arXiv:2305.01272v1 [cs.RO] 2 May 2023

重新审视移动机器人学中的最小约束移除问题

Antony Thomas、Fulvio Mastrogiovanni 和 Marco Baglietto

热那亚大学信息学、生物工程、机器人学与系统工程系，意大利热那亚 Via All' OperaPia 13，16145。antony.thomas@dibris.unige.it, fulvio.mastrogiovanni@unige.it，marco.baglietto@unige.it

摘要。 *minimum constraint removal problem* 旨在找出需要移除的最少约束（即障碍物）数量，从而以无碰撞路径连接起点和目标位置。该问题是 NP 困难问题，已在机器人学、无线传感和计算几何领域得到研究。本文通过提出并讨论两项结果，为现有文献作出贡献。第一项结果表明，对于每个障碍物均与恒定数量的其他障碍物相交的单连通障碍物，最小约束移除问题是 NP 困难的。第二项结果表明，对于平面中的 n 单连通障碍物，当最小约束移除问题实例中最少可移除障碍物的数量低于 $(n+1)/3$ 时，可以在多项式时间内求解。我们还使用若干随机采样的轴平行矩形实例，对这一结果进行了经验验证。

1 引言

经典的机器人运动规划问题旨在存在固定障碍物的情况下，寻找一条从起点到目标位置的无碰撞路径。然而，在许多情况下，无碰撞路径可能并不存在，但障碍物可以移动。例如，在典型的家庭环境中，障碍物可能是可以重新摆放以便形成可行路径的椅子，也可能是厨房橱柜中的物品，可以重新整理以便拿到所需物品。如果不存在无碰撞路径，并且允许路径与障碍物相交（发生碰撞），那么自然会有人想知道，至少需要移除多少个障碍物，才能存在一条从起点到目标位置的无碰撞路径。Hauser [14] 提出了这个问题，称之为最小约束移除（MCR）问题。它与寻找需要从环境中移除的最少约束（障碍物）有关，以便通过一条畅通路径连接起点和目标位置。

Hauser 通过从集合覆盖问题进行归约，证明了 MCR 是 NP困难的。Erickson 和 Lavalle [10] 通过从二元Horn子句的最大可满足性问题进行归约，证明了对于凸多边形障碍物，MCR 是 NP困难的。当障碍物为线段时，该问题同样是 NP困难的 [1,31]。因此，人们通常会寻求近似解

之后 [19]。Bandyapadhyay 等人 [2] 证明，对于直线多边形和圆盘，存在一个 $O(\sqrt{n})$ 近似算法（其中 n 表示多边形或圆盘的数量）。将 MCR 转化为在边着色图中计算最小颜色数后，研究表明该问题存在一个 $O(n^{2/3})$ 多项式时间近似算法解 [20], ，其中 n 表示转化后图中的顶点数。

最小约束移除也以屏障韧性 之名受到传感器网络领域研究者的关注 [4,5,21]。该问题考虑二维平面中不同区域的布局，其中每个区域代表一个传感器的探测区域 。给定起点和目标点，网络的韧性由相交的不同传感器探测区域的最小数量来衡量，也就是说，要构造一条避开传感器的路径，至少需要多少个传感器失效。Chan 和 Kirkpatrick [5] 将屏障韧性问题归约为最小颜色路径问题 [32],，并针对单位圆盘（传感器区域）计算出 1。5-近似结果，优于文献 [4] 中提出的 2-近似结果。研究还证明，即使对于长宽比接近 1 的轴对齐矩形，该问题仍是 NP困难 [17]。

本文展示以下结果：

1. 对于单连通障碍物，即每个障碍物与常数个其他障碍物相交的情形，MCR 是 NP困难。该结论回应了文献 [14] 中提出的一个开放问题——对于每个障碍物均连通且与不超过 k 个障碍物相交、并且 k 保持为常数的问题，MCR 是否属于 P 类？ 2. 对于平面上的 n 单连通障碍物，若实例中可移除障碍物的最小数量低于 $(n+1)/3$，则可在多项式时间内求解。

