($i.1$)，只需证明 $\mathrm{QBE}_{\mathsf{b}^-}^{\mathsf{b}^+}(\mathcal{Q}[\Diamond])$ 的 P 上界；(2) 根据定理 4 ($i.3$)，$\mathrm{QBE}_{\mathsf{b}^-}^{\mathsf{b}^+}(\mathcal{Q}[\Diamond]) \leq_p \mathrm{QBE}_{\mathsf{b}^-}^{\mathsf{b}^+}(\mathcal{Q}_p[\Diamond])$。最后，根据定理 4 ($ii.2$))，对于正例数量有界的 $\mathrm{QBE}(\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond])$，其 P 上界可由正例数量有界的 $\mathrm{QBE}(\mathcal{Q}[\Diamond])$ 的 P 上界推出。

现在我们证明表1中包含 U 的查询语言的结果。我们先来看 NP 下界。对于正例和负例数量有界的 $\mathrm{QBE}(\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}])$，其 NP 下界由正例数量有界的 $\mathrm{QBE}(\mathcal{Q}_p[\Diamond])$ 的 NP 下界（如上所示）以及定理 4 的第二部分（$ii.1$）推出，后者将负例数量从无界减少为单元素集合。对于负例数量有界的 $\mathrm{QBE}(\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s])$，其 NP 下界由负例数量有界的 $\mathrm{QBE}(\mathcal{Q}[\Diamond])$ 的 NP 下界（如上所示）以及定理 4（$ii.2$）推出。至此，NP 下界的证明完成。

$\mathrm{QBE}(\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}])$ 的 NP 上界由其在空本体下的 PSP 得出，而后者的证明方式与引理 18 相同：

引理 19。 $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$ 在空本体下具有 PSP。

证明。若对某个 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[\mathrm{U}],$，有 $\mathcal{D} \models \varkappa(0)$，则显然 $\varkappa$ 等价于一个 $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$-查询，其时间深度不超过 $\mathcal{D}$中的最大时间戳，因此在 $\mathcal{D}$ 中具有线性规模。⊣

为了得到含 U 的查询的 P 和 PSPACE 上界，我们需要下一节将要介绍的工具和可分离性判据。

## C $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$、 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$和 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}]$的可分离性判据

迁移系统是一个元组 $S = (\Sigma_1, \Sigma_2, W, L, R, W_0)$，其中 $\Sigma_1$（分别为 $\Sigma_2$）是状态（分别为迁移）标签字母表， $W$ 是状态集合， $W_0 \subseteq W$ 是初始状态集合。状态标记 $L$ 是一个映射 $W \to \Sigma_1$；迁移标记 $R$ 是一个偏映射 $W \times W \to \Sigma_2$。若 $R(s, s') = b$，则记 $s \to_b s'$（其中 $s, s' \in W$）；若 $R(s, s')$ 有定义，则记 $s \to s'$。在 $S$ 上的一次运行或计算是一个有限序列 $\mathfrak{s} = s_0 \to s_1 \to \cdots \to s_n$（其中 $n \geq 0$），满足对所有 $i$均有 $s_{i-1} \to s_i$，且 $s_0 \in W_0$。$S$ 的计算树 $\mathfrak{T}_S$ 是一棵（无限）树——更准确地说，是一片森林——其顶点是 $S$ 上的运行 $\mathfrak{s}$，后继关系为：对所有 $\mathfrak{s} = s_0 \to \cdots \to s_n$ 和 $\mathfrak{s}' = s_0 \to \cdots \to s_n \to s_{n+1}$，均有 $\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$。树的顶点 $\mathfrak{s}$用 $L(s_n)$ 标记，而边 $\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$ 用 $b$ 标记，使得 $s_n \to_b s_{n+1}$。若树 $\mathfrak{T}$ 的顶点集是 $\mathfrak{T}_S$ 顶点集的凸子集，并且包含一个根（来自 $W_0$），则称树 $\mathfrak{T}$ 是 $\mathfrak{T}_S$ 的子树。

设 $S$ 是一个迁移系统，其中 $\Sigma_1 = 2^{\Sigma}$ 和 $\Sigma_2 = 2^{\Sigma \cup \{\bot\}}$ 满足某个签名 $\Sigma$。于是，我们称 $S$ 为签名 $\Sigma$ 上的迁移系统。对于 $\Sigma$ 上的一对迁移系统 $S$、$T$，如果每个有限子树

$\mathfrak{T}_S$ 的 $\mathfrak{T}'$ 都可同态嵌入 $\mathfrak{T}_T$，也就是说，存在一个映射 $h$，将 $\mathfrak{T}'$ 的顶点集映射到 $\mathfrak{T}_T$ 的顶点集，并且满足：($i$) 若 $\mathfrak{T}'$ 中的 $\mathfrak{s}$ 标记为 $a$，则 $h(\mathfrak{s})$ 标记为 $a' \supseteq a$；($ii$) 若 $\mathfrak{T}'$ 中标记为 $b$ 的 $\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$，则 $h(\mathfrak{s}) \to h(\mathfrak{s}')$ 属于 $\mathfrak{T}_T$，并标记为 $b' \supseteq b$。如果 $\mathfrak{T}_S$ 中的每条有限路径（即 $S$ 中的一次运行）都可同态嵌入 $\mathfrak{T}_T$，则称 $S$ 包含于 $T$。

设 $T = (\Sigma_1, \Sigma_2, W', L', R', W_0')$。我们将 $S$和 $T$的直积（又称同步组合）定义为迁移系统 $S \times T = (\Sigma_1, \Sigma_2, W'', L'', R'', W_0'')$，其中对于所有 $(s, s') \in W''$，$W'' = W \times W'$, $W_0'' = W_0 \times W_0'$, $L''((s, s')) = L(s) \cap L'(s')$。接着，$R''((s, s'), (t, t'))$ 当且仅当 $R(s, t)$ 和 $R'(s', t')$ 都有定义时才有定义；在这种情况下，$R''((s, s'), (t, t')) = R(s, t) \cap R'(s', t')$。$S$和 $T$的不交并是迁移系统 $S \uplus T = (\Sigma_1, \Sigma_2, W'', L'', R'', W_0'')$：必要时，通过重命名 $T$中的状态使 $W$与 $W'$不相交，然后取 $W'' = W \cup W'$, $L'' = L \cup L'$, $R'' = R \cup R'$ 和$W_0'' = W \cup W'$即可得到该系统。乘积和不交并的定义可直接推广到一组迁移系统 $S_1, \dots, S_n$。

### C.1 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$的表示

设 $\varkappa$是签名 $\Sigma$上的一个 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$-查询。我们可以自然地将 $\varkappa$与一棵树 $\mathfrak{T}_\varkappa$关联起来，如下所示。设 $\varkappa = \varrho_0' \wedge \bigwedge_i (\varrho_i \,\mathsf{U}\, \psi_i)$，其中 $\varrho_0'$, $\varrho_i$是由 $\Sigma$-原子构成的合取，$\psi_i = \varrho_i' \wedge \bigwedge_j (\varrho_j \,\mathsf{U}\, \psi_j)$，而 $\varrho_i'$是由 $\Sigma$-原子构成的合取。我们不区分合取与原子集合。树的根是 $r$，对于每个 $i$，树都有 $r \to (\varrho_i \,\mathsf{U}\, \psi_i)$，也就是说，存在顶点 $\varrho_i \,\mathsf{U}\, \psi_i$。根 $r$的标签为 $\varrho_0'$，每个 $\varrho_i \,\mathsf{U}\, \psi_i$的标签为 $\varrho_i'$。每条边 $r \to (\varrho_i \,\mathsf{U}\, \psi_i)$的标签为$\varrho_i$。于是，对于每个 $j$，树还包含 $(\varrho_i \,\mathsf{U}\, \psi_i) \to (\varrho_j \,\mathsf{U}\, \psi_j)$，其中每条这样的边都标记为 $\varrho_j$，而 $(\varrho_j \,\mathsf{U}\, \psi_j)$ 标记为 $\psi_j$的原子集合，依此类推。因此，我们将任意 $\varkappa \in \mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$ 视为一棵树。反过来，每棵有限树 $\mathfrak{T}$，若其顶点标记为 $\Sigma$ 的子集、边标记为 $\Sigma \cup \{\bot\}$ 的子集，则对应于一个 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$-查询。具体来说，设 $\mathfrak{T}$的任意一个叶节点为$x$。于是我们定义一个 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$-查询 $\varkappa_x = \bigwedge \varrho$，其中 $\varrho$是 $x$的标签。现在假设对于 $\mathfrak{T}$中的 $i \in I$，我们已有 $x \to y_i$，且 $x$的标签为 $\varrho$，而 $x \to y_i$的标签为 $\varrho_i$。我们定义 $\varkappa_x = (\bigwedge \varrho) \wedge \bigwedge_{i \in I} ((\bigwedge \varrho_i) \,\mathsf{U}\, \varkappa_{y_i})$。查询 $\varkappa_r$（其中 $r$是 $\mathfrak{T}$的根节点）就是表示 $\mathfrak{T}$所需的查询。我们将其记为 $\varkappa_{\mathfrak{T}}$。

设 $\mathcal{D}$ 是一个数据实例，$\mathcal{O}$ 是基于签名 $\Sigma$ 的 LTL 本体。设 $S$ 是基于 $\Sigma$ 的迁移系统。若满足以下条件，我们称 $S$ 表示 $\mathcal{O}, \mathcal{D}$：($i$) 对于 $\mathfrak{T}_S$ 的每个有限子树 $\mathfrak{T}'$，$\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa_{\mathfrak{T}'}$；($ii$) 对每个满足 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa$ 的 $\varkappa$，$\mathfrak{T}_\varkappa$ 都可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_S$ 中。

引理 20。设 $E = (E^+, E^-)$, $E^+ = \{\mathcal{D}_i \mid i \in I^+\}$, $E^- = \{\mathcal{D}_i \mid i \in I^-\}$，并设 $\mathcal{O}$ 是一个 LTL 本体。对于 $i \in I^+ \cup I^-$，设 $S^i$ 表示 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i$。则 ($i$) 在 $\mathcal{O}$ 下，$E$ 不能被 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$ 分离，当且仅当 $\prod_{i \in I^+} S^i$ 被 $\uplus_{i \in I^-} S^i$ 模拟；($ii$) 在 $\mathcal{O}$ 下，$E$ 不能被$\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$ 分离，当且仅当 $\prod_{i \in I^+} S^i$ 包含于 $\uplus_{i \in I^-} S^i$。

证明。我们证明（$i$）。对于（$\Rightarrow$），假设 $S^+ = \prod_{i \in I^+} S^i$ 未被$S^- = \uplus_{i \in I^-} S^i$模拟。因此，存在$\mathfrak{T}_{S^+}$的一个有限子树 $\mathfrak{T}$，它不能同态嵌入$\mathfrak{T}_{S^-}$。我们断言，$\varkappa_{\mathfrak{T}}$ 在 $\mathcal{O}$下区分 $E$。首先，我们证明，对于每个 $i \in I^+$，都有 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i \models \varkappa_{\mathfrak{T}}$。确实，对于任意这样的 $i$，令 $\mathfrak{T}^i$ 为从 $\mathfrak{T}$到 $S^i$的运行的一个投影。显然，$\mathfrak{T}^i$是$\mathfrak{T}_{S^i}$的一个有限子树，并且$\varkappa_{\mathfrak{T}^i} \models \varkappa_{\mathfrak{T}}$（$\mathfrak{T}$可同态嵌入 $\mathfrak{T}_i$）。由于 $S^i$ 表示 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i$，我们得到$\mathcal{O}, \mathcal{D}_i \models \varkappa_{\mathfrak{T}}$。其次，我们证明，对于每个 $i \in I^-$，都有 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i \not\models \varkappa_{\mathfrak{T}}$。反设，对于某个这样的 $i$，有 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i \models \varkappa_{\mathfrak{T}}$。由于 $S^i$ 表示 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i$，可知 $\mathfrak{T}$ 可同态嵌入$\mathfrak{T}_{S^i}$，因此 $\mathfrak{T}$ 可同态嵌入$\mathfrak{T}_{S^-}$，这就产生了矛盾。（$\Rightarrow$）和（$ii$）的证明类似。⊣

在不含本体的情况下为查询构造表示。给定 $\mathcal{D}$，我们构造一个迁移系统 $S$，其状态为 $0, \dots, (\max \mathcal{D} + 1)$，其中 $(\max \mathcal{D} + 1)$ 标记为 $\emptyset$，其余状态由 $\{A \mid A(j) \in \mathcal{D}\}$ 标记。转移为 $j \to k$，对于$0 \leq j < k \leq \max \mathcal{D} + 1$，其标签为 $\{A \in \Sigma \cup \{\bot\} \mid A(n) \in \mathcal{D}, n \in (j, k)\}$ 以及 $(\max \mathcal{D} + 1) \to (\max \mathcal{D} + 1)$，标签为 $\Sigma^\bot = \Sigma \cup \{\bot\}$。

引理 21. $S$ 表示 $\emptyset, \mathcal{D}$.

证明。首先，我们证明对于每个有限子树 $\mathfrak{T}'$ of $\mathfrak{T}_S$，$\mathcal{D} \models \varkappa_{\mathfrak{T}'}$。设 $\mathcal{I}_\mathcal{D}$ 是一个 LTL 解释，使得对于任意原子 $A$，$\mathcal{I}_\mathcal{D}, n \models A$ 当且仅当 $A(n) \in \mathcal{D}$。我们注意到，任何 LTL 解释 $\mathcal{I}$ 都可以视为一个迁移系统，其状态为 $n \in \mathbb{N}$，并且这些状态带有在 $n$ 处成立的原子集合 $A$ 作为标签。任意一对状态 $n < m$ 之间都存在转移，并且每个这样的转移都标记有在各自的 $i \in (n, m)$ 处成立的原子 $A$ 或 $\bot$。显然，$\mathcal{D} \models \varkappa_{\mathfrak{T}'}$ 当且仅当 $\mathfrak{T}'$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{I}_\mathcal{D}}$ 中。我们将 $\mathfrak{T}'$ 到 $\mathcal{I}_\mathcal{D}$ 的嵌入 $h$ 定义如下。令 $h(\mathfrak{0}) = 0$。假设对于 $\mathfrak{s} = 0 \to s_1 \to \dots \to s_n$，$h(\mathfrak{s})$ 已经定义，且令 $\mathfrak{s}' = 0 \to s_1 \to \dots \to s_{n+1}$。如果 $s_{n+1} < \max \mathcal{D} + 1$，则令 $h(\mathfrak{s}') = s_{n+1}$。如果 $s_{n+1} = \max \mathcal{D} + 1$，则令 $h(\mathfrak{s}') = h(\mathfrak{s}') + 1$。显然，$h$ 是一个同态。因此，$\mathfrak{T}'$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{I}_\mathcal{D}}$ 和 $\mathcal{D} \models \varkappa_{\mathfrak{T}'}$中。

其次，我们证明，对于满足 $\mathcal{D} \models \varkappa$的每个 $\varkappa$，$\mathfrak{T}_\varkappa$ 可同态嵌入 $\mathfrak{T}_S$。任取满足$\mathcal{D} \models \varkappa$的 $\varkappa$。由此可知，$\mathfrak{T}_\varkappa$ 可同态嵌入 $\mathfrak{T}_{\mathcal{I}_\mathcal{D}}$。还需注意，$\mathfrak{T}_{\mathcal{I}_\mathcal{D}}$ 可同态嵌入 $\mathfrak{T}_S$（$h$ 的定义留给读者）。⊣

