arXiv:2305.01270v1 [quant-ph] 2 May 2023

实与复三量子位元组态分类

SABINO DI TRANI、WILLEM A. DE GRAAF 和 ALESSIO MARRANI

Abstract. 本文对群 SL(3, F)^3 在空间 $F^3\otimes F^3\otimes F^3$ 上的轨道进行分类，其中 $F=\mathbb{C}$ 且 $F=\mathbb{R}$。这称为复与实三量子态的分类。我们还概述了这些分类所适用的物理理论。

1. Introduction

向量空间 $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n}=\mathbb{C}^3\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^3$（$n$ 个因子 $\mathbb{C}^3$）的元素称为 n-量子态。在此空间上作用着群 SL$(3,\mathbb{C})^n$，也称为 SLOCC群（经经典通信辅助的随机局域量子操作）。这一背景下的基本问题之一，是确定该群的轨道，换言之，确定 n-量子态在 SLOCC等价关系下的分类。这在量子信息理论以及高能粒子物理学中都有应用，参见第 2.1 节。

对于 $n=3$，群及其表示可以通过对 $\mathfrak{e}_6$ 型单李代数进行分次来构造（详情见第 4 节）。因此，可以运用 Vinberg 关于 θ-群的理论（[Vin76a，Vin79]）对轨道进行分类。Nurmiev 已在 [Nur00b] 中完成了这项工作。本文重新审视他的分类，并补充了许多细节，例如对轨道代表元的稳定子的描述。

采用分次构造表示的一个主要特点是，可以证明 $(\mathbb{C}^3)^{\otimes 3}$ 中的元素具有 Jordan 分解。也就是说，每个 $v\in(\mathbb{C}^3)^{\otimes 3}$ 都可以唯一地写成 $v=s+e$，其中 s, $e\in(\mathbb{C}^3)^{\otimes 3}$, s 是半单元，e 是幂零元，而 $[s,e]=0$（后者是 $\mathfrak{e}_6$ 型单李代数中的李乘积）。这里的半单和幂零术语可以在 $\mathfrak{e}_6$ 型李代数中定义。也可以用更几何的方式定义它们：如果元素 $s\in(\mathbb{C}^3)^{\otimes 3}$ 在 SL$(3,\mathbb{C})^3$ 作用下的轨道是闭的（在 Zarisky 拓扑中），则称其为半单元。如果元素 $e\in(\mathbb{C}^3)^{\otimes 3}$ 在 SL$(3,\mathbb{C})^3$ 作用下的轨道闭包包含 0，则称其为幂零元。既非半单也非幂零的元素称为混合元。本文将证明以下结果。

定理 1.1。$(\mathbb{C}^3)^{\otimes 3}$ 中有 90 个元素类，具有以下性质。$(\mathbb{C}^3)^{\otimes 3}$ 中的每个元素都与某个且仅某个类中的元素在 SL$(3,\mathbb{C})^3$下共轭。固定类中的所有元素在 SL$(3,\mathbb{C})^3$中具有相同的稳定子。共有 63 个类，每类由一个幂零元组成（见表 1）。另有 4 个类，各自包含无穷多个半单元，分别依赖 3、2、1、1 个参数（见第 7.1 节）。这 4 个类中的元素在 SL$(3,\mathbb{C})^3$下共轭，当且仅当它们在一个明确给出的有限群下共轭；这些群的阶分别为 648、18、6、3。最后，混合元素的类总计有 23 个（见表 3、4、5）。

我们也考虑实数域。$(\mathbb{R}^3)^{\otimes n}=\mathbb{R}^3\otimes\cdots\otimes\mathbb{R}^3$ (n 因子$\mathbb{R}^3$)的元素称为 n-retri态。在这个空间上，我们考虑群 SL$(3,\mathbb{R})^n$的作用。这在实量子力学中有应用，也适用于高能理论物理中的“黑洞与黑弦/qutrit对应关系

”，参见第 2.2 节。

本文的主要结果是对空间 $(\mathbb{R}^3)^3$ 上 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})^3$-轨道的分类。为得到这一分类，我们采用复轨道的分类，以及 [BdGL21、BdGL22] 中发展的伽罗瓦上同调方法。我们在以下定理中总结实数情形的研究结果。

定理 1.2. $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 3}$ 中有 109 类元素，具有以下性质。$(\mathbb{R}^3)^{\otimes 3}$ 中的每个元素都与恰好一个类中的元素在 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})^3$ 下共轭。固定一类中的所有元素在 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})^3$ 中具有相同的稳定子。共有 70 类，每类由一个幂零元组成（即表 1 中的元素，以及表 2）。有 6 类由无穷多个半单元素组成（即第 7.1 节中的各族，以及第 7.2 节中找到的两个族）。最后，混合元素总共有 33 类（包括表 3、4、5 中的元素、式 (8.1) 中给出的元素，以及表 6、7 中的元素）。

1.1. 论文结构：第2节旨在为研究复三能级量子比特和实三能级量子比特提供一般性的物理动机，而在第3节中，我们回顾涉及3-奎特的物理模型。

在接下来的两节中，我们将介绍用于完成计算的数学技术。在第4节中，利用 Vinberg 的 θ-群理论，我们描述如何从李代数 $\mathfrak{e}_6$上由一个三阶自同构诱导的适当 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-分次出发，构造 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})^3$-模 $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$。在第5节中，我们简要回顾如何利用伽罗瓦上同调，在完整分类复轨道的基础上实现对实轨道的描述。

最后，在第6、7和8节中，我们详细介绍所得计算，这些计算给出了实轨道和复轨道的分类，以及列出这些轨道代表元的表格。

2. Qutrits

2.1. 复三能级量子比特。量子三进制（qutrit）是三个正交基态 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ [NJDH+13] 的叠加态，而非量子比特（qubit）的两个特征基态，即：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle, \text{ with } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1. \tag{2.1}$$

因此，三能级量子比特是 $\mathbb{C}^3$ 的一个元素，相应作用于其上的 SLOCC 群为 $GL_3(\mathbb{C})$。三能级量子系统的纠缠度量由多体局域 SLOCC 群作用下的相对不变量给出。例如，对于形式为 $(A, B = 0, 1, 2)$ 的双三能级量子态，最简单的相对 SLOCC 不变量可以取为

$$|\Psi\rangle = \Psi_{AB}|A\rangle\otimes|B\rangle, \tag{2.2}$$

复矩阵 Ψ_{AB} 的行列式 $\det(\Psi)$，它在 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})\otimes\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 作用下保持不变。因此，双三能级量子态的分类非常简单：不同的 SLOCC 类由 Ψ_{AB} 的秩标记。三能级量子比特密度矩阵的算符表示已被提出，相关的三能级量子比特纠缠也已得到研究；例如见 [CM00a]。此外，作为两个量子三能级系统纠缠度量的广义 concurrence 公式也已被提出 [HFL05]。

如今，人们正持续致力于开发量子计算机，其使用的不仅是量子比特，还包括具有多个状态的三能级量子比特 [Cho]。事实上，三能级量子比特在用于存储量子信息时，展现出若干独特而有趣的特性；例如，

例如，在某些环境相互作用下，它们对退相干更加稳健 [MDDR+04]；然而，实际上直接操控它们可能比较棘手，因此通常更容易利用与一个量子比特的纠缠 [LWL+08]。在 [PV08],中，数值确定了在维数最高为四的希尔伯特空间系统上，100 多个紧致双体贝尔不等式所能达到的最大量子违背，并发现存在一些贝尔不等式，使用实三能级量子比特比使用复量子比特能取得更大的违背。

在离子阱的背景下，研究人员已探索三能级量子比特量子计算机的物理实现 [KGRS03], ，并已开发出适用于三能级量子比特的量子计算机模拟软件包 [TJD11]。新的研究指出，三能级量子比特为拓展量子计算机的发展前沿提供了一条充满希望的路径 [GBD+20LYF13]。事实上，在当前量子处理器中访问第三个态，主要有助于探索量子计算前沿与量子物理的研究人员 [BRS+21] ，以及对传统的、基于量子比特的算法感兴趣的人士。值得期待的是，三能级量子比特不仅能增加单个元素所编码的信息量，还能实现可大幅降低读取错误的技术 [MOPL+09]。世界领先的前沿量子计算机实验室近期取得的进展表明，三能级量子比特—三能级量子比特门能够降低将三量子比特门分解为基本二量子比特组件的成本 [HHDR21]。这在一定程度上归因于使用三能级量子比特可访问的状态空间大得多：例如，单个三能级量子比特操作涉及一个三维希尔伯特空间，而两个三能级量子比特的操作则位于一个九维希尔伯特空间中，其维数超过两个量子比特情形下四维希尔伯特空间的两倍。

2.1.1. 中微子作为三能级量子比特。近年来，三能级量子比特在高能粒子物理学中有一项引人入胜的应用：事实上，中微子味态是三个态的叠加态，已被表征为三能级量子比特。通过将中微子的密度矩阵映射到广义的庞加莱球，可以实现这一点 ´e 球 [CM00a, Gam16]。

庞加莱球起源于光学，是一种利用从 SU_2 到 S^3的映射来直观呈现不同类型偏振光的方法。量子比特表示庞加莱球上的一个点， SU_2 定义为复射影直线

$$P^1\mathbb{C} = \frac{SU_2}{U_1}. \tag{2.3}$$

可以将庞加莱球推广到 SU_3 [AMM97, MM97, KMSM97], ，从而将三能级量子比特表征为复射影平面上的点 [BD06, Byr98]

$$P^2\mathbb{C} = \frac{SU_3}{U_2}. \tag{2.4}$$

n量子位寄存器可以同时表示 3^n 种不同状态，即 3^n维希尔伯特空间 [CM00b]中的叠加态矢量。文献 [JCB22]研究了利用庞加莱´球表示，通过 SU_2 泡利矩阵和 SU_3 盖尔曼矩阵分别描述两味和三味中微子态所实现的中微子纠缠。

2.2. 实三能级量子比特：实三能级量子比特。实量子力学（即定义在实向量空间上的量子力学）可追溯至 St¨uckelberg [Stu60], ，它提供了一种有趣的理论；对该理论的研究或许有助于区分量子纠缠中那些标准量子理论所独有的方面，以及那些在其他同样具有这一现象的物理理论中更为普遍的方面 [CFR01]。除了再比特（实量子比特）之外，实量子力学中还出现了引入实三能级量子比特的研究兴趣，即概率幅采用实系数的三能级量子比特

对于一个三能级系统，也就是说，一种可表示为正交归一基态 $|0\rangle$、$|1\rangle$ 和 $|2\rangle$的实线性组合的三能级量子态；该系统可以处于三个相互正交归一的量子态的叠加态 [NJDH+13]中，这些量子态张成希尔伯特空间 $\mathcal{H}^3$ [Byr98]„ 其维数为 dim $= 3$ （对于三能级量子比特，在 $\mathbb{C}$ 上；对于实三能级量子比特，在 $\mathbb{R}$ 上）。与再比特一样，对于实三能级量子比特，经处理的量子态密度矩阵 ρ 也是实的；即在量子计算的每一点，都有 $\langle x|\rho|y\rangle \in \mathbb{R}$，其中 $|x\rangle$、$|y\rangle$ 取自计算基。

2.2.1. 作为实三能级量子比特的黑洞/弦理论荷。近年来，通过发现 2 个和 3 个量子比特纯态的纠缠与 $D = 4$ 麦克斯韦–爱因斯坦–标量理论中的极端黑洞熵之间存在显著的多重关系，再比特在高能理论物理中的重要性得到了凸显。这些理论可视为超引力理论的玻色扇区，或者等价地视为弦理论紧化的低能极限。在这一框架中，后来该框架被称为“黑洞/量子比特对应”（参见例如 [BDD+09、BDMR11、BDL12]，其中有综述和参考文献列表），再比特获得了极端黑洞电荷和磁荷的物理含义，并在所研究理论的广义电磁对偶群 $G(\mathbb{R})$（在弦理论中称为 U对偶群；详见下文）下作线性变换[1]。

因此，一个自然的问题出现了：能否找到由实三能级量子比特构成的纠缠系统，使其能够与其他熵公式建立联系?

答案是肯定的，前提是在 $D = 5$ 时空维度 [DF07] 中考察黑洞和黑弦解：从这个意义上说，上述$D = 4$ “黑洞/量子比特对应”可以推广为 $D = 5$ “黑洞或黑弦/三能级量子比特对应”。

在此值得回顾的是，魔幻 $\mathcal{N} = 2$, $D = 5$ 超引力 [GST83、GST84、BDD+09] 分别与5、8、14和26个矢量多重态耦合，并带有 $G(\mathbb{R}) = SL(3,\mathbb{R})$、$SL(3,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$、$SU^*(6) \simeq SL(3,\mathbb{H})_{\mathbb{R}}$ 和 $E_{6(-26)} \simeq SL(3,\mathbb{O})_{\mathbb{R}}$ [Wan07]，它们可以分别由简单的秩-3约当代数 $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{A}}$ 描述；这些代数由四个赋范 Hurwitz 代数 [Hur63]中的厄米矩阵构成：实数 $\mathbb{R}$、复数 $\mathbb{C}$、四元数 $\mathbb{H}$ 和八元数 $\mathbb{O}$，总维数为 $\dim_{\mathbb{R}} = 3q + 3$，其中 q :=dim$_{\mathbb{R}}\mathbb{A} = 1$、2、4、8 分别对应于 $\mathbb{A} = \mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{O}$。

此外，还可以在这些约当代数中用除法代数的分裂版本替代除法代数（即分裂复数 $\mathbb{C}_s$、分裂四元数 $\mathbb{H}_s$ 和分裂八元数$\mathbb{O}_s$），从而得到 $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{A}_s}$。对于分别具有 $G(\mathbb{R}) = SL(3,\mathbb{R})\otimes SL(3,\mathbb{R})$ 的 $\mathbb{C}_s$ 和 $\mathbb{H}_s$，以及具有 $G(\mathbb{R}) = SL(6,\mathbb{R})$ 的情形，可分别得到非超对称（即 $\mathcal{N} = 0$）的 $D = 5$ 中的麦克斯韦–爱因斯坦–标量理论；这些理论已在 [MPRR17、MR19], 中得到研究。而对于 $\mathbb{O}_s$，则得到最大超对称的、$\mathcal{N} = 8$、$D = 5$超引力 [MMS 99]，其中有 27 个阿贝尔规范场在 $G(\mathbb{R}) = E_{6(6)}$ 的自反实定义模 27 中变换。

所有这些理论都允许存在渐近平坦、静态、极端的黑洞和黑弦，其贝肯斯坦-霍金熵可分别用齐次三次多项式 $I_{3,el}$ 和 $I_{3,magn}$（取其绝对值）表示。这些多项式在 $G(\mathbb{R})$ 对相应简单 Jordan 代数 $\mathfrak{J}_3$ [FGK06] 的非传递作用下保持不变；事实上，在所有提及的情形中，G在 $\mathfrak{J}_3$ 上的作用都是 Vinberg 意义下的 θ-群（另见 [Kac80], 及其中的参考文献）。在量子信息理论（QIT）领域，这类三次多项式刻画了适当三能级量子比特系统的多体纠缠度量；全面介绍可参见综述 [BDL12] 的第 4 节。

[1]在超引力中，通常考虑黑洞具有 $real$ （而非整数）的电荷和磁荷这一近似，因此忽略电荷量子化。

3. From 3 qutrits to 3-centered black holes/strings

3.1. 复轨道：三个量子三能级系统的纠缠。在 [Nur00a] 中，考察了以下$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-分次的 $\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$：

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_6(\mathbb{C}) &= \mathfrak{g}_{-1}(\mathbb{C})\oplus\mathfrak{g}_0(\mathbb{C})\oplus\mathfrak{g}_1(\mathbb{C});\\ \mathfrak{g}_0(\mathbb{C}) &= \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})^{\oplus 3};\\ \mathfrak{g}_1(\mathbb{C}) &= \mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3\equiv\left(\mathbb{C}^3\right)^{\otimes 3};\\ \mathfrak{g}_{-1}(\mathbb{C}) &= \mathfrak{g}_1^*(\mathbb{C}),\end{aligned}\tag{3.1}$$