(1)中的结果进一步补充了 [8], 中所呈现的研究发现：其中证明了，当 MCR 中每个障碍物与一个常数数量的其他障碍物相交时，其运行时间为 $2^{O(\sqrt{N})}$，其中 N 是由 n 个障碍物的交集形成的区域数量（$N = O(n^2)$）。通过将线段视为障碍物，并从 NP困难的最大负 2-可满足性问题进行归约，证明了存在一个次指数时间（关于 N）算法。相比之下，我们通过考察由相交障碍物诱导的不同路径，为单连通障碍物给出了一般性证明。

如果事先已知 MCR 的最优解（我们将其称为 $S^\star$）低于（$n+1$）/3，即 $|S^\star| < (n+1)/3$，则(2)中的结果意味着，相较于近似算法，精确算法应获得更高的优先级。该结果的证明及进一步讨论见第 4 节。

2 相关工作

最小约束移除与机器人学文献中的多个研究领域密切相关。MCR 找出使运动规划不可行的最小障碍物集合。因此，在运动规划中，不连通性证明或不可行性证明 [3, 22, 33] 能够保证不存在可找到的路径，这构成了一类相关问题。

另一项密切相关的研究方向是最小约束位移（MCD）运动规划 [13, 27, 28]。MCR 确定为获得一条可行路径必须移除的最少障碍物数量，而 MCD 则计算为实现可行运动规划必须移动障碍物的最小距离。

在可移动障碍物导航（NAMO） [23, 25, 30] 问题中，机器人会在平面上操纵不同物体，为自身运动腾出空间。然而，这类方法可能会移动许多物体（不一定是最小集合），而且相应的位移可能是任意的。另一个相关领域是任务与运动规划 [6, 11, 15, 24, 29]。在这类领域中，会生成额外的符号动作，以确保所需任务的运动规划可行性。杂乱环境中的操作或杂乱环境中的重排规划 [7, 16, 18, 26] 也面临类似挑战，因为这需要将一组障碍物（妨碍任务的障碍物）移开，或将它们放置在指定位置。