定理6的判据现在可由前两个引理直接推出。表1中的其余 P 和 PSPACE 上界将在论文正文中说明。

为 LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩本体的查询构造表示。设 $\mathcal{D}$ 为数据实例，$\mathcal{O}$ 为 LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩本体。设 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 为 $\mathcal{O},\mathcal{D}$ 的典范模型，且 $s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$, $p_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 为命题 9 中的数。我们定义 $S$，其状态为$\{0,\dots,\max\mathcal{D}+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}+p_{\mathcal{O},\mathcal{D}}-1\}$。每个状态 $n$的标签为 $\{A\in\Sigma\mid\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}},n\models A\}$。对于每一对状态 $n<m$，若它们对所有 $k\in(n,m)$}均标记为 $\{A\in\Sigma\cup\{\bot\}\mid\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}},k\models A$，则存在从 $n$到 $m$的转移。此外，对于满足 $n\geq m$的 $n,m\in[\max\mathcal{D}+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}},\max\mathcal{D}+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}+p_{\mathcal{O},\mathcal{D}})$，存在从 $n$到 $m$的转移。这种转移的标签为 $\{A\in\Sigma\cup\{\bot\}\mid\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}},k\models A$，其中对所有 $k\in(n,\max\mathcal{D}+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}+p_{\mathcal{O},\mathcal{D}})\cup[\max\mathcal{D}+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}},m)$}。

引理22. $S$ 表示 $\mathcal{O},\mathcal{D}$。

证明. 首先，我们证明，对于 $\mathfrak{T}_S$ 的每个有限子树 $\mathfrak{T}'$，$\mathcal{D}\models\varkappa_{\mathfrak{T}'}$。根据 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 的性质（见第 5 节），显然，$\mathcal{D}\models\varkappa_{\mathfrak{T}'}$ 当且仅当 $\mathfrak{T}'$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$ 中。我们如下定义从 $\mathfrak{T}'$ 到 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 的嵌入 $h$。令 $h(\mathfrak{0})=0$。假设已为 $\mathfrak{s}=0\to s_1\to\dots\to s_n$ 定义了 $h(\mathfrak{s})$，并令 $\mathfrak{s}'=0\to s_1\to\dots\to s_{n+1}$。如果 $s_{n+1}>s_n$，则令 $h(\mathfrak{s}')=h(\mathfrak{s})+(s_{n+1}-s_n)$。否则，令 $h(\mathfrak{s}')=h(\mathfrak{s})+p_{\mathcal{O},\mathcal{D}}-(s_n-s_{n+1})$。容易验证，$h$ 是一个同态。因此，$\mathfrak{T}'$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$ 中，并且 $\mathcal{O},\mathcal{D}\models\varkappa_{\mathfrak{T}'}$。

其次，我们证明，对于每个满足 $\mathcal{O},\mathcal{D}\models\varkappa$ 的 $\varkappa$，$\mathfrak{T}_\varkappa$ 都可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_S$。任取满足 $\mathcal{O},\mathcal{D}\models\varkappa$ 的 $\varkappa$。由此可得，$\mathfrak{T}_\varkappa$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$。接下来只需证明 $\mathfrak{T}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$ 可同态嵌入到 $S$。为此，我们定义映射 $r\colon\mathbb{N}\to[0,\max\mathcal{D}+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}+p_{\mathcal{O},\mathcal{D}})$，令 $r(n)=n$，当 $n\in[0,\max\mathcal{D}+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}+p_{\mathcal{O},\mathcal{D}})$ 时；否则，令 $r(n)=((n-\max\mathcal{D}-s_{\mathcal{O},\mathcal{D}})\bmod p_{\mathcal{O},\mathcal{D}})+\max\mathcal{D}+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$。现在，对于 $\mathfrak{s}=0\to s_1\to\dots\to s_n$（注意 $s_i\in\mathbb{N}$ 和 $s_{i+1}>s_i$），我们定义 $h(\mathfrak{s})$ 为 $r(s_n)$。不难验证，$h$ 是从 $\mathfrak{T}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$ 到 $S$ 的同态。⊣

现在，我们可以解释定理 12 中关于 QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩$\mathcal{Q}$) 且含有 $\mathcal{Q}\in\{\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s],\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]\}$ 的数据复杂度上界（定理 11 中的上界已在正文中解释）。QBE$^{\mathsf{b}+}$(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$) 的结果（因此 QBE$^{\mathsf{b}+}_{\mathsf{b}-}$(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$) 的结果）可由以下事实推出：$\mathfrak{P}=\prod_{i\in I^+}S^i$ 和 $\mathfrak{U}=\uplus_{i\in I^-}S^i$ 可以在关于 $E$大小的多项式时间内构造出来。对于 QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$)，情况并非如此；在这里，我们利用这样一个观察：如果存在 $\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ 的一个有限子树 $\mathfrak{T}$，使其无法同态嵌入 $\mathfrak{U}$，那么也存在满足该性质的 $\mathfrak{T}$，使得 $\mathfrak{P}$ 中的每个 $s$ 在 $\mathfrak{T}$ 的每条路径上出现的次数至多为 $|\mathfrak{U}|$。令 $N^+=\prod_{i\in I^+}p_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}$。我们断言，对于 $M=\max_{i\in I^+}\{\max\mathcal{D}_i+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}\}+N^+|\mathfrak{U}|$，$\mathfrak{T}$ 是 $\mathfrak{T}^M_\mathfrak{P}$ 的一棵子树。事实上，在所需的 $\mathfrak{T}$ 中，如果存在一条长度超过 $M$ 的路径，就会违反上述性质。根据我们对 $S^i$ 的构造，$\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$的任意路径上第 $n\geq\max_{i\in I^+}\{\max\mathcal{D}_i+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}\}$ 个元素都具有 $(t_1,\dots,t_{|I^+|})$ 的形式，其中 $t_i\in[\max\mathcal{D}_i+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i},\max\mathcal{D}_i+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}+p_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i})$。注意，对于上述形式的 $(t_1,\dots,t_{|I^+|})$，若在 $\mathfrak{P}$ 中有 $(t_1,\dots,t_{|I^+|})\to(s_1,\dots,s_{|I^+|})$，则意味着 $s_i\in[\max\mathcal{D}_i+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i},\max\mathcal{D}_i+s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}+p_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i})$；并且在 $\mathfrak{P}$ 中，任何如上所述的、长度超过 $N^+|\mathfrak{U}|$ 的序列 $(t_1,\dots,t_{|I^+|})\to\dots\to(s_1,\dots,s_{|I^+|})$ 都会使某个 $(t_1,\dots,t_{|I^+|})$ 重复超过 $|\mathfrak{U}|$ 次。因此，要判定 QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$)，我们需要检查 $\mathfrak{T}^M_\mathfrak{P}$ 是否可同态嵌入 $\mathfrak{U}$。通过逐分支构造 $\mathfrak{T}^M_\mathfrak{P}$，同时检查这些分支到 $\mathfrak{U}$ 的所有可能嵌入，即可完成后一项检查。由于 $M$ 关于 $E$是多项式的，该算法在 $E$的大小上运行于 PSPACE。

接下来需要说明 QBE(线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}_p[\mathrm{U}]$) 的 NP 上界。根据引理 20 和上述论证可知，$E$ 在 $\mathcal{O}$ 下可分离，当且仅当 $\mathfrak{T}^M_\mathfrak{P}$中存在一条无法嵌入 $\mathfrak{U}$的路径。这样的路径（如果存在）大小为关于 $E$的多项式。根据 $E^-$ 和路径的大小，可以在 P 时间内检查这样的路径是否可嵌入 $\mathfrak{U}$。

构造带有线性时序逻辑本体的查询表示。设 $\mathcal{D}$ 为一个数据实例，$\mathcal{O}$ 为一个线性时序逻辑本体。我们可以假设 $\max\mathcal{D}=0$。事实上，对于给定的 $\mathcal{O}$ 和 $E$，我们可以在多项式时间内构造一个线性时序逻辑本体 $\mathcal{O}'$ 和 $E'$，使得对于 $E'$中的每个 $\mathcal{D}'$，$\max\mathcal{D}'=0$，并且 $E$在 $\mathcal{O}$下可由 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$分离，当且仅当 $E'$在 $\mathcal{O}'$下可由 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$分离。令 $\boldsymbol{T}_\mathcal{O}$为 $\mathcal{O}$-类型的集合。对于 $\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{T}_\mathcal{O}$，我们称 $\boldsymbol{T}$在 $\mathcal{O},\mathcal{D}$中可实现，如果对于 $\mathcal{O}$的所有模型 $\mathcal{I}$，都存在时刻 $n_\mathcal{I}$，使得$\{\mathrm{tp}_\mathcal{I}(n_\mathcal{I})\mid\mathcal{I}\models\mathcal{O},\mathcal{D}\}=\boldsymbol{T}$。对于 $\boldsymbol{T}_1$，若 $\boldsymbol{T}_2\subseteq\boldsymbol{T}_\mathcal{O}$在 $\mathcal{O},\mathcal{D}$和 $\Gamma\subseteq\Sigma\cup\{\bot\}$中可实现，我们定义 $\boldsymbol{T}_1\to_\Gamma\boldsymbol{T}_2$，当且仅当对于 $\mathcal{O}$的所有模型 $\mathcal{I}$，都存在时刻 $n_\mathcal{I}<m_\mathcal{I}$，使得 (*i*) $\{\mathrm{tp}_\mathcal{I}(n_\mathcal{I})\mid\mathcal{I}\models\mathcal{O},\mathcal{D}\}=\boldsymbol{T}_1$，(*ii*) $\{\mathrm{tp}_\mathcal{I}(m_\mathcal{I})\mid\mathcal{I}\models\mathcal{O},\mathcal{D}\}=\boldsymbol{T}_2$，(*iii*) $\{\mathrm{tp}_\mathcal{I}(k)\mid\mathcal{I}\models\mathcal{O},\mathcal{D},n_\mathcal{I}<k<m_\mathcal{I}\}\cap\boldsymbol{T}_2=\emptyset$，并且 (*iv*) $\Gamma=\{A\in\Sigma^\bot\mid\mathcal{I},k\models A$对所有 $\mathcal{I}\models\mathcal{O},\mathcal{D},n_\mathcal{I}<k<m_\mathcal{I}$}均成立。我们注意到，条件 (*iii*) 确保对于给定的 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$，至多存在一个满足 $\boldsymbol{T}_1\to_\Gamma\boldsymbol{T}_2$的 $\Gamma$。我们定义具有状态 $\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{T}_\mathcal{O}$的 $S$，其中这些状态在 $\mathcal{O},\mathcal{D}$中可实现。$S$的单个初始状态为 $\boldsymbol{T}_0=\{\mathrm{tp}_\mathcal{I}(0)\mid\mathcal{I}\models\mathcal{O},\mathcal{D}\}$。状态 $\boldsymbol{T}$由以下内容标记：对于所有 $\mathrm{tp}\in\boldsymbol{T}$}，$\{A\in\Sigma\mid A\in\mathrm{tp}$。若某个 $\Gamma$使得 $\boldsymbol{T}_1\to_\Gamma\boldsymbol{T}_2$成立，则存在从 $\boldsymbol{T}_1$到 $\boldsymbol{T}_2$、标记为 $\Gamma$的转移。

引理 23. $S$ 表示 $\mathcal{O},\mathcal{D}$。

证明。设 $\mathrm{I}=\{\mathcal{I}\mid\mathcal{I}\models\mathcal{O},\mathcal{D}\}$。我们将每个 $\mathcal{I}\in\mathrm{I}$ 都视为一个迁移系统，做法与上文相同。取乘积 $\prod_{\mathcal{I}\in\boldsymbol{\mathcal{I}}}\mathcal{I}$，并将其（稍微滥用一下记号）记作 I。注意，I 的状态 $s$ 是映射 $s\colon\mathrm{I}\to\mathbb{N}$。

首先，我们证明对于每个有限子树 $\mathfrak{T}'$，$\mathcal{O},\mathcal{D}\models\varkappa_{\mathfrak{T}'}$。显然，$\mathcal{O},\mathcal{D}\models\varkappa_{\mathfrak{T}'}$ 当且仅当 $\mathfrak{T}'$ 可同态嵌入 $\mathfrak{T}_{\boldsymbol{\mathcal{I}}}$。我们按如下方式定义从 $\mathfrak{T}'$ 到 I 的嵌入 $h$。令 $h(\boldsymbol{T}_0)=s_0$，其中 $s_0$ 是满足对每个 $\mathcal{I}\in\mathrm{I}$ 都有 $s_0(\mathcal{I})=0$ 的 I 的初始状态。假设对于 $\mathfrak{s}=\boldsymbol{T}_0\to\boldsymbol{T}_1\to\dots\to\boldsymbol{T}_n$，$h(\mathfrak{s})$ 已定义为等于 $s$。我们的归纳假设是 $\boldsymbol{T}_n=\{\mathrm{tp}_\mathcal{I}(s(\mathcal{I}))\mid\mathcal{I}\in\mathrm{I}\}$。容易验证，这对 $\mathfrak{s}=\boldsymbol{T}_0$ 成立。令 $\mathfrak{s}'=\boldsymbol{T}_0\to\boldsymbol{T}_1\to\dots\to\boldsymbol{T}_{n+1}$ 和 $\boldsymbol{T}_n\to_\Gamma\boldsymbol{T}_{n+1}$。对于每个 $\mathcal{I}\in\mathrm{I}$，我们选取 $m_\mathcal{I}>s(\mathcal{I})$，使得

$\boldsymbol{T}_{n+1} = \{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(m_{\mathcal{I}}) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\}$ 且 $\Gamma = \{A \in \Sigma^{\perp} \mid \mathcal{I}, k \models A$ 对于所有 $\mathcal{I} \in \mathbf{I}$ $s(\mathcal{I}) < k < m_{\mathcal{I}}\}$。该选择始终可行，这是由归纳假设得出的。然后我们设定 $h(\mathfrak{s}') = s'$，使得对于 $\mathcal{I} \in \mathbf{I}$，有 $s'(\mathcal{I}) = m_{\mathcal{I}}$。

现在，我们证明对于每个满足 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa$ 的 $\varkappa$，$\mathfrak{T}_{\varkappa}$ 都可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_S$ 中。任取满足 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa$ 的 $\varkappa$。由此可得，$\mathfrak{T}_{\varkappa}$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\boldsymbol{T}}$ 中。接下来只需证明 $\mathfrak{T}_{\boldsymbol{T}}$ 可同态嵌入到 $S$ 中。我们定义 $h$，使得 $h(s_0) = \boldsymbol{T}_0$。现在考虑 $\mathfrak{s}_1 = s_0 \to s_1$。我们不必使用 $s_1$，而总可以选择满足 $s_0 \to s_1'$, $\{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(s_1'(\mathcal{I})) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\} \subseteq \{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(s_1(\mathcal{I})) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\}$, $\{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(k) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\ s_0(\mathcal{I}) < k < s_1'(\mathcal{I})\} \cap \{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(s_1'(\mathcal{I})) \not\models \mathcal{I} \in \mathbf{I}\} = \emptyset$，并且最后满足 $\{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(k) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\ s_0(\mathcal{I}) < k < s_1'(\mathcal{I})\} \subseteq \{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(k) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\ s_0(\mathcal{I}) < k < s_1(\mathcal{I})\}$ 的 $s_1'$。我们定义 $h(\mathfrak{s}_1) = \{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(s_1'(\mathcal{I})) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\}$。根据上述包含关系可以很容易验证，在 $h$ 下，从 $s_0$ 到 $\mathfrak{s}_1$ 的边的标签（的包含关系）保持不变，而在 $h$ 下，节点 $\mathfrak{s}_1$（的包含关系）也保持不变。

