arXiv:2305.01258v1 [math.AP] 2 May 2023

Roumieu 空间中常强度微分方程解的光滑性

RACHID CHAILI 和 TAYEB MAHROUZ

Abstract. 本文证明，系数属于 Roumieu 空间的常强度亚椭圆微分方程的每个解都属于某个 Roumieu 空间。

1. Introduction引言

一类具有变系数的亚椭圆微分算子是常强度微分算子类。H ¨ormander 在 [5], 给出了这类算子拟椭圆性的一个基本结果。利用这一结果以及 Newberger-Zielezny [7] 关于常系数微分算子迭代问题的定理，Shafii-Mousavi 和 Zielezny [8] 得到了常强度线性微分方程解的 Gevrey正则性结果，其中系数属于 Gevrey 类。对于常系数微分算子，借助算子的迭代，或更一般地借助算子系统的迭代，已经获得了各种 Gevrey 正则性和 Roumieu亚椭圆性结果；相关研究可参见 [1], [6] 和 [7]的著作。

本文的目的，是将H¨o rmander[5] 关于超可微函数类（或Roumieu类）的结果，推广到系数属于Roumieu空间的常强度线性微分方程。

对于 Roumieu 空间的定义，我们将考虑满足以下条件的正实数序列（M_p）：

对数凸性

$$M_0 = 1 \text{ and } M_p^2 \leq M_{p-1}M_{p+1},\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \tag{1.1}$$

对微分和乘法的稳定性：

$$\exists H > 0 : C_p^j M_{p-j} M_j \leq M_p \leq H^p M_{p-j} M_j,\ \forall p \in \mathbb{N},\ j \leq p. \tag{1.2}$$

例。序列 $M_p = p!^s$, $s \geq 1$，称为 s 阶 Gevrey序列，满足条件 (1.1) –(1.2)。

有关超可微函数空间和超分布的更多细节，请参见 [3]。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 35B65，35H10；次要分类号 46E10。
Key words and phrases. 常强度微分算子，亚椭圆算子，算子的迭代，Roumieu 空间。作者受到奥兰第一大学数学分析与应用实验室的支持。

定义 1.1。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，$Q(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ 是一个阶数为 m 的常系数线性微分算子。我们称 Ω 中算子 $Q(D)$ 的 Roumieu 向量（或 M_p 型向量）为满足以下条件的任意函数 $u \in C^\infty(\Omega)$:

$$\forall H \text{ compact of } \Omega, \exists C > 0, \forall l \in \mathbb{Z}_+ : \left\|Q^l(D)\, u\right\|_{L^2(H)} \leq C^{l+1} M_{lm}$$

Ω 中 $Q(D)$ 的 Roumieu 向量空间记为 $R_M(\Omega\ Q)$。

定义 1.2. 我们将在 Ω 中的Roumieu空间称为 $R_M(\Omega)$，并将其记为函数空间 $u \in C^\infty(\Omega)$，其中满足

$$\forall H \text{ compact } \Omega, \exists C > 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : \|D^\alpha u\|_{L^2(H)} \leq C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}$$

例。如果 $M_p = p!^s$, $s \geq 1$，那么 $R_M(\Omega)$ 是 Ω 中阶数为 s 的 Gevrey空间，记作 $G^s(\Omega)$。

类似地，$R_M(\Omega\ Q)$ 记作 $G^s(\Omega\ Q)$。

定义 1.3. 若变系数微分算子 $Q(x, D)$ 满足以下条件，则称其为亚椭圆的：对于任意开子集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 以及任意分布 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$，我们有

$$Qu \in C^\infty(\Omega) \Longrightarrow u \in C^\infty(\Omega).$$

对于常系数微分算子，可以借助其符号刻画这些算子的亚椭圆性，并已得到各种刻画，参见例如 [9]。这里回顾其中一种刻画。

命题 1.4. 算子 $Q(D)$ 是亚椭圆的，当且仅当

$$\exists C > 0, \exists d \geq 1, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi|^{\frac{|\beta|}{d}} \left|Q^{(\beta)}(\xi)\right| \leq C\left(1 + |Q(\xi)|\right), \tag{1.3}$$

其中 $Q^{(\beta)}(\xi) = \partial_\xi^\beta Q(\xi)$。

注 1.5。事实上，根据 [9]，如果 $Q(D)$ 是亚椭圆的，那么存在一个满足 (1.3) 的最小有理数 d。在下文中，我们将称 $Q(D)$ 为 $d-$ 亚椭圆的。