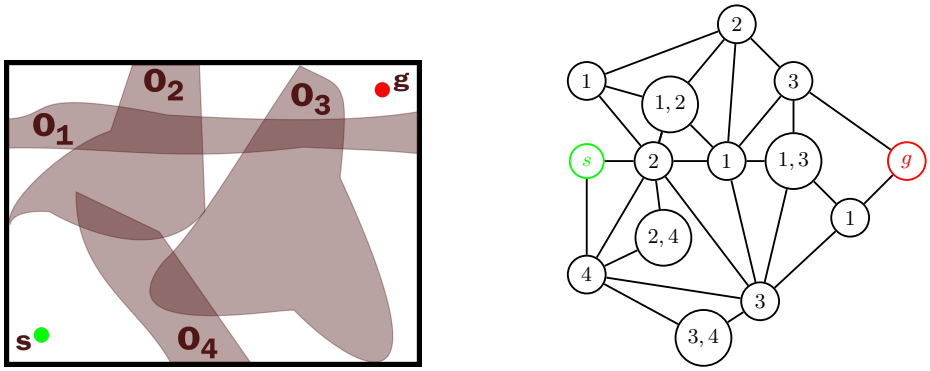
3 固定障碍物交点情形下的困难性结果

本节证明，当 MCR 实例中的每个障碍物最多与固定数量的其他障碍物相交时，该问题是 NP困难的。

众所周知，MCR 问题可以转化为图搜索问题 [9, 10, 12, 14]。为实现这一转化，沿障碍物边界对构型空间进行划分，并构建一张图，使其顶点对应障碍物排列的各个面，边连接相邻的面。通过添加适当的边，将起点 s 和目标 g 位置纳入图中，得到一张图 $G = (V, E)$，其中 V 是顶点集合，E 是由顶点对组成的集合 (v, v')，其中 $v \neq v'$，即边。图 1 给出了一个示例。值得注意的是，当障碍物彼此不相交时，每个顶点 $v \in V$ 都对应一个障碍物，而任何经过 k 这类顶点的路径都意味着必须移除 k 对应的障碍物，才能获得可行路径[1]。当允许障碍物相交时，每个顶点可能对应多个障碍物。因此，对于每个顶点 v，我们将交函数 $I(v)$ 定义为该顶点所代表的相交障碍物集合；也就是说，在 G 上诱导出的路径 P_G 若经过顶点 v，就会与 $I(v)$ 中的所有障碍物相交。因此，要使构型空间中从 s 到 g 的路径 P 可行，需要计算路径 P_G 上所有顶点 v 对应的交函数的并集。由此可得为使路径 P 可行而应移动的障碍物集合，称为该路径 P的可移除集合 R_P。类似地，从 s 到任意顶点 v 的路径 P 的可移除集合可表示为 $R_P(v)$ [2]。

给定一个顶点 v、一条路径 P 以及图 P_G 上对应的路径，可以通过按可移除集合基数递增的顺序扩展图，从而在图上精确求解 MCR

[1]具有互不相交且单连通的障碍物的 MCR 属于 P 类 [14]。[2]下文中，我们将省略下标 P，因为具体路径的指代 P 将是隐含的。



(a) (b)

图1： (a) 一个包含4个障碍物的MCR实例。起点和目标位置分别以绿色和红色表示。(b) 转换为图的MCR问题。顶点表示基于沿障碍物边界进行划分而形成的二维连通区域对应的障碍物集合（节点内为障碍物编号）。

的基数 $|R(v)|$。为此，每个状态都编码为一个二元组 $(v,\ R(v))$，表示该顶点及其对应的可移除集合。这种方法是完备且最优的 [14]。当障碍物彼此不相交且为单连通时，精确搜索相当于在每个顶点都关联单位代价的图上寻找最短路径。在这种情况下，我们可以通过 Dijkstra 算法计算最小 $|R(v)|$ 路径。然而，当障碍物相互重叠时，路径可能多次进入 障碍物，也可能多次离开 障碍物。这使得可移除集合 $R(v)$ 具有路径依赖性，因为某个障碍物可能属于所有顶点的交函数 $I(v)$，从而导致 NP困难性。

现在考虑每个障碍物最多可与 k 个其他障碍物相交的情况，因此共有 $k+1$ 个相交障碍物。设图搜索位于顶点 v'，其对应的可移除集合为 $R(v')$。对于任意与 v' 相邻的 v，若 $c=|I(v)|$，则 $1 \leq c \leq k+1$，可移除集合 $R(v) = R(v') \cup I(v)$。显然，有 $|R(v')| \leq |R(v)| \leq |R(v')|+c$。这是因为 $R(v)$ 取决于路径历史，即到达 v时经过的顶点。为了使这一点更加明确，假设 $I(v) = \{o_1, \ldots, o_k\}$。如果 $R(v') \cap I(v) = \{\emptyset\}$，则从起点到 v' 的路径尚未经过构成 v的任何障碍物，因此 $|R(v)| = |R(v')| + k + 1$。然而，如果$R(v') \cap I(v) \neq \{\emptyset\}$，则从起点到 v' 的路径确实经过了 $I(v)$ 中的部分（或全部）障碍物，并且有 $|R(v)| < |R(v')|+k+1$。这一点可在图1b中直观地看出。若令 $I(v) = \{o_1, o_3\}$，且 $I(v) \subseteq R(v')$，则 $R(v) = R(v')$。如果 $o_1 \in R(v')$ 或 $o_3 \in R(v')$，则有 $|R(v)| = |R(v')| + 1$。最后，如果既非 $o_1 \notin R(v')$ 也非 $o_3 \notin R(v')$，则有 $|R(v)| = |R(v')| + 2$。

如前所述，MCR 可以通过按基数递增的顺序扩展相应的图 $|R(v)|$ 来精确求解。然而，

正如上文所述， $R(v)$ 具有路径依赖性。这意味着，在每个节点 v，$|R(v)\backslash R(v')|$ 的取值可能各不相同，具体取决于在到达 v 之前，路径上是否已经出现过 $I(v)$ 中的障碍物。换言之，状态 $(v, R(v))$ 可以通过多条路径到达。