现在考虑 $\mathfrak{s}_2 = s_0 \to s_1 \to s_2$。我们总能选取 $s_2'$，使得 $s_1' \to s_2'$, $\{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(s_2'(\mathcal{I})) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\} \subseteq \{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(s_2(\mathcal{I})) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\}$, $\{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(k) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\ s_1'(\mathcal{I}) < k < s_2'(\mathcal{I})\} \cap \{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(s_2'(\mathcal{I})) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\} = \emptyset$，最后，$\{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(k) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\ s_1'(\mathcal{I}) < k < s_2'(\mathcal{I})\} \subseteq \{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(k) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\ s_1(\mathcal{I}) < k < s_2(\mathcal{I})\}$。我们定义 $h(\mathfrak{s}_2) = \{\mathrm{tp}_{\mathcal{I}}(s_2'(\mathcal{I})) \mid \mathcal{I} \in \mathbf{I}\}$。

显然，我们可以将这一论证扩展到任意多个步骤，从而为任意 $\mathfrak{s} = s_0 \to \cdots \to s_n$ 定义 $h$。至此，完成了 the 引理的证明。 ⊣

## C.2 $\mathcal{Q}$[U]的表示

设 $\varkappa$ 是签名 $\Sigma$ 上的一个 $\mathcal{Q}$[U]-查询。枚举 $\varkappa$ 的所有子公式，这些子公式或者是原子 $\gamma$、$\lambda$ 的合取式（集合），或者是 $\varphi \mathsf{U} \psi$，或者是它们的合取式。我们假设不存在形如 $\varphi \mathsf{U} \varphi$ 的子公式（此类公式等价于 $\perp \mathsf{U} \varphi$）。我们可以将 $\varkappa$ 与一棵具有两种类型边的树 $\mathfrak{T}_{\varkappa}$ 关联起来：黑色边和红色边。设 $\varkappa = \gamma_0 \wedge \bigwedge_{i \in J_0} \varkappa_i$，并令 $\varkappa_i = (\lambda_i \wedge \bigwedge_{j \in I_i} \varkappa_j \mathsf{U} (\gamma_i \wedge \bigwedge_{j \in J_i} \varkappa_j))$，其中对于 $j \in I_i \cup J_i$，$\varkappa_j$ 的形式为 $\varphi \mathsf{U} \psi$。于是，树的根节点 $r$ 标记为 $\gamma_0$，并且存在黑色边 $r \to \varkappa_i$，其中 $i \in J_0$。每条这样的边标记为 $\lambda_i$，节点 $\varkappa_i$、$i \in J_0$ 标记为 $\gamma_i$。现在取任意一个 $i \in J_0$。对于每个 $j \in J_i$，存在一条黑色边 $\varkappa_i \to \varkappa_j$；对于每个 $j \in I_i$，存在一条红色边 $\varkappa_i \to \varkappa_j$。为了定义每条这样的黑色边或红色边 $\varkappa_i \to \varkappa_j$ 以及相应的 $\varkappa_j$ 的标签，我们考察 $\varkappa_j$ 的形式。设 $\varkappa_j = (\lambda_j \wedge \bigwedge_{k \in I_j} \varkappa_k) \mathsf{U} (\gamma_j \wedge \bigwedge_{k \in J_j} \varkappa_k))$。则 $\varkappa_i \to \varkappa_j$ 的标签是 $\lambda_j$，而 $\varkappa_j$ 的标签是 $\gamma_j$。边 $\varkappa_j \to \varkappa_k$ 的构造、它们的标签以及后续树的构造均以类似方式完成（在之前的构造中将 $j$ 视为 $i$）。因此，我们可以并且将把任意 $\varkappa \in \mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$ 视为树 $\mathfrak{T}_{\varkappa}$。

黑红树是指这样一种树：每条边都有黑色或红色中的一种颜色，但不能同时具有两种颜色。每棵有限的黑红树 $\mathfrak{T}$（其中顶点标记为 $\Sigma$ 的子集，边标记为 $\Sigma \cup \{\perp\}$ 的子集）都对应于一个 $\mathcal{Q}$[U]-查询。具体而言，设 $x \to y$ 是任意一条边，使得 $y$ 是 $\mathfrak{T}$ 的叶节点。然后，我们将一个 $\mathcal{Q}$[U]-查询 $\varkappa_{x \to y}$ 定义为 $\lambda \mathsf{U} \gamma$，其中 $\lambda$ 是 $x \to y$ 的标签，而 $\gamma$ 是 $y$ 的标签。现在，假设对于 $\mathfrak{T}$ 中标记为 $\lambda$ 的边 $z \to x$，存在黑色（分别为红色）转移 $x \to y_i$，其中 $i \in J$（分别为 $i \in I$）被标记为 $\gamma$。我们定义 $\varkappa_{z \to x} = (\lambda \wedge \bigwedge_{i \in I} \varkappa_{x \to y_i}) \mathsf{U} (\gamma \wedge \bigwedge_{i \in J} \varkappa_{x \to y_i})$。设 $r$ 是标记为 $\gamma$ 的 $\mathfrak{T}$ 的根。则表示 $\mathfrak{T}$ 所需的 $\varkappa_{\mathfrak{T}}$ 是 $\gamma \wedge \bigwedge_{r \to y} \text{in}_{\mathfrak{T}} \varphi_{r \to y_0}$。

此外，我们通过为上述定义的迁移系统 $S$ 的每个转移 $s \to s'$ 添加黑色或红色（但不能同时添加两种颜色），定义黑/红迁移系统 $S_{\circ}$。$S$ 的计算树 $\mathfrak{T}_S$ 仍按前述方式定义；不过，$\mathfrak{T}_S$ 中的每条边 $\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$ 都带有红色或黑色（但不能同时带有两种颜色），且其颜色与 $s_n \to s_{n+1}$ 的颜色相同。在直积 $S \times T$ 的定义中，我们现在要求：$R''((s, s'), (t, t'))$ 为红色（分别为黑色），当且仅当 $R(s, t)$ 和 $R'(s', t')$ 都为红色（分别为黑色）（标签仍按前述方式定义）。最后，在将黑/红（标记）树 $\mathfrak{T}'$ 同态嵌入另一棵同类树 $\mathfrak{T}''$ 的定义中，我们还要求：若 $\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$ 在 $\mathfrak{T}'$ 中为黑色（分别为红色），则 $h(\mathfrak{s}) \to h(\mathfrak{s}')$ 在 $\mathfrak{T}''$ 中为黑色（分别为红色）。对于数据实例 $\mathcal{D}$、LTL 本体 $\mathcal{O}$、签名 $\Sigma$ 和黑/红迁移系统 $S$，表示 $\mathcal{O}, \mathcal{D}$ 的 $S$ 定义仍然成立（将 $(ii)$ 中的 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$ 改为 $\mathcal{Q}[\mathsf{U}]$）。此外，与引理 24 $i$ 中相同的证明表明，我们有：

引理 24。设 $E = (E^+, E^-)$、$E^+ = \{\mathcal{D}_i \mid i \in I^+\}$、$E^- = \{\mathcal{D}_i \mid i \in I^-\}$，且 $\mathcal{O}$ 是一个线性时序逻辑本体。设 $S^i$ 表示 $\mathcal{O}$、$\mathcal{D}_i$，其中 $i \in I^+ \cup I^-$。则 $E$ 在 $\mathcal{O}$ 下不是 $\mathcal{Q}$[U]-可分的，当且仅当 $\prod_{i \in I^+} S^i$ 被 $\uplus_{i \in I^-} S^i$ 模拟。

在没有本体的情况下构造查询的表示。设 $\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e} \subseteq \mathbb{N}$ 是有限且非空的。对于任意 $d \in \boldsymbol{d}$，令 $\mu(d) = \min\{e \in \boldsymbol{e} \mid d < e\}$。如果 $\mu$ 是一个满射函数，我们记 $\boldsymbol{d} \lessdot \boldsymbol{e}$，并令

$$\nabla(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) = \bigcup_{d \in \boldsymbol{d}} \{d' \in \mathbb{N} \mid d < d' < \mu(d)\}.$$

例 25。设 $\boldsymbol{d} = \{1, 2, 3\}$ 和 $\boldsymbol{e} = \{3, 4\}$。则 $\boldsymbol{d} \lessdot \boldsymbol{e}$，其中 $\nabla(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) = \{2\}$。然而，对于 $\boldsymbol{d} = \{1, 2\}$ 和 $\boldsymbol{e} = \{3, 4\}$，我们既没有 $\boldsymbol{d} \lessdot \boldsymbol{e}$（因为 $\mu$ 不是满射），也没有 $\boldsymbol{e} \lessdot \boldsymbol{d}$（因为 $\mu$ 未定义）。

给定一个数据实例 $\mathcal{D}, \boldsymbol{e} \subseteq \mathbb{N}$ 和一个原子 $A$（可能是 $\perp$），若对所有 $e \in \boldsymbol{e}$ 都有 $A(e) \in \mathcal{D}$，则记作 $\mathcal{D}, \boldsymbol{e} \models A$。我们构造一个黑/红转移系统 $S$，其状态集合为 $\{0, z, u\} \cup \{\boldsymbol{de} \mid \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \subseteq \{0, \dots, \max \mathcal{D}\}\}$。0 的标签为 $\{A \mid A(0) \in \mathcal{D}\}$，$z$的标签为 $\emptyset$，$u$ 的标签为 $\Sigma^{\perp}$，而对所有 $e \in \boldsymbol{e}\}$，$\boldsymbol{de}$的标签为 $\{A \mid A(e) \in \mathcal{D}$。转移标签的字母表为 $2^{\Sigma \cup \{\perp\}}$。从 0 出发，我们有

$(i)$ 黑色转移到每个满足 $\{0\} \lessdot \boldsymbol{d}$（这意味着 $|\boldsymbol{d}| = 1$）且 $\boldsymbol{e} = \nabla(\{0\}, \boldsymbol{d})$ 的 $\boldsymbol{ed}$，并标记为集合 $\{A \in \Sigma^{\perp} \mid \mathcal{D}, \boldsymbol{e} \models A\}$。

对于每个 $\boldsymbol{ed}$，我们有

（$ii$）一条指向每个满足 $\boldsymbol{d} \lessdot \boldsymbol{g}$ 且 $\boldsymbol{f} = \nabla(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{g})$ 的 $\boldsymbol{fg}$ 的黑色转移，标签为 $\{A \in \Sigma^{\perp} \mid \mathcal{D}, \boldsymbol{f} \models A\}$，

（$iii$）一条指向每个满足 $\boldsymbol{e} \lessdot \boldsymbol{g}$ 且 $\boldsymbol{f} = \nabla(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{g})$ 的 $\boldsymbol{fg}$ 的红色转移，标签为 $L = \{A \in \Sigma^{\perp} \mid \mathcal{D}, \boldsymbol{f} \models A\}$。

状态 $z$ 有一条指向自身、标签为 $\Sigma^{\perp}$ 的黑色转移和一条红色转移；$u$ 也同样如此。对于每个 $\boldsymbol{ed}$，都有一条标签为 $\{A \in \Sigma \cup \{\perp\} \mid \mathcal{D}, \{\max \boldsymbol{d}, \ldots, \max \mathcal{D} - 1\} \models A\}$、从该状态指向 $z$ 的黑色转移；对于每个 $\boldsymbol{ed}$，都有一条标签为 $\{A \in \Sigma^{\perp} \mid \mathcal{D}, \{\max \boldsymbol{e}, \ldots, \max \mathcal{D} - 1\} \models A\}$、从该状态指向 $z$ 的红色转移。最后，每个 $\emptyset\boldsymbol{d}$ 都有一条指向 $u$ 的红色转移，且 $z$ 也有一条指向 $u$ 的红色转移；这些转移的标签均为 $\Sigma^{\perp}$。

引理 26。 $S$ 表示 $\emptyset$、$\mathcal{D}$。

证明。首先，我们证明，对于 $\mathfrak{T}_S$的每个有限子树 $\mathfrak{T}'$， $\mathcal{D} \models \varkappa_{\mathfrak{T}'}$。令 $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$为一个线性时序逻辑解释，使得 $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$， $n \models A$当且仅当 $A$ $n$ $\in \mathcal{D}$ $A$ $\mathcal{I}$ $\{0, u\} \cup \{\boldsymbol{de} \mid (\ )$，对于任意原子。 $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \subseteq \mathbb{N}, \boldsymbol{e} \neq \emptyset\}$ $0$ $\{A \in \Sigma \mid \mathcal{D}, 0 \models A\}$ $u$ $\Sigma^{\perp}$ $\boldsymbol{de}$
我们将任意线性时序逻辑解释视为状态为 的黑/红转移系统。状态 被标记为， 被标记为，而每个状态均被标记为$\{A \in \Sigma \mid \mathcal{D}, \boldsymbol{e} \models A\}$。从 0 出发，根据 ($i$)存在黑色转移。从每个 $\boldsymbol{ed}$出发，分别根据 ($ii$)和 ($iii$)存在黑色转移和红色转移。状态 $u$ 有一条指向自身的黑色转移和一条红色转移，并且从每个状态 $\emptyset\boldsymbol{e}$ 都有一条转移；所有这些转移均标记为 $\Sigma^{\perp}$。显然， $\mathcal{D} \models \varkappa_{\mathfrak{T}'}$ 当且仅当 $\mathfrak{T}'$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{I}_{\mathcal{D}}}$中。我们如下定义从 $\mathfrak{T}'$到 $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$的嵌入 $h$。令 $h(\mathfrak{0}) = 0$。假设对于 $\mathfrak{s} = 0 \to s_1 \to \cdots \to s_n$， $h(\mathfrak{s})$已经定义，并令 $\mathfrak{s}' = 0 \to s_1 \to \cdots \to s_{n+1}$。首先，假设对于 $\boldsymbol{e} \subseteq [0,$， $s_{n+1} = \boldsymbol{de} \max \mathcal{D}]$。于是令 $h(\mathfrak{s}') = \boldsymbol{de}$。假设$s_{n+1} = z$。于是，对于某些 $\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e} \subseteq \mathbb{N}$，令 $h(\mathfrak{s}_n) = \boldsymbol{de}$。如果 $s_n \to s_{n+1}$为黑色，则令 $h(\mathfrak{s}') = \emptyset\{e + 1 \mid e \in \boldsymbol{e}\}$；如果为红色，则令 $h(\mathfrak{s}') = \emptyset\{d + 1 \mid d \in \boldsymbol{d}\}$。最后，如果 $s_{n+1} = u$，则令 $h(\mathfrak{s}') = u$。直接验证可知， $h$ 是一个同态。因此， $\mathfrak{T}'$可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{I}_{\mathcal{D}}}$和 $\mathcal{D} \models \varkappa_{\mathfrak{T}}$中。

其次，我们证明，对于每个满足 $\mathcal{D} \models \varkappa$的 $\varkappa$， $\mathfrak{T}_{\varkappa}$都可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_S$ 中。任取满足$\mathcal{D} \models \varkappa$的 $\varkappa$。由此可得， $\mathfrak{T}_{\varkappa}$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{I}_{\mathcal{D}}}$中。还需指出， $\mathfrak{T}_{\mathcal{I}_{\mathcal{D}}}$ 可同态嵌入到 $S$中。事实上，我们定义 $h(\mathfrak{0}) = 0$。令 $\mathfrak{s} = 0 \to s_1 \to \cdots \to s_n$，其中 $n \geq 1$。如果对于 $\boldsymbol{e} \subseteq [0,$， $s_n = \boldsymbol{de}$ 满足$\max \mathcal{D}]$，那么 $h(\mathfrak{s}) = s_n$。如果$\max \boldsymbol{e} > \max \mathcal{D}$，则令 $h(\mathfrak{s}) = z$。最后，如果 $s_n = u$，则令 $h(\mathfrak{s}) = u$。不难验证， $h$ 是一个从 $\mathfrak{T}_{\mathcal{I}_{\mathcal{D}}}$ 到 $S$的同态。⊣

