内旋转圆柱在椭圆形腔体中产生的泰勒-库埃特流

AkashUnnikrishnan[a,1]，Surya Pratap Vanka[b]，Vinod Narayanan[a]*a* 机械工程系，印度理工学院甘地纳格尔分校，印度古吉拉特邦甘地纳格尔*382355*

b 美国伊利诺伊州厄巴纳 *61801*，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校机械科学与工程系

arXiv:2305.01274v1 [physics.flu-dyn] 2 May 2023

摘要

旋转圆柱之间的泰勒-库埃特流是流体力学中的一个经典问题，在两个同心圆柱的情况下已得到广泛研究。然而，对于一个或两个圆柱旋转的复杂形状圆柱，相关研究相对较少。本文研究了旋转的同心内圆柱与椭圆形外圆柱之间泰勒涡胞的特性。假设轴向具有周期性，对三维非定常纳维-斯托克斯方程进行数值求解。采用傅里叶谱无网格离散方法，通过多谐波样条函数和附加多项式在散布点处对变量进行插值。采用压力投影算法对流动方程进行时间推进。本文给出了长宽比为 2 的椭圆形区域以及若干流动雷诺数 ($Re = \omega r_i(b - r_i))/\nu$ 下的计算结果，雷诺数范围从亚临界状态到 300，其中 ω =角速度 [rad/s]、 r_i =内圆柱半径、 b =半短轴，以及 ν =运动黏度。展示了流线、轴向速度等值线、压力、涡量和温度分布，以及 Q准则等值面。结果表明，当 $Re = 300$ 时，流动保持稳态；当 $Re = 350$ 时，流动呈现非稳态。

1. 引言

自 Mallock [1, 2], 、Couette [3], 和 Taylor [4]的早期研究以来，文献中对两个旋转的同心圆柱之间的泰勒-库埃特流 [1–4] 进行了广泛研究。此后，人们开展了大量实验和计算研究，考察雷诺数从亚临界到超临界状态乃至湍流状态的情况。已有充分记录表明，在中等雷诺数下，同心圆柱之间最初的二维流动会分岔为三维流动，并形成成对的环形涡，称为泰勒涡胞。随着雷诺数增加，稳态泰勒涡胞会依次转变为螺旋涡、非稳态混沌流，最终发展为湍流 [5–9]。广泛研究的几何构型是二维同心圆柱结构，涵盖窄间隙和宽间隙 [10–16] ，以及长长宽比和短长宽比的构型

[1]通讯作者电子邮箱：akash.unnikrishnan@iitgn.ac.in

几何形状 [17–20]。数值模拟 [21–25] 和粒子图像测速研究 [26, 27] 揭示了这些涡胞的详细结构及其转变过程。研究观察到了丰富多样的流动模式，从稳态环形涡到行波、螺旋波状涡，以及层流/湍流混合斑块。Coles [5] 报告了间隙雷诺数在 114 至 1600 之间的多种流动模式，其中包括以交替螺旋形态分布的层流区和湍流区斑块。Andereck等人 [6] 开展了内外圆筒以不同组合旋转的实验，并观察到，与静止外圆筒相比，反向旋转的外圆筒会使方位波模态数量增加。通过提高内外圆筒的转速，研究观察到多种流动状态，从调制波状涡到间歇性湍流和螺旋湍流，以及雷诺数为 1000 时无特征湍流。泰勒-库埃特流已广泛应用于颗粒分离 [28–31], 、膜过滤 [28, 32–35], 、海水淡化 [36], 以及化学反应工程设备 [37]。为实现分离设备的连续运行，人们对延伸的泰勒-库埃特-泊肃叶流 [38–40] 进行了广泛研究。采用恒定温度和恒热流边界条件的泰勒-库埃特流传热研究也已开展 [41–45]。

尽管研究最广泛的构型是同心圆筒几何构型，但圆筒形状的几何变化为探索丰富的流体物理现象并将其应用于新器件开发提供了广阔而尚未充分探索的机会。同轴构型的几何变化可能包括改变内外圆筒的横截面形状（沿轴向保持均匀）、改变横截面尺寸的轴向变化，以及引入周期性扰动等。研究最广泛的横截面形状变化，是偏心放置的内圆柱；它会产生非轴对称基流，其稳定性特征不同于同心构型。这种构型不仅会改变基流的亚临界流动，也会改变泰勒涡胞的超临界状态 [46–49]。Krueger等人 [49] 开展了实验，以确定不同偏心率下的临界转速。研究发现，随着偏心率增大，流动变得更加不稳定，并在更低的雷诺数下形成泰勒涡胞。Oikawa等人 [47] 进行的线性稳定性分析表明，随着偏心率增大，亚临界流动会在更低的雷诺数下失稳。Rui-Xiu等人 [50] 采用DiPrima和Stuart [10, 11, 12], 、DiPrima和Eagles [13], 以及Stuart和Di Prima [14] 的方法，研究了偏心圆筒间流动的线性稳定性，所得结果与以往研究一致。Leclercq等人 [51, 52] 使用双极坐标系研究了偏心泰勒-库埃特-泊肃叶流的稳定性。

与基础泰勒-库埃特几何相关的大量研究相比，针对其他构型中泰勒胞的研究寥寥无几。Sprague 等人 [53], Sprague 和 Weidman [54] 研究了一种几何构型，其中泰勒涡会随着内外圆柱半径的改变而持续调整。

通过改变内外圆柱半径。在内球旋转的同心球体中，Wimmer [55], Nakabayashi 和 Tsuchida [56, 57] 展示了泰勒涡的出现。随后，Wimmer [58] 将研究扩展至椭球体和同轴圆锥。Denne 和 Wimmer[59] 发现，同轴圆锥中的泰勒涡结构不同于圆柱形泰勒-库埃特流。Soos 等人 [60] 模拟了混合器中的流动发展情况，该混合器的圆形外圆柱内设有旋转的瓣状内圆柱。他们发现，三瓣和四瓣构型中，泰勒胞周期性地受到挤压和扩张，从而增强了混合效果。Snyder [8, 9, 61]研究了方形外圆柱和光滑内圆柱构成的系统，并通过实验表征了其中的泰勒胞。Mullin 和 Lorenzen[62] 对短圆柱进行了类似实验，发现端壁边界层与泰勒胞相互作用时会出现异常模态。Benjamin 和 Mullin [63], 以及 Lorenzen 和 Mullin [17]也在较高雷诺数下观察到了此类异常胞。Greidanus 等人 [64] 研究了一种内旋转圆柱带有肋条的构型。他们测量了旋转圆柱上的阻力和扭矩，发现在湍流雷诺数为 4.7×10^4 时，阻力降低了 5.3%。肋条沿内圆柱圆周垂直布置。微型沟槽尺寸较小，不会改变主要泰勒涡的宏观特征，但有助于降低湍流边界层产生的阻力。Razzak 等人 [65] 研究了轴向波纹管，其外圆柱带有特定振幅和波长的波纹。这项数值研究表征了不同雷诺数下的流动模式，以及波纹管腔内的速度和压力分布。最近，Kumar [66] 研究了一种外壁以固定角度扩张的几何构型。研究计算了不同扩压器角度和不同雷诺数下的三维流场，并记录了稳态和非稳态状态下泰勒胞的结构。其他横截面沿轴向变化的几何形状还包括圆锥和球体 [55–59]。Eagles 和 Soundalgekar [67]报告了外部非圆形圆柱与同