引理1。如果每个障碍物都是单连通的，且与不超过 k个障碍物相交，那么可以通过 2^{k+1} 条不同的路径到达一个顶点 v（满足 $|I(v)| = k+1$）以及一个可移除集合 $R(v)$。

证明。假设图搜索当前位于一个顶点 v'，并具有一个可移除集合 $R(v')$。对于任意与 v' 相邻且满足 $I(v) = k+1$ 的 v，可以推断：

– 如果 $I(v)$ 中任一元素属于 $R(v')$，那么 $|R(v)| = |R(v')| + k$，这有 $\binom{k+1}{1}$ 种可能；– 如果 $I(v)$ 中任意两个元素属于 $R(v')$，那么 $|R(v)| = |R(v')| + k - 1$，这有 $\binom{k+1}{2}$ 种可能；.....– 如果 $I(v)$ 中任意 k 个元素属于 $R(v')$，那么 $|R(v)| = |R(v')| + 1$，这有 $\binom{k+1}{k}$ 种可能。

最后，有 $|R(v)| = |R(v')| + k + 1$ 当且仅当 $I(v) \nsubseteq R(v')$；而有 $R(v) = R(v')$ 当且仅当 $I(v) \subseteq R(v')$，这分别可以映射为 $\binom{k+1}{0}$ 和 $\binom{k+1}{k+1}$。

如果将上述所有数量相加，我们就得到了到达 $(v, R(v))$ 的所有可能路径。利用二项式和 $\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} = 2^{k+1}$ 可以得到一个精确表达式。因此，状态 $(v, R(v))$ 可能通过 2^{k+1} 条不同的路径到达。

现在我们将证明，具有单连通障碍物且障碍物交点不超过 $k+1$ 个的 MCR 无法在多项式时间内求解。

定理1。对于单连通障碍物，若每个障碍物与不超过 k 个障碍物相交，且 k 保持为常数，则 *MCR* 无法在多项式时间内求解。

证明。存在 n 可移动 障碍物，使得每个障碍物都是单连通的，且与不超过 k 个障碍物相交。由于障碍物有 2^n 个可能的子集，每个顶点都可能出现在 2^n 个搜索状态中。根据引理1，我们知道，具有给定障碍物子集（可移除集合 $R(v)$）的顶点可以通过 2^{k+1} 条可能的路径到达。因此，每个顶点可能出现在 2^{n+k+1} 个搜索状态中。因此，在最坏情况下，精确搜索会生成 $O(|E|2^{n+k+1})$ 个搜索状态。因此，具有单连通障碍物且每个障碍物与不超过 k 个障碍物相交的 MCR 无法在多项式时间内求解。

4 一个属于 P 类的子类

4.1 所考虑的子类

尽管通过图搜索进行精确 MCR 在最坏情况下需要指数时间，但人们可能会问，是否存在一些能够在多项式时间内求解的 MCR 问题子类。在本节中，我们研究其中一个这样的子类。

对于一个 MCR实例，考虑必须移除的最小障碍物集合 $S^\star$，以获得一条可行路径，即最优解。如前所述，MCR 的 NP困难性源于重叠障碍物，因为它们使 $R(v)$ 具有路径依赖性[3]。我们还看到，最坏情况下的指数复杂度归因于障碍物集合的不同可能组合。由于精确搜索按基数递增的顺序进行 $|R(v)|$，因此自然会产生这样一个问题：是否存在一个固定的 $\alpha \le n$，使得对于所有满足 $|S^\star| < \alpha$的 *MCR* 实例，都能在多项式时间内找到最优解？

引理 2。 前 k 项的二项式和有如下上界

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \le 2\binom{n}{k}. \tag{1}$$

当 $k < \frac{n+1}{3}$ 时。

证明。 对于 $k < \frac{n+1}{3}$，有

$$\binom{n}{i} = \frac{n-i+1}{i}\binom{n}{i-1} \ge 2\binom{n}{i-1}. \tag{2}$$

此外，我们有

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} \ge 2\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i-1} \implies \binom{n}{k} \ge \binom{n}{0} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}. \tag{3}$$