2. Preliminaries

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意开子集 ω 和 $\delta > 0$，我们定义

$$\omega_\delta = \{x \in \omega,\ d(x, C\omega) > \delta\}.$$

若 $f \in L^2_{loc}(\omega)$ $\mu > 0$ 且 $t > 0$，我们定义

$$N_{\omega,\mu,t}(f) = \sup_{0<\delta\leq t} \delta^\mu \|f\|_{L^2(\omega_\delta)}.$$

不失一般性，在下文中我们假设 ω 是一个直径为 < 1 的有界开子集，为简化起见，若不会引起混淆，则用 $N_\mu(f)$ 表示 $N_{\omega,\mu,t}(f)$。

以下命题是常系数亚椭圆微分算子的基本估计的来源，参见 H¨ormander [4, 定理 4.2]。

命题 2.1. 设 ω $\mathbb{R}^n$ 的有界开子集为 $Q(D)$, $d-$ 为 m 阶亚椭圆微分算子, $R(D)$ 为微分算子，且满足

$$|R(\xi)| \leq C\left(1+|Q(\xi)|\right) \ , \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

对于某个 $C>0$，则存在 $C'>0$ 使得

$$\sum_{\alpha} N_{dm}\left(R(D)u\right) \leq C'\left(N_{dm}\left(Q(D)u\right)+\|u\|_{L^2(\omega)}\right), \ \forall u \in C^{\infty}(\omega).$$

根据这一命题，Newberger 和 Zielezny 在其论文 [7] 中得到了关于具有常系数的亚椭圆微分算子的 Gevrey 正则性结果。此外，作者在 [1] 和 [2] 中研究了一大类常系数微分算子，其中包括亚椭圆微分算子这一类，并证明了 [1] 中 Gevrey 向量空间之间以及 [2] 中 Roumieu 向量空间之间的包含关系。

为了建立系数属于 Roumieu 空间的常强度线性微分方程解的 Roumieu 正则性结果，我们列举并证明满足条件 (1.1) – (1.2) 的序列 (M_p) 的若干性质。

命题 2.2. 如果序列 (M_p) 满足条件 (1.1)，那么 $(M_p)^{\frac{1}{p}}$ 是一个递增序列。

证明。$(M_p)^{\frac{1}{p}}$ 的增长等价于

$$\frac{p+1}{p}\log M_p \leq \log M_{p+1}, \forall p \in \mathbb{N}^* \tag{2.1}$$

我们将通过对 p 进行归纳法来证明 (2.1)。对于 $p=1$，通过对数函数进行复合，即可由 (1.1) 得到关系式 (2.1)。假设估计式 (2.1) 对 p 之前的情形均成立，并验证其对 $p+1.$ 仍然成立。根据条件 (1.1) 和递推假设，我们有

$$\begin{aligned} 2\log M_{p+1} &\leq \log M_p + \log M_{p+2} \\ &\leq \frac{p}{p+1}\log M_{p+1} + \log M_{p+2}, \end{aligned}$$

因此

$$2\log M_{p+1} - \frac{p}{p+1}\log M_{p+1} \leq \log M_{p+2},$$

i.e.

$$\frac{p+2}{p+1}\log M_{p+1} \leq \log M_{p+2},$$

这就是第 $p+1.$ 阶的关系式 (2.1)。 □

命题 2.3. 如果序列 (M_p) 满足条件 (1.2)，则有

$$\forall m \in \mathbb{Q}, \ \exists B \geq 0 : M_{pm} \leq B^p \left(M_p\right)^m, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ pm \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

证明。首先，让我们对 m if $m \in \mathbb{N}.$ 进行归纳，证明 (2.2)。对于 $m=2$，由条件 (1.2) 和 $B=H^2.$ 可得该估计成立。因此，假设 (2.2) 成立

直到阶数 m，并证明它在阶数 $m+1$. 时成立。由条件 (1.2) 和递推假设可得

$$\begin{aligned} M_{p(m+1)} &\leq H^{p(m+1)} M_p M_{pm} \\ &\leq H^{p(m+1)} M_p B^p \left(M_p\right)^m \\ &\leq \left(H^{(m+1)} B\right)^p \left(M_p\right)^{m+1}, \end{aligned}$$