并对群 $G_0(\mathbb{C})=\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})^{\times 3}$ 作用于 $\left(\mathbb{C}^3\right)^{\otimes 3}$ 的轨道作用进行了完整分类。注意，$\mathfrak{g}_0(\mathbb{C})=\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})^{\oplus 3}$ 是 $\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$的极大非对称子代数，它定义为关于一个 3 阶周期自同构作用的不动点代数，该自同构在 $\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$本身上诱导出 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-分次。此外，$\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})^{\times 3}$（非传递地）作用于 $\left(\mathbb{C}^3\right)^{\otimes 3}$，是 Vinberg [Vin76b]意义下的 II 型 θ-群；事实上，它有有限多个幂零轨道，其不变多项式环的维数为 3，并由完整基的 6、9 和 12 次齐次多项式有限生成（下文分别记为 I_6, I_9 和 I_{12}；例如参见 [Kac80], 的表 III 及其中的参考文献）。

上述分次在量子信息理论（QIT）中有应用，因为它涉及对 3 个纯多体量子三能级系统纠缠的分类，这些系统属于空间 $\left(\mathbb{C}^3\right)^{\otimes 3}\equiv(3,3,3)$（采用物理学家记法），并受 SLOCC 群 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})^{\times 3}$ 作用。关于三个量子三能级系统纠缠类别分类的最新论述，可参见例如 [GM21], 及其中的参考文献。

3.2. 实轨道： $D=5$ 中的三中心黑洞/弦。 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-分次（3.1）的最大非紧（即分裂）实形式为

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_{6(6)} &= \mathfrak{g}_{-1}(\mathbb{R})\oplus\mathfrak{g}_0(\mathbb{R})\oplus\mathfrak{g}_1(\mathbb{R});\\ \mathfrak{g}_0(\mathbb{R}) &= \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})^{\oplus 3};\\ \mathfrak{g}_1(\mathbb{R}) &= \left(\mathbb{R}^3\right)^{\otimes 3};\\ \mathfrak{g}_{-1}(\mathbb{R}) &= \mathfrak{g}_1'(\mathbb{R}).\end{aligned}\tag{3.2}$$

根据 [dGM20], 中所进行的分类，分裂形式 $\mathfrak{e}_{6(6)}$ 仅有两种实形式可作为 $\mathfrak{a}_2^{\oplus 3}$ 的极大（非对称）子代数：

$$\mathfrak{e}_{6(6)}\supsetneq\begin{cases} i: & \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})^{\oplus 3};\\ ii: & \mathfrak{su}_{1,2}\oplus\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}.\end{cases}\tag{3.3}$$

另一方面，所有其他非紧致实形式 $\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$也都存在类似的嵌入，即 [dGM20]：

$$\mathfrak{e}_{6(2)}\supsetneq\begin{cases} i: & \mathfrak{su}_{1,2}^{\oplus 3};\\ ii: & \mathfrak{su}_{1,2}\oplus\mathfrak{su}_3^{\oplus 2};\\ iii: & \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})_{\mathbb{R}};\end{cases}\tag{3.4}$$

$$\mathfrak{e}_{6(-14)}\supsetneq\mathfrak{su}_{1,2}^{\oplus 2}\oplus\mathfrak{su}_3;\tag{3.5}$$

$$\mathfrak{e}_{6(-26)}\supsetneq\mathfrak{su}_3\oplus\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}.\tag{3.6}$$

由于嵌入 (3.3) i 与 $\mathfrak{e}_{6(6)}$的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-分次 (3.2) 相关，因此自然会引出这样一个问题：上述其他实嵌入是否与相应非紧致实形式 $\mathfrak{e}_6$的适当$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-分次相关。这里我们不深入探讨这个问题。

有几点值得注意。

• 在（不一定是超对称的）麦克斯韦-爱因斯坦-标量理论中，嵌入（3.3） i 和（3.4） iii 称为超埃勒斯 [FMT12]（或约当对 [FMZ13]）嵌入，它们表明， $D = 3$ 电磁（e.m.）对偶群[2]的李代数包含 $D \geqslant 4$ 电磁对偶群的李代数作为真子代数，以及一个与之对易的直和项 $\mathfrak{sl}_{D-2}(\mathbb{R})$，其针对 $D = 5$ 指定。

• 嵌入 (3.3) i 和 ii 来自相应麦克斯韦–爱因斯坦–标量理论在 $D = 5$ 中的一致截断：基于（$\mathfrak{J}_3^{\mathbb{O}_s}$）的极大超引力的电磁对偶群的李代数包含基于 $\mathcal{N} = 0$ $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}_s}$的麦克斯韦–爱因斯坦–标量理论的电磁对偶群的李代数，以及基于 $\mathcal{N} = 2$ $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}}$的魔幻超引力的电磁对偶群的李代数，作为真子代数；同时还包含一个与之对易的项 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ 和$\mathfrak{su}_{1,\ 2}$。这些截断分别源自除代数约化（这也是超对称约化）： $\mathbb{O}_s \to \mathbb{C}_s$ ($\mathcal{N} = 8 \to 0$) 和 $\mathbb{O}_s \to \mathbb{C}$ ($\mathcal{N} = 8 \to 2$)。

• 另一方面，嵌入 (3.6) 来自相应超引力理论的一致截断：在 $D = 5$中，基于例外的 $\mathcal{N} = 2$, $J_3^{\mathbb{O}}$ 的魔幻超引力[GST83、GST84] 的电磁对偶群的李代数，包含基于 $\mathcal{N} = 2$ $J_3^{\mathbb{C}}$的魔幻超引力的电磁对偶群的李代数，作为真子代数；同时还包含一个与之对易的项 $\mathfrak{su}_3$。这一截断源自除代数约化 $\mathbb{O} \to \mathbb{C}$ （这不会导致超对称性的约化）。

在本文中，我们将研究完全分裂实形式 $3\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ 在 $\left(\mathbb{R}^3\right)^{\otimes 3}$ 上的非传递作用的轨道分层。这对应于嵌入 (3.3) i，其中一个 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \equiv \mathfrak{sl}_{3,h}(\mathbb{R})$ 可被解释为相应的（非规范化）麦克斯韦-爱因斯坦-标量（超）引力理论中（渐近平坦）三中心极端黑洞/黑弦解的“水平”对称性 [FMO$^+$11] 。

事实上，麦克斯韦-爱因斯坦方程的多中心解（单中心解的自然推广）也存在于 $D > 4$ （洛伦兹）时空维数 [Luc21] 中。通过考虑 $D = 5$，渐近平坦黑体是 0-膜（黑洞）和 1-膜（黑弦）；在它们的极端情形下，其近视界几何分别为 $AdS_2 \otimes S^3$ 和 $AdS_3 \otimes S^2$。 $D = 5$ 中的渐近平坦极端黑洞被称为 Tangherlini 黑洞 [Tan63、MP86], ，它们是 Papapetrou-Majumdar 黑洞的一个特殊实例；其多中心类别最近已在 [Luc21], 中得到研究，并在那里完成了高维麦克斯韦-爱因斯坦理论中渐近平坦极端黑洞解的分类。

在 $D = 5$ 二形式阿贝尔（电）场强的通量以及其对偶三形式阿贝尔（磁）场强的通量中，前者决定极端Tangherlini黑洞的电荷，后者决定极值黑弦的磁荷；它们分别构成 $\mathcal{R}_{el}$ 电磁对偶群$G(\mathbb{R})$ 的一个表示，以及其对偶/共轭表示 $\mathcal{R}_{magn} \equiv \mathcal{R}'_{el}$ 。在与本文处理相关的实嵌入（3.3） i 或（3.4） iii所对应的 $D = 5$ 麦克斯韦–爱因斯坦–标量理论中，可以指定以下群论数据：

[2]这个群可以视为超弦理论中 U对偶群 $G(\mathbb{Z})$[HT95] 的“连续极限/版本” $G(\mathbb{R})$。

- $\mathcal{N}=0$ 基于$\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}_s}$的麦克斯韦-爱因斯坦-标量理论： $G(\mathbb{R})=\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$、$\mathcal{R}_{el}=(\mathbf{3},\mathbf{3}')$、 $\mathcal{R}_{magn}=(\mathbf{3}',\mathbf{3})$，以及$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})^{\times 2}$ 分别作用于 $\mathcal{R}_{el}$ 的每个轨道，都支持一类唯一的单中心（电黑洞或磁黑弦）解 [MPRR17、MR19]。
- $\mathcal{N}=2$ 基于 $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}}$ 的麦克斯韦-爱因斯坦魔法超引力： $G(\mathbb{R})=\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ ， $\mathcal{R}_{el}=(\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}})$、 $\mathcal{R}_{magn}=(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3})$，以及 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ 作用于 $\mathcal{R}_{el}$（分别为 $\mathcal{R}_{magn}$）的每个轨道，都对应一类唯一的单中心（电黑洞或磁黑弦）解 [BDF+12]。

根据经典不变理论，对于 $D=5$ 中上述两种引力理论，电磁对偶群 $G(\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{R}_{el}$ 或 $\mathcal{R}_{magn}$ 上的作用，在 $\mathbb{C}$ 上可追溯至 I 型 $\mathbb{C}\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 的 θ-群在其双基本表示 $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$ 上的作用，该表示具有以下性质（例如参见 [Kac80]，及其中所引文献）：

1：一般轨道 $\mathcal{O}_{m=1}=\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})^{\times 2}/H_{m=1}$ 的稳定子的单位连通分支（$H_{m=1}$）$_0$ 由 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 给出；2：幂零轨道的数量是有限的；3：不变多项式环是一维的，并且由一个三次齐次多项式 I_3 有限生成（例如参见 [Kac80] 的表 II）。这样的三次多项式无非就是秩三简单约旦代数 $\left(J_3^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{C}}\simeq\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$ of $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 的三次范数（行列式），后者可视为 $\left(J_3^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{C}}$ itself 的约化结构群。对于 $\mathbb{R}$ 上的相关形式，作相应修改后，同样的结论也成立。

3.1：基于 $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}_s}$ 的 $\mathcal{N}=0$ 麦克斯韦-爱因斯坦-标量理论 [MPRR17, MR19]： $G(\mathbb{R})=\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$作用于 $\mathcal{R}_{el}=(\mathbf{3},\mathbf{3}')$，分别为 $\mathcal{R}_{magn}=(\mathbf{3}',\mathbf{3})$，具有唯一的本原不变量三次齐次多项式：$\mathrm{I}_{3,el}$ 分别为 $\mathrm{I}_{3,magn}$，它们恰好是秩三简单约旦代数$J_3^{\mathbb{C}_s}\simeq\mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^3$（分别为其对偶）的三次范数（行列式）。$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$可视为$J_3^{\mathbb{C}_s}$自身的约化结构群。在物理上，$\mathrm{I}_{3,el}$ 分别为 $\mathrm{I}_{3,magn}$，决定了理论 [MPRR17, MR19]的极端、单中心、静态、渐近平坦黑洞及黑弦解的贝肯斯坦-霍金熵。

3.2：在基于 $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}}$ [GST83 的 $\mathcal{N}=2$ 魔法麦克斯韦-爱因斯坦超引力中，GST84]： $G(\mathbb{R})=\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ 作用于 $\mathcal{R}_{el}=\left(\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}}\right)$ 分别为 $\mathcal{R}_{magn}=\left(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3}\right)$，其具有唯一的本原不变量三次齐次多项式：$\mathrm{I}_{3,\ el}$分别为 $\mathrm{I}_{3,\ magn}$，它们正是秩三简单约旦代数 $J_3^{\mathbb{C}}\simeq\mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^3$（及其对偶）的三次范数（行列式）；$\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$可视为 $J_3^{\mathbb{C}}$ 自身的约化结构群。从物理上说，$\mathrm{I}_{3,\ el}$ 和 $\mathrm{I}_{3,\ magn}$ 分别决定该理论 [FG98, FG06] 中极端、单中心、静态、渐近平坦黑洞解和黑弦解的贝肯斯坦-霍金熵。

如 $D=4$ 所示，多中心解的一个关键特征是存在一个全局的“水平”对称群[3] $\mathrm{SL}_{m,\ h}(\mathbb{R})$ [FMO+11]，它编码了该理论中 m 中心解的组合结构（$m\in\mathbb{N}$），并与 $G(\mathbb{R})$ 本身对易。因此，在存在一个渐近平坦的 $D=5$ 多中心[4]

[3]实际上，“水平”对称群是 $GL_m(\mathbb{R})$，其中相对于 $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$ 的额外尺度对称性$SO_{1,\ 1}$ 由黑洞电荷（或黑弦磁荷）中 $G(\mathbb{R})$-不变多项式的齐次性编码。下标“h”在全文中均表示“水平”。[4]我们不考虑这样一种引人入胜的可能性： $D=5$ 中的一个以 m为中心的解由 m' 个黑洞和 $m-m'$ 个黑弦组成（或反之）。因为目前我们尚不清楚这是否能成为所讨论理论运动方程的一个良定义解。

黑色 p 膜（其中 $p=0$ 分别为 1）解具有 m 个中心时，由 m 个互不相同的 G (ℝ) 表示副本（ $\mathcal{R}_{el}$ 分别为 $\mathcal{R}_{magn}$ ，取 $SL_{m,\,h}(\mathbb{R})$ 的定义不可约表示 m）构造的、($SL_{m,\,h}(\mathbb{R})\times G(\mathbb{R})$)-不变齐次多项式环的维数，由一般公式 [FMO+11] 给出

$$I_m = m\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{R} - \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_m, \tag{3.7}$$

其中

$$\mathcal{O}_m := \frac{SL_{m,h}(\mathbb{R})\times G\,(\mathbb{R})}{H_m\,(\mathbb{R})} \tag{3.8}$$

是一个通常非对称的陪集，用于描述一般的开 ($SL_{m,h}(\mathbb{R})\times G(\mathbb{R})$)-轨道，该轨道由表示 $\mathcal{R}_{el}$ 的 m 个副本张成，分别对应多中心解的一个中心。通过在上述麦克斯韦–爱因斯坦–标量理论中设定 $m=1$ resp. $m=3$，可得到：

$$\left.\begin{array}{ll}\mathcal{N}=0 & \mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}_s}\\ G(\mathbb{R})=\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})^{\times 2} & \\ \mathcal{N}=2 & \mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}}\\ G(\mathbb{R})=\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} & \end{array}\right\}\ :\quad \begin{array}{l} I_{m=1}=\dim_{\mathbb{R}}\left(\left(\mathbb{R}^3\right)^{\otimes 2}\right)-\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{O}_{m=1}\right)=3\cdot 3-8=\underset{\mathbf{I}_3}{1};\\ I_{m=3}=3\dim_{\mathbb{R}}\left(\left(\mathbb{R}^3\right)^{\otimes 2}\right)-\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{O}_{m=3}\right)=3\cdot 9-3\cdot 8=\underset{\mathbf{I}_6,\mathbf{I}_9,\mathbf{I}_{12}}{3}, \end{array} \tag{3.9}$$

因为

$\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{R}_{el} = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{R}_{magn}=9$; $(H_{m=1}(\mathbb{R}))_0$ = 李群，其李代数是 $\mathfrak{a}_2 \Rightarrow$ 的一个实形式 $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{m=1}=8$; $(H_{m=3}\,(\mathbb{R}))_0$ = $\mathbb{I}$ (恒等映射) $\Rightarrow \mathcal{O}_{m=3}\simeq SL_{3,h}(\mathbb{R})\times G(\mathbb{R})$ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{m=3}=24.$