在不等式两边加上 $\binom{n}{k}$，得到

$$2\binom{n}{k} \ge \binom{n}{0} + \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \implies \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \le 2\binom{n}{k}. \tag{4}$$

一般而言，给定一个上界 α（即可能需要移除的障碍物数量），我们可以安全地剪枝顶点 $|I(v)| > \alpha$，因为 $|S^\star| \le \alpha$。由此得到一个约简图 G'。类似地，对于在 G' 上进行的 MCR 搜索，如果状态 $(v,\ R(v))$ 满足 $|R(v)| > \alpha$，也可以将其剪枝，因为此类状态不会影响解，正如 $|S^\star| \le \alpha$ 所示。此外，一个顶点可通过多条路径到达，

[3]对于不重叠且单连通的障碍物，使用最佳优先搜索求解精确 MCR 仍可能生成 $O(|E|2^n)$ 个状态。然而，对于这些子类，贪心搜索（运行时间为 $O(|E|n)$）可以生成一个最优解 [14]。

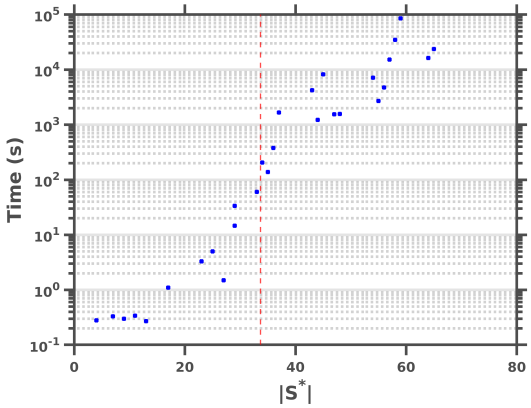


图 2：针对不同的实例，将运行时间绘制为 MCR 解（ $S^\star$ 的基数）的函数，这些实例由 100 个随机采样的轴平行矩形构成。

因此可能产生不同的状态。因此，如果搜索过程中，某个状态 $(v,\ R(v))$ 所对应的顶点此前已由状态 $(v,\ R'(v))$ 到达，且满足 $R(v) \supseteq R'(v)$，则可以将该状态剪枝。因此，给定一个 α ，并剪去上述论证中提到的状态后，搜索会生成 $O\left(\sum_{i=0}^{\alpha}\binom{n}{i}\right)$ 个状态。

定理 2。 平面中具有$|S^\star| < \alpha$的单连通障碍物的 *MCR* 实例，其中 $\alpha = \ (n+1)\ /3$, 可以在多项式时间内求解。

证明。 对于任意 $\alpha < (n+1)/3$，精确搜索会生成 $O(n^\alpha)$ 个状态。这直接源于我们上述关于剪枝非最优状态以及使用引理 2 的论证。因此，具有 $|S^\star| < (n+1)/3$ 的 MCR 属于 P。

4.2 实证验证

为了验证我们的论断，我们在不同的 MCR 实例上采用精确搜索，其中障碍物均为轴平行矩形。为模拟不同的 MCR 实例，我们考虑一个 30×30 网格，并随机采样 n 个点，每个采样点对应一个障碍物。随后，我们为每个采样点随机采样其长度和宽度。最后，对于每个实例，起点和目标位置均从网格点中随机选取。测试在搭载 Intel® Core i7-10510U 中央处理器@1.80GHz×8 、配备 16GB 随机存取存储器并运行 Ubuntu 18.04 LTS 的设备上进行。图2展示了在含有 100 个障碍物的30×30 网格上进行精确搜索的运行时间。红色竖线对应于 $\alpha = (n+1)/3$。对于 $|S^\star| > (n+1)/3$，随着点与 α线之间的距离增大，精确搜索很快变得难以执行，计算最优解需要数小时。需要注意的是，计算性能会受到障碍物重叠数量（障碍物分布）的显著影响，正如我们在上一节所示。这解释了 MCR 解实例与其对应计算时间之间的非单调关系。