这证明式（2.2）在阶数 $m+1$. 下成立。

如果 $m \in \mathbb{Q}$ 集合 $m = \frac{r}{s}$ 处于既约形式，那么如果 $pm \in \mathbb{N}$，则 $p = st$，其中 $t \in \mathbb{N}$。对 t 和 r 应用不等式 (2.2)，我们得到

$$M_{pm} = M_{tr} \leq B_r^t \left(M_t\right)^r$$

另一方面，序列 $(M_p)^{\frac{1}{p}}$ 是递增的，因此

$$\forall h \leq p,\ M_h \leq \left(M_p\right)^{\frac{h}{p}}$$

特别地，由最后一个不等式可得

$$M_{pm} \leq B_r^t \left(M_{st}\right)^{\frac{r}{s}} \leq B_m^p \left(M_p\right)^m$$

□

定义 2.4。我们记 $M_p \subset N_p$ if

$$\exists L > 0, \exists C > 0 : M_p \leq C L^p N_p,\ \forall p \in \mathbb{N}$$

例。我们有 $p! \subset M_p$，对于所有满足条件 (1.2) 的序列 M_p。

注 2.5。事实上，我们有一个更强的估计，见 [3],

$$\forall L > 0, \exists C > 0 : p! \leq C L^p M_p,\ \forall p \in \mathbb{N}$$

3. Roumieu regularity of hypoelliptic operators with constant coefficient

本文的第一个结果是常系数亚椭圆算子的 Roumieu 正则性。不过，首先让我们给出常系数亚椭圆算子的一个高阶估计。

为简化记号，令 $d = \frac{\mu}{\nu}$ 和 $\gamma = dm\mu$，其中 $\mu,\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

命题 3.1。设 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界开子集，并设 Q 是一个阶数为 m 的 $d-$亚椭圆算子，则

$$\exists C > 0, \forall k \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq km\nu, \forall \delta > 0, \forall u \in C^\infty(\omega),$$

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\omega_\delta)} \leq C^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{\delta}\right)^{(k-i)dm} \left\|Q^i u\right\|_{L^2(\omega)} \tag{3.1}$$

证明。由于 Q 是 $d-$亚椭圆的，因此在（1.3）中选取 β，使得 $|\beta| = m$ 和$Q^{(\beta)}$（D）$= Cst \neq 0$，我们得到

$$|\xi|^{m\nu} \leq C\left(1 + |Q^\mu(\xi)|\right),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

对于某个 $C > 0$，那么对于所有满足 $|\alpha| \leq m\nu$ 的 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$，我们有

$$|\xi^\alpha| \leq |\xi|^{|\alpha|} \leq C\left(1 + |Q^\mu(\xi)|\right),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

另一方面，我们可以从命题 1.4 得知，算子 $Q^\mu(D)$ 的阶为 $m\mu$，它也具有亚椭圆性，因此根据命题 2.1，对于任意

对于 $\mathbb{R}^n$ 的有界开子集 ω ，存在 $C_1 > 0$ ，使得对于所有满足$|\alpha| \leq m\nu$ 的 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ，我们有

$$N_\gamma\left(D^\alpha u\right) \leq C_1\left(N_\gamma\left(Q^\mu u\right) + \|u\|_{L^2(\omega)}\right),\ \forall u \in C^\infty(\omega)$$

根据 N_γ的定义，我们得到

$\forall t > 0, \forall \rho \geq 0, \forall v \in C^\infty(\omega)\ \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha| \leq m\nu$:

$$\sup_{0<\tau\leq t} \tau^\gamma \left\|D^\alpha v\right\|_{L^2(\omega_{\rho+\tau})} \leq C_1\left(\sup_{0<\tau\leq t} \tau^\gamma \left\|Q^\mu v\right\|_{L^2(\omega_{\rho+\tau})} + \|v\|_{L^2(\omega_\rho)}\right),$$

因此

$$\left\|D^\alpha v\right\|_{L^2(\omega_{\rho+t})} \leq C_1\left(\left\|Q^\mu v\right\|_{L^2(\omega_\rho)} + t^{-\gamma}\|v\|_{L^2(\omega_\rho)}\right),\ \forall v \in C^\infty\left(\omega_\rho\right). \tag{3.2}$$