对 $m=3$ 的计数 (3.9) 表明，由 $\mathcal{R}_{el}$ 的三个副本构成的 ($SL_{3,h}(\mathbb{R})\times G(\mathbb{R})$)-不变齐次多项式环（对于 =(3, 3′)，分别为 $\left(\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}}\right)$，对应于 $G\,(\mathbb{R})$ =SL(3, ℝ)$^{\times 2}$；对于 =(3′, 3)，分别为 $\left(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3}\right)$，对应于 $G(\mathbb{R})$ =SL(3, ℝ)$^{\times 2}$ ）的（实）维数为 3。将这一切复化后，可得到经典不变理论中的已知结果：SL(3, ℂ)$^{\times 3}$ 在三基本表示空间 $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$ 上的作用非传递，是 Vinberg [Vin76b]，意义下的一个 θII 型群；正如第 3.1 节中所预期的，它具有以下性质：

(1) 一般三中心轨道的稳定子的单位连通分支（$H_{m=3}$）$_0$

$$\mathcal{O}_{m=3} := \frac{SL_{3,h}(\mathbb{R})\times G\,(\mathbb{R})}{H_{m=3}\,(\mathbb{R})} \tag{3.10}$$

不过是 $\mathbb{I}$ （恒等映射）；
(2) 幂零轨道的数量有限；
(3) 不变多项式环是 3 维的，且由完整基中的齐次多项式 I_6, I_9 和 I_{12} 有限生成，其次数分别为 6、9、12（例如，参见 [Kac80]，的表 III 及其中的参考文献）。

下面进一步讨论几点。

- 为简单起见，我们假设在 ℂ上工作。由于“水平”李代数$\mathfrak{a}_{2,h}$ 相对于电磁对偶群 $G(\mathbb{C}) = SL(3,\mathbb{C})^{\times 2}$的李代数$\mathfrak{a}_2\oplus\mathfrak{a}_2$ 处于不同的地位，因此在考察 $D=5$ 麦克斯韦-爱因斯坦理论中的三中心黑洞/弦解时，只应考虑 $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^3$ 中 3 个张量因子的置换群 Sym_3 的真子群 Sym_2 下的不变性。

所考虑的（超）引力理论。通过这种方式，得到一个在.....下保持不变的分类。

$$\mathrm{Sym}_2 \ltimes \left(SL_{3,h}(\mathbb{C}) \times \left(\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})^{\times 2}\right)\right) \tag{3.11}$$

（即李代数层面的 $\mathsf{Sym}_2 \ltimes (\mathfrak{a}_{2,\ h} \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_2)$）应予以考虑。因此，除了底数域的选择（量子信息理论中为$\mathbb{C}$，而引力理论中为$\mathbb{R}$）之外，我们还指出轨道分类过程中的另一项重要差异：在量子信息理论中，需要对以下对象的作用进行分类

$$\mathrm{Sym}_3 \ltimes SL(3,\mathbb{C})^{\times 3} \ \text{ on } \ \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \equiv (\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{3})\,, \tag{3.12}$$

而在麦克斯韦-爱因斯坦（超）引力中，需要对以下对象的作用进行分类

$$\mathrm{Sym}_2 \ltimes \left(SL_{3,h}(\mathbb{R}) \times \left(\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})^{\times 2}\right)\right) \ \text{ on } \ \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \equiv (\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{3}') \tag{3.13}$$

resp.

$$\mathrm{Sym}_2 \ltimes (SL_{3,h}(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \ \text{ on } \ \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \equiv \left(\mathbf{3},\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}}\right) \tag{3.14}$$

在基于 $\mathcal{N}=0$, $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}_s}$的理论 [MPRR17, MR19] 中，或者在基于 $\mathcal{N}=2$, $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}}$的魔幻超引力 [GST83, GST84] 中，具体而言是在 $D=5$中。

- 在基于 $\mathcal{N}=0$, $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}_s}$的麦克斯韦-爱因斯坦理论，或者基于 $\mathcal{N}=2$, $\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}}$的魔幻超引力中，有 $\mathcal{R}_{el}$ =(3, **3′**)，或者 $\left(\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}}\right)$，以及$\mathcal{R}_{magn}$ = (**3′**, 3)，或者$\left(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{3}\right)$。因此，如上所述，除去置换群的作用，$SL_{3,h}(\mathbb{R})$ × $G(\mathbb{R})$（非传递地）作用于其上的整个表示空间为 $\mathbb{R}^3 \otimes \mathcal{R}_{el}$ ≡ (3, $\mathcal{R}_{el}$)或 $\mathbb{R}^3 \otimes \mathcal{R}_{magn} \equiv$ (3, $\mathcal{R}_{magn}$)。对这一切进行复化后，可将表示空间 $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ 解释为 SL(3, $\mathbb{C}$)$^{\times 3}$的 $\left(\mathbf{3},3,\overline{\mathbf{3}}\right)$ 或 $\left(\mathbf{3},3,\mathbf{3}\right)$，这不同于量子信息理论中 $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ 所采用的解释，即将其视为 SLOCC 群 SL(3, $\mathbb{C}$)$^{\times 3}$的 (3, 3, 3)。然而，可以发现，SL(3, $\mathbb{C}$)$^{\times 3}$在 (3, 3, 3) 上的轨道作用分类与其在 $\left(\mathbf{3},3,\overline{\mathbf{3}}\right)$上的分类相同，见第 4.2 节。将 SL(3, $\mathbb{C}$)$^{\times 3}$ 换为分裂实形式 SL(3, $\mathbb{R}$)$^{\times 3}$后，可直接推出 SL(3, $\mathbb{R}$)$^{\times 3}$ 在 (3, 3, 3) 上的轨道作用分类与其在 (3, 3, **3′**) 上的分类相同。

- 我们也可以直接考虑由 m 个 $\mathcal{R}_{el}$ （分别为 $\mathcal{R}_{magn}$）构造的、在 $G(\mathbb{R})$ 下不变的（电或磁）多项式，并将“水平”对称性 $SL_{m,h}(\mathbb{R})$ 仅视为一种组织多重态（即生成谱）的对称性。令 $m=3$，计数不再采用式 (3.9) 的第二种方法，而是如下进行：

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{N}=0 & \mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}_s} \\ {\scriptstyle G(\mathbb{R})=\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})^{\times 2}} & \\ \mathcal{N}=2 & \mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}} \\ {\scriptstyle G(\mathbb{R})=\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}} & \end{array}\right\} : \tilde{I}_{m=3} = 3\dim_{\mathbb{R}}\left(\left(\mathbb{R}^3\right)^{\otimes 2}\right) - \dim_{\mathbb{R}}\left(G\left(\mathbb{R}\right)\right) = 3{\cdot}9 - 2{\cdot}8 = 11, \tag{3.15}$$

其中，$\tilde{I}_{m=3}$ 表示由 3 个 $\mathcal{R}_{el}$ （分别为 $\mathcal{R}_{magn}$）构造的、在 $G(\mathbb{R})$ 下不变的（电或磁）多项式的数量；我们利用了这样一个事实：由 3 个 $\mathcal{R}_{el}$ （分别为 $\mathcal{R}_{magn}$ ）张成的一般 $G(\mathbb{R})$-轨道 $\mathsf{O}_{m=3}$ 的稳定子的恒等连通分支是平凡的：

$$\mathbf{O}_{m=3} \simeq G(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbf{O}_{m=3}\right) = \dim_{\mathbb{R}}\left(G\left(\mathbb{R}\right)\right) = 2 \cdot 8 = 16. \tag{3.16}$$

通过取 $Q^a \in \mathcal{R}_{el}$、$Q_a \in \mathcal{R}_{magn}$、$Q^{a\alpha} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathcal{R}_{el}$ 和 $Q_a^{\alpha} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathcal{R}_{magn}$，可以构造 $G(\mathbb{R})$-不变量（电单态和磁单态）

$$\mathbf{I}_{3,el} \ \ := \frac{1}{3!} d_{abc} Q^a Q^b Q^c \equiv \mathbf{1}_{el} \text{ of } G\left(\mathbb{R}\right); \tag{3.17}$$

$$\mathbf{I}_{3,magn} \quad : \quad = \frac{1}{3!} d^{abc} Q_a Q_b Q_c \equiv \mathbf{1}_{magn} \text{ of } G(\mathbb{R}), \tag{3.18}$$

以及 $(SL_{3,\ h}(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{R}))$-协变量

$$\mathbf{I}_{el}^{\alpha\beta\gamma} \quad : \quad = \frac{1}{3!} d_{abc} Q^{a\alpha} Q^{b\beta} Q^{c\gamma} = \mathbf{I}_{el}^{(\alpha\beta\gamma)} \equiv S^3\mathbb{R}^3 \equiv (\mathbf{10}, \mathbf{1}_{el}) \text{ of } SL_{3,h}(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{R}); \tag{3.19}$$

$$\mathbf{I}_{magn}^{\alpha\beta\gamma} \quad : \quad = \frac{1}{3!} d^{abc} Q_a^{\alpha} Q_b^{\beta} Q_c^{\gamma} = \mathbf{I}_{magn}^{(\alpha\beta\gamma)} \equiv S^3\mathbb{R}^3 \equiv \left(\mathbf{10}, \mathbf{1}_{magn}\right) \text{ of } SL_{3,h}(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{R}), \tag{3.20}$$

其中，[5] a、b、$c = 1$、.....、9，以及 α、β、$\gamma = 1$、2、3（重复指标按爱因斯坦求和约定求和）。因此不难发现，由 3 个 $\mathcal{R}_{el}$（分别为 $\mathcal{R}_{magn}$）副本构造的$I_{m=3} = 11$ $G(\mathbb{R})$-不变（电（分别为磁））多项式，在$SL_{3,h}(\mathbb{R})$-表示中可组织为 $\mathbf{10} \oplus \mathbf{1}$。

总之，对非传递作用的轨道结构进行分类，

$$\mathrm{Sym}_2 \ltimes \left(SL_{3,h}(\mathbb{R}) \times \left(\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})^{\times 2}\right)\right) \quad \text{on} \quad (\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}') \text{ resp. } (\mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{3}) \tag{3.21}$$

涉及在 $\mathcal{N} = 0$、$\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}_s}$基础的麦克斯韦-爱因斯坦-标量理论 [MPRR17、MR19] 中 $D = 5$的三中心极值黑洞（分别为黑弦）的分类。类似地，非传递作用的轨道结构

$$\mathrm{Sym}_2 \ltimes \left(SL_{3,h}(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}\right) \quad \text{on} \quad \left(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}}\right) \text{ resp. } \left(\mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}}, \mathbf{3}\right) \tag{3.22}$$

涉及基于 $\mathcal{N} = 2$、$\mathfrak{J}_3^{\mathbb{C}}$的魔法麦克斯韦-爱因斯坦超引力 [GST83、GST84] in$D = 5$ 中三中心极值黑洞或黑弦的分类。

利用此类轨道的分类（这是本文的研究对象）来研究上述具有 $D = 5$ 个（洛伦兹）时空维度的麦克斯韦–爱因斯坦（超）引力理论中的三中心极值黑洞/弦，超出了本文研究的范围，我们将留待未来进一步研究。

4. Construction of the representations

本节将展示如何利用类型为 $\mathfrak{e}_6$ 的单李代数的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 分次，构造 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})^3$-模 $(\mathbb{C}^3)^{\otimes 3}$。这一构造属于 Vinberg 的 θ-群理论。

设 $\mathfrak{g}$ 为复单李代数。设 $m \geq 2$ 为整数，并在 $\mathbb{C}$ 中固定一个 m 次本原单位根 ζ。那么 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-分次

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$$

（其中 $\mathfrak{g}_i$ 是满足 $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ 的子空间）与 $\mathfrak{g}$ 的 m 阶自同构一一对应。事实上，若给定上述分次，则定义 $\theta(x) = \zeta^i x$（对 $x \in \mathfrak{g}_i$），即可定义一个 m 阶自同构。反之，若 θ 是一个 m 阶自同构，则令 $\mathfrak{g}_i$ 为 θ 的特征子空间，其特征值为 ω^i，便得到一个 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-分次。我们还要指出，给定上述分次时，子代数 $\mathfrak{g}_0$ 是约化的（[Kac90，引理 8.1(c)]），并且 $\mathfrak{g}_1$ 自然地是一个 $\mathfrak{g}_0$-模。

[5]根据 $\mathcal{R}_{el}$（分别为 $\mathcal{R}_{magn}$）的显式结构，拉丁小写指标实际上实现为成对的逆变—协变（分别为协变—逆变）基本（希腊小写）指标：$A^a \equiv A^{\alpha}{}_{\beta}$（分别为 $A_a \equiv A_{\alpha}{}^{\beta}$）。例如参见 [FGK06] 和 [DHW08]。

有限阶自同构已由多位作者在 Aut(𝔤) 中按共轭分类。其中一种分类归功于 Kac；关于完整论述，请参阅 [Hel78，第 X 章，第 §5] 节。该分类中的内自同构对应于用非负整数标记仿射 Dynkin 图。这里我们只考虑所有标记均为 0 或 1 的情形。令 Φ 为 $\mathfrak{g}$ 的根系，其简单根系为 Δ。令 $\tilde{\alpha}$ 为相对于由 Δ 诱导的支配序而言的 Φ 的最高根。于是，仿射 Dynkin 图的节点 $\widetilde{}$ 与 $\Delta = \Delta \cup \{-\tilde{\alpha}\}$ 的元素相对应。节点 $-\tilde{\alpha}$ 的权重为 1，而其他节点的权重则是 $\tilde{\alpha}$ 相对于 Δ 的系数。令 $\widetilde{}$ Π_0、$\Pi_1 \subset \Delta$ 分别为由标记为 0 和 1 的根组成的子集。于是我们有如下结果（参见 [GOV94，第 3 章，第 3.7] 节）：

- 与该标记相关联的自同构 θ 的阶等于对应于 Π_0 的节点权重之和，
- Π_0 生成 $\mathfrak{g}_0$ 的半单部分的根系，
- 模 $\mathfrak{g}_1$ 有 $|\Pi_1|$ 个不可约分支。

现在令 G =Aut(𝔤)° 为𝔤的自同构群的单位连通分支。G 的李代数同构于 $\mathfrak{g}$（确切地说，它等于 $\mathrm{ad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$）。令 G_0 为 G 的连通子群，其李代数同构于 $\mathfrak{g}_0$（或等于 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}_0$）。那么 G_0 自然作用于 $\mathfrak{g}_1$。G_0 在 GL($\mathfrak{g}_1$) 中的表示称为 θ-表示。Vinberg 在 [Vin76a、Vin79] 中引入并对其进行了详细研究。除此之外，他还发展了对 $\mathfrak{g}_1$ 中 G_0 的轨道进行分类的方法。

这里首先可以观察到，$\mathfrak{g}_1$ 在 Jordan 分解下封闭。事实上，若 $x \in \mathfrak{g}_1$的 Jordan 分解为 $x = x_s + x_n$，则 $\theta(x)$的 Jordan 分解为 $\theta(x) = \theta(x_s) + \theta(x_n)$。但同时，$\theta(x)$的 Jordan 分解也为 $\theta(x) = \zeta x = \zeta x_s + \zeta x_n$。因此 x_s，$x_n \in \mathfrak{g}_1$。这立即将轨道分为三类：幂零、半单和混合轨道（分别由幂零、半单和混合元素组成；混合元素既非幂零也非半单）。我们将在本文相关章节中简要介绍这些轨道的分类方法。

我们的主要例子是单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构，其类型为 $\mathfrak{e}_6$，Kac 图如图4所示。

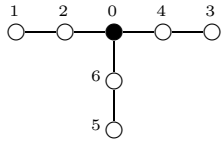

FIGURE 1. $\mathfrak{e}_6$的一个自同构的 Kac 图

这里黑色节点的标号为 1，其余节点的标号为 0。由上文可知，θ 的阶为 3，$\mathfrak{g}_0$ 是 $3\mathfrak{a}_2$型的半单元素，而$\mathfrak{g}_0$-模 $\mathfrak{g}_1$ 是不可约的。