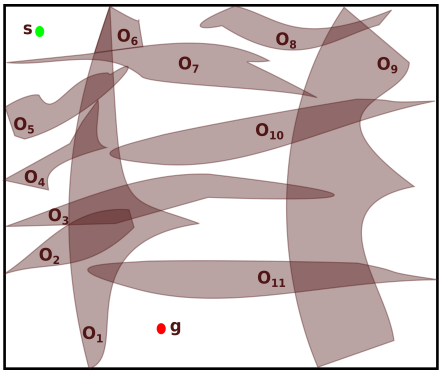


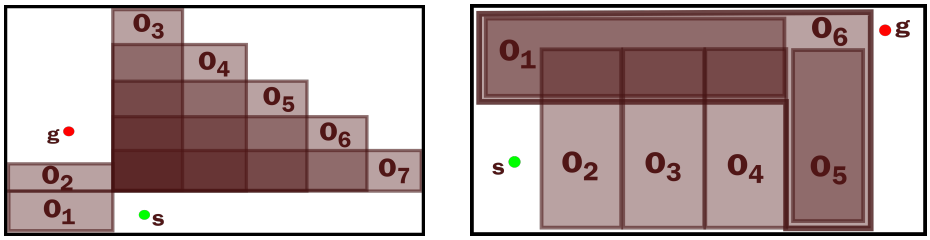
图3： 为每个顶点赋予等于其交函数的权重，并计算最小权重路径，得到一个包含 6 个障碍物的解（$S = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_7\}$）。移除 3 个障碍物即可得到最优解 $S^\star = \{o_1, o_3, o_7\}$。

4.3 计算 $|S^\star|$的上界

定理 2 的一个推论是，如果我们知道不等式$|S^\star| < (n+1)/3$ 成立，就可以采用精确图搜索方法。要获得这一信息，可以确定一个紧上界（否则就只能寄希望于存在一个预言机）。一种直接的方法是求解一个加权图，其中每个顶点 v 的权重设为 $|I(v)|$。值得注意的是，如果颜色重复不超过 p 次，那么最小权重路径（例如使用 Dijkstra 算法求得）可给出一个 p–近似解，其中$p = \Theta(n)$。图3展示了一个示例，其中最小权重路径为 $S = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_7\}$。然而，最优 MCR 解为 $S^\star = \{o_1, o_3, o_7\}$。此外，将所有顶点的权重设为单位权重也能轻松得到一个上界。该方法可能产生 $O(n)$误差，图4a 展示了一个这样的实例。

另一种自然的方法是采用贪心搜索：在每个 v，扩展最小 $|R(v)|$ 子集，并剪枝其余满足$|R'(v)| \geq |R(v)|$ 的状态，运行时间为 $O(n)$。然而，贪心搜索在最坏情况下的误差为 $O(n)$。示例如图4b所示。

尽管很容易构造出达到紧上界的实例，但上述方法通常只能计算保守的上界。如图4所示，即使障碍物是轴平行矩形，误差也会达到 $O(n)$。Chan 和 Kirkpatrick 提出了一种针对单位圆盘的 1.5-近似算法 [5]。对于不同的子类，是否存在更紧的上界？是否存在针对 MCR 的多项式时间算法，能够给出 ϵ-近似（$\epsilon > 0$ 和 $\epsilon \to 0$）？我们将这些问题留作开放的理论问题。



(a) (b)

图4： (a) 最优解为 $S^\star = \{o_1, o_2\}$。为每个顶点赋予相同权重后，我们得到一条包含 $S = \{o_3, \ldots, o_7\}$ 的次优路径。(b) 平面上包含五个矩形障碍物 o_1、.....、o_5 和一个 L形障碍物 o_6 的示例。精确搜索得到 $S^\star = \{o_1, o_6\}$，而贪心搜索返回 $S = \{o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$。