现在我们解释为什么 QBE($\mathcal{Q}$[U]) 属于 PSPACE。为此，我们注意到， $S$的每次长度为 $> \max \mathcal{D}$的运行，最终都会得到 $s = z$ 或 $s = u$。此外，如果 $s = u$，那么该运行后续的所有状态也都是 $u$。因此，$\mathfrak{P} = \prod_{i \in I^+} S^i$ 的任何长度为 $> \max_{i \in I^+} \{\max \mathcal{D}\}$ 的运行，都会处于状态 $s = (t_1, \ldots, t_{|I^+|})$，其中 $t_i \in \{u, z\}$。于是，对于 $M = \max_{i \in I^+ \cup I^-} \{\max \mathcal{D}\} + 1$， $\mathfrak{T}_{\mathfrak{P}}^M$会被映射到 $\mathfrak{U} = \uplus_{i \in I^-} S^i$；若映射 $h$存在，则映射方式应使 $h(s_0 \to \cdots \to s_M)$为 $z$或 $u$（在相应的$S$中表示 $\mathcal{D}_i, i \in I^-$）。由此可知，如果 $\mathfrak{T}_{\mathfrak{P}}^M$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{U}$中，那么 $\mathfrak{T}_{\mathfrak{P}}$的任意有限子树都可同态嵌入到 $\mathfrak{U}$中。要判定 QBE($\mathcal{Q}$[U])，我们可以像处理 $\mathcal{Q}[\mathrm{U}_s]$的情形那样，逐分支检查 $\mathfrak{T}_{\mathfrak{P}}^M$的可嵌入性。不过请注意，$\mathrm{QBE}^{\mathsf{b}+}(\mathcal{Q}[\mathrm{U}])$ 和 $\mathrm{QBE}_{\mathsf{b}}^{\mathsf{b}+}(\mathcal{Q}[\mathrm{U}])$ 是否存在多项式算法仍未解决，因为限制正例的数量并不能得到多项式大小的 $\mathfrak{P}$。

用于查询的线性时序逻辑$\Box\bigcirc$霍恩本体的表示构造。设 $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ 为区间$[0, P)$的有限非空子集，其中 $P \in \mathbb{N}$，且 $M \in \mathbb{N}$。对于任意 $d \in \boldsymbol{d}$，令 $\mathrm{succs}(d, \boldsymbol{e}) = \{e \in \boldsymbol{e} \mid d < e\}$ 并令

$$\mu(d) = \begin{cases} \min \mathrm{succs}(d, \boldsymbol{e}), & \text{if either } d \in [0, M) \text{ or both } d \in [M, P) \text{ and } \mathrm{succs}(d, \boldsymbol{e}) \neq \emptyset, \\ \min(\boldsymbol{e}), & \text{if } d \in [M, P) \text{ and } \mathrm{succs}(d, \boldsymbol{e}) = \emptyset. \end{cases}$$

若 $\mu$ 是满射 $\boldsymbol{d} \to \boldsymbol{e}$ 函数，我们记作$\boldsymbol{d} \lessdot_{M,\ P} \boldsymbol{e}$ 并设$\nabla_{M,\ P}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) = \bigcup_{d \in \boldsymbol{d}} \{d' \in \mathrm{bwn}(d, \mu(d))\}$，其中 $\mathrm{bwn}(d, e) = (d, e)$ 当且仅当 $d < e$，而 $(e, P) \cup [M, d)$ 当且仅当 $d \geq e$。

例27。设 $M = 2, P = 8, \boldsymbol{d} = \{1, 4, 6, 7\}$ 和 $\boldsymbol{e} = \{3, 5\}$。则$\boldsymbol{d} \lessdot_{M,\ P} \boldsymbol{e}$ 其中$\nabla_{M,\ P}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) = \{2, 7\}$。

设 $\mathcal{D}$ 为一个数据实例， $\mathcal{O}$ 为一个线性时序逻辑$\Box\bigcirc$ 霍恩本体。设 $\mathcal{C}_{\mathcal{O}、\ \mathcal{D}}$ 为 $\mathcal{O}$的典范模型， $\mathcal{D}$ 以及 $s_{\mathcal{O}、\ \mathcal{D}}$、 $p_{\mathcal{O}、\ \mathcal{D}}$ 为命题 9 中的数值。设 $\max \mathcal{D} + s_{\mathcal{O}、\ \mathcal{D}} = M$以及 $\max \mathcal{D} + s_{\mathcal{O}、\ \mathcal{D}} + p_{\mathcal{O}、\ \mathcal{D}} = P$。我们定义具有状态$\{0, u\} \cup \{\boldsymbol{de} \mid \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \subseteq [0, P)\}$的 $S$。状态 0 的标签为 $\{A \in \Sigma \mid \mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}, 0 \models A\}$，状态 $\boldsymbol{de}$的标签为 $\{A \in \Sigma \mid \mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}, \boldsymbol{e} \models A\}$，状态 $u$ 的标签为 $\Sigma^{\perp}$。我们按照上文 ($i$)–($iii$) 中的规定定义 0 与 $\boldsymbol{de}$ 之间的（红色和黑色）转移，但使用$\lessdot_M$、$_P$代替 $\lessdot$、$\nabla_M$，使用 $_P$代替 $\nabla$，并使用 $\mathcal{C}_{\mathcal{O}、\ \mathcal{D}}$、$\boldsymbol{e}$ 代替 $\mathcal{D}$、$\boldsymbol{e}$（ $\boldsymbol{f}$也同样适用）。最后，我们按照上文的定义定义 $\emptyset\boldsymbol{e}$ 与 $u$之间的转移。

引理28. $S$ 表示 $\mathcal{O}, \mathcal{D}$。

证明。首先，我们证明对于 $\mathfrak{T}_S$ 的每个有限子树 $\mathfrak{T}'$， $\mathcal{D} \models \varkappa_{\mathfrak{T}'}$。由 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 的性质可知， $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa_{\mathfrak{T}'}$ 当且仅当 $\mathfrak{T}'$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$ 中。我们定义一个从 $\mathfrak{T}'$ 到 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 的嵌入 $h$，如下所示。令 $h(\mathfrak{0}) = 0$。假设已定义了 $h(\mathfrak{s})$（其中 $\mathfrak{s} = 0 \to s_1 \to \cdots \to s_n$）且 $\mathfrak{s}' = 0 \to s_1 \to \cdots \to s_{n+1}$。若 $s_n = u$，则令 $h(\mathfrak{s}') = u$。假设 $s_n = \boldsymbol{de}$ 且 $s_{n+1} = \boldsymbol{fg}$。对于引理22中的映射 $r$，我们将有一个归纳假设： $r(\boldsymbol{d}') = \boldsymbol{d}$ 且 $r(\boldsymbol{e}') = \boldsymbol{e}$。首先，

我们假设 $s_n \to s_{n+1}$ 是黑色转移。于是 $\boldsymbol{e} \preccurlyeq_{M,P} \boldsymbol{g}$，并令 $\mu_{M,P}$ 为相应的（满射）映射。我们通过如下方式构造映射 $\mu'\colon \boldsymbol{e}' \to \mathbb{N}$：

$$\mu'(e) = \begin{cases} e + \mu_{M,P}(r(e)) - r(e), & \text{if } \mu_{M,P}(r(e)) > r(e); \\ e + p_{\mathcal{O},\mathcal{D}} - r(e) + \mu_{M,P}(r(e)), & \text{otherwise,} \end{cases}$$

对每个 $e \in \boldsymbol{e}'$。我们设 $h(\mathfrak{s}') = \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}'$，其中 $\boldsymbol{g}' = \mu'(\boldsymbol{e}')$ 且 $\boldsymbol{f}' = \nabla(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}')$。注意，$r(\boldsymbol{f}') = \boldsymbol{f}$ 且 $r(\boldsymbol{g}') = \boldsymbol{g}$，因此归纳假设仍然成立。当 $s_n \to s_{n+1}$ 是红色转移时，情况类似，留给读者验证。容易验证，$h$ 是从 $\mathfrak{T}'$ 到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$ 的同态。

现在，我们证明对于每个满足 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa$ 的 $\varkappa$，$\mathfrak{T}_\varkappa$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_S$。任取满足 $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa$ 的 $\varkappa$。由此可得，$\mathfrak{T}_\varkappa$ 可同态嵌入到 $\mathfrak{T}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$。接下来只需证明 $\mathfrak{T}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}}$ 可同态嵌入到 $S$。我们定义 $h$，使得 $h(\mathbf{0}) = 0$，$h(\mathfrak{s}) = u$，其中 $\mathfrak{s} = s_0 \to s_1 \to \cdots \to u$。对于 $\mathfrak{s} = s_0 \to s_1 \to \cdots \to \boldsymbol{d}\boldsymbol{e}$，我们设 $h(\mathfrak{s}) = r(\boldsymbol{d})r(\boldsymbol{e})$。容易验证，$h$ 是同态。⊣

为了证明 QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ horn $\mathcal{Q}$[U]) 的双指数时间上界，我们注意到，表示 $\mathcal{O}, \mathcal{D}$ 的 $S$ above 可以在时间 $O(2^{2^{|\mathcal{O}|+|\mathcal{D}|}})$ 内构造出来，因为 $S$ 有这么多个状态。为了证明 PSPACE 上界，令 $N_i$ 表示 $S$ 中状态的数量，其中 $S$ 表示 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i$，对 $i \in I^+ \cup I^-$ 而言，其形式为 $u, z$ 或 $\boldsymbol{d}\boldsymbol{e}$，且 $(\boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{e}) \cap [0, \max \mathcal{D}_i + s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}) = \emptyset$。我们设定 $N^+ = \prod_{i \in I^+} N_i$。与引理 22 之后的论证类似，我们注意到，如果 $\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ 存在一个有限子树 $\mathfrak{T}$，它不能同态嵌入 $\mathfrak{U}$，那么就存在这样一个 $\mathfrak{T}$，满足以下性质：来自 $\mathfrak{P}$ 的每个 $s$，在 $\mathfrak{T}$ 的每条路径上出现的次数至多为 $K^- = \max_{i \in I^-} \{\max \mathcal{D}_i + s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i} + N_i\}$ 次。因此，所需的 $\mathfrak{T}$（如果存在）是 $\mathfrak{T}^M_\mathfrak{P}$ 的一个子树，其中 $M = \max_{i \in I^+} \{\max \mathcal{D}_i + s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}\} + N^+K^-$。事实上，在所需的 $\mathfrak{T}$ 中，如果存在一条长度超过 $M$ 的路径，就会违反上述性质。根据我们对 $S^i$ 的构造，$\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ 的任意路径上的第 $n \geq$ 个元素（其中 $n \geq \max_{i \in I^+} \{\max \mathcal{D}_i + s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}\}$）都具有 $(t_1, \ldots, t_{|I^+|})$ 的形式，其中 $t_i$ 是 $u, z$，或满足 $(\boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{e}) \cap [0, \max \mathcal{D}_i + s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}) = \emptyset$ 的 $\boldsymbol{d}\boldsymbol{e}$。注意，对于如上所述的 $(t_1, \ldots, t_{|I^+|})$，若在 $\mathfrak{P}$ 中有 $(t_1, \ldots, t_{|I^+|}) \to (s_1, \ldots, s_{|I^+|})$，则 $s_i$ 必为 $u, z$，或满足 $(\boldsymbol{d} \cup \boldsymbol{e}) \cap [0, \max \mathcal{D}_i + s_{\mathcal{O},\mathcal{D}_i}) = \emptyset$ 的 $\boldsymbol{d}\boldsymbol{e}$。在 $\mathfrak{P}$ 中，任何如上所述且长度超过 $N^+K^-$ 的序列 $(t_1, \ldots, t_{|I^+|}) \to \cdots \to (s_1, \ldots, s_{|I^+|})$，都会使某个 $(t_1, \ldots, t_{|I^+|})$ 重复超过 $K^-$ 次。

## D 第 5 节的证明

令 $E^+ = \{\mathcal{D}_1^+, \ldots, \mathcal{D}_n^+\}$ 和 $E^- = \{\mathcal{D}_1^-, \ldots, \mathcal{D}_l^-\}$，并令 $\mathcal{O}$ 为一个线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}$霍恩本体。对于每个 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$，其中 $\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-$，令 $s_{\mathcal{O},\mathcal{D}} \leq 2^{|\mathcal{O}|}$ 和 $p_{\mathcal{O},\mathcal{D}} \leq 2^{2|\mathcal{O}|}$ 分别表示 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 中“柄”的长度和“周期”的长度（由命题 9 给出）。设

$$k = \max_{\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-} (\max \mathcal{D} + s_{\mathcal{O},\mathcal{D}}), \qquad m = \prod_{\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-} p_{\mathcal{O},\mathcal{D}}.$$

引理 29。(*i*) 若 $E$ 是 $\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$ -可分的，则它可由至多 $l$ 个 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$ 的合取分离 $\Diamond$-深度 $\leq k+1$ 和 $\bigcirc$-深度 $\leq k+m$。

(*ii*) 如果 $E$ 在 $\mathcal{O}$ 下是 $\mathcal{Q}[\Diamond]$-可分的，那么可以用至多 $l$ 个深度为 $\leq k+1$ 的 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[\Diamond]$ 的合取将其分离。(*iii*) 如果 $E$ 在 $\mathcal{O}$ 下是 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$-可分的，那么存在某个深度为 $\leq k+l$ 和 $\leq k+m$ 的 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$ 将其分离。

(*iv*) 如果 $E$ 在 $\mathcal{O}$ 下是 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$-可分的，那么存在某个深度为 $\leq k+l$ 的 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[\Diamond]$ 将其分离。

证明。回想一下，任意 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 的类型构成一个序列

$$tp_0, \ldots, tp_k, tp_{k+1}, \ldots, tp_{k+m}, \ldots, tp_{k+1}, \ldots, tp_{k+m}, \ldots.$$

(*i*) 回想定理 4 的证明 (*i*.3)，我们可以假设，对于任意 $\mathcal{D}^- \in E^-$，都存在一个查询 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$，将 $(E^+, \{\mathcal{D}^-\})$ 分离。因此，令 $\mathcal{D}^- \in E^-$，并假设 $(E^+, \{\mathcal{D}^-\})$ 在 $\mathcal{O}$ 下是 $\mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$-可分的。那么存在一个分离器

$$\varkappa = \rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_n))$$

其中每个 $\rho_r$ 的 $\bigcirc$ 深度为 $\leq k+m$。事实上，鉴于典范模型的形式，如果 $\rho_r = \bigwedge_{i=0}^{\ell} \bigcirc^i \lambda_i$ 满足 $\ell > k+m$，则可以将 $\rho_r$ 替换为

$$\rho'_r = \bigwedge_{i=0}^{k} \bigcirc^i \lambda_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \bigcirc^{k+j} \bigwedge_{\substack{0 \leq i \leq \ell \\ j = (i-k) \bmod m}} \lambda_i.$$

此外，如果 $n > k$，那么该查询

$$\rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_k)) \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{n} \Diamond^{k+1} \rho_i$$

在 $\mathcal{O}$ 下仍将 $(E^+, \{\mathcal{D}^-\})$ 分离，因此存在某个 $\rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond(\rho_k \wedge \Diamond\rho_j))$，它在 $\mathcal{O}$ 下将 $(E^+, \{\mathcal{D}^-\})$ 分离。