令 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}_0$的嘉当子代数。那么 $\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{g}$的嘉当子代数。令 Φ 为 $\mathfrak{g}$的对应根系。对于一个根 $\alpha \in \Phi$，我们用 $\mathfrak{g}_\alpha$表示对应的根空间。令 $\Delta = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$ 为 Φ 的一组单根，使得在对应的 Dynkin图中，α_i 对应于图4中的节点 i，并且对于 $i = 1$、2、3、4、5、6，$\mathfrak{g}_{\alpha_i} \subset \mathfrak{g}_0$，且 $\mathfrak{g}_{\alpha_0} \subset \mathfrak{g}_1$。相应地，我们令 α_5 表示 Φ 的最高根的负根。对于 $0 \le i \le 6$，我们令 $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$、$h_i \in \mathfrak{h}$、$y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ 为“典范生成元”，也就是说，令 C 表示 the

图4中的扩展Dynkin图的Cartan矩阵，我们有

$$[h_i, x_j] = C(j,i)x_j,\ [h_i, y_j] = -C(j,i)y_j, [x_i, y_j] = \delta_{ij}h_i.$$

根据 [Vin76a，第 8] 节， x_0 是 $\mathfrak{g}_0$-模 $\mathfrak{g}_1$ 的最低权向量。对于 $i = 1$、3、5，我们有 $[h_i, x_0] = 0$；对于 $i = 2$、4、6，我们有 $[h_i, x_0] = -x_0$。设 $v_0 \in \mathfrak{g}_1$ 为最高权向量。于是，对于 $i = 1$、3、5，有 $[h_i, v_0] = v_0$；对于 $i = 2$、4、6，有 $[h_i, v_0] = 0$。

现在令 $\hat{\mathfrak{g}}$ 对于 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ 其中 a_i 都是典范生成元。其基本关系，含义如下。将在位置 (i, j) 处为 1、其余位置为 0 的 3×3 阶矩阵记为 e_{ij}。于是

$$\hat{x}_{i,1} = e_{12},\ \hat{x}_{i,2} = e_{23},\ \hat{h}_{i,1} = e_{11} - e_{22},\ \hat{h}_{i,2} = e_{22} - e_{33},\ \hat{y}_{i,1} = e_{21},\ \hat{y}_{i,2} = e_{32}.$$

令 V^i for $1 \le i \le 3$ 为 $\mathbb{C}^3$的一个副本。下文中，我们将 $\mathbb{C}^3$ 的标准基记为 e_0, e_1, e_2。于是 $\hat{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathcal{V} = V^1 \otimes V^2 \otimes V^3$ 上的作用为

$$(z_1 + z_2 + z_3) \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = z_1 v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_1 \otimes z_2 v_2 \otimes v_3 + v_1 \otimes v_2 \otimes z_3 v_3.$$

于是 $\mathcal{V}$是一个不可约的 $\hat{\mathfrak{g}}$-模，其最高权向量为 $u_0 = e_0 \otimes e_0 \otimes e_0$。 $\hat{}$ $\hat{}$ 我们有 $h_{i,1} \cdot u_0 = u_0$ 和 $h_{i,2} \cdot u_0 = 0$。

令 $\psi : \hat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}_0$ 为同构，它将 $\hat{a}_{i,1} \mapsto a_{2i-1}, \hat{a}_{i,2} \mapsto a_{2i}$映射到对应项，其中$a \in \{x, h, y\}$, $1 \le i \le 3$。于是 $\mathfrak{g}_1$成为一个 $\hat{\mathfrak{g}}$-模，其作用由 $\hat{z} \cdot x = [\psi(\hat{z})\ x]$给出。比较最高权可知，$\hat{\mathfrak{g}}$-模 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathcal{V}$ 同构，并且存在唯一的 $\hat{\mathfrak{g}}$-模同构 φ: $\mathfrak{g}_1 \to \mathcal{V}$，将 $v_0 \mapsto u_0$映射到对应项。

考虑群 $\hat{}$。设G、G_0如 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 与 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_0)$ 是与子代数 $\mathfrak{g}_0$对应的连通子群。由于 G 是单连通的，我们有一个满射 $\hat{}$ $\hat{}$同态 $\Psi : G \to G_0$，其微分为 ψ。这定义了一个 G作用于 $\mathfrak{g}_1$上，即$g \cdot x = \Psi(g) \cdot x$。此外， $\mathcal{V}$是一个 G-模，且

$$(g_1 \times g_2 \times g_3) \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = g_1 v_1 \otimes g_2 v_2 \otimes g_3 v_3.$$

$\hat{}$ $\hat{}$于是 φ 也是 G-模的同构。由此可知，对 $\mathcal{V}$ 中的 G-轨道进行分类，等价于对 $\mathfrak{g}_1$中的 G_0-轨道进行分类。

4.1. 置换张量因子。考虑向量空间 $\mathcal{V}$。设 $\pi \in S_3$是 $\{1, 2, 3\}$的一个置换。对于 π，我们关联一个线性映射（记号相同） π： $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $\pi(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)$ $= v_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(2)} \otimes v_{\pi(3)}$。此外，我们还定义映射 π： $G \to G$, $\pi(g_1 \times g_2 \times g_3)$ $= g_{\pi(1)} \times g_{\pi(2)} \times g_{\pi(3)}$。显然有

$$\pi(g) \cdot \pi(v) = \pi(g \cdot v) \text{ for } g \in \widehat{G},\ v \in V.$$

$\hat{}$ $\hat{}$由此可得 $G \cdot \pi(v) = \pi(G \cdot v)$。此外，将 $v \in \mathcal{V}$在$\frown$中的稳定子记为 $Z_{\widehat{G}}(v)$，我们有 $Z_{\widehat{G}}(\pi(v)) = \pi(Z_{\widehat{G}}(v))$。

$\hat{}$如第 3.2 节所见，研究 G 在 V 中的轨道分类很有意义，其中轨道按张量因子的置换取等价，或者按两个张量因子的置换取等价。

$\hat{}$ $\hat{}$换言之，我们考虑群 $\mathrm{Sym}_3 \ltimes G$ 和$\hat{}$Sym $_2 \ltimes G$ （其中 Sym$_2$ 仅置换第二和第三个因子），而不是群 G。幂零元的置换作用详见表 1。半单元和混合元素分别参见备注 7.5 和 8.2。

4.2. 在 $V^1 \otimes V^2 \otimes (V^3)^*$ 上的作用。当然，我们也可以考虑 $\widehat{G}$ 在模 $V^1 \otimes V^2 \otimes (V^3)^*$ 上的作用（其中最后一个因子是 V^3 的对偶模）。这里我们论证可以得到完全相同的轨道。

令 $\sigma_3 : \widehat{G} \to \widehat{G}$ 由 $\sigma_3(g_1, g_2, g_3) = (g_1, g_2, g_3^{-T})$ 定义。则 σ_3 是 G的一个对合。定义 G 在 $\mathcal{V}$上的作用 $\circ$为 $g \circ v = \sigma_3(g) \cdot v$。带有此作用的 G-模同构于 $V^1 \otimes V^2 \otimes (V^3)^*$。我们有 $g \cdot v = \sigma_3(g) \circ v$。因此， G 在 $\mathcal{V}$ 上的轨道，关于 $\cdot$ 作用和关于 $\circ$作用是相同的。所以本文只考虑 $\cdot$ 作用。

4.3. 记号。本文中，对于 $\mathcal{V}$的元素，我们采用 bra 和 ket 记号（参见 [Wal17, §5.4.2.1]），用符号 $|j_1\, j_2\, j_3\rangle$表示初等张量 $e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes e_{j_3}$。

我们用 ζ 表示 $\mathbb{C}$ 中一个固定的三次本原单位根。

下文将自由使用本节引入的记号。特别是，我们将使用群 G、 G、 G_0，以及李代数 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_0$。

5. Galois cohomology and real orbits

本文的主要目标之一是对实空间中由 $|j_1\, j_2\, j_3\rangle$ 张成的 $\mathcal{V}$ 上的 $\curlywedge G(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ 轨道进行分类。我们的方法基于伽罗瓦上同调，下面将对此作简要介绍。

设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的一个子群，在复共轭下稳定 $g \mapsto \bar{g}$（由矩阵元素的复共轭给出）。我们用 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 表示其实点群，

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}) = \{g \in \mathcal{G} \mid \bar{g} = g\}.$$

我们有如下定义：

- 若 $g \in \mathcal{G}$，则称其为上循环，
- 若存在 $h \in \mathcal{G}$ 使得 $h^{-1} g_1 \bar{h} = g_2$，则称两个上循环 g_1、 g_2 等价，
- 上循环等价类的集合称为 $\mathcal{G}$的第一伽罗瓦上同调集 $\mathrm{H}^1\mathcal{G}$。

我们注意到，这些定义是群的经典伽罗瓦上同调定义在伽罗瓦群阶为 2 这一特殊情形下的临时版本。关于更一般的论述，请参阅 Serre 的著作 [Ser97]。

对我们的计算而言，关键结果是以下定理；参见 [Ser97，第 I.5 节。4]

定理 5.1. 假设 $\mathrm{H}^1\mathcal{G} = 1$。令 $\mathcal{G}$ 作用于集合 U。假设 U 具有一个对合 $u \mapsto \bar{u}$，使得对于 $g \in \mathcal{G}$， $\overline{g \cdot u} = \bar{g} \cdot \bar{u}$ $u \in U$。令 $u_0 \in U$为实的（即 $\bar{u}_0 = u_0$），并考虑轨道 u_0的实点集合，

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{G} \cdot u_0 \mid \bar{v} = v\}.$$

令 $Z_{\mathcal{G}}(u_0) = \{g \in \mathcal{G} \mid g \cdot u_0 = u_0\}$ 为 $\mathcal{G}$中 u_0 的稳定子。则 $\mathrm{H}^1 Z_{\mathcal{G}}(u_0)$ 与 $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ 中的 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$-轨道集合之间存在一个双射。此双射的具体描述如下。令 $[g] \in \mathrm{H}^1 Z_{\mathcal{G}}(u_0)$，则存在 $h \in \mathcal{G}$ 使得 $h^{-1}\bar{h} = g$ （作为 $\mathrm{H}^1\mathcal{G} = 1$）。于是，类 $[g]$ 对应于 $(h \cdot u_0)$ 的 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$-轨道

为了使用这一方法，我们需要能够计算矩阵群的第一伽罗瓦上同调集。这可以借助计算机完成。不过，我们也会利用一些判据直接推导上同调集。

判据 5.2。我们有 $\mathrm{H}^1\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{H}^1\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 均为平凡群。因此，特别地，$\mathrm{H}^1 T$ 是平凡的，其中 $T \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个环面。

下一个判据是 [BdGL21，推论 3.2。2]。

判据 5.3. 若 $\mathcal{G}$ 是有限阿贝尔奇数阶群，则 $\mathrm{H}^1\mathcal{G}$ 是平凡的。

判据 5.4. 设 $\mathcal{G}$ 是一个阶为 p^m的群，其中 p是奇素数。那么 $\mathrm{H}^1\mathcal{G}$是平凡的。

这由 [BdGL21，引理 3.2.3]推出。下一个判据是 [BdGL21，命题 3.2.6]。

判据 5.5. 若 $\mathcal{G}$ 是一个阶为 $2p^m$ 的有限群，其中 p 是奇素数，则 $\mathrm{H}^1\mathcal{G} =\{1, [c]\}$，其中 c 是一个二阶实元素。

下一个判据是 [BdGL21，命题 3.3.16]。

判据 5.6. 设 $\mathcal{G}$ 为线性代数群，其单位连通分支为 $\mathcal{G}^\circ$。假设 $\mathcal{G}/\mathcal{G}^\circ$ 的阶为 p^n，其中 p 为某个奇素数，且 $n \geq 0$ 和 $|\mathrm{H}^1\mathcal{G}^\circ| < p$。则典范映射 $\mathrm{H}^1\mathcal{G}^\circ \to \mathrm{H}^1\mathcal{G}$ 为双射。

6. Nilpotent orbits

本节将介绍复幂零轨道和实幂零轨道的分类方法。我们给出 Nurmiev 的复分类，[Nur00b] 并在此基础上补充一些数据（见下文）。我们还将对实幂零轨道进行分类。

根据 [BdGL21, §4.3]，我们回顾一些一般性结果。设 $\mathfrak{a} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}\mathfrak{a}_i$ 是域特征为 0 上的一个$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$分次半单李代数。设 H 是 $\mathfrak{a}$ 的自同构群，使得每个元素都保持空间 $\mathfrak{a}_i$ （$i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$），并且对所有幂零 $x \in \mathfrak{a}_0$， H 都包含 expad$x$ 。则

- 一个幂零 $e \in \mathfrak{a}_1$ 属于一个齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组（h， e， f）。这意味着 $h \in \mathfrak{a}_0$、$f \in \mathfrak{a}_{-1}$ 和
$$[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h.$$
- 两个幂零元 e、$e' \in \mathfrak{a}_0$，分别属于齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组（h、e、f）和（h'、e'、f'），当且仅当存在一个 $\sigma \in H$，使得 $\sigma(h) = h'$、$\sigma(e) = e'$、 $\sigma(f) = f'$ 时，它们是 H-共轭的。

6.1. 复幂零轨道。设 $\mathfrak{a} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}\mathfrak{a}_i$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-分次半单李代数。设 A_0 是 Aut($\mathfrak{a}$) 中李代数为 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}_0$ 的连通子群。则 A_0 满足上述对 H 的要求。此外，由于基域是代数闭的，可以证明，若有两个齐次$\mathfrak{sl}_2$-三元组 (h, e, f)、(h', e', f')，则 e、e' 是 A_0-共轭的，当且仅当 h、h' 是 A_0-共轭的（参见 [Gra17，定理 8.3.6]）。设 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{a}_0$ 的一个固定嘉当子代数。由此可知，每个幂零轨道都有一个代表元 e，它属于一个齐次$\mathfrak{sl}_2$-三元组 (h, e, f)，且满足 $h \in \mathfrak{h}_0$。我们还知道，h、$h' \in \mathfrak{h}_0$ 是 A_0-共轭的，当且仅当它们在韦伊群 $N_{A_0}(\mathfrak{h}_0)/Z_{A_0}(\mathfrak{h}_0)$ 下共轭。这个韦伊群典范同构于相对于 $\mathfrak{h}_0$ 的 $\mathfrak{a}_0$ 的根系的韦伊群。利用这些事实，可以设计一种算法，对 $\mathfrak{a}_0$ ([中的幂零 A_0-轨道进行分类，参见 Gra17，第 8.4.1] 节。另一种方法是 Vinberg 支撑方法， [Vin79], [Gra17，第 8.4.2] 节。

在我们的情形中，也就是说，对于第 4 节中的 $\mathfrak{g}$、 $\mathfrak{g}_0$、 G、 G_0 ，共有 63 个非零幂零轨道。Nurmiev [Nur00b] 列出了这些轨道，其中按张量因子的置换进行同一化（第 4.1 节）。我们采用了上述算法及其在 GAP4 ([GAP22]) 的 SLA ([dGGT19]) 软件包中的实现，来检查其列表的正确性。我们在表 1 中重现了该列表，同时还补充了可用于确定 Nurmiev 列表中未列出的轨道的代表元的置换。该表第二列包含与 Nurmiev 相同的代表元，只是我们使用了量子三能级系统记法。第三列中我们标出

轨道的一个特征，该特征由一个整数列表给出。如果 e 是一个幂零轨道的代表元，且其属于齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 (h、e、f)，则元素 h 称为该轨道的特征。第三列中的整数应作如下解释。设 $\mathfrak{g}_0$ 关于固定的嘉当子代数 $\mathfrak{h}_0$ 的一组固定单根为 α_1、...、α_6。根据上述讨论，每个幂零轨道都有一个代表元 e，属于一个齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 (h、e、f)，并且对于 $1 \leq i \leq 6$ 有 $\alpha_i(h) \geq 0$。$\alpha_i(h)$ 的值列于第三列。我们指出，Nurmiev 使用对称群 S_3 的作用：如果两个轨道可通过张量因子的某个置换相互变换，则只列出其中一个。我们也采取相同做法，只是在第四列中列出必须施加于所列轨道、以得到其他轨道的置换。因此，幂零轨道的总数为 62 个（不包括 0）。第五列和第六列用于列出稳定子

$$Z_{\widehat{G}}(h,e,f) = \{g \in \widehat{G} \mid g \cdot h = h,\, g \cdot e = e,\, g \cdot f = f\}$$