5 结论

我们证明了，对于每个障碍物相交的其他障碍物数量不超过某个常数的实例，MCR 是 NP困难。这回答了 [14] 提出的一个开放问题：对于每个障碍物都连通且相交障碍物数量不超过 k 的问题，MCR 是否属于 P。文献 [10] 也对这类实例的可处理性提出了疑问，其中作者未经证明便声称，如果只允许障碍物两两相交，问题就很简单。Eiben等人 [8] 证明，对于任意一点处重叠的障碍物不超过两个的实例，无法在 $2^{o(\sqrt{N})}$ 时间内求解，其中 $N_= O(n^2)$， n 表示平面中的障碍物数量。限制为两两相交的实例是双障碍物重叠MCR的一个子类。这提示了一个值得进一步研究的方向：对于仅允许 $k-$ 交相的实例，即只允许由 k 个障碍物组成的群组相交，并且 k 固定时，MCR 是否属于 P？

我们还证明，对于平面上的单连通障碍物，具有 $|S^\star| < (n+1)/3$ 的 MCR 实例可以在多项式时间内求解，其中 n 。这些结果的一个推论是，如果事先已知 $|S^\star| < (n+1)/3$ 成立，则可以采用精确图搜索。然而，目前尚无能够计算紧界的算法。是否存在能够计算紧上界的多项式时间 MCR 算法，仍是一个开放的理论问题。

参考文献

1. Alt, H., Cabello, S., Giannopoulos, P., Knauer, C.：关于直线段排列中的一些连接问题。第 27 届 EuroCG，第 27–30 页（2011） 2. Bandyapadhyay, S., Kumar, N., Suri, S., Varadarajan, K.：最小约束移除问题的改进近似界。计算几何 90，101650（2020）

3. Basch, J., Guibas, L.J., Hsu, D., Nguyen, A.T.：运动规划的断连证明。载于：2001 年 ICRA 会议论文集。IEEE 机器人与自动化国际会议（目录编号：01CH37164）。第 2 卷，第 1765–1772 页。IEEE（2001）4. Bereg, S., Kirkpatrick, D.：无线传感器网络中屏障韧性的近似计算。载于：无线传感器网络的算法问题：第五届国际研讨会 ALGOSENSORS 2009，希腊罗得岛，2009 年 7 月 10–11 日。修订后的精选论文 5。第 29–40 页。施普林格（2009）5. Chan, D.Y.C., Kirkpatrick, D.：用于最小颜色路径问题的多路径算法及其在屏障韧性近似计算中的应用。《理论计算机科学》553，74–90（2014）6. Dantam, N.T., Kingston, Z.K., Chaudhuri, S., Kavraki, L.E.：增量式任务与运动规划：一种基于约束的方法。载于：机器人学：科学与系统第十二届会议论文集。密歇根州安娜堡（2016 年 6 月）7. Dogar, M., Srinivasa, S.：杂乱环境中的推抓框架。载于：Hugh Durrant-Whyte, N.R., Abbeel, P.（编），机器人学：科学与系统第七届会议论文集。麻省理工学院出版社，美国加利福尼亚州洛杉矶（2011 年 6 月）8. Eiben, E., Gemmell, J., Kanj, I., Youngdahl, A.：最小约束移除问题的改进结果。载于：AAAI人工智能会议论文集。第 32 卷（2018）9. Eiben, E., Kanj, I.：如何穿越障碍物? 载于：第 45 届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2018）。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs），第 107 卷，第 48:1–48:13 页。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik（2018），http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2018 9052 10 / .10. Erickson, L.H., LaValle, S.M.：一个简单但属于 NP困难的问题：运动规划问题。载于：第二十七届 AAAI 人工智能会议论文集（2013）11. Garrett, C.R., Lozano-Perez, T., Kaelbling, L.P.：FFRob：利用符号规划实现高效的任务与运动规划。《国际机器人研究杂志》37(1)，104–136（2018）12. Gorbenko, A., Popov, V.：离散最小约束移除运动规划问题。载于：美国物理学会会议论文集。第 1648 卷，第 850043 页。AIP出版社有限责任公司（2015）13. Hauser, K.：最小约束位移运动规划。载于：机器人学：科学与系统第九届会议论文集。德国柏林（2013 年 6 月）14. Hauser, K.：具有三种机器人应用的最小约束移除问题。《国际机器人研究杂志》33(1)，5–17（2014）15. Kaelbling, L.P., Lozano-P´erez, T.：信念空间中的集成任务与运动规划。《国际机器人研究杂志》32(9-10)，1194–1227（2013）16. Karami, H., Thomas, A., Mastrogiovanni, F.：多机器人任务与运动规划中的任务分配：杂乱工作空间中的物体拾取案例。载于：AIxIA 2021——人工智能进展。第 3–17 页。施普林格国际出版，查姆（2022）17. Korman, M., L¨offler, M., Silveira, R.I., Strash, D.：胖区域和有界重叠度下屏障韧性的复杂性。计算几何 72，34–51（2018）18. Krontiris, A., Bekris, K.E.：应对困难的物体重新排列实例。载于：机器人学：科学与系统第十一届会议论文集。意大利罗马（2015 年 7 月）19. Krontiris, A., Bekris, K.E.：操作规划中最小约束移除路径计算的权衡。先进机器人学 31(23-24)，1313–1324（2017）