由此估计，我们将通过关于 $k.$ 的递推证明 (3.1)。对于 $k = 0$ ，结论显然；对于 $k = 1$ ，取 $\rho = 0$ 和 $t = \delta.$ ，由 (3.2) 可得估计 (3.1)。假设 (3.1) 对不超过阶数 k 的情形成立，下面证明它在阶数 $k + 1.$ 时仍然成立。令 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ 满足 $km\nu < |\alpha| \leq (k+1)\ m\nu$，将 $\alpha = \alpha' + \alpha_0$ 写成$|\alpha_0| = m\nu$ 的形式，并代入 (3.2)，对于$t = \frac{\delta}{k+1}$、 $\rho = \frac{k\delta}{k+1}$ 和 $v = D^{\alpha'}u$，我们得到

$$\begin{aligned}
\left\|D^\alpha u\right\|_{L^2(\omega_\delta)} &\leq C_1\left(\left\|Q^\mu\left(D^{\alpha'}u\right)\right\|_{\omega_\rho} + \left(\frac{k+1}{\delta}\right)^\gamma \left\|D^{\alpha'}u\right\|_{L^2(\omega_\rho)}\right) \\
&\leq C_1 C_1^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{(k-i)\gamma} \left\|Q^{\mu i}Q^\mu u\right\|_{L^2(\omega)} \\
&\quad + C_1 C_1^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{(k-i)\gamma} \left\|Q^{\mu i}u\right\|_{L^2(\omega)} \\
&\leq C_1^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1}\left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{(k-i+1)\gamma} \left\|Q^{\mu i}u\right\|_{L^2(\omega)} \\
&\quad + C_1^{k+1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{(k-i)\gamma} \left\|Q^{\mu i}u\right\|_{L^2(\omega)} \\
&\leq C_1^{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i}\left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{(k+1-i)\gamma} \left\|Q^{\mu i}u\right\|_{L^2(\omega)}.
\end{aligned}$$

□

定理 3.2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，且 Q 是一个具有常系数的 $d-$ 亚椭圆微分算子；设 (M_p) 是满足 (1.1) –(1.2) 的序列，并且满足

$$(p!)^d \subset M_p, \tag{3.3}$$

then

$$R_M(\Omega, Q) \subset R_{M^d}(\Omega).$$

证明。假设 $u \in R_M$(Ω P)，并令 H 为 Ω 的紧子集，则存在有界开集 ω 和 $\delta > 0$ ，使得 $H \subset \omega_\delta \subset \omega \subset \Omega$。因此存在 $A > 0$ ，使得

$$\left\|Q^{\mu i}u\right\|_{L^2(\omega)} \leq A^{\mu i+1}M_{\mu im}\ ,\ i = 0, 1, ...,$$

因此，由 (3.3) 可知，且由于 $p^p \leq p! e^p$，我们对每个 $i \leq k+1$ 都有，

$$\begin{aligned} k^{(k+1-i)\gamma} \left\| Q^{\mu i} u \right\|_{L^2(\omega)} &\leq ((k+1)\, m\mu)!^{\frac{k+1-i}{k+1} d} e^{(k+1)m\mu} A^{\mu i+1} M_{i\mu m} \\ &\leq A_1^{k+1} M_{im\mu} \left(M_{(k+1)m\mu} \right)^{\frac{k+1-i}{k+1}}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

对于某个常数 $A_1 > 0$. 但序列 $(M_p)^{\frac{1}{p}}$ 是递增的，因此

$$\forall h \leq p, \ (M_h)^p \leq (M_p)^h$$

应用 $h = im\mu$ 和 $p =$ （$k+1$） $m\mu$，我们得到。

$$M_{im\mu} \leq \left(M_{(k+1)m\mu} \right)^{\frac{im\mu}{(k+1)m\mu}} = \left(M_{(k+1)m\mu} \right)^{\frac{i}{(k+1)}},$$

由此结合（3.4）和（1.2）可得

$$\begin{aligned} k^{(k+1-i)\gamma} \left\| Q^{\mu i} u \right\|_{L^2(\omega)} &\leq A_1^{k+1} M_{(k+1)m\mu} \\ &\leq A_1^{k+1} H^{(k+1)m\mu} M_{km\mu} M_{m\mu} \\ &\leq A_2^{k+1} M_{km\mu}. \end{aligned}$$

这一估计将使我们能够得出结论。令 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$，则存在一个整数$k$，使得 $(k-1)$ $\nu m \leq |\alpha| \leq k\nu m$. 考虑到条件 (1.2)，由 (3.1) 和最后一个估计式可得