给定幂零轨道的一个代表元 e 所包含的齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组（h，e，f）。第五列描述了单位连通分支，第六列描述了分支群。这些稳定子是通过计算描述它们的显式多项式方程组，并结合基于 Gr¨obner 基的计算方法确定的。为此，我们使用了计算机代数系统 GAP4 和 Singular ([DGPS22])。

表 1：幂零复三能级量子比特

N	3-奎特	特征	σ	$Z_{\widehat{G}}(h,e)^\circ$	K
1	$\|012\rangle + \|021\rangle + \|102\rangle + \|111\rangle + \|120\rangle + \|200\rangle$	6 12 6 6 6 6 6 6 6 6 6 12 6 6 6 12 6 6	id (12) (132)	id	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
2	$\|012\rangle + \|021\rangle + \|102\rangle + \|110\rangle + \|111\rangle + \|200\rangle$	6 6 0 6 6 6 6 6 6 6 0 6 0 6 6 6 6 6	id (23) (123)	id	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
3	$\|002\rangle + \|011\rangle + \|020\rangle + \|101\rangle + \|112\rangle + \|200\rangle$	0 6 6 0 0 6 0 6 0 6 6 0 6 0 0 6 0 6	id (23) (123)	id	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
4	$\|002\rangle + \|011\rangle + \|101\rangle + \|110\rangle + \|220\rangle$	6 0 6 6 6 0 6 0 6 0 6 6 6 6 6 0 6 0	id (23) (123)	T_1	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
5	$\|002\rangle + \|020\rangle + \|021\rangle + \|110\rangle + \|201\rangle$	3 3 0 6 3 3 3 3 3 3 0 6 0 6 3 3 3 3	id (23) (123)	T_1	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
6	$\|002\rangle + \|011\rangle + \|101\rangle + \|120\rangle + \|210\rangle$	1 5 6 1 1 5 1 5 1 5 6 1 6 1 1 5 1 5	id (23) (123)	T_1	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
7	$\|002\rangle + \|011\rangle + \|020\rangle + \|101\rangle + \|210\rangle$	3 0 3 3 3 3 3 3 3 3 3 0 3 3 3 0 3 3	id (12) (132)	T_1	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
8	$\|002\rangle + \|020\rangle + \|111\rangle + \|200\rangle$	2 4 2 4 2 4	id	T_2	id
9	$\|000\rangle + \|011\rangle + \|111\rangle + \|122\rangle$	0 6 0 0 0 0 0 0 0 0 0 6 0 0 0 6 0 0	id (12) (132)	T_2	$S_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
10	$\|002\rangle + \|011\rangle + \|020\rangle + \|101\rangle + \|110\rangle + \|200\rangle$	2 2 2 2 2 2	id	id	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$
11	$\|002\rangle + \|020\rangle + \|101\rangle + \|210\rangle$	2 0 4 2 4 2 4 2 4 2 2 0	id (12)	T_2	id

		4 2 2 0 4 2	(132)		
12	$\|002\rangle + \|020\rangle + \|100\rangle + \|111\rangle$	1 5 0 1 0 1 0 1 0 1 1 5 0 1 1 5 0 1	id (12) (132)	T_2	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
13	$\|002\rangle + \|011\rangle + \|020\rangle + \|101\rangle + \|110\rangle$	1 4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 4 1 1 1 4 1 1	id (12) (132)	T_1	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
14	$\|002\rangle + \|010\rangle + \|021\rangle + \|100\rangle + \|201\rangle$	3 0 0 3 3 0 3 0 3 0 0 3 0 3 3 0 3 0	id (23) (123)	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
15	$\|011\rangle + \|022\rangle + \|100\rangle$	2 4 1 0 1 0 1 0 1 0 2 4 1 0 2 4 1 0	id (12) (132)	$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \times T_1$	id
16	$\|002\rangle + \|011\rangle + \|020\rangle + \|100\rangle$	2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 1 1 2 2 1 1	id (12) (132)	T_2	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
17	$\|001\rangle + \|010\rangle + \|102\rangle + \|120\rangle$	0 4 2 0 2 0 2 0 2 0 0 4 2 0 0 4 2 0	id (12) (132)	$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
18	$\|000\rangle + \|011\rangle + \|101\rangle + \|112\rangle$	0 3 0 0 0 3 0 3 0 3 0 0 0 0 0 3 0 3	id (23) (123)	$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
19	$\|002\rangle + \|010\rangle + \|101\rangle$	1 2 0 1 1 2 1 2 1 2 0 1 0 1 1 2 1 2	id (23) (123)	T_3	id
20	$\|000\rangle + \|111\rangle$	0 2 0 2 0 2	id	T_4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
21	$\|001\rangle + \|010\rangle + \|100\rangle$	1 1 1 1 1 1	id	T_3	id
22	$\|000\rangle + \|011\rangle + \|022\rangle$	3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 0 0 0 3 0 0 0	id (12) (132)	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
23	$\|000\rangle + \|011\rangle$	2 0 0 1 0 1 0 1 0 1 2 0 0 1 2 0 0 1	id (12) (132)	$(\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}))^2$	id
24	$\|000\rangle$	1 0 1 0 1 0	id	$(\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}))^2 \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$	id

6.2. 实幂零轨道。令 T 表示 $\mathfrak{g}$中复齐次$\frown\mathfrak{sl}_2$-三元组的集合。那么 G 作用于 T。此外， T 在复共轭下封闭，而在复共轭下不变的三元组构成实齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组的集合 $T^{\mathbb{R}}$ 。群 $\widehat{G}(\mathbb{R})$作用于 $T^{\mathbb{R}}$ ，并且如本节开头所见，幂零 $G(\mathbb{R})$-轨道与$T^{\mathbb{R}}$中的 $G(\mathbb{R})$-轨道之间存在双射。由于 $\mathrm{H}^1\widehat{G} = 1$，定理 5.1 推出如下结论。

定理 6.1。设 $e \in \mathfrak{g}_1$ 为一个幂零元，(h, e, f) 为一个与之相关的齐次 $\widehat{}$三元组。设 $\mathcal{O} = G \cdot e$和 $\mathcal{O}(\mathbb{R}) = \{x \in \mathcal{O} \mid \bar{x} = x\}$。 $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ 中的 $\widehat{G}$轨道与 $\mathrm{H}^1(Z_{\widehat{G}}(h, e, f))$ 之间存在一个双射。

表 1 中的中心化子只有三种情形具有非平凡的伽罗瓦上同调。为了计算第一上同调集的生成元，我们需要对它们的稳定子作出更明确的描述；在所有情形中，我们将其记为 Z。

3 $|002\rangle + |011\rangle + |020\rangle + |101\rangle + |112\rangle + |200\rangle$：稳定子同构于 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，由以下元素组成

$$\mathrm{diag}(\delta^2\zeta^2, \epsilon\delta^2\zeta^2, \epsilon\delta^2\zeta^2) \times \mathrm{diag}(\delta, \epsilon\delta, \epsilon\delta) \times \mathrm{diag}(\epsilon\zeta, \epsilon\zeta, \zeta),$$

其中 $\zeta^3=\delta^3=1$ 且 $\epsilon^2=1$。根据判据 5.5 可知，H^1Z由 $[1]$ 和 $[c]$ 组成，其中

$$c=\mathrm{diag}(1,-1,-1)\times\mathrm{diag}(1,-1,-1)\times\mathrm{diag}(-1,-1,1).$$

元素 $g\in\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})^3$ 满足 $g^{-1}\bar{g}=c$，

$$g=\mathrm{diag}(-1,i,i)\times\mathrm{diag}(-1,i,i)\times\mathrm{diag}(i,i,-1).$$

相应的轨道代表元为

$$-|002\rangle+|011\rangle+|020\rangle+|101\rangle+|112\rangle+|200\rangle.$$

9 $|000\rangle+|011\rangle+|111\rangle+|122\rangle$：稳定子的单位连通分支是一个二维环面，分支群同构于 $S_3\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。单位连通分支 T_2 由元素 $\mathrm{diag}(1,1,1)\times\mathrm{diag}(s^{-1},t^{-1},st)\times\mathrm{diag}(s,t,s^{-1}t^{-1})$ 组成。分支群由 $\mathrm{diag}(\zeta^2,\zeta^2,\zeta^2)\times\mathrm{diag}(\zeta,\zeta,\zeta)\times\mathrm{diag}(1,1,1)$ 和

$$g_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$g_2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

我们有 $g_1^2=1$，$g_2^3=1$ 和 $g_1g_2g_1=g_2^2$ 模 T_2。因此，g_1,g_2 生成分支群的一个子群，该子群同构于 S_3。利用 [BdGL21，命题 3.3，17] 可以证明 $\mathrm{H}^1Z=\{[1],[g_1]\}$。元素$g\in\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})^3$ 满足 $g^{-1}\bar{g}=g_1$，

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&0\\0&0&-i\\-i&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1&0\\i&i&0\\0&0&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&0\\i&-i&0\\0&0&\frac{1}{2}i\end{pmatrix}.$$

相应的轨道代表元为

$$2|210\rangle+2|201\rangle-\tfrac{1}{4}|022\rangle-|011\rangle+|000\rangle.$$

20 $|000\rangle+|111\rangle$：稳定子同构于 $T_4\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。恒等分支 T_4 由以下部分组成

$$\mathrm{diag}(s^{-1}u^{-1},t^{-1}v^{-1},stuv)\times\mathrm{diag}(s,t,s^{-1}t^{-1})\times\mathrm{diag}(u,v,u^{-1}v^{-1}).$$

分支群由以下元素生成

$$g_0=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

我们有 $\mathrm{H}^1Z=\{[1],[g_0]\}$。元素 $g\in\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})^3$ 且满足 $g^{-1}\bar{g}=g_0$，其为

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\i&-i&0\\0&0&\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&0\\i&-i&0\\0&0&\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&0\\i&-i&0\\0&0&\frac{1}{2}i\end{pmatrix}.$$

相应的轨道代表元为

$$2|000\rangle-2|011\rangle-2|101\rangle-2|110\rangle.$$

总之，除表 1 中所列代表元对应的实幂零轨道外，我们还得到表 2 中所列代表元对应的实幂零轨道。

表 2：幂零实三量子态

N	3-奎特	σ
3	$-\|002\rangle + \|011\rangle + \|020\rangle + \|101\rangle + \|112\rangle + \|200\rangle$	id (23) (123)
9	$2\|210\rangle + 2\|201\rangle - \frac{1}{4}\|022\rangle - \|011\rangle + \|000\rangle$	id (12) (132)
20	$2\|000\rangle - 2\|011\rangle - 2\|101\rangle - 2\|110\rangle$	id

7. Semisimple Elements

本节中，我们讨论 $\mathfrak{g}_1$ 的半单元素的轨道。我们首先介绍复分类，其中遵循 Nurmiev [Nur00b]，并补充了许多关于证明分类正确性的细节。这些细节对于实数情形下的分类也同样必要。

7.1. 半单轨道：复数情形。分类 $\mathfrak{g}_1$ 中半单轨道所需的大部分理论，归功于 Vinberg [Vin76a]。这里我们简要概述一些主要概念和结果。

嘉当子空间 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{V}$ 按定义是由彼此对易的半单元素组成的极大子空间。Vinberg [Vin76a] 证明，任意两个嘉当子空间都关于 G_0共轭。因此，每个半单轨道在任意给定的嘉当子空间中都有一个代表元。

定义 7.1。嘉当子空间 $\mathfrak{c}$ 的韦伊群为 $W_{\mathfrak{c}} = N_{G_0}(\mathfrak{c})/Z_{G_0}(\mathfrak{c})$。

群 $W_{\mathfrak{c}}$ 是一个有限复反射群，[Vin76a，定理 8]。此外，$\mathfrak{c}$ 中的两个元素当且仅当彼此 G_0-共轭时，才是 $W_{\mathfrak{c}}$-共轭的，[Vin76a，定理 2]。因此，半单轨道的分类归结为对 $\mathfrak{c}$ 中 $W_{\mathfrak{c}}$-轨道的分类，其中后者是任意一个固定的嘉当子空间。这些轨道有无穷多个，似乎不可能将它们列成一个无冗余的列表。不过，可以定义 $\mathfrak{c}$ 的若干特殊子集，使得每个半单轨道恰好在其中一个子集中含有一个点。其次，同一子集中的两个元素当且仅当它们在一个明确给出的有限群作用下共轭时，才是 G_0-共轭的。下面我们将说明这一方法在我们讨论的情形中如何实现。

考虑以下元素

$$u_1 = |000\rangle + |111\rangle + |222\rangle$$
$$u_2 = |012\rangle + |120\rangle + |201\rangle$$
$$u_3 = |021\rangle + |210\rangle + |102\rangle.$$

根据 [Nur00b], 另见 [Wal17, §5.4.4, 练习 2], , 这些元素张成 $\mathfrak{g}_1$ 的一个嘉当子空间 $\mathfrak{c}$ 。我们也用计算机验证了这一点。下文中我们将固定这个空间。

现在我们简要回顾 [VE88, §3.3], 中给出的韦伊群内复反射的构造，并将其调整为适用于我们的情形。设 $\mathfrak{h}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 中 $\mathfrak{c}$ 的中心化子。则 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数。设 Φ 为相对于 $\mathfrak{h}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的根系。考虑 3阶自同构 θ （见第 4 节）。此自同构稳定 $\mathfrak{h}$。它通过以下方式在对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 上诱导出映射 $\theta_* : \theta_*(\mu)(h) = \mu(\theta(h))$，其中 $h \in \mathfrak{h}$。对于 $\mathfrak{h}^*$ 的一个根 α ，元素$\pm\alpha$、 $\pm\theta_*(\alpha)$、 $\pm\theta_*^2(\alpha)$ 张成一个类型为 A_2 的根子系。我们用 $U(\alpha)$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中相应的子代数。设 $\mathfrak{c}(\alpha) = \mathfrak{c} \cap U(\alpha)$，则 $\mathfrak{c}(\alpha)$ 的维数为 1。设 $\mathfrak{c}_0(\alpha) = \{p \in \mathfrak{c} \mid \alpha(p) = 0\}$。则 $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0(\alpha) \oplus \mathfrak{c}(\alpha)$。此外，定义线性映射 $w_\alpha : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}$ ，使得对于 $p \in \mathfrak{c}_0(\alpha)$ 有 $w_\alpha(p) = p$ ，对于 $p \in \mathfrak{c}(\alpha)$ 有 $w_\alpha(p) = \zeta p$ ，我们

获得对 $\mathfrak{C}$ 的复反射。 [VE88, §3.3] 中的论证也可用于此处，以证明 w_α 是由 $N_{G_0}(\mathfrak{C})$ 的一个元素诱导的。因此 $w_\alpha \in W_{\mathfrak{C}}$。

根系 Φ 如上所构造，被划分为十二个 A_2 型根子系。因此， $W_{\mathfrak{C}}$ 中有 12 个反射。事实上，它们构成一个共轭类。形如 w_α^2 的反射也构成一个共轭类，而这两个共轭类是 $W_{\mathfrak{C}}$ 中由复反射构成的全部共轭类。