（$ii$）可通过从（$i$）的证明中删去 $\bigcirc$-查询来证明。

（$iii$）对（$i$）的证明表明，如果 $E$ 在 $\mathcal{O}$ 下是 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$-可分的，那么就存在一个分离器 r

$$\rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_k)) \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{n} \Diamond^{k+1}\rho_i$$

其中每个 $\rho_r$ 的 $\bigcirc$-深度均为 $\leq k+m$。现在，对于每个负例 $\mathcal{D}^-$，我们可以选取一个 $j$，使得

$$\rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond(\rho_k \wedge \Diamond\rho_j))$$

在 $\mathcal{O}$ 下分离（$E^+$，$\{\mathcal{D}^-\}$）。令 $j_1$、.....、$j_l$ 为如此选出的对象。则

$$\rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond(\rho_k \wedge \Diamond(\rho_{j_1} \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_{j_l}))))$$

在 $\mathcal{O}$ 下分离 $E$。

（$iv$）可通过从（$iii$）的证明中删去 $\bigcirc$-查询来证明。 ⊣

定理 10. 设 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond], \mathcal{Q}[\Diamond], \mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond], \mathcal{Q}_p[\Diamond]\}$。那么，QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}$) 和 QBE$^{b+}_{b-}$(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}$) 的组合复杂度均为 PSPACE 完备。

证明. 下界由 [Chen 和 Lin, 1994] 得出。我们先给出 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$ 的上界证明。

设 $E^+ = \{\mathcal{D}_1^+, \ldots, \mathcal{D}_n^+\}$ 和 $E^- = \{\mathcal{D}_1^-, \ldots, \mathcal{D}_l^-\}$。我们使用引理 29（$iv$）。令 $k$ 和 $m$ 如引理 29 中所述。该非确定性算法首先猜测一个原子合取式 $\rho_0$，并在 PSPACE 中检查：对于所有 $i \in [1,n]$，$\mathcal{O}, \mathcal{D}_i^+ \models \rho_0(0)$。我们使用数字 $d_i^+, d_j^- \leq k+m$ 表示 $i \in [1,n], j \in [1,l]$，并使用集合 $N \subseteq [1,l]$ 跟踪尚待区分的负例。初始时，我们将所有 $d_i^+, d_j^- = 0$ 设为 $N = \{j \in [1,l] \mid \mathcal{O}, \mathcal{D}_j^- \models \rho_0(0)\}$。然后重复以下步骤，直到 $N = \emptyset$；此时算法终止并接受输入：

- 猜测一个合取 $\rho$，由 $\mathcal{O}$ 和 $E$签名中的原子构成。
- 对于每个 $i \in [1,n]$，在 PSPACE 中检查 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i^+ \models \Diamond\rho(d_i^+)$，若不满足则拒绝。
- 猜测 $d_i^{+\prime}$，使得 $\min(d_i^+, k) < d_i^{+\prime} \leq k+m$ 且 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i^+ \models \rho(d_i^{+\prime})$。
- 对于每个 $j \in N$，检查 $\mathcal{O}$、$\mathcal{D}_j^- \models \Diamond\rho$（$d_i^-$）。如果否，则从 $N$中移除 $j$。否则，在 PSPACE 中找到最小的 $d_i^{-\prime}$，使得 $\min(d_i^-, k) < d_i^{-\prime} \leq k+m$ 且 $\mathcal{O}$、$\mathcal{D}_i^- \models \rho$（$d_i^{-\prime}$）。
- 令集合 $d_i^+ := d_i^{+\prime}$，并对所有仍在 $N$ 中的 $j$，令 $d_j^- := d_i^{-\prime}$。

设 $\varphi_i = \rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\ldots(\rho_{i-1} \wedge \Diamond\rho_i)\ldots)$，其中 $\rho_i$ 是第 $i$ 次迭代中猜测的原子合取式。设 $N_i$ 为第 $i$ 次迭代后的 $N$。那么，对于所有 $j \in [1,n]$，我们都有 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_j^+ \models \varphi_i(0)$；对于所有 $j \in N_i$，我们都有 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_j^- \models \varphi_i(0)$；对于所有 $j \in [1,l] \setminus N_i$，我们都有 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_j^- \not\models \varphi_i(0)$。因此，算法在第 $\ell$ 次迭代后接受，当且仅当 $\varphi_\ell$ 分离 $(E^+, E^-)$。

根据引理 29（$ii$），这也给出了一个用于 $\mathcal{Q}[\Diamond]$ 的 PSPACE 算法。根据引理 29（$i$），对于 $\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$，只需给出一个用于 $\mathcal{Q}_p^\circ[\Diamond]$ 的 PSPACE 算法，这可以通过修改上述算法得到。

算法首先猜测一个原子合取式 $\lambda_0$，并检查对于所有 $i \in [1,n]$，$\mathcal{O}, \mathcal{D}_i^+ \models \lambda_0(0)$ 是否成立；这可以在 PSPACE 内完成。我们使用数字 $d_i^+, d_i^- \leq k+m$（用于 $\Diamond$-子公式）和 $c \leq k+m$（用于 $\bigcirc$-公式），以及集合 $N \subseteq [1,l]$，用来跟踪尚待分离的负例。初始时，我们将所有 $d_i^+, d_j^- = 0, c = 0$ 和 $N = [1,l]$ 设定好。然后重复执行（1）或（2），直到 $N = \emptyset$，此时算法接受输入并终止：

（1）– 设置 $c = 0$。– 猜测 $\lambda$ 的一个合取，其中包含 $\mathcal{O}$ 和 $E$的签名中的原子。– 对每个 $i \in [1,n]$，在 PSPACE 中检查 $\mathcal{O}$、$\mathcal{D}_i^+ \models \Diamond\lambda$（$d+i$），若不满足则拒绝。– 猜测 $d_i^{+\prime}$，使得 $\min(d+, k) < d^{+\prime} \leq k+m$，并且 $\mathcal{O}$、$\mathcal{D}_i^+ \models \lambda$（$d^{+\prime}$）。– 对每个 $j \in N$，检查 $\mathcal{O}$、$\mathcal{D}_j^- \models \Diamond\lambda$（$d_i^-$）。若不满足，则从 $N$中移除 $j$。否则，在 PSPACE 中找出满足 $\min(d_i^-, k) < d^{-\prime} \leq k+m$ 且 $\mathcal{O}$、$\mathcal{D}_i^- \models \lambda$（$d^{-\prime}$）的最小 $d^{-\prime}$。– 设置 $d_i^+ = d_i^{+\prime}$，并对 $N$中仍然存在的所有 $j$ 设置 $d_j^- = d_i^{-\prime}$。（2）

– 递增 $c$ ，已提供 $c < m+k$ .

– 猜测 $\mathcal{O}$ 和 $E$ 的签名中的原子合取 $\lambda$。– 对每个 $i \in [1,n]$，在 PSPACE 中检查 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_i^+ \models \lambda(d_i^+ + c)$，若不满足则拒绝。– 对每个 $j \in N$，检查 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_j^- \models \lambda(d_i^- + c)$。若不满足，则从 $N$ 中移除 $j$。

针对 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$ 的 PSPACE 算法与上面的算法类似：它利用引理 29（$iii$）来猜测查询中的下一个时态算子$\bigcirc$ 或 $\Diamond$。⊣

定理 11. QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\mathbf{U}_s]$) 的组合复杂性属于 ExpTime，QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}_p[\mathbf{U}]$) 属于 ExpSpace，而 QBE$_{\mathsf{b}}^{\mathsf{b}+}$(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}_p[\mathbf{U}]$) 是非确定性指数时间xpTime困难的。

证明. 上界可由上面的引理 20 和引理 22 得出，具体解释见论文正文。

现在我们证明非确定性指数时间下界。设 $\boldsymbol{M}$ 是一台非确定性图灵机，它在至多 $N = 2^{p(|\boldsymbol{x}|)}$ 步内接受带字母表上的字符串 $\boldsymbol{x}$，其中 $p$ 是某个多项式。给定这样的 $\boldsymbol{M}$ 和一个输入 $\boldsymbol{x}$，我们的目标是定义一个线性时序逻辑霍恩 本体 $\mathcal{O}$ 和一个示例集 $E = (E^+ = \{\mathcal{D}_1^+, \mathcal{D}_2^+\}, E^- = \{\mathcal{D}^-\})$，其大小关于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 为多项式，使得当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 接受 $\boldsymbol{x}$ 时，$E$ 能被一个 $\mathcal{Q}_p[\mathbf{U}]$ 查询在 $\mathcal{O}$ 下分离。

设 $\boldsymbol{M}$ 的状态集合为 $Q$，带字母表为 $\Sigma$，其中 $\mathsf{b}$ 表示空白符，初始状态为 $q_0$，接受状态为 $q_{acc}$。不失一般性地，假设 $\boldsymbol{M}$ 在接受前擦除带，并且在任何接受配置中，其读写头都位于最左侧单元格。

给定一个关于 $\Sigma$的输入词 $\boldsymbol{x} = x_1 \dots x_n$，我们将 $\boldsymbol{M}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上的计算配置 $\mathfrak{c}$ 表示为写在带上的一个长度为（$N-1$）的词（末尾附有足够多的空白符）；其中，活动单元格中的符号 $y$ 被替换为对 $(q, y)$，并带有当前状态 $q$。$\boldsymbol{M}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上的一次接受计算由字母表 $\Xi = \Sigma \cup (Q \times \Sigma) \cup \{\sharp\}$上的词 $w = \sharp\mathfrak{c}_1\sharp\mathfrak{c}_2\sharp\dots\sharp\mathfrak{c}_{N-1}\sharp\mathfrak{c}_N$编码，其中 $\mathfrak{c}_1$、$\mathfrak{c}_2$、.....、$\mathfrak{c}_N$是该计算中依次出现的配置。特别地，$\mathfrak{c}_1$是初始配置 $(q_0, x_1)x_2 \dots x_n\mathsf{b} \dots \mathsf{b}$，而 $\mathfrak{c}_N$是接受配置 $\mathfrak{c}_{acc} = (q_{acc}, \mathsf{b})\mathsf{b} \dots \mathsf{b}$。因此，任何接受计算都由字母表 $\Xi$上的一个长度为 $N^2$的词编码（我们允许 $\mathfrak{c}_{acc}$出现在 $\mathfrak{c}_{acc}$之后）。

一个元组 $\mathfrak{t} = (a, b, c, d, e, f) \in (\Xi)^6$ 称为合法的 [Sipser, 1997, 定理 7.37] 如果存在两个连续的配置 ns $\mathfrak{c}_1$ 和 $\mathfrak{c}_2$ 的 $\boldsymbol{M}$ 以及一个数 $i$使得

$$abcdef = \mathfrak{c}_1[i]\mathfrak{c}_1[i+1]\mathfrak{c}_1[i+2]\mathfrak{c}_2[i]\mathfrak{c}_2[i+1]\mathfrak{c}_2[i+2],$$

其中，$\mathfrak{c}_j[i]$ 是 $\mathfrak{c}_j$中的第 $i$个符号。令 $\mathfrak{L} \subseteq (\Xi)^6$ 为所有合法元组的集合（另加少数几个 6 元组，用于处理$\sharp$），其具有以下性质：当且仅当一个单词 $w$ 以初始配置及其前置的 $\sharp$开头、以接受配置结尾，并且任意两个距离为 $N$ 的长度为 3 的子词构成一个合法元组时，该单词编码一个接受计算。令$\bar{\mathfrak{L}} = (\Xi)^6 \setminus \mathfrak{L}$。

对于任意 $k > 0$，我们将 $k$-计数器定义为一组 $\mathbb{A} = \{A_j^i \mid i = 0, 1,\ j = 1, \dots, k\}$ 原子概念，用于存储介于 0 和 $2^k - 1$ 之间的值，该值在不同时间点可以不同。如果 $\mathbb{A}$ 在解释 $\mathcal{I}$中的时间点 $n \in \mathbb{N}$处满足 $\mathcal{I}$、$n \models A_j^0 \land A_j^1 \to \bot$和 $\mathcal{I}$、$n \models A_j^0 \lor A_j^1$（对于任意 $j = 1$、.....、$k$），则称计数器 $\mathbb{A}$在该时间点处是良定义的。在这种情况下，$\mathcal{I}$中 $n$处的 $\mathbb{A}$的值由唯一的二进制数 $b_k \dots b_1$ 给出，且满足 $\mathcal{I}$、$n \models A_1^{b_1} \land \dots \land A_k^{b_k}$。我们要求以下公式对于 $c = b_k \dots b_1$ 成立（前提是 $\mathbb{A}$ 是良定义的）：

- $[\mathbb{A} = c] = A_1^{b_1} \land \dots \land A_k^{b_k}$, for which $\mathcal{I}, n \models [\mathbb{A} = c]$ iff the value of $\mathbb{A}$ is $c$;
- $[\mathbb{A} < c] = \bigvee_{\substack{k \geq i \geq 1 \\ b_i = 1}} \left(A_i^0 \land \bigwedge_{j=i+1}^k A_j^{b_j}\right)$ with $\mathcal{I}, n \models [\mathbb{A} < c]$ iff the value of $\mathbb{A}$ is $< c$;
- $[\mathbb{A} > c] = \bigvee_{\substack{k \geq i \geq 1 \\ b_i = 0}} \left(A_i^1 \land \bigwedge_{j=i+1}^k A_j^{b_j}\right)$ with $\mathcal{I}, n \models [\mathbb{A} > c]$ iff the value of $\mathbb{A}$ is $> c$.