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{L^2(H)} &\leq C^k \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{(k-i)\gamma} A_2^{k+1} M_{km\mu} \\ &\leq C^k \left(\left(\frac{1}{\delta} \right)^\gamma + 1 \right)^k A_2^{k+1} M_{km\mu} \\ &\leq A_3^{k+1} M_{km\mu} \end{aligned}$$

但是 $k\mu m = k\nu d m \leq |\alpha|\, d$，因此结合不等式 (2.2)，我们得到

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(H)} \leq A_3^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}^d,$$

这表明 $u \in R_{M^d}(\Omega)$。 □

4. Roumieu regularity of hypoelliptic operators with constantstrength

在讨论与常强度微分算子相关的微分方程解的正则性之前，我们先回顾一些与此问题相关的定义和性质，以及 H¨ormander[5] 关于这些算子正则性的基本结果。

定义 4.1. 若 Ω 中的变系数微分算子 $P(x, D)$ 满足：对任意固定的 $x, y \in \Omega$，常系数微分算子 $P(x, D)$ 和 $P(y, D)$ 强度相同，则称其在 Ω 中具有常强度，也就是说

$$\forall x, y \in \Omega, \ \exists C_{x,y} > 0 : \widetilde{P}(x, \xi) \leq C_{x,y} \widetilde{P}(y, \xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $\widetilde{P}^2(\xi) = \sum_\alpha \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right|^2$.

定义 4.2. 定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的正函数 h 称为温和权函数，当且仅当

$$\exists C, \exists N > 0 : h(\xi+\eta) \leq (1+C|\eta|)^N h(\xi);\ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

这些函数的集合记为 $\mathcal{H}$.

~例：对于每个多项式 $P(\xi)$，函数 $P(\xi)$ 属于 $\mathcal{H}$。

引理 4.3. 对所有 $h \in \mathcal{H}$ 和所有 $\delta > 0$，函数

$$h_\delta(\xi) = \sup_{|\eta| \leq \delta} h(\xi+\eta),$$

是一个满足以下条件的 $\mathcal{H}$ 中的函数

$$\exists C > 0, \exists N > 0 : h(\xi) \leq h_\delta(\xi) \leq h(\xi)(1+C\delta)^N,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2}$$

$$\left(h^j\right)_\delta = (h_\delta)^j \ \ for\ j = 1, 2, ... \tag{4.3}$$

证明。首先，对于所有的 ξ、$\theta \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned} h_\delta(\xi+\theta) &= \sup_{|\eta| \leq \delta} h(\xi+\theta+\eta) \leq \sup_{|\eta| \leq \delta} h(\xi+\eta)(1+C|\theta|)^N \\ &\leq (1+C|\theta|)^N h_\delta(\xi), \end{aligned}$$

因此 $h_\delta \in \mathcal{H}$。接下来，(4.2)中的第一个不等式由 h_δ. 的定义得到。对于第二个不等式，由于 h 是温和权函数，因此存在 $C > 0$和 $N > 0$ 使得

$$h_\delta(\xi) \leq \sup_{|\eta| \leq \delta} (1+C|\eta|)^N h(\xi) \leq h(\xi)(1+C\delta)^N,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

最后，通过对 j进行递推可得性质(4.3)。 □

对于每个 $h \in \mathcal{H}$，我们定义

$$\mathcal{B}_{p,h} = \left\{ u \in \mathcal{S}', \left(\int |h(\xi)\hat{u}(\xi)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1 \leq p < \infty \right\},$$

赋予范数

$$\|u\|_{p,h} = \left(\int |h(\xi)\hat{u}(\xi)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.$$

如果 $p = \infty$，那么 $\|u\|_{\infty,\ h} = ess\sup |h(\xi)\hat{}u(\xi)|$.

以下定理是常强度微分算子拟椭圆性的基本结果，参见 H¨ormander [5, 定理 7.3.1 和定理 7.4.1]。

定理 4.4. 设 $P(x,D)$ 是一个系数为 C^∞、在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$. 的邻域内具有常强度的微分算子。那么，存在 x_0 的一个充分小的开邻域 Ω，以及一个从 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ 的线性映射 E，具有以下性质：

$$P(x,D)Eu = u \ in\ \Omega \ if\ u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),$$

$$EP(x,D)v = v \ in\ \Omega \ if\ v \in \mathcal{E}'(\Omega), \tag{4.4}$$

$$\|Eu\|_{p,\tilde{P}_0 h} \leq C_h \|u\|_{p,h} \ \ if\ u \in \mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{B}_{p,h},\ h \in \mathcal{H}, \tag{4.5}$$

其中 $P_0(D) = P(x_0, D)$，且 C_h 与 u. 无关。

此外，如果 $P_0(D)$ 是亚椭圆的，那么 $P(x,D)$ 也具有这一性质。

注4.5. 在该结果的证明中，H¨ormander 给出了以下估计，它比 (4.5) 更强，参见 [5, 第 176] 页。

$$\|Eu\|_{p,\widetilde{P}_0 h_\delta} \leq C\|u\|_{p,h_\delta} \text{ if } u \in \mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{B}_{p,h},\ h \in \mathcal{H}, \tag{4.6}$$

若 δ 足够小。常数 C 与 u、h 和 δ. 无关

我们将在证明本文的第二个结果（即以下定理）时使用这一估计。

设 $P(x,D)$ 是 x_0 的某个邻域内的常强度微分算子，并设 (M_p) 是满足条件 (1.1) – (1.2) 的一个序列。则存在 x_0 的一个开邻域 Ω_0 ，使得若 $P(x,D)$ 的系数属于 $R_M(\Omega_0)$，且算子 $P_0(D) = P(x_0,D)$ 是亚椭圆的，并且序列 (M_p) 满足条件 (3.3)，则有

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega_0),\ P(x,D)u \in R_M(\Omega_0) \Rightarrow u \in R_{M^d}(\Omega_0).$$

证明。设 Ω 如定理 4.4 所述，并证明 (4.6) 给出以下估计

$$\exists A > 0,\ \left\|E^l u\right\|_{2,\left(\tilde{P}_0\right)^l} \leq A^l \|u\|_{L^2}, \forall u \in C_0^\infty(\Omega),\ l = 0,1,..., \tag{4.7}$$

事实上，用 $p=2$ 替代 h ，并用 h^{l-1} 替代 $E^{l-1}u$、用 $E^{l-1}u$ 替代 u ，可得

$$\left\|E^l u\right\|_{2,\widetilde{P}_0(h^{l-1})_\delta} = \left\|EE^{l-1}u\right\|_{2,\widetilde{P}_0(h^{l-1})_\delta} \leq C\left\|E^{l-1}u\right\|_{2,(h^{l-1})_\delta}, \tag{4.8}$$

但由 h_δ 的性质 (4.2) 和 (4.3)，我们有

$$\begin{aligned}(h^{l-1})_\delta(\xi) &= (h_\delta(\xi))^{l-1} = h_\delta(\xi)(h_\delta(\xi))^{l-2} = h_\delta(\xi)\left(h^{l-2}\right)_\delta(\xi)\\ &\leq h(\xi)(1+C\delta)^N (h^{l-2})_\delta(\xi)\\ &\leq C_1 h(\xi)(h^{l-2})_\delta(\xi)\end{aligned}$$

~代入 (4.8)，并用 P_0 替换 h ，得到

$$\left\|E^l u\right\|_{2,\widetilde{P}_0(\widetilde{P}_0^{l-1})_\delta} \leq CC_1\left\|E^{l-1}u\right\|_{2,\widetilde{P}_0(\widetilde{P}_0^{l-2})_\delta}$$

重复同样的论证，我们在第 $l-th$ 步得到

$$\left\|E^l u\right\|_{2,\widetilde{P}_0(\widetilde{P}_0^{l-1})_\delta} \leq (CC_1)^l \|u\|_{L^2},$$

由性质 (4.2) 可知

$$\left\|E^l u\right\|_{2,\tilde{P}_0^l} \leq \left\|E^l u\right\|_{2,\widetilde{P}_0(\widetilde{P}_0^{l-1})_\delta} \leq (CC_1)^l \|u\|_{L^2}$$

因此，估计式 (4.7) 在 $A = CC_1$. 下成立

将 (4.7) 应用于 x、D 中的 P^l，以 u 替代 u，我们得到

$$\left\|E^l P^l(x,D)u\right\|_{2,\tilde{P}_0^l} \leq A^l\left\|P^l(x,D)u\right\|_{L^2},\ \forall u \in C_0^\infty(\Omega),\ l = 0,1,...,$$

另一方面

$$\left\|P_0^l(D)u\right\|_{L^2} \leq \|u\|_{2,\tilde{P}_0^l},\ \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