在这种情况下，韦伊群 $W_{\mathfrak{C}}$ 的阶为 648。根据 [Vin76a, §9] 中的表格，它同构于 Shephard-Todd 分类中的群 G_{25} ，并且在 [LT09] 中也记作 $W(\mathcal{L}_3)$。利用上述方法，我们可以找出 $W_{\mathfrak{C}}$ 中的所有反射，并通过直接的 GAP 计算证明 $W_{\mathfrak{C}}$ 由复反射生成：

$$\begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\zeta & -1-2\zeta & 2+\zeta \\ 2+\zeta & 2+\zeta & -1-2\zeta \\ -1-2\zeta & 2+\zeta & 2+\zeta \end{pmatrix}.$$

现在我们来说明如何得到上文提到的 $\mathfrak{C}$ 的特殊子集。我们用 W_p 表示 $W_{\mathfrak{C}}$ 中 $p \in \mathfrak{C}$ 的稳定子。众所周知， W_p 也由复反射生成，参见 [Ste64, 定理 1.5]。对于 $p \in \mathfrak{C}$ ，令

$$\mathfrak{C}_p = \{h \in \mathfrak{C} \mid w\,h = h \text{ for all } w \in W_p\}$$
$$\mathfrak{C}_p^\circ = \{q \in \mathfrak{C}_p \mid W_q = W_p\}.$$

注 7.2。集合 $\mathfrak{C}_p^\circ$ 是 $\mathfrak{C}_p$ 中的扎里斯基开集。它由不等式 $w\,q \neq q$ 对所有 $w \in W_{\mathfrak{C}} \setminus W_p$ 确定。由于稳定子 W_q 也由复反射生成，因此 $q \in \mathfrak{C}_p$ 属于 $\mathfrak{C}_p^\circ$ 当且仅当对于 $W_{\mathfrak{C}}$ 中不属于 W_p 的所有复反射，都有 $w\,q \neq q$ 。设 w 为这样的反射。则对于某个 $\alpha \in \Phi$，有 $w = w_\alpha$ 或 $w = w_\alpha^2$ 。由 w_α 的描述可知， $w(q) \neq q$ 等价于 $\alpha(q) \neq 0$。我们可以计算出一个线性多项式 $\psi_\alpha = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ ，使得 $\alpha(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = \psi_\alpha(a_1, a_2, a_3)$。因此对于 $q = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ ，有 $w(q) \neq q$ 当且仅当 $\psi_\alpha(a_1, a_2, a_3) \neq 0$。所以，通过对所有满足 $w_\alpha \notin W_p$ 的 ψ_α （其中 α ）取乘积，我们可以计算出一个定义集合 $\mathfrak{C}_p^\circ$ 的多项式不等式。

现在对于 $v \in W_{\mathfrak{C}}$ 和 $p, q \in \mathfrak{C}$ ，显然可得

$$v \cdot \mathfrak{C}_p^\circ = \mathfrak{C}_q^\circ \text{ if and only if } W_q = vW_pv^{-1}. \tag{7.1}$$

令 R 表示 $W_{\mathfrak{C}}$ 中所有与某个 $p \in \mathfrak{C}$ 的 W_p 相等的反射子群的集合。因此可知， R 在 $W_{\mathfrak{C}}$ 的共轭作用下封闭。设 p_1, ..., $p_m \in \mathfrak{C}$ 满足 W_{p_1}, ..., W_{p_m} 是 R 中不同共轭类的代表元。那么由 (7.1) 可知，每个半单轨道都在唯一的 $\mathfrak{C}_{p_i}^\circ$ 中有一个点。

令 p 为 p_i 之一。由（7.1）可知，将 $\mathfrak{C}_p^\circ$ 映射到自身的 $W_{\mathfrak{C}}$ 中的元素所成的群恰为正规化子 $N_{W_{\mathfrak{C}}}(W_p)$。根据 $\mathfrak{C}_p^\circ$ 的定义，逐一固定 $\mathfrak{C}_p^\circ$ 中每个元素的元素所成的群恰为 W_p。因此，群 $\Gamma_p = N_{W_{\mathfrak{C}}}(W_p)/W_p$ 自然作用于 $\mathfrak{C}_p^\circ$。同样，由（7.1）可立即得到以下结果。

定理 7.3. $\mathfrak{C}_p^\circ$ 的两个元素共轭于 G_0，当且仅当它们共轭于 Γ_p。

我们还有以下引理，它对于复分类和实分类都至关重要。

引理 7.4。设 $p \in \mathfrak{C}$ 和 q_1、 $q_2 \in \mathfrak{C}_p^\circ$。设 $Z_{G_0}(q_i) = \{g \in G_0 \mid g \cdot q_i = q_i\}$ 是它们在 G_0中的稳定子。于是 $Z_{G_0}(q_1) = Z_{G_0}(q_2)$。

证明。设 $w \in W_{\mathfrak{c}}$ 是一个复反射。则按照上述记号，对于一个 $\alpha \in \Phi$，有$w = w_\alpha$ 或 $w = w_\alpha^2$。根据 w_α 的构造可知，$w_\alpha(q) = q$ 当且仅当 $\alpha(q) = 0$。令 $\Phi_i = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(q_i) = 0\}$。由于$W_{q_1} = W_{q_2}$，可得 $\Phi_1 = \Phi_2$。令 $\mathfrak{z}_i = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, q_i] = 0\}$。于是

$$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in \Phi_i} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中与根 α对应的根空间。由此可得$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2$。根据 [Ste75 的推论 3，11] 稳定子 $Z_G(q_i)$ 是连通的。 $Z_G(q_i)$ 的李代数为 $\mathfrak{z}_i$。因此 $Z_G(q_1) = Z_G(q_2)$。但是 $Z_{G_0}(q_i) = G_0 \cap Z_G(q_i)$。□

如上所述，每个半单元素都共轭于形如 $u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ 的元素。在 [Nur00b] 中，半单轨道的代表元按五个族中的系数 $\{a_i\}$ 分类，这些族对应于形如 $\mathfrak{c}_p^\circ$的子集。每个族对应于 $W_{\mathfrak{c}}$的一个反射子群共轭类。已知 $W_{\mathfrak{c}}$ 有六个反射子群共轭类；例如参见 [Tay12，表 3]，，其中除平凡子群和 $W_{\mathfrak{c}}$本身以外的子群记为 l_1、 $2l_1$、 l_2 和 $3l_1$。群 $3l_1$ 不是某点的稳定子，因为其秩为 3，且只稳定 0。因此，将平凡子群和$W_{\mathfrak{c}}$ 本身也纳入后，我们得到五个形如 $\mathfrak{c}_p^\circ$的族。这里我们依照 [Nur00b]给出这些族的描述。第五族被省略，因为它仅由零向量构成。该族对应的子群就是 $W_{\mathfrak{c}}$ 本身。根据引理 7.4，同一族中的元素在 G_0中具有相同的稳定子，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$因此在 G中也具有相同的稳定子。我们还描述了 G中的稳定子。这些稳定子是通过基于 Gr¨obner 基的计算方法确定的（如 [BdGL21]中所述）。我们还给出了群 Γ_p的明确描述。

第一族 该族对应于平凡子群。参数a_i 满足条件

$$a_1a_2a_3 \neq 0$$

$$\left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3\right)^3 - (3a_1a_2a_3)^3 \neq 0$$

第一族中半单元素的稳定子是一个阶数为 81 的有限群，由以下元素生成

$$\begin{gathered}
\operatorname{diag}(\zeta, \zeta^2, 1, \zeta, \zeta^2, 1, \zeta, \zeta^2, 1) \\
\operatorname{diag}(\zeta^2, \zeta^2, \zeta^2, 1, 1, 1, \zeta, \zeta, \zeta) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta \\ \zeta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{gathered}$$

这里的群 Γ_p 是 $W_{\mathfrak{c}}$。

第二族 该族对应于由 diag(1, 1, ζ) 生成的 3 阶反射子群。它由元素 $a_1u_1 + a_2u_2$构成。参数a_1、 a_2 满足开条件

$$a_1a_2\left(a_1^3 + a_2^3\right) \neq 0.$$

第二族中元素的稳定子具有 $C \ltimes T_2$ 的形式，其中 T_2是一个二维环面，由以下形式的元素构成

$$T_2(t_1, t_2) = \operatorname{diag}(t_1^{-1}t_2^{-1}, t_1, t_2, t_1, t_2, t_1^{-1}t_2^{-1}, t_2, t_1^{-1}t_2^{-1}, t_1),$$

且 C 是一个由以下元素生成的 9 阶群

$$\operatorname{diag}(\zeta, \zeta, \zeta, \zeta^2, \zeta^2, \zeta^2, 1, 1, 1)$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

群 Γ_p 的阶为 18，且相对于基底 u_1, u_2由以下元素生成

$$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&\zeta\end{pmatrix}.$$

第三族 该族对应于由 diag(1, 1, ζ) 和 diag(1, ζ, 1) 生成的 9 阶反射子群。它由满足 $a_1 \neq 0$ 的元素 a_1u_1 组成。第三族元素的稳定子形式为 $C \ltimes T_4$，其中 T_4 是一个 4维环面，由以下形式的元素组成

$$T_4(t_1,t_2,t_3,t_4) = \mathrm{diag}(t_1^{-1}t_3^{-1}, t_2^{-1}t_4^{-1}, (t_1t_2t_3t_4)^{-1}, t_1, t_2, (t_1t_2)^{-1}, t_3, t_4, (t_3t_4)^{-1}).$$

并且 C 是由以下元素生成的 3阶群

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

群 Γ_p 的阶为 6，由 $-\zeta$ 生成。

第四族 该族对应于由 diag(ζ, 1, 1) 和以下元素生成的 24 阶反射子群

$$\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2+\zeta&2+\zeta&2+\zeta\\-1-2\zeta&2+\zeta&-1+\zeta\\-1-2\zeta&-1+\zeta&2+\zeta\end{pmatrix}.$$

它由元素 $a(u_2 - u_3)$ 组成。第四族元素的稳定子形式为 $F \ltimes C^\circ$，其中 C° 由所有矩阵 $A \times A \times A$ 组成，满足 $A \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$，而 F 是由 diag($\zeta,\zeta,\zeta,\zeta^2,\zeta^2,\zeta^2$, 1, 1, 1) 生成的 3阶群。

群 Γ_p 由 ζ生成。

注 7.5。在此，我们讨论张量因子置换下的分类（见第 4.1 节）。第一族和第三族的元素在所有置换下都保持不变。第四族的元素 $a(u_2 - u_3)$ 经一个2阶置换映射为 $-a(u_2 - u_3)$，而在 3 阶置换下保持不变。因此，如果我们考虑 Sym_2，Sym_3 的作用，那么 $a(u_2 - u_3)$ 与$-a(u_2 - u_3)$共轭。因此，这里我们不考虑3阶群 Γ_p，而考虑一个6阶群。第二族的元素 $a_1u_1 + a_2u_2$ 在一个2阶置换下映射为 $a_1u_1 + a_2u_3$。韦伊群 $W_{\mathfrak{C}}$ 包含如下变换

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

将 $a_1u_1 + a_2u_3$ 映射为 $a_2u_1 + a_1u_2$。因此，如果我们还考虑对称群的作用，$a_1u_1 + a_2u_2$ 与 $a_2u_1 + a_1u_2$ 共轭。所以在这种情况下，第二族的^元素在 $\mathrm{Sym}_k \ltimes G$ ($k = 2, 3$) 下共轭，当且仅当它们在一个36阶群下共轭。

7.2. 半单轨道：实数情形。现在我们回顾[BdGL22]中的一些构造。后一篇论文中的证明是针对该论文所讨论的特殊情形而言的。不过，由于引理 7.4，所有证明在我们的情形下也同样成立。因此我们将其省略。

令 $p \in \mathfrak{C}$，并记 $\mathcal{F} = \mathfrak{C}_p^\circ$。回忆 $\Gamma_p = N_{W_{\mathfrak{C}}}(W_p)/W_p$。令

$$N_{\widehat{G}}(\mathcal{F}) = \{g \in \widehat{G} \mid g \cdot q \in \mathcal{F} \text{ for all } q \in \mathcal{F}\}$$
$$Z_{\widehat{G}}(\mathcal{F}) = \{g \in \widehat{G} \mid g \cdot q = q \text{ for all } q \in \mathcal{F}\}.$$

按以下方式定义映射 $\varphi\colon\ N_{\widehat{G}}(\mathcal{F}) \to \Gamma_p$。令 $g \in N_{\widehat{G}}(\mathcal{F})$；则 $g\cdot p \in \mathcal{F}$，因此存在一个 $w \in N_{W_{\mathfrak{C}}}(W_p)$，满足 $g\cdot p = w\cdot p$；我们定义 $\varphi(g) = wW_p$。于是， φ 是良定义的满射群同态，其核为 $Z_{\widehat{G}}(\mathcal{F})$。

我们有如下定理。证明见 [BdGL22，命题 5.24], 或[DdGMO22，定理 53]。

定理 7.6. 令 $\mathcal{O} = \widehat{G}\cdot p$为 p的轨道。写作 $H^1(\Gamma_p) = \{[\gamma_1],\dots,[\gamma_s]\}$。假设对于每个 γ_i，存在 $n_i \in Z^1(N_{\widehat{G}}(\mathcal{F}))$，使得 $\varphi(n_i) = \gamma_i$。那么， $\mathcal{O}$ 有实点，当且仅当存在 $q \in \mathcal{O}\cap\mathcal{F}$和 $i \in \{1,\dots,s\}$ 使得 $\bar{q} = \gamma_i^{-1}q$。若后者成立，则 gq 是 $\mathcal{O}$的一个实点，其中 $g \in \widehat{G}$ 满足 $g^{-1}\bar{g} = n_i$。

利用这个定理，我们根据实半单元素所属的复族对其进行分类。

第一族 穷举计算机计算表明， $H^1W_{\mathfrak{C}}$ 是平凡的。因此，由定理 7.6 可知，这一族中含有实点的轨道恰好是 $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3$的轨道，其中所有 a_i均为实数。令 Z表示 $\widehat{G}$中此类点的稳定子。由于 Z 是一个阶为 3^4 的群，因此 H^1Z 是平凡的（判据 5.4）。所以，所有 a_i 均为实数的 $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3$ 的复轨道恰好对应一个实轨道。

第二族 这里， Γ_p 有 18 个元素。根据判据 5.5 $H^1\Gamma_p$ 由平凡类和以下类组成:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，这一族中含有实点的轨道分为两组。第一组由 $a_1u_1+a_2u_2$的轨道组成，其中 a_i为实数。令 Z表示此类点的稳定子，其在第 7.1 节中有明确给出。由判据 5.6 可得 $H^1Z = 1$。因此，所有 a_i 均为实数的 $a_1u_1+a_2u_2$ 的每个复轨道恰好对应一个实轨道。

第二组由 p 的轨道组成，其中 $\bar{p} = \gamma p$。这些是 $p = a(u_1-u_2) + ib(u_1+u_2)$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$。我们有 γ 是由以下元素诱导的

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

它是一个上循环。令

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & i & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

我们有 $g^{-1}\bar{g} = n$。令 $v_1 = g\cdot(u_1-u_2)$ 和 $v_2 = g\cdot i(u_1+u_2)$。那么

$$\begin{aligned} v_1 &= -|212\rangle + |200\rangle + 2|120\rangle - 2|111\rangle + \tfrac{1}{2}|022\rangle - \tfrac{1}{2}|001\rangle \\ v_2 &= -|222\rangle - |201\rangle + 2|121\rangle + 2|110\rangle - \tfrac{1}{2}|012\rangle - \tfrac{1}{2}|000\rangle. \end{aligned} \tag{7.4}$$

因此，这些轨道的实代表元为 $a_1v_1+a_2v_2$，而多项式条件可转化为 $a_1^2+a_2^2\neq 0$，以及 $a_2(a_2^2-3a_1^2)\neq 0$。令 Z 表示此类元素的稳定子。计算机计算表明 $\mathrm{H}^1Z^\circ = 1$。由于分支群的阶为 9，判据 5.6 表明 $\mathrm{H}^1Z = 1$。因此，以这些代表元为代表的复轨道对应于一个实轨道。