我们将集合 $(\bigcirc_F \mathbb{A}) = \{\bigcirc_F A_j^i \mid i = 0, 1,\ j = 1, \dots, k\}$ 视为另一个计数器，它在 $\mathcal{I}$中的 $n$处存储 $\mathcal{I}$中 $n+1$处由 $\mathbb{A}$存储的值。因此，我们可以使用诸如 $[\mathbb{A} > c_1] \to [(\bigcirc_F \mathbb{A}) = c_2]$之类的公式，其含义是：如果 $\mathcal{I}$中 $n$处的 $\mathbb{A}$的值大于 $c_1$，那么 $\mathcal{I}$中 $n+1$处的 $\mathbb{A}$的值为 $c_2$。此外，对于 $l \leq k$，我们可以使用诸如 $[\mathbb{A} = i \pmod{2^l}]$ 之类的公式，其含义不言自明。我们还需要的另一个重要公式定义如下：

$$[\mathbb{A} = \mathbb{B} + 1] = \bigwedge_{i=1}^{k} \big((B_i^0 \land B_{i-1}^1 \land \dots \land B_1^1 \to A_i^1 \land A_{i-1}^0 \land \dots \land A_1^0) \land \bigwedge_{j<i} ((B_i^0 \land B_j^0 \to A_i^0) \land (B_i^1 \land B_j^0 \to A_i^1))\big).$$

这表示 $\mathbb{A}$ 的值比 $\mathbb{B}$的值大一。

为了定义给定 $\boldsymbol{M}$和 $\boldsymbol{x} = x_1 \dots x_n$时的 $\mathcal{O}$和 $E = (E^+,\ E^-)$，我们假设 $\Xi = \{a_1, \dots, a_{2^m}\}$和 $k = 6m + 2\lceil \log N \rceil + 1$。我们在 $\mathcal{O}$和 $E$中使用以下原子概念：$\Xi$中的符号、原子 $C$、$S$、$N$、$T$，以及 $k$-计数器$\mathbb{S}$、$\mathbb{N}$、$\mathbb{T}$中所需的原子。

我们设定 $\mathcal{D}_1^+ = \{T(0)\}$、$\mathcal{D}_2^+ = \{S(0)\}$和 $\mathcal{D}^- = \{N(0)\}$。

以下公理用于初始化相应的$m$计数器：

$$T \to [(\bigcirc\mathbb{T}) = 0] \quad S \to [(\bigcirc\mathbb{S}) = 0] \quad N \to [(\bigcirc\mathbb{N}) = 0].$$

这些公理以及 $\mathcal{O}$ 的所有其他公理，都可以轻松转换为多项式数量的等价线性时序逻辑$^{\Box\bigcirc}$霍恩公理。每个计数器的行为由下列公理指定，其含义可通过相应示例的典范模型在限制于 $\Xi \cup \{C\}$后的结构加以说明。

$T$-公理

$$
\begin{array}{l}
[\mathbb{T} < N^2] \to [\bigcirc \mathbb{T} = \mathbb{T} + 1], \\
[\mathbb{T} = 0] \to \sharp, \quad [\mathbb{T} = 1] \to (q_1, x_1), \\
[\mathbb{T} = 2] \to x_2, \dots, [\mathbb{T} = n] \to x_n, \\
[\mathbb{T} > n] \land [\mathbb{T} < N] \to \mathsf{b}, \\
[\mathbb{T} > N] \land [\mathbb{T} < N^2 - N] \to \Xi, \\
[\mathbb{T} = N^2 - N] \to \sharp, \\
[\mathbb{T} = N^2 - N + 1] \to (q_{acc}, \mathsf{b}), \\
[\mathbb{T} > N^2 - N + 1] \to \mathsf{b}
\end{array}
$$

与数据实例 $\mathcal{D}_1^+$ 一起生成如下形式的典范模型

$$
\emptyset, \sharp, (q_1, x_1), x_2, \dots, x_n, \mathsf{b}^{N-n-1}, \sharp, \Xi^{N^2-2N-1}, \sharp, (q_{acc}, \mathsf{b}), \mathsf{b}^{N-2}, \dots
$$

$S$-公理

$$
\begin{array}{l}
[\mathbb{S} < (2|\Xi| + 1)N^2] \to [\bigcirc \mathbb{S} = \mathbb{S} + 1], \\
[\mathbb{S} > N^2] \to C, \\
[\mathbb{S} > N^2 \land \mathbb{S} = 2i \pmod{2^{m+1}}] \to a_{i+1}, \text{ for all } i \in [1, 2^m]
\end{array}
$$

并且 $\mathcal{D}_2^+$ 生成典范模型

$$
\emptyset, \emptyset^{N^2}, \emptyset, (a_1 C, C, \dots, a_{2^k} C, C)^{N^2}, \emptyset, \emptyset, \dots
$$

Let $\bar{\mathfrak{L}} = \{\mathfrak{t}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1, \quad e_1, f_1) \dots, \mathfrak{t}_l\}$。令 $t = N^2 - N - 3$。$N$-公理对每个 $i \in [1,$包含以下内容 $l]$:

$$
\begin{array}{l}
[\mathbb{N} < (2l + 3)N^2] \to [\bigcirc \mathbb{N} = \mathbb{N} + 1], \\
[0 < \mathbb{N} < N^2] \to \Xi, \\
[N^2 < \mathbb{N} < 3N^2] \to C, \\
[N^2 < \mathbb{N} < 3N^2] \land N_0^1 \to \Xi, \\
[(2i+1)N^2 < \mathbb{N} < (2i+1)N^2 + t + 1] \to \Xi, \\
[\mathbb{N} = (2i+1)N^2 + t + 1] \to a_i, \\
[\mathbb{N} = (2i+1)N^2 + t + 2] \to b_i, \\
[\mathbb{N} = (2i+1)N^2 + t + 3] \to c_i, \\
[(2i+2)N^2 - N < \mathbb{N} < (2i+2)N^2 - 2] \to \Xi, \\
[\mathbb{N} = (2i+2)N^2 - 2] \to d_i, \\
[\mathbb{N} = (2i+2)N^2 - 1] \to e_i, \\
[\mathbb{N} = (2i+2)N^2] \to f_i, \\
[(2i+2)N^2 < \mathbb{N} < (2i+2)N^2 + t + 1] \to \Xi.
\end{array}
$$

数据实例 $\mathcal{D}^-$ 给出了典范模型

$$
\emptyset, \emptyset, \Xi^{N^2-1}, \emptyset, (\Xi C, C)^{N^2-2}, \Xi C, \emptyset, \mathcal{D}_{\mathfrak{t}_1}, \emptyset^{N+2}, \mathcal{D}_{\mathfrak{t}_2} \dots, \mathcal{D}_{\mathfrak{t}_l}, \emptyset, \dots.
$$

其中 $\mathcal{D}_{\mathfrak{t}_i} = \emptyset, \Xi^t, a_i, b_i, c_i, \Xi^{N-3}, d_i, e_i, f_i, \Xi^t$。

我们用 $\mathcal{O}$ 表示上述公理集合，并证明 $E$ 在 $\mathcal{O}$ 之下可由一个 $\mathcal{Q}_p$[U]-查询 $\varkappa$ 分离，当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 接受 $\boldsymbol{x}$。（$\Leftarrow$）假设 $\rho_1 \cdots \rho_{N_2}$ 编码了 $\boldsymbol{x}$上的 $\boldsymbol{M}$的一次接受计算 · 考虑 $\mathcal{Q}$ $_p$[U]-查询

$$
\varkappa = \Diamond(\rho_1 \land C \,\mathsf{U}\, (\rho_2 \land C \,\mathsf{U}\, (\dots (\rho_{N^2-1} \land (C \,\mathsf{U}\, \rho_{N^2})) \dots))).
$$

通过检查上述相应的典范模型，不难证明

$$
\mathcal{O}, \mathcal{D}_1^+ \models \varkappa(0), \quad \mathcal{O}, \mathcal{D}_2^+ \models \varkappa(0), \quad \mathcal{O}, \mathcal{D}_1^- \not\models \varkappa(0).
$$

为证明最后一个结论，我们首先注意到 $\emptyset, \Xi^{N^2-1} \not\models \varkappa(0)$，以及 $\emptyset, (\Xi C, C)^{N^2-2}, \Xi C \not\models \varkappa(0)$。对于所有 $\mathfrak{t}$ 和 $j$，我们都有 $\mathcal{D}_{\mathfrak{t}} \not\models C(j)$。因此，若对于某个 $\mathfrak{t}$，有 $\mathcal{D}_{\mathfrak{t}} \models \varkappa(0)$，那么存在 $i < t$，使得对于所有 $j \in [1, N^2]$，都有 $\emptyset, \mathcal{D}_{\mathfrak{t}} \models \rho_j(i+j)$。但这样一来

$$\rho_{t-i}\rho_{t-i+1}\rho_{t-i+2}\rho_{t+N-i}\rho_{t+N-i+1}\rho_{t+N-i+2} = \mathfrak{t} \in \mathfrak{L},$$

这就产生了矛盾。因此，对于所有 $\mathfrak{t} \in \mathfrak{L}$，都有 $\mathcal{D}_{\mathfrak{t}} \not\models \varkappa(0)$，从而 $\mathcal{O}, \mathcal{D}^- \not\models \varkappa(0)$。

($\Rightarrow$) 假设查询

$$\varkappa = \lambda_1 \mathsf{U} (\rho_1 \wedge \lambda_2 \mathsf{U} (\rho_2 \ldots (\rho_{K-1} \wedge (\lambda_K \mathsf{U} \rho_K)) \ldots))$$

满足 $\rho_K \neq \top$ 将 $E$ 与 $\mathcal{O}$ 分开。由于 $\mathcal{O}$，$\mathcal{D}_1^+ \models \varkappa(0)$，我们有 $K \leq N^2$，且对所有 $i$ 都有 $\rho_i \subseteq \Xi$。由于 $\emptyset$，$\emptyset$，$\Xi^{N^2-1} \not\models \varkappa(0)$，我们有 $\rho_1 \neq \emptyset$。由于 $\mathcal{O}$，$\mathcal{D}_2^+ \models \varkappa(0)$，我们有 $\lambda_1 = \top$。现在，若 $K < N^2$，则 $\emptyset$，$\emptyset$，$\Xi^{N^2-1} \models \varkappa(0)$，因此 $K = N^2$。

由于 $\mathcal{O}$，$\mathcal{D}_2^+ \models \varkappa(0)$，对所有 $i$，我们有 $|\rho_i| \leq 1$。令 $y_1 < \ldots < y_{N^2}$ 满足：对于所有 $j \in [1, N^2]$ 和 $i \in (y_j, y_{j+1})$，都有 $\mathcal{O}$，$\mathcal{D}_2^+ \models \rho_j(y_j)$ 且 $\mathcal{O}$，$\mathcal{D}_2^+ \models \lambda(i)$。我们看到，如果 $y_j$ 是奇数，则 $\rho_j = \emptyset$；如果 $y_j$ 是偶数，则可以假设 $\rho_j = a \in \Xi$，其中 $\mathcal{O}$，$\mathcal{D}_2^+ \models a(y_j)$。按以下方式构造 $z_j$：令 $z_1 = N^2 + 2$；如果已有 $z_j$，则 $z_{j+1}$ 是大于 $z_j$ 且与 $y_{j+1}$ 奇偶性相同的最小数。可以看出，对所有 $j < N^2$，都有 $\mathcal{O}$，$\mathcal{D}^- \models \rho_j(z_j)$，且对于所有 $y \in (z_j, z_{j+1})$，都有 $\mathcal{O}$，$\mathcal{D}^- \models \lambda_j(y)$；如果存在奇数 $y_j$，则 $z_{N^2} < 3N^2 - 1$，$\mathcal{O}$，$\mathcal{D}^- \models \rho_{N^2}(z_{N^2})$，因此 $\mathcal{O}$，$\mathcal{D}^- \models \varkappa(0)$，这是不可能的。所以不存在奇数个 $y_j$，且对所有 $i$，都有 $|\rho_i| = 1$。

鉴于 $\mathcal{O}, \mathcal{D}_1^+ \models \varkappa(0)$，单词 $\rho_1 \ldots \rho_{N^2}$ 以起始配置开头，其前面有 $\sharp$，并以 $\bar{}$ 接受配置结尾。假设存在某个 $i$，使得 $(\rho_i, \rho_{i+1}, \rho_{i+2}, \rho_{N+i}, \rho_{N+i+1}, \rho_{N+i+2}) = \mathfrak{t} \in \mathfrak{L}$。令 $y_j = t - i + j$ for $j \in [1, N^2]$。我们有 $\mathcal{D}_{\mathfrak{t}} \models \rho_j(y_j)$，因此 $\mathcal{D}_{\mathfrak{t}} \models \varkappa(0)$，进而 $\mathcal{O}, \mathcal{D}^- \models \varkappa(0)$。所以，任意两个相距 $N$ 的长度为 3 的子词都构成一个合法元组，并且 $\rho_1 \ldots \rho_{N^2}$ 编码了 $\boldsymbol{M}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上的一次成功计算。$\dashv$

定理 12。对于数据复　　杂度，定理 5 的结果对于由 LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩-本体介导的查询仍然成立　　.

我们首先考虑 $\bigcirc\Diamond$-查询，然后再讨论 U 查询。

$\bigcirc\Diamond$-查询。NP 下界可从无本体情形继承。对于 NP 上界，注意到根据引理 29，且由于 $\mathcal{O}$ 是固定的，只要存在分离查询，我们就总能得到一个多项式大小的分离查询。NP 上界可按标准方式推出。现在来看 P 上界。我们通过修改在无本体情形中给出的动态规划算法，证明 QBE$^{\mathsf{b}+}_{\mathsf{b}\text{-}}$(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$) 的 P 上界。QBE$^{\mathsf{b}+}_{\mathsf{b}\text{-}}$(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$) 的 P 上界可通过从证明中删去 $\bigcirc$ 得到。对于正例数量有界的 QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\Diamond]$)，其 P 上界也可分两步证明：(1) 根据定理 4（$i.1$），只需证明 QBE$^{\mathsf{b}+}_{\mathsf{b}\text{-}}$(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\Diamond]$) 的 P 上界；(2) 根据定理 4（$i.3$），QBE$^{\mathsf{b}+}_{\mathsf{b}\text{-}}$(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\Diamond]$) $\leq_p$ QBE$^{\mathsf{b}+}_{\mathsf{b}\text{-}}$(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$)。最后，对于正例数量有界的 QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond]$)，其 P 上界可由正例数量有界的 QBE(LTL$^{\Box\bigcirc}$ 霍恩 $\mathcal{Q}[\Diamond]$) 的 P 上界推出，方法与无本体情形的定理 4（$ii.2$）证明中采用的“技巧”相同：我们通过添加用于编码 $\bigcirc^i A$ 的新原子 $A_i$ 来修改模型 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$，并以与 $\bigcirc^i A$ 相同的方式在 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$ 中解释它们。根据引理 29，只需对 $i \leq k + m$ 执行此操作（由于 $|\mathcal{O}|$ 是固定的，$i \leq k + m$ 关于 $E$ 是多项式大小）。

为证明 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$ 的 P 上界，我们将数据实例中查询 $\varkappa$ 的满足赋值概念扩展到典范模型 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$ 中的满足赋值，方式显而易见：设 $\varkappa$ 具有带 $\rho_n \neq \top$ 的形式 (1)。那么 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}, 0 \models \varkappa$ 当且仅当存在 $\varkappa$ 在 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$ 中的满足赋值 $f$，其含义是，$f$ 是一个严格单调映射 $f\colon [0, n] \to \mathbb{N}$，满足 $f(0) = 0$，当 $\boldsymbol{o}_i = \bigcirc$ 时 $f(i+1) = f(i) + 1$，并且对于所有 $i \leq n$，$\mathsf{tp}(f(i)) = \{A \mid \mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}, f(i) \models A\}$。我们首先注意到以下引理（使用为引理 29 引入的记号和编号 $k, m$）：

引理 30。$(E^+, E^-)$ 在 $\mathcal{O}$ 下是 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$-可分的，当且仅当存在具有形式 (1) 且带有 $\rho_n \neq \top$ 的 $\Diamond$-深度 $\leq k + l$，并且 $\bigcirc$ 深度 $\leq k + m$ 使得

1. 对任意 $\mathcal{D} \in E^+$，存在一个满足赋值，将 $\varkappa$ 映射到 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$，且满足 $f(n) \leq N :=$　　$k + (k + l + 1)(k + m)$　　；
2. 对任意 $\mathcal{D} \in E^-$，不存在一个满足赋值，将 $\varkappa$ 映射到 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$，且满足 $f(n) \leq N$。

证明。首先假设 $(E^+, E^-)$ 在 $\mathcal{O}$ 下是 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$-可分的。根据引理 29，存在一个形式为 (1) 的查询 $\varkappa$，其中 $\rho_n \neq \top$，$\Diamond$ 深度为 $\leq k + l$，且 $\bigcirc$ 深度为 $\leq k + m$，它在 $\mathcal{O}$ 下区分 $(E^+, E^-)$。任取一个满足赋值 $f$，将 $\varkappa$ 映射到 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$。显然，我们可以假设，对于任意满足 $\boldsymbol{o}_i = \Diamond$ 的 $i$，都有 $f(i+1) - f(i) \leq k + m$。结论 1 直接成立。对于 $\mathcal{D}^- \in E^-$，结论 2 由 $\mathcal{O}, \mathcal{D}^- \not\models \varkappa(0)$ 得出。