那么，对于所有 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 和 $l = 0$，1，.....，我们都有

$$\left\|P_0^l(D)E^l P^l(x,D)u\right\|_{L^2} \leq \left\|E^l P^l(x,D)u\right\|_{2,\tilde{P}_0^l} \leq A^l\left\|P^l(x,D)u\right\|.$$

但是由定理 4.4 $EP(x,D)\ u=u,\ \forall u\in C_0^\infty(\Omega)$，因此 $E^lP^l(x,D)\ u=u$ 对所有 $l=0,1,...$ 都成立，从而由上述估计可得

$$\left\|P_0^l(D)\,u\right\|_{L^2}\le A^l\left\|P^l(x,D)\,u\right\| \tag{4.9}$$

现在设 $u\in\mathcal{E}'(\Omega)$，使得 $P(x,D)\,u\in R_M(\Omega)$。根据假设，算子 $P(x,D)$ 具有常强度，且算子 $P_0(D)$ 是亚椭圆的，因此 $P(x,D)$ 也是亚椭圆的，故 $u\in C^\infty(\Omega)$，因为 $R_M(\Omega)\subset C^\infty(\Omega)$。此外，由于 $P(x,D)$ 的系数属于 $R_M(\Omega)$，容易验证 u 是 Ω 中算子 $P(x,D)$ 的 Roumieu 向量，因此根据 (4.9)，u 也是 Ω 中算子 $P_0(D)$ 的 Roumieu 向量。由定理 3.2 得出 $u\in R_{M^d}(\Omega)$

. □

推论 4.7. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$，$P(x,D)$ 的一个开子集，$R_M(\Omega)$ 中系数为 R_M 的常强度微分算子，且 (M_p) 是满足条件 (1.1) – (1.2) 的一个序列。若对于某个 $x_0\in\Omega$，算子 $P_0(D)=P(x_0,D)$ 是 $d-$亚椭圆的，且序列 (M_p) 满足条件 (3.3)，那么

$$\forall u\in\mathcal{D}'(\Omega),\ P(x,D)\,u\in R_M(\Omega)\Rightarrow u\in R_{M^d}(\Omega).$$

证明。首先注意，由于微分算子 $P(x,D)$ 在 Ω 中是常强度的，且 $P(x_0,D)$ 是 $d-$亚椭圆的，因此对于所有点$x_1\in\Omega$，$P(x_1,D)$ 也是 $d-$亚椭圆的，见 [9]。接下来，Ω 的每个紧集 H 都可以由有限个开子集 Ω_j 覆盖，如定理 4.6 所示。□

AUTHOR'S CONTRIBUTION

所有作者均参与了本研究的构思与设计。

CONFLICT OF INTEREST

不存在利益冲突。

REFERENCES

[1] C. Bouzar，R. Cha¨ıli，《Archiv Math.》76(1)（2001），57-66。[2] R. Cha
¨ *Comparison of iterates of a class of differential operators in Roumieu* ıli，T. *spaces.* **101** 115 2017 261 266
Mahrouz，《Publ. Inst. Math. NS, T.》（）（），-。[3] H. Komatsu，*Ultradistributions I, structure theorems and characterization.*《J. Faculty of Sci- ence, University of Tokyo, Sect. 1A》20（1973），25-105。[4] L. H¨ormander,
On interior regularity of the solutions of partial differential equations.《Comm. Pure Appl. Math.》11（1958），197-218。[5] L. H¨ormander，*Linear kpartial differential operators.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York，1976。[6] J. Juan-Huguet，《Integral Equations and Operator T heory》（）（），*Iterates and hypoellipticity of partial differential operators on non-quasianalytic classes.* **68** 2 2010 263 286 E.
Newberger，Z. Zielezny，[7]《Proc. Amer. Math. Soc.》39（1973），547-552。
The growth of hypoelliptic polynomials and Gevrey classes. M. Shafii-Mousavi，Z. Zielezny，[8]《Pac. J. Math.》82(1)（1979），249-256。*On hypoelliptic differential operators of constant strengh.* F. Trˆeves，[9] Gordan and Breach，1966。

Department of Mathematics, University of Sciences and Technology of Oran, Al-geria

Email address: rachidchaili@gmail.com

Department of Mathematics, University of Ibn Khaldoun Tiaret, Algeria
Email address: mahrouz78@gmail.com