第三族 此处 Γ_p 由 $-\zeta$生成。因此 $H^1\Gamma_p = \{[1],[-1]\}$。所以，这里的实代表元轨道也分为两组。第一组的代表元为 au_1，满足 $a\in\mathbb{R}$。设 Z 为此类元素在 G中的稳定子。则 $H^1Z = 1$，因此这些轨道各对应一个实轨道。第二组

的代表元为 iau_1，满足 $a \in \mathbb{R}$。我们有，-1 由上循环 $n = A \times A \times A$ 诱导，且

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

设定

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

并且 $g = B \times B \times B$ 我们有 $g^{-1}\bar{g} = n$。我们有 $g \cdot iu_1 = v$，其中

$$v = -2|001\rangle - 2|010\rangle - 2|100\rangle + 2|111\rangle - \tfrac{1}{8}|222\rangle. \tag{7.7}$$

设 Z 为 v 在 G中的稳定子。通过计算 Z°的李代数，进一步的计算机计算表明 $\mathrm{H}^1 Z^{\circ} = 1$。因此，判据 5.6 再次表明 $\mathrm{H}^1 Z = 1$。因此，每个以 av、$a \in \mathbb{R}$ 为代表元的复轨道，都对应于一个具有相同代表元的实轨道。

第四族 此处 Γ_p 由 ζ生成。因此 $H^1\Gamma_p = 1$。由此可知，具有实代表元的轨道就是带有 $a \in \mathbb{R}$的 $a(u_2 - u_3)$的轨道。设 Z 为该元素在 $\widehat{G}$中的稳定子。判据 5.6 表明 $\mathrm{H}^1 Z = 1$。因此，$a(u_2 - u_1)$的复轨道（其中 $a \in \mathbb{R}$）对应于一个实轨道。

8. Mixed Elements

称 $x \in \mathfrak{g}_1$ 为混合元素，如果它具有 Jordan 分解 $x = s + n$，其中 s和 n 分别是两个非零的半单元素和幂零元素，并且满足$[s, n] = 0$。

8.1. 混合元素：复情形。每个混合元素都在 G_0 下共轭于某个元素，该元素的半单部分是第 7 节中所述的某个半单轨道代表元。因此，固定一个半单部分 s，它属于集合$\mathfrak{C}_p^{\circ}$之一。然后考虑其中心化子 $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(s)$。由于 $s \in \mathfrak{g}_1$，该代数继承了 $\mathfrak{g}$ 的分次：$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{-1} \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$，其中 $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i$。半单部分为 s 的混合元素的可能幂零部分属于 $\mathfrak{a}_1$。子代数 $\mathfrak{a}_0$ 是 $Z_{G_0}(s)$ 的李代数。因此，$Z_{G_0}(s)$ 作用在 $\mathfrak{a}_1$ 上。显然，两个混合元素 $s + e_1$、$s + e_2$ 是 G_0-共轭的，当且仅当它们是 $Z_{G_0}(s)$-共轭的。由此可知，要对半单部分等于 s 的混合元素的可能幂零部分进行分类，只需在 $Z_{G_0}(s)$ 的作用下对 $\mathfrak{a}_1$ 中的幂零元素进行分类即可。在恒等映射连通分支 $Z_{G_0}(s)^{\circ}$ 的作用下，$\mathfrak{a}_1$ 中的幂零轨道可以使用用于分类 θ- 群的幂零轨道的通用算法进行分类。随后还需确定哪些轨道在分支群作用下被视为相同。还要注意，根据引理 7.4，固定 $\mathfrak{C}_p^{\circ}$ 的半单元具有相同的中心化子 $\mathfrak{g}$，并且在 G_0 中具有相同的稳定子。换言之，它们并不取决于半单元素 s，而只取决于集合 $\mathfrak{C}_p^{\circ}$。

现在我们对混合元素可能具有的幂零部分进行分类。对于每一族半单元素，我们都有相应的分类。这里省略第一族和第五族：在第一种情况下，唯一可能的幂零部分是零；在后一种情况下，半单部分为零。

我们借助 GAP 完成了轨道分类。对于第二族和第四族，我们得到的结果与 [Nur00b] 中的表格等价。因此，在这些情况下，我们采用了相同的代表元。对于第三族，我们的计算得出了截然不同的结果，表明 [Nur00b] 中的表 2 有误。

设 s 是第 i 族的一个半单元素。设 $\mathfrak{a}$ 如上所述，且 $e \in \mathfrak{a}_1$ 为幂零元。则 e 属于一个齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组（h，e，f），其中 $h \in \mathfrak{a}_0$，$f \in \mathfrak{a}_{-1}$。对于分类中的每个幂零元 e，我们还给出其稳定子 $Z_{\widehat{G}}(s,\ h,\ e,\ f) = \{g \in G \mid g \cdot s = s,\, g \cdot h = h,\ g \cdot e = e,\ g \cdot f = f\}$ 的描述（不一定非常明确），并用单位连通分支及其分支群来表示。

半单部分属于第二族的混合元素，其可能的幂零部分见表 3。

表 3：第二族混合元素的幂零部分

Nurmiev	代表元	$Z_{\widehat{G}}(s,h,e,f)^\circ$	分支群
1	$\|021\rangle + \|102\rangle$	id	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$
2	$\|021\rangle$	T_1	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$

第三族中，我们有 $s = a(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)$，其中 a 是一个非零标量。因此，s 在张量因子的置换下保持稳定。所以，若令 $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(s)$，则 $\mathfrak{a}_1$ 在张量因子的置换下也保持稳定。如第 4.1 节所示，彼此通过置换得到的轨道具有许多共同性质，例如稳定子的结构。在这种情况下，可能的幂零部分共有 16 个轨道。下表按组给出了这些轨道的代表元：同一组中的不同成员彼此通过置换相关，因此其中心化子同构。因此，我们只描述每组中第一个元素的中心化子。编号依据的是 Nurmiev 论文中相同轨道的表格，[Nur00b，表 2]。

表 4：第三族混合元素的幂零部分

Nurmiev	代表元	π	$Z_{\widehat{G}}(s,h,e,f)^\circ$	分支群
1	$\|012\rangle + \|021\rangle + \|102\rangle + \|120\rangle$ $\|102\rangle + \|201\rangle + \|012\rangle + \|210\rangle$ $\|210\rangle + \|120\rangle + \|201\rangle + \|021\rangle$	id (1, 2) (1, 3)	id	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$
2	$\|012\rangle + \|021\rangle + \|102\rangle$ $\|021\rangle + \|012\rangle + \|120\rangle$ $\|102\rangle + \|201\rangle + \|012\rangle$ $\|201\rangle + \|102\rangle + \|210\rangle$ $\|120\rangle + \|210\rangle + \|021\rangle$ $\|210\rangle + \|120\rangle + \|201\rangle$	id (2, 3) (1, 2) (1, 2, 3) (1, 3, 2) (1, 3)	T_1	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
4	$\|012\rangle + \|021\rangle$ $\|102\rangle + \|201\rangle$ $\|210\rangle + \|120\rangle$	id (1, 2) (1, 3)	T_2	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
5	$\|012\rangle + \|120\rangle$ $\|102\rangle + \|210\rangle$	id (1, 2)	T_2	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
7	$\|012\rangle$ $\|102\rangle$	id (1, 2)	T_3	id

注记 8.1. [Nur00b 的表 2] 包含 8 个轨道（不包括此处未列出的零轨道）。他的代表元编号 3 与我们列表中编号 2 下的第二个代表元共轭。Nurmiev 的代表元编号 6 与我们列表中编号 5 下的第二个代表元共轭。Nurmiev 的代表元 8 就是我们列表中编号 7 下的第二个代表元。

表 5：第四族混合元素的幂零部分

Nurmiev	代表元	$Z_{\widehat{G}}(s,h,e,f)^\circ$	分支群

1	$\|002\rangle + \|020\rangle + \|111\rangle + \|200\rangle$	id	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
2	$\|002\rangle + \|011\rangle + \|020\rangle + \|101\rangle + \|110\rangle + \|200\rangle$	id	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
3	$\|000\rangle + \|111\rangle$	id	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_\circ$
4	$\|001\rangle + \|010\rangle + \|100\rangle$	T_1	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
5	$\|000\rangle$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$

为便于后续使用，我们明确给出与 $e = |000\rangle + |111\rangle$对应的稳定子中的二阶元素。它是 $A \times A \times A$，其形式为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

注 8.2. 这里讨论在张量因子的置换下的分类（见第 4.1 节）。即使将张量因子的置换也考虑在内，表 3、表 5 中的元素仍彼此不共轭。因此，对于这些族的混合元素，只剩下由半单部分产生的额外共轭关系（注 7.5）。对于半单部分属于第三族的元素，其幂零部分在张量因子上的置换作用详见表 4。

8.2. 混合元素：实数情形。实半单元素分为两类。一类是第 7 节所述某个族中的实半单元素；我们称之为典范半单元素。另一类是非典范半单元素：它们与某个族中的元素$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$共轭，但不与 $G(\mathbb{R})$-共轭。由第 7.2 节可知，它们出现在第二族和第三族中。相应地，我们有典范和非典范混合元素，其半单部分分别是典范和非典范的。

典范混合元素的每个复轨道都有一个实代表元，如上一节的表格所示。设 $u = s + e$ 是这样一个元素。则$e \in \mathfrak{a}_1$，其中 $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(s)$。设 (h, e, f) 是 $\mathfrak{a}$中包含e 的齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。考虑

$$Z_{\widehat{G}}(s,h,e,f) = \{g \in \widehat{G} \mid g \cdot s = s,\ g \cdot h = h,\ g \cdot e = e,\ g \cdot f = f\}.$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$则，复轨道 $G \cdot u$ 中包含的 $G(\mathbb{R})$-轨道与 $\mathrm{H}^1 Z_{\widehat{G}}(s,h,e,f)$ 一一对应。从第 8.1 节表格中对这些群的描述可知，这个上同调集大多是平凡的。在这些情况下，复$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$轨道 $G \cdot (s+e)$包含一个实轨道 $G(\mathbb{R}) \cdot (s+e)$。唯一的例外是表 5 中的第三个元素。在这种情况下 $|\mathrm{H}^1 Z_{\widehat{G}}(s,h,e,f)| = 2$，且非平凡上循环是其二阶元素，即 $n = A \times A \times A$。设 $g = B \times B \times B$ 其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

然后是 $n = g^{-1}\bar{g}$ 和 $g \in Z_G\,(s)$。我们有

$$g \cdot (|000\rangle + |111\rangle) = 2(|000\rangle - |011\rangle - |101\rangle - |110\rangle).$$

因此，我们在这里得到了额外的实混合轨道，其代表元为

$$a(u_2 - u_3) + 2(|000\rangle - |011\rangle - |101\rangle - |110\rangle),\ a \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

如果 s 不是典范的，那么 s 具有 $s = g \cdot s_0$ 的形式，其中 s_0 是位于某个族中的非实元素。此外，$g^{-1}\bar{g} = n$，其中 n 是 $Z_{\widehat{G}}(s_0)$ 中满足 $\bar{s}_0 = n^{-1}s_0$ 的上循环。如果 e_0 是一个与前文某个表格中的 s_0 对易的幂零元

那么 $s+g\cdot e_0$ 就是一个混合元素。然而，一般而言， $g\cdot e_0$ 不是实的。因此，我们首先要考察轨道 $Z_{\widehat{G}}(s)\cdot(g\cdot e_0)$ 是否包含实元素，并在肯定的情况下找出一个。另一方面，如果该轨道中没有实点，那么这个 e_0 将不会导出半单部分等于 s的混合元素，因此可以将其舍弃。

对于半单元素 p，令 $\mathfrak{u}_p=\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(p)\cap\mathfrak{g}_1$。则 $x\mapsto g\cdot x$ 是双射$\mathfrak{u}_{s_0}\to\mathfrak{u}_s$。它还将 $Z_{\widehat{G}}(s_0)$-轨道映射到 $Z_{\widehat{G}}(s)$-轨道。此外，对于 $x\in\mathfrak{u}_{s_0}$，我们有$n\bar{x}\in\mathfrak{u}_{s_0}$，并且 $g\cdot x$ 为实当且仅当 $n\bar{x}=x$。因此，我们定义映射 $\mu\colon\mathfrak{u}_{s_0}\to\mathfrak{u}_{s_0}$，其定义为 $\mu(x)=n\bar{x}$。现在， [BdGL22, 《引理 5.3》1] 指出如下结论。

引理 8.3。设 $e\in\mathfrak{u}_{s_0}$ 为幂零元素，且 $Y=Z_{\widehat{G}}(s_0)\cdot e$ 是其轨道。设$y_0\in Y$。那么，$\mu(Y)=Y$ 当且仅当 $\mu(y_0)\in Y$。

我们使用这个引理来分类非典范混合轨道。从第 7.2 节可知，这只涉及第二族和第三族。

第二族：这里， n、 g 分别由 (7.2)、(7.3) 给出。我们有 $s_0=a_1u_1+a_2u_2$，其中 $a_2=-\bar{a}_1$。此外， $s=b_1v_1+b_2v_2$，其中 b_1、 $b_2\in\mathbb{R}$ 和v_1、 v_2 由 (7.4) 给出。从表 3 可见，$\mathfrak{u}_{s_0}$中有两个幂零轨道。

对于第一轨道，我们有 $|021\rangle-|210\rangle$，它是在 μ 作用下保持不变的一个代表元。此外，

$$g\cdot\big(|021\rangle-|210\rangle\big)=2|220\rangle+2|211\rangle+|021\rangle-|010\rangle.$$

令 e 表示后一个元素。令 (h,e,f) 为一个包含e 的齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组，则稳定子 $Z_{\widehat{G}}(s,h,e,f)$ 的阶为 27，因此根据判据 5.4，其伽罗瓦上同调是平凡的。因此，在这种情况下我们得到一个实轨道。

对于第二个轨道，我们有 $4i|102\rangle$ 是一个在 μ 下不变的代表元。此外，$g\cdot 4i|102\rangle=|102\rangle$。设 (h,e,f) 与前面相同，并令 $Z=Z_{\widehat{G}}(s,h,e,f)$。通过计算 Z 的李代数并进行简单的计算机计算，可以看出 H^1Z° 由两个元素组成。由于分支群的阶为 9，判据 5.6 表明 $H^1Z=H^1Z^\circ$。非平凡余循环为

$$c=\operatorname{diag}(-1,1,-1)\times\operatorname{diag}(1,-1,-1)\times\operatorname{diag}(-1,-1,1).$$

因此，取

$$a=\operatorname{diag}(i,-1,i)\times\operatorname{diag}(-1,i,i)\times\operatorname{diag}(i,i,-1)$$

我们得到 $a^{-1}\bar{a}=c$。此外， $a\cdot|102\rangle=-|102\rangle$。因此，这里得到两个不共轭的实幂零部分： $|102\rangle$ 和 $-|102\rangle$。

总之，我们有三个半单部分等于 $g\cdot s_0$ 的混合元素的幂零部分：

表 6：半单部分为 $b_1v_1+b_2v_2$ 的混合元素的幂零部分

Nurmiev	代表元
1	$2\|220\rangle+2\|211\rangle+\|021\rangle-\|010\rangle$
2	$\|102\rangle$ $-\|102\rangle$

第三族：这里 $n=A\times A\times A$ 与 A 如（7.5）所示， $g=B\times B\times B$与 B 如（7.6）所示。我们有 $s_0=aiu_1$，其中 $a\in\mathbb{R}$，且 $s=av$ 由（7.7）给出。由表 4 可知，半单部分为 s_0的混合元素有 16 个幂零部分。它们分为五组，编号为 1、 2、 4、 5、 7。我们按此顺序逐一讨论。

我们有 $|120\rangle - |102\rangle - |021\rangle + |012\rangle$，它是轨道 1 的一个代表元，并在 μ 下保持不变。它在 g 的作用下保持不变。在此情形下，稳定子的阶为 27，因此伽罗瓦上同调是平凡的（判据 5.4）。