反过来，假设存在形如 (1) 且具有 $\rho_n \neq \top$ 的 $\Diamond$ 深度 $\leq k + l$ 和 $\bigcirc$ 深度 $\leq k + m$ 的 $\varkappa$，使得条件 1 和 2 成立。我们证明，在 $\mathcal{O}$ 下，$\varkappa$ 将 $(E^+, E^-)$ 分开。不过，根据条件 1，$\mathcal{O}, \mathcal{D}^+ \models \varkappa(0)$ 对于 $\mathcal{D}^+ \in E^+$ 成立；根据条件 2，$\mathcal{O}, \mathcal{D}^- \not\models \varkappa(0)$ 对于 $\mathcal{D}^- \in E^-$ 成立，这可以通过与反向证明条件 1 时相同的论证得出。$\dashv$

我们说明针对 $E^+ = \{\mathcal{D}_1^+, \mathcal{D}_2^+\}$ 和 $E^- = \{\mathcal{D}_1^-, \mathcal{D}_2^-\}$ 的 QBE$^{\mathsf{b}+}_{\mathsf{b}\text{-}}$($\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$) 动态规划算法需要作哪些修改。

我们对集合 $S_{i,j}$ 中元组所存储的参数进行了细微修改。我们不再存储元组所描述的查询长度，而是存储其 $\Diamond$-深度 $K$ 和其 $\bigcirc$-深度 $M$。因此，令 $S_{i,j}$ 表示由满足以下条件的元组 $(K, M, \ell_1, \ell_2, n_1, n_2)$ 构成的集合

1. $K \le k + l$;
2. $M \le k + m$;
3. $\ell_1 \le i \le N$,
4. $\ell_2 \le j \le N$,

并且存在 $\varkappa = \rho_0 \wedge \boldsymbol{o}_1(\rho_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{o}_k \rho_k)$，其 $\Diamond$-深度为 $K$，且 $\bigcirc$-深度为 $M$，满足

1. 在 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}_1^+}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}_2^+}$ 中，分别存在满足赋值 $f_1$、$f_2$，使得 $f_1(1 + K + M) = \ell_1$，且 $f_2(1 + K + M) = \ell_2$；并且

2. 若存在满足赋值 $f$，使 $n_1$ 对于 $\varkappa$ 在 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}_1^-}$ 中是极小的，且满足 $f(1 + K + M) = n_1 \le N$，则 $n_1 = \infty$；若不存在这样的 $f$，则 $n_2$；并且，若存在满足赋值 $f$，使 $n_2$ 对于 $\varkappa$ 在 $\mathcal{C}_{\mathcal{O},\mathcal{D}_2^-}$ 中是极小的，且满足 $f(k) = n_2 \le N$，则 $n_2 = \infty$；若不存在这样的 $f$，则 $n_2 = \infty$。

由于存在一个 $\mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond]$ 中的查询能够区分 $(E^+, E^-)$，当且仅当存在 $K \le k + \ell$、$M \le k + m$、$\ell_1 \le N$ 和 $\ell_2 \le N$ 使得 $(K, M, \ell_1, \ell_2, \infty, \infty) \in S_{N,N}$，因此只需在多项式时间内计算 $S_{N,N}$。$S_{i,j}$ 与 $i \le N$、$j \le N$ 的计算方式基本相同于无本体情形，可从 $S_{0,0}$ 开始逐步计算。

U 查询的界限已在引理22之后的C节中说明。

## E 第6节的证明

定理 13. 设 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}_p[\Diamond], \mathcal{Q}[\Diamond]\}$。如果 $E$ 在 LTL$^{\Box\Diamond}$-本体 $\mathcal{O}$下是 $\mathcal{Q}$-可分的，那么 $E$ 可由一个在 $E$ 和 $\mathcal{O}$中规模为多项式的 $\mathcal{Q}$-查询在 $\mathcal{O}$下分离。QBE(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}$) 和 QBE$_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}+}$(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}$) 对组合复杂度是 $\Sigma_2^p$-完备的。LTL$^{\Box\Diamond}$-本体的存在不会影响数据复杂度，其复杂度仍与定理 5 中相同。

证明。我们先补充一些关于 $\Sigma_2^p$-下界证明的细节。回顾一下，我们将全量化布尔公式的有效性问题归约为以下形式:

$$\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi,$$

其中 $\psi$是一个命题公式，而 $\boldsymbol{p} = p_1$、…、$p_k$和 $\boldsymbol{q} = q_1$、…、$q_m$是命题变量列表。我们不失一般性地假设 $\psi$不是重言式。我们还假设，对于 $x \in \{p_i, \neg p_i, q_j, \neg q_j \mid 1 \le i \le k, 1 \le j \le m\}$，$\neg\psi \not\models x$。事实上，如果 $\neg\psi \models x$，那么对于某个 $\psi'$，$\psi \equiv \neg x \vee \psi'$；而当 $x \in \{p_i, \neg p_i\}$时，QBF公式 $\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi$是平凡有效的；当 $x \in \{q_j \neg q_j\}$时，QBF公式 $\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi$有效当且仅当 $\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q'}\, \psi'$有效，其中 $\boldsymbol{q'}$是通过从 $\boldsymbol{q}$中移除 $q_j$得到的。我们将$^-$ $^-$命题变量视为原子，并另外使用新原子 $A_1$、…、$A_k$、$\bar{A}_1$、…、$\bar{A}_k$和 $B$。

令 $E = (E^+, E^-)$ 满足 $E^+ = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\}, E^- = \{\mathcal{D}_3\}$，其中

$$\mathcal{D}_1 = \{B_1(0)\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{B_2(0)\}, \quad \mathcal{D}_3 = \{q_1(0), q_2(0), \dots, q_m(0)\},$$

并令 $\mathcal{O}$包含以下所有公理（其范式）：对所有 $i = 1, \dots, k$:

$$B_1 \to \neg\psi, \quad B_2 \to \neg\psi, \tag{6}$$

$$p_i \to \Diamond\big(\bar{A}_i \wedge \bigwedge_{j \ne i} (A_j \wedge \bar{A}_j)\big), \qquad \neg p_i \to \Diamond\big(A_i \wedge \bigwedge_{j \ne i} (A_j \wedge \bar{A}_j)\big), \tag{7}$$

我们证明，$\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi$有效，当且仅当在 $\mathcal{O}$下，$E$是 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$可分的。

($\Rightarrow$) 假设 $\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi$有效。取变量 $\boldsymbol{p}$的一个赋值 $\mathfrak{a}$，使得对于变量 $_$的所有赋值 $\mathfrak{b}$，公式 $\psi$在$\boldsymbol{q}$ 下为真。令 $C$为所有满足 $\mathfrak{a}(p_i) = 1$ 的 $A_i$ 与所有满足 $\mathfrak{a}(p_i) = 0$的 $A_i$ 的合取，并令 $\varkappa = \Diamond C$。我们证明 $\varkappa$将 $E$分离。定义一个解释 $\mathcal{J}$，取

- $\mathcal{J}, 0 \models p_i$ iff $\mathfrak{a}(p_i) = 1$, for $i = 1, \dots, k$ and $\mathcal{J}, 0 \models q_j$, for $j = 1, \dots, m$;
- if $\mathcal{J}, 0 \models p_i$, then $\mathcal{J}, i \models \bar{A}_i \wedge \bigwedge_{j \ne i} (A_j \wedge \bar{A}_j)$;
- if $\mathcal{J}, 0 \not\models p_i$, then $\mathcal{J}, i \models A_i \wedge \bigwedge_{j \ne i} (A_j \wedge \bar{A}_j)$.

根据定义，$\mathcal{J}$是 $\mathcal{O}$和 $\mathcal{D}_3$的模型，满足 $\mathcal{J}, 0 \not\models \varkappa$。另一方面，令 $\mathcal{I}$为 $\mathcal{O}$以及某些 $\mathcal{D}_l, l = 1, 2$ 的模型。根据 (6)，$\mathcal{I}, 0 \not\models \psi$。于是，在 $\mathcal{I}$中，$p_i$ 在 0 时的真值无法反映 $p_i$ 在 $\mathfrak{a}$ 下的真值（否则$\psi$在 $\mathcal{I}$中的 0 时为真）。取一个 $i_0$，使得 $p_{i_0}$的这些真值不同，例如 $\mathfrak{a}(p_{i_0}) = 1$，但 $\mathcal{I}, 0 \not\models p_{i_0}$。于是 $\mathcal{I}, 0 \models \Diamond(A_{i_0} \wedge \bigwedge_{j \ne i_0} (A_j \wedge A_j))$，因此 $\mathcal{I}, 0 \models \varkappa$。

($\Leftarrow$) 假设一个 $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$-查询 $\varkappa$分离了 $E$，但 $\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi$无效。根据我们对 $\psi$的条件，考虑 $\mathcal{O}$和 $\mathcal{D}_l$、$l = 1$、2、3 的可能模型，不难看出 $\varkappa$不包含 $B_1$、$B_2$、$p_i$、$q_j$、$1 \le i \le k$、$1 \le j \le m$的出现。设 $\mathcal{J}$是 $\mathcal{O}$和 $\mathcal{D}_3$的一个模型，且满足 $\mathcal{J}$、$0 \not\models \varkappa$。设 $\mathfrak{a}$是由 $\mathcal{J}$在 0 时刻给出的 $\boldsymbol{p}$的赋值。由于 $\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi$无效，因此存在

一个赋值 $\mathfrak{b}$，其对应于 $\boldsymbol{q}$，使得 $\psi$ 在 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$下为假。考虑一个解释 $\mathcal{I}$，使得 $\mathcal{I}$、$0 \models B_1$，且 $\boldsymbol{p}$和 $\boldsymbol{q}$在 0 时刻的真值分别由 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$给出，所有其他原子均按 $\mathcal{J}$中的方式解释。于是 $\mathcal{I}$是 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}_1$的一个模型，因此 $\mathcal{I}$、$0 \models \varkappa$。¯但这样一来，$\mathcal{J} \models \varkappa$，因为 $\varkappa$只能包含原子 $A_i$ 和 $A_i$，这与前述结论矛盾，从而表明 $\exists \boldsymbol{p} \forall \boldsymbol{q}\, \psi$ 有效。

现在我们证明数据复杂度的相关结果。NP 下界继承自无本体情形。我们证明 QBE(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$) 的 NP 上界，以及 QBE$^{\mathfrak{b}+}_{\mathfrak{b}\text{-}}$(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$) 的 P 上界。对于正例数量有界的 QBE(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}[\Diamond]$)，其 P 上界同样可以分两步证明：(1) 根据定理 4 ($i.1$)，只需证明 QBE$^{\mathfrak{b}+}_{\mathfrak{b}\text{-}}$(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}[\Diamond]$) 的 P 上界；(2) 根据定理 4 ($i.3$)，QBE$^{\mathfrak{b}+}_{\mathfrak{b}\text{-}}$(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}[\Diamond]$) $\leq_p$QBE$^{\mathfrak{b}+}_{\mathfrak{b}\text{-}}$(LTL$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$)。

假设给定一个 LTL$^{\Box\Diamond}$-本体 $\mathcal{O}$。我们证明，对于任意数据实例 $\mathcal{D}$，都可以在多项式时间内构造一个集合$\mathcal{M}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$，其中包含 $\mathcal{D}$ 的模型，其类型构成一个序列

$$tp_0, \dots, tp_{k_0}, tp_{k_0+1}, \dots, tp_{k_0+l}, \dots, tp_{k_0+1}, \dots, tp_{k_0+l}, \dots \tag{8}$$

其最大值为 $\mathcal{D} \leq k_0 \leq \max\, \mathcal{D} + |\mathcal{O}|$ 且 $l \leq |\mathcal{O}|$ 满足：对于任意 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[\Diamond]$, $\mathcal{D}, \mathcal{O} \models \varkappa$，(0) 当且仅当 $\mathcal{I}, 0 \models \varkappa$对所有 $\mathcal{I} \in \mathcal{M}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$成立。特别要注意，每个集合 $\mathcal{M}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$ 在 $\mathcal{D}$ 中都具有多项式大小。有趣的是，$\mathcal{M}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$ 中的模型不一定是 $\mathcal{O}$ 的模型（除非 $\mathcal{O}$ 是霍恩本体）。然后，为了证明 QBE(线性时序逻辑$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$) 的 NP 上界以及 QBE$^{\mathfrak{b}+}_{\mathfrak{b}\text{-}}$(线性时序逻辑$^{\Box\Diamond}$, $\mathcal{Q}_p[\Diamond]$) 的 P 上界，可以针对任意 $\mathcal{D} \in E^+ \cup E^-$ 构造集合 $\mathcal{M}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$，然后利用以下事实进行判定：只要存在分离查询，就存在多项式规模的分离查询；据此判断是否存在 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[\Diamond]$ 使得

- 对所有 $\mathcal{D} \in E^+$：$\mathcal{I}, 0 \models \varkappa$，对所有 $\mathcal{I} \in \mathcal{M}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$；
- 对于所有 $\mathcal{D} \in E^-$：$\mathcal{I}$、$0 \not\models \varkappa$；对于某些 $\mathcal{I} \in \mathcal{M}_{\mathcal{O},\,\mathcal{D}}$

要么属于 NP（通过猜测多项式规模的查询，然后在多项式时间内验证），要么属于 P（通过应用与 QBE$^{\mathfrak{b}+}_{\mathfrak{b}\text{-}}$($\mathcal{Q}_p[\Diamond]$) 基本相同的动态规划算法）。

下面构造 $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$、$_{\mathcal{D}}$。设 $\mathcal{D}$ 为一个数据实例。如果对于任意原子 $A$，$A(k) \in \mathcal{D}$ 蕴含 $\neg A \notin \mathfrak{tp}$，则称类型 $\mathfrak{tp}$ 在 $k$ 处与 $\mathcal{D}$ 一致。接下来定义装饰的概念。设 $I_0$、.....、$I_n$ 是将 $\mathbb{N}$ 划分为非空区间 $I_0$、.....、$I_n$ 的一种划分，其中 $I_n$ 具有如下形式：对于某个 $m$，$[m, \infty]$，且 $\max\, \mathcal{D} < m \leq \max\, \mathcal{D} + |\mathcal{O}| + 1$，$\max\, I_k + 1 = \min\, I_{k+1}$，对所有$k < n$均成立。设 $f$是一个函数，它为每个区间 $k \leq n$ 关联一个非空集合 $f(k)$，其中包含 $\mathcal{O}$-可满足的类型。直观地说，$f(k)$中的类型是我们希望在区间 $I_k$内满足的类型。于是，我们称 $D = (I_0$、.....、$I_n$、$f)$ 为 $\mathcal{D}$的预装饰。如果模型 $\mathcal{I}$由一个序列定义，则称它与 $D = (I_0$、.....、$I_n$、$f)$一致

$$tp_0, tp_1, \dots$$

类型 $\mathfrak{tp}_i$，使得

1. 如果 $i \in I_k$，则 $\mathfrak{tp}_i \in f(k)$，且 $\mathfrak{tp}_i$ 在 $i$处与 $\mathcal{D}$ 一致，对所有 $i \geq 0$均成
立；2. 每个 $\mathfrak{tp} \in f(n)$ 都会作为 $\mathcal{I}$中的 $\mathfrak{tp}_i$ 无限次出现，适用于 $i \geq m$。