20. Kumar, N.：在边着色图中计算最小颜色路径。载于：实验算法分析：特别活动，SEA^2 2019, ，希腊卡拉马塔，2019 年 6 月 24 日至 29 日，修订版精选论文集，第 35–50 页。施普林格（2019）21. Kumar, S., Lai, T.H., Arora, A.：利用无线传感器实现屏障覆盖。载于：第 11 届年度国际移动计算与网络会议论文集，第 284–298 页（2005）22. Li, S., Dantam, N.T.：学习运动规划不可行性的证明。载于：机器人学：科学与系统（2021）23. Nieuwenhuisen, D., van der Stappen, A.F., Overmars, M.H.：一种在可移动障碍物环境中进行路径规划的有效框架。载于：机器人学算法基础 VII，第 87–102 页。施普林格（2008）24. Srivastava, S., Fang, E., Riano, L., Chitnis, R., Russell, S., Abbeel, P.：通过可扩展的、独立于规划器的接口层实现任务与运动规划的结合。载于：机器人与自动化（ICRA），IEEE 国际会议论文集，第 639–646 页。IEEE（2014）25. Stilman, M., Kuffner, J.J.：在可移动障碍物之间导航：复杂环境中的实时推理。《国际人形机器人学杂志》2(04)，479–503（2005）26. Stilman, M., Schamburek, J.U., Kuffner, J., Asfour, T.：在可移动障碍物之间进行操作规划。载于：2007 年 IEEE 国际机器人与自动化会议论文集，第 3327–3332 页。IEEE（2007）27. Thomas, A., Ferro, G., Mastrogiovanni, F., Robba, M.：机器人导航中最小障碍物位移规划的计算权衡。载于：IEEE 国际机器人与自动化会议（ICRA）（2023）28. Thomas, A., Mastrogiovanni, F.：针对可移动障碍物的最小位移运动规划。载于：智能自主系统 17，第 155–166 页。施普林格自然瑞士，查姆（2023）29. Thomas, A., Mastrogiovanni, F., Baglietto, M.：MPTP：面向信念空间导航、具备运动规划感知能力的任务规划。《机器人与自主系统》141，103786（2021），https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092188902100071330. Van Den Berg, J., Stilman, M., Kuffner, J., Lin, M., Manocha, D.：在可移动障碍物之间进行路径规划：一种概率完备方法。载于：机器人学算法基础研讨会 VIII（WAFR），墨西哥瓜纳华托，第 599–614 页。施普林格（2009）31. Yang, S.：计算几何与空中交通管理中的若干路径规划算法。博士学位论文，纽约州立大学石溪分校（2012）32. Yuan, S., Varma, S., Jue, J.P.：网状网络可靠性中的最小颜色路径问题。载于：IEEE 第 24 届年度 IEEE 计算机与通信学会联合会议论文集，第 4 卷，第 2658–2669 页。IEEE（2005）33. Zhang, L., Kim, Y.J., Manocha, D.：一种利用 c-障碍物查询的简单路径不存在性算法。载于：机器人学算法基础 VII，第 269–284 页。施普林格（2008）