设 $e = |012\rangle + |021\rangle + |102\rangle$。那么， e 是第二组中第一轨道的一个代表元。我们有 $\mu(e)$ 属于 $|210\rangle + |120\rangle + |201\rangle$ 的轨道，其中 $|210\rangle + |120\rangle + |201\rangle$ 是第二组第六轨道的一个代表元。因此，根据引理 8.3，该轨道在 $\mathfrak{u}_s$ 中的像没有实点。由此可知，第二组的所有轨道都必然如此。

设 $e = |210\rangle - |201\rangle$。那么， e 是第 4 组中第一轨道的一个代表元，在 μ 下保持不变。此外， $g \cdot e = e$。令 (h, e, f) 为一个包含 e 的齐次 $\mathfrak{sl}_2$-三元组$\widehat{\ }$。令 Z 表示 G 中四元组 (s, h, e, f) 的稳定子。通过简单的计算机计算可以证明， $H^1 Z^\circ$ 是平凡的。由于分支群的阶为 3，因此可得 $H^1 Z = 1$。所以在这种情况下存在一个实轨道（判据 5.6）。

设 $e = |012\rangle + |120\rangle$。那么 e 是第 5 组第一轨道的一个代表元。这里 $\mu(e)$属于第 5 组的第二轨道。因此，根据引理 8.3，该轨道在 $\mathfrak{u}_s$ 中的像没有实点。第 5 组第二轨道的情况也相同。

$n \cdot |012\rangle$ 属于 $|021\rangle$的轨道。因此，同样根据引理 8.3，我们看到第 7 组第一轨道的像没有实点。

综上，我们得到以下实混合轨道：

表 7：半单部分为av的混合元素的幂零部分

Nurmiev	代表元
1	$\|120\rangle - \|102\rangle - \|021\rangle + \|012\rangle$ $\|210\rangle - \|012\rangle - \|201\rangle + \|102\rangle$ $\|021\rangle - \|201\rangle - \|120\rangle + \|210\rangle$
4	$\|210\rangle - \|201\rangle$ $\|120\rangle - \|021\rangle$ $\|012\rangle - \|102\rangle$

References

[AMM97] Arvind、K S Mallesh 和 N Mukunda。三能级量子系统的广义潘查拉特南几何相位公式。*Journal of Physics A: Mathematical and General* 30 7 2417 2431, 1997 , ( ): – apr . [

BD06] A T B ¨ ¨ , 3 *Journal of Physics: Conference Series* 36 1 28 32, 2006
olukbasi 和 T Dereli。关于量子三能级系统的 SU( ) 参数化。, ( ): – apr . [BDD+09] L. Borsten、D. Dahanayake、M. J. Duff、H. Ebrahim 和 W. Rubens。《黑洞、量子比特与八元数》。 *Phys. Rept.*, 471:113–219, 2009. [BDF+12] L. Borsten 、 M. J. Duff 、 S. Ferrara 、 A. Marrani 和 W. Rubens。《小轨道》。 *Phys. Rev. D* 85
:086002, 2012.[BdGL21] Mikhail Borovoi 、 Willem A. de Graaf 和 Hˆong Vˆan Lˆe。9 维实分次李代数、伽罗瓦上同调与三向量分类（待修订）。2021.[BdGL22] Mikhail Borovoi、Willem A. de Graaf 和 Hˆong Vˆan Lˆe。九维实三向量的分类。 *J. Algebra*, 603:118–163, 2022.[BDL12] L. Borsten、M. J. Duff 和 P. Levay。黑洞／量子比特对应：最新综述。 *Class. Quant. Grav.*, 29:224008, 2012.[BDMR11] L. Borsten、M. J. Duff、A. Marrani 和 W. Rubens。关于黑洞／量子比特对应。 *Eur. Phys. J. Plus*, 126:37, 2011. [BRS+21] M. S. Blok、V. V. Ramasesh、T. Schuster、K. O'Brien、J. M. Kreikebaum、D. Dahlen、A. Morvan、B. Yoshida、N. Y. Yao 和 I. Siddiqi。在超导三能级量子比特处理器上进行量子信息扰乱。 *Phys. Rev. X*, 11:021010, 2021年4月。[Byr98] Mark Byrd。SU(3) 上的微分几何及其在三态系统中的应用。*Journal of Mathematical Physics*, 39(11):6125–6136, 1998年11月。

[CFR01] Carlton M. Caves、Christopher A. Fuchs 和 Pranaw Rungta。任意双再比特态的形成纠缠。 *Found. Phys. Lett.*, 14 212, 2001 3 199( ): – .[Cho] C.Q. Choi。[CM00a] Carlton M. Caves 和 Gerard J. Milburn。量子三能级系统纠缠。 *Optics Communications* 179 1 439 446, 2000 , ( ): – . [

CM00b] Carlton M. Caves 和 Gerard J. Milburn。量子三能级系统纠缠。 *Optics Communications* 179 1 6 439 446, 2000 , (-): – may . [

DdGMO22] Heiko Dietrich、Willem A. de Graaf、Alessio Marrani 和 Marcos Origlia。四再比特态的分类。 *J. Geom. Phys.*, 179:论文编号 104610, 31, 2022.[DF07] M. J. Duff 和 S. Ferrara。E(6) 与三个量子三能级系统的双体纠缠。*Phys. Rev. D*, 76:124023, 2007.[dGGT19] W. A. de Graaf 和 T. GAP Team。SLA：单李代数计算软件，版本 1.5.3。 `https://gap-packages.github.io/sla/`, 2019年11月。经同行评审的 GAP 软件包。[dGM20] Willem A. de Graaf 和 Alessio Marrani。秩不超过 8 的复单李代数中极大可约子代数嵌入的实形式。 *J. Phys.A*, 53(15):155203, 2020. [DGPS22] Wolfram Decker、Gert-Martin Greuel、Gerhard Pfister 和 Hans Sch¨onemann。SINGULAR 4-3-0——用于多项式计算的计算机代数系统。`http://www.singular.uni-kl.de`, 2022. [DHW08] Keshav Dasgupta、Veronique Hussin 和 Alisha Wissanji。《四元数凯勒流形、受限瞬子与魔方阵》I。 *Nucl. Phys. B*, 793:34–82, 2008.[FG98] Sergio Ferrara 和 Murat Gunaydin。弦理论中的例外群轨道、对偶性与 BPS态。 *Int. J. Mod. Phys. A*, 13:2075–2088, 1998. [FG06] Sergio Ferrara 和 Murat Gunaydin。五维 N=2 麦克斯韦-爱因斯坦超引力理论的轨道与吸引子。 *Nucl. Phys. B*, 759:1–19, 2006. [FGK06] Sergio Ferrara、Eric G. Gimon 和 Renata Kallosh。魔幻超引力、N= 8 与黑洞复合体。 *Phys. Rev. D*, 74:125018, 2006.[FMO+11] Sergio Ferrara、Alessio Marrani、Emanuele Orazi、Raymond Stora 和 Armen Yeranyan。stu 模型及其低秩后继模型的双中心黑洞对偶不变量。 *J. Math. Phys.*, 52:062302, 2011. [FMT12] Sergio Ferrara、Alessio Marrani 和 Mario Trigiante。任意维数下的超埃勒斯。 *JHEP*, 11:068, 2012.[FMZ13] Sergio Ferrara、Alessio Marrani 和 Bruno Zumino。五维中的约当对、E6 与 U对偶。 *J. Phys. A*, 46:065402, 2013. [Gam16] Omar Gamel。纠缠布洛赫球：布洛赫矩阵与双量子比特态空间。*Phys. Rev. A*, 93:062320, 2016年6月。[GAP22] GAP小组。 *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.2*, 2022.[GBD+20] Pranav Gokhale、Jonathan M. Baker、Casey Duckering、Frederic T. Chong、Natalie C. Brown 和 Kenneth R. Brown。借助三能级量子比特拓展量子计算机的前沿。 *IEEE Micro*, 40(3):64–72, 2020. [GM21] Masoud Gharahi 和 Stefano Mancini。三体纠缠的代数几何刻画。 *Phys. Rev. A*, 104:042402, 2021年10月。[GOV94] V. V. Gorbatsevich、A. L. Onishchik 和 `E. B. Vinberg。*Structure of Lie Groups and Lie Algebras* 41 *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* , 第

卷。Springer-Verlag，柏林，1994。载于：《李群与李代数 III》，A. L. Onishchik 和 `E. B. Vinberg（编）。[Gra17] Willem A. de Graaf。 *Computation with linear algebraic groups*。《数学专著与研究札记》。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2017.[GST83] M. Gunaydin、G. Sierra 和 P. K. Townsend。例外超引力理论与魔方阵。 *Phys. Lett. B*, 133:72–76, 1983. [GST84] M. Gunaydin、G. Sierra 和 P. K. Townsend。N=2 麦克斯韦-爱因斯坦超引力与约当代数的几何。 *Nucl. Phys. B*, 242:244–268, 1984. [Hel78] Sigurdur Helgason。 *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, 第 80 卷，丛书名为 *Pure and Applied Mathematics*。Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers],纽约，1978。[HFL05] C´esar Herre˜no-Fierro 和 J. R. Luthra。两个量子三能级系统的广义 concurrence 与可分性界限。2005. [HHDR21] Alexander D. Hill、Mark J. Hodson、Nicolas Didier 和 Matthew J. Reagor。任意双重受控量子相位门的实现。2021。

[HT95] C. M. Hull 和 P. K. Townsend。超弦对偶性的统一。 *Nucl. Phys. B*，438 109：–137，1995。[Hur63] Adolf Hurwitz。关于任意多个变量的二次型复合。 ¨，第565–571页，1963。[JCB22] Abhishek Kumar Jha、Akshay Chatla 和 Bindu A. Bambah。中微子作为量子比特和三能级量子比特。2022。[Kac80] V. G. Kac。关于幂零轨道的一些评论。 *Journal of Algebra* 64 1 190 213, ，（）：–。[1980
Kac90] V. G. Kac。 *Infinite Dimensional Lie Algebras*。剑桥大学出版社，剑桥，第三版，1990。[KGRS03] A. B. Klimov、R. Guzm´an、J. C. Retamal 和 C. Saavedra。离子阱中的三能级量子比特计算机。 *Phys. Rev. A*，67：062313，2003年6月。[KMSM97] G. Khanna、S. Mukhopadhyay、R. Simon 和 N. Mukunda。SU(3) 表示和三能级量子系统的几何相位。 *Annals of Physics*，253 1 55( )：–82，1997。[LT09] Gustav I. Lehrer 和 Donald E. Taylor。 *Unitary reflection groups*，*Australian Mathematical Society Lecture Series*第20卷 Universitext。剑桥大学出版社，剑桥，2009。[Luc21] James Lucietti。所有高维 Majumdar–Papapetrou 黑洞。 *Annales Henri Poincare* 22 7 2437 2450, 2021 ，（）：–。[LWL+08] B. P. Lanyon、T. J. Weinhold、N. K. Langford、J. L. O'Brien、K. J. Resch、A. Gilchrist 和 A. G. White。操控双光子三能级量子比特。 *Phys. Rev. Lett.*，100 2008：060504，2008年2月。[LYF13] Bin Li、Zu-Huan Yu 和 Shao-Ming Fei。三能级量子比特量子计算的几何。 *Scientific Reports*，3(1)，2013年9月。[MDDR+04] A. Melikidze、V. V. Dobrovitski、H. A. De Raedt、M. I. Katsnelson 和 B. N. Harmon。自旋退相干中的宇称效应。 *Phys. Rev. B*，70：014435，2004年7月。[MM97] K S Mallesh 和 N. Mukunda。SU(3) 矩阵的代数与几何。 *Pramana*，49 371 383，1997：–。[MMS99] Juan Martin Maldacena、Gregory W. Moore 和 Andrew Strominger。环面型 II 弦理论中的 BPS 黑洞计数。1999年3月。[MOPL+09] Fran¸cois Mallet、Florian R. Ong、Agustin Palacios-Laloy、Fran¸cois Nguyen、Patrice Bertet、Denis Vion 和 Daniel Esteve。电路量子电动力学中的单次量子比特读出。 *Nature Physics*，5(11)：791–795，2009年9月。[MP86] Robert C. Myers 和 M. J. Perry。高维时空中的黑洞。*Annals Phys.*，172：304，1986。[MPRR17] Alessio Marrani、Gianfranco Pradisi、Fabio Riccioni 和 Luca Romano。非超对称魔法理论与 Ehlers 截断。 *Int. J. Mod. Phys. A*，32(19n20)：1750120，2017。[MR19] Alessio Marrani 和 Luca Romano。非超对称魔法理论中的轨道。*Int. J. Mod. Phys. A*，34(32)：1950190，2019。[NJDH+13] Peter B R Nisbet-Jones、Jerome Dilley、Annemarie Holleczek、Oliver Barter 和 Axel Kuhn。按需精确制备和传输的光子量子比特、三能级量子比特和四能级量子比特。 *New Journal of Physics*，15(5)：053007，2013年5月。[Nur00a] A G Nurmiev。三阶立方矩阵的轨道与不变量。 *Sbornik: Mathematics* 191 5 717, 2000 ，（）：2013年6月。[Nur00b] AG Nurmiev。三阶矩阵的轨道与不变量。 *Mat. Sb*，191 108，2000 5 101( )：–。[PV08] K´aroly F. P´al 和 Tam´as V´ertesi。高维希尔伯特空间对贝尔不等式违背的效率。 *Phys. Rev. A*，77：042105，2008年4月。[Ser97] J.-P. Serre。 *Galois Cohomology*。施普林格出版社，柏林，1997。[Ste64] Robert Steinberg。有限反射群下的不变微分方程。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，112：392–400，1964。[Ste75] Robert Steinberg。约化群中的挠率。 *Adv. Math.*，15：63–92，1975。[Stu60] E.C.G. Stueckelberg。实希尔伯特空间中的量子理论。 *Helv. Phys. Acta*，33 727，1960：。[Tan63] F. R. Tangherlini。n 维空间中的 Schwarzschild 场与空间维数问题。 *Nuovo Cim.*，27：636–651，1963。[Tay12] D. E. Taylor。有限复反射群的反射子群。 *J. Algebra*，366 218：–234，2012。[TJD11] Frank Tabakin 和 Bruno Juli´a-D´ıaz。Qcwave——Mathematica 量子计算机模拟更新。 *Computer Physics Communications*，182(8)：1693–1707，2011。

[VE88] E. B. Vinberg 和 A. G. Elashvili。九维空间三向量的分类（俄文版）。
Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. 18 (1978)，英文译本：Selecta Math. Sov.，7(5)：63—-98，1988。[Vin76a] `E. B. Vinberg。分次李代数的韦伊群。
Izv. Akad. Nauk SSSR ，（）：–。*Ser. Mat.* 40 3 488 526, 1976 10, 463 495
英文译本：Math. USSR-Izv. –（1976）。[Vin76b] `E B.Vinberg。分次李代数的韦伊群。
Mathematics of the USSR-Izvestiya 10 3 463, 1976 ，（）：
2013年6月。[Vin79] `E. B. Vinberg。半单分次李代数的齐次幂零元分类。
Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.，（19）：155–177，1979。英文译本：Selecta Math. Sov. 6，15-35（1987）。[Wal17] Nolan R. Wallach。*Geometric invariant theory*。Universitext。Springer，Cham，2017。关于实数和复数。[Wan07] Aaron Wangberg。E(6) 的结构。2007年8月。

（Di Trani） Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo", Sapienza - Università di Roma, Roma, Italy

(de Graaf) Department of Mathematics, University of Trento, Povo (Trento), Italy

（Marrani） Instituto de Física Teorica, Departamento de Física, Univ. de Murcia, Campus de Espinardo, Murcia, Spain

Email address: sabino.ditrani@uniroma1.it, willem.degraaf@unitn.it,alessio.marrani@um.es