那么，如果对于 $\mathcal{O}$，每个与 $D$一致的模型 $\mathfrak{tp}_0, \mathfrak{tp}_1, \dots$ 都满足在时间点 $i$ 处的 $\mathfrak{tp}_i$（特别是，这也是 $\mathcal{O}$的一个模型），则 $D = (I_0, \dots, I_n, f)$ 是 $\mathcal{D}$的一种装饰。请注意，与 $D$ 一致的模型显然也是 $\mathcal{D}$的模型。因此，任何 $D$ 都定义了与 $D$ 一致的模型集合 $\mathcal{M}_D$；如果 $D$ 是针对 $\mathcal{O}$的 $\mathcal{D}$的装饰，那么这些模型也始终是 $\mathcal{O}$ 的模型。 $D = (I_0, \dots, I_n, f)$ 还按如下方式定义一个典范模型 $\mathcal{I}_D$：固定 $f(n)$ 的任意排序 $\mathfrak{tp}_0, \dots, \mathfrak{tp}_{j-1}$，并假设 $I_n = [m_D, \infty]$。然后，将 $\mathcal{I}_D$ 定义为：设

- 对于所有与 $\mathcal{D}$ 在 $i$处一致的 $A \in \mathfrak{tp} \in f(k)$，如果 $A \in \mathfrak{tp}$ 满足 $i \in I_k$ with $k < n, i \in A^{\mathcal{I}_D}$，则.....；
- 对于 $i = m_D + j_0 + kj$ with $j_0 < j, i \in A^{\mathcal{I}_D}$，如果 $A \in \mathfrak{tp}_{j_0}$。

因此，对于 $i < m_D$，$\mathcal{I}_D$ 定义为所有与 $D$ 一致的模型的交集；对于 $i \geq m_D$，我们一次又一次地重复模式 $\mathfrak{tp}_0$，...，$\mathfrak{tp}_{j-1}$。注意，$\mathcal{I}_D$ 具有式（8）中定义的形式。我们给出以下连接 $\mathcal{M}_D$ 和 $\mathcal{I}_D$的引理。

引理31. 对于每个 $\varkappa \in \mathcal{Q}[\Diamond]$ 和每个 $i < m_D$，都有 $\mathcal{J}$，当且仅当对于所有 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}_D$，$i \models \varkappa$ iff $\mathcal{I}_D$，$i \models \varkappa$。

证明。通过对每个 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}_D$，将 $\mathcal{J}$中基于区间 $I_n$ 的最后部分替换为基于 $I_n$的 $\mathcal{I}_D$的最后部分，从 $\mathcal{M}_D$ 得到 $\mathcal{M}$。显然，对于所有 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}_D$，$\mathcal{J}$，$0 \models \varkappa$当且仅当对于所有 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}$，$\mathcal{J}$，$0 \models \varkappa$。因此，只需证明断言对 $\mathcal{M}$ 成立，而不是对 $\mathcal{M}_D$成立。

证明通过对形如 $\rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \dots \wedge \Diamond\rho_\ell))$ 的 $\ell$for $\varkappa$ 进行归纳得出。对于 $\ell = 0$，断言由定义可得。

假设对于某个 $i < m_D$ 以及所有 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}$，断言已对 $\ell \geq 0$、$\varkappa = \rho_0 \wedge \Diamond(\rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \dots \wedge \Diamond\rho_{\ell+1}))$ 和 $\mathcal{J}$、$i \models \varkappa$ 得到证明。我们需要证明 $\mathcal{I}_D$、$i \models \varkappa$。

如果存在 $i \geq m_D$ 使得 $\mathcal{J}$、$i \models \rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \dots \wedge \Diamond\rho_\ell))$，那么证明就完成了。

否则，我们证明存在 $i'$，满足 $i < i' < m_D$，使得对所有 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}$，都有 $\mathcal{J}, i' \models \rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \dots \wedge \Diamond\rho_\ell))$。于是，根据归纳假设，断言得证。

我们首先注意到，存在 $i'$，满足 $i < i' < m_D$，使得对于 $i' \in I_k$，对所有与 $\mathcal{D}$ 在 $i'$ 处一致的 $\mathsf{tp} \in f(k)$，都有 $\rho_1 \subseteq \mathsf{tp}$。

因为假设情况并非如此。然后构造一个模型 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}$，方法是为每个 $j$ 选择一个满足 $i < j < m_D$ 的 $\mathsf{tp} \in f(k)$，使其与 $\mathcal{D}$ 在 $j$ 处一致，并满足$j \in I_k$ $\rho_1 \not\subseteq \mathsf{tp}$。使用这些 $\mathsf{tp}_j$ 定义 $\mathcal{J}$。然后 $\mathcal{J}, i \not\models \varkappa$，矛盾。L
et $i'$ be minimal $i < i' < m_D$ 后继h that for $i' \in I_k$ we have $\rho_1 \subseteq tp$ for all $tp \in f(k)$ that 是一致的instent with $\mathcal{D}$ at $i'$.
接下来我们证明，对于所有 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}$，$\mathcal{J}, i' \models \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_\ell))$。假设情况并非如此。令 $\mathcal{J}$ 为一个见证。于是我们构造一个新模型 $\mathcal{J}' \in \mathcal{M}$：通过否定 $i$ 与 $i'$ 之间的 $\rho_1$（由 $i'$的极小性可知这是可能的），再从 $i'$添加 $\mathcal{J}$。于是 $\mathcal{J}', i \not\models \varkappa$，矛盾。

由此可得，对于所有 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}$，$\mathcal{J}, i' \models \rho_1 \wedge \Diamond(\rho_2 \wedge \cdots \wedge \Diamond\rho_\ell))$，证毕。 ⊣

接下来定义我们使用的装饰。给定任意模型 $\mathcal{I}$、$\mathcal{D}$ 以及形式为 (8) 的 $\mathcal{O}$，我们按如下方式得到一个装饰$D_\mathcal{I} = (I_0, \dots, I_n, f)$，其中 $n \leq 2|\mathcal{O}| + 2$ 如下。若存在 $C$，使得 $\Box C \in$ 是 $\mathcal{O}$ 的子项，且 $i \models \Box C \wedge \neg C$，则称节点 $i$ 在 $\mathcal{I}$ 中关于 $\mathcal{O}$ 是极大的。

假设 $I_0, \dots, I_\ell$和 $f(0) \dots, f(\ell)$ 已经定义，且 $I_\ell$不是 $[m, \infty]$的形式（如果 $I_\ell$是 $[m, \infty]$的形式，则问题已解决）。接下来我们定义 $I_{\ell+1}$（以及可能的 $I_{\ell+2}$）。

1. 如果 $\max I_\ell < k_0$，则按如下方式进行：如果 $\max\ I_\ell + 1$对于 $\mathcal{O}$在 $\mathcal{I}$中是极大的，或者 $\max\ I_\ell + 1 = k_0$，则令$I_{\ell+1} = \{\max\ I_\ell + 1\}$，并令 $f(\ell + 1) = \{\mathsf{tp}_\mathcal{I}(\max\ I_\ell + 1)\}$。
否则，令
$$k := \min\{k > \max I_\ell \mid k \text{ is maximal for } \mathcal{O} \text{ in } \mathcal{I} \text{ or } k = k_0\}$$
并令 $I_{\ell+1} = [\max\ I_\ell, k-1]$, $I_{\ell+2} = \{k\}$, $f(\ell + 1) = \{\mathsf{tp}_\mathcal{I}(k) \mid k \in I_{\ell+1}\}$，且 $f(\ell + 2) = \{\mathsf{tp}_\mathcal{I}(k)\}$。
2. 否则取最大值 $I_\ell \geq k_0$。然后令 $I_{\ell+1} = [k_0, \infty]$和 $f(\ell + 1) = \{\mathsf{tp}^{k_0+1}, \dots, \mathsf{tp}_{k_0+l}\}$。

容易证明，$D_\mathcal{I} = (I_1, \dots, I_n, f)$ 确实是 $\mathcal{D}$关于 $\mathcal{O}$和 $n \leq 2|\mathcal{O}| + 2$的一个装饰。还要注意，$\mathcal{I}$ 本身与 $D_\mathcal{I}$一致。下面的引理总结了我们的发现。

引理 32. 对于任意 $\mathcal{D}$，都可以在多项式时间内构造一个集合 $\mathcal{F}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$，其中包含 $\mathcal{D}$关于 $\mathcal{O}$的装饰 $D = (I_0, \dots, I_n, f)$，使得 $n \leq 2|\mathcal{O}| + 2$，并且对于任意 $\varkappa \in \mathcal{Q}[\Diamond]$，以下条件等价：
1. $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa(0)$；2. 对于每个 $\mathcal{I} \in \mathcal{M}_D$ 和 $D \in \mathcal{F}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$，$\mathcal{I}, 0 \models \varkappa$；3. 对于每个 $D \in \mathcal{F}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$，$\mathcal{I}_D, 0 \models \varkappa$。

证明。满足 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}$ 的（8）式形式的模型是完备的，具体而言，对所有 $\varkappa \in \mathcal{Q}_p[\Diamond]$，以下条件等价：

- $\mathcal{O}, \mathcal{D} \models \varkappa(0)$;
- $\mathcal{I}, 0 \models \varkappa$ 对于所有 $\mathcal{O}$ 的模型 $\mathcal{I}$ 以及所有（8）式形式的 $\mathcal{D}$。

因此，包含 $\mathcal{I}$（其中一个 $\mathcal{O}$的模型）且形式为（8）的模型 $\mathcal{M}_{D_\mathcal{I}}$的类也是完备的。因此，若将 $\mathcal{F}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$定义为：对于满足 $n \leq 2|\mathcal{O}| + 2$ 的 $\mathcal{O}$，其 $\mathcal{D}$的装饰 $D = (I_0, \dots, I_n, f)$ 所构成的类，则第1点与第2点等价。第2点与第3点等价由引理31得出。剩下要证明的是，可以在多项式时间内构造 $\mathcal{F}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$。显然，可以在关于 $|\mathcal{D}|$的多项式时间内构造满足 $n \leq 2|\mathcal{O}| + 2$ 的 $\mathcal{D}$的预装饰集合（$I_0, \dots, I_n, f$）。因此，剩下要在多项式时间内检查预装饰是否为装饰。检查过程很简单：预装饰 $D = (I_0, \dots, I_n, f)$ 是装饰，当且仅当满足以下条件：对于 $\mathcal{O}$ 的任意子公式 $\Box C$、任意 $i \leq n$、任意 $\mathsf{tp} \in f(i)$，以及任意在 $k$处与 $\mathcal{D}$一致的 $k \in f(i)$：$\Box C \in \mathsf{tp}$，当且仅当不存在满足 $C \notin \mathsf{tp}'$的 $\mathsf{tp}' \in f(i)$ 在任意 $k' \in I_i \cap [k+1, \infty]$ 处与 $\mathcal{D}$一致，并且不存在满足 $C \notin \mathsf{tp}'$和 $j > i$ 的 $\mathsf{tp}' \in f(j)$ 在任意 $k' \in I_j$处与 $\mathcal{D}$一致。⊣

算法构造所需的模型集合现在通过设置 $\mathcal{M}_{\mathcal{O},\mathcal{D}} = \bigcup_{D \in \mathcal{F}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}} \mathcal{M}_D$.⊣ 来定义$\mathcal{M}_{\mathcal{O},\mathcal{D}}$

## F 第 7 节的证明

定理 14. (*i*) 对任意 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}[\Diamond], \mathcal{Q}[\bigcirc, \Diamond], \mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]\}$，QBE(LTL $\mathcal{Q}$) 属于 2ExpTime。(*ii*) 对任意 $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}_p[\Diamond], \mathcal{Q}_p[\bigcirc, \Diamond], \mathcal{Q}_p[\mathsf{U}]\}$，QBE(LTL $\mathcal{Q}$) 属于 2ExpSpace。

证明。设 $E$是一个示例集，$\mathcal{O}$是一个线性时序逻辑本体。根据引理 20，要证明 QBE(LTL $\mathcal{Q}[\mathsf{U}_s]$) 和 QBE(LTL $\mathcal{Q}_p[\mathsf{U}]$) 的结果，只需证明引理 23 中构造的 $S$（它表示由 $E$ 和 $\mathcal{O}$得到的 $\mathcal{D}$）可以在双指数时间内完成。考虑一个未标记的迁移系统 $\mathcal{S}$（它可以定义为具有一元字母表 $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{\emptyset\}$的同类迁移系统），其状态为 $\mathsf{tp}$，其中 $\mathsf{tp}$ 是在 $\mathcal{O}$中可实现的类型，$\mathcal{D}$。给定 $\mathcal{S}$和一组可实现类型 $\boldsymbol{T}$，我们将 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{T}}$设为 $\mathcal{S}$，但仅限于那些可从某个 $\mathsf{tp}' \in \boldsymbol{T}$以及初始状态 $\boldsymbol{T}$到达的 $\mathsf{tp}$。对于给定的 $\boldsymbol{T}_1$、$\Gamma$和$\boldsymbol{T}_2$，当且仅当对 $\mathcal{T}_{S_{\boldsymbol{T}_1}}$中的每条路径 $\mathfrak{s}$，都存在一个位置 $p_\mathfrak{s} > 0$满足以下条件时，$\boldsymbol{T}_1 \to_\Gamma \boldsymbol{T}_2$成立：（$i$）所有

类型在所有 $p_{\mathfrak{s}}$ 处都与 $\boldsymbol{T}_2$ 一致；（$ii$）对于每个位置 $p\in$，若 $A\in\Gamma$，则对每个 $\mathfrak{s}$ 都有 $A\in$ tp，且在位置 $(0,p_{\mathfrak{s}})$ 处也是如此；（$iii$）来自（$ii$）的所有 tp 组成的集合与 $\boldsymbol{T}_2$ 不相交。接下来，我们注意到，如果存在满足（$i$）、（$ii$）、（$iii$）的位置 $p_{\mathfrak{s}}$，那么也存在这样的位置 $p_{\mathfrak{s}}\leq|\mathcal{S}|$。（直观地说，这是因为每当 $p_{\mathfrak{s}}>|\mathcal{S}|$ 时，$\mathfrak{s}$ 中就存在一个重复出现的类型。）因此，我们只需在深度为 $|\mathcal{S}|$ 的树中检查条件（$i$）–（$iii$）。我们可以逐分支进行检查，使用一个在 $|\mathcal{S}|$ 中以 PSPACE 运行的（非确定性）算法。最后需要指出，$\mathcal{S}$ 本身可以在 $|\mathcal{O}|$ 中用 EXPTIME 构造，而构造 $S$ 则需要针对 $O$ 个（$2^{2^{|\mathcal{O}|}}$）数量的配对（$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$）检查 $\boldsymbol{T}_1\to_\Gamma\boldsymbol{T}_2$。

为获得关于 $\mathcal{Q}[\bigcirc,\Diamond]$ 的定理结果，我们按照上述方式构造 $S$（参见引理 23），但仅使用适用于 $\Gamma\in\{\emptyset,\Sigma^\perp\}$ 的转移关系 $\boldsymbol{T}_1\to'_\Gamma\boldsymbol{T}_2$（即迁移系统定义中的 $\Sigma_2=\{\emptyset,\Sigma^\perp\}$）。当 $\boldsymbol{T}_1\to_{\Sigma^\perp}\boldsymbol{T}_2$ 时，我们令 $\boldsymbol{T}_1\to'_{\Sigma^\perp}\boldsymbol{T}_2$；对于 $\Gamma\neq\Sigma^\perp$，当 $\boldsymbol{T}_1\to_\Gamma\boldsymbol{T}_2$ 时，我们令 $\boldsymbol{T}_1\to'_\emptyset\boldsymbol{T}_2$。不难验证，对于 $\mathcal{Q}[\bigcirc,\Diamond]$ 查询类，$S$ 表示 $\mathcal{O}$、$\mathcal{D}$。$\mathcal{Q}[\Diamond]$ 的情形留给读者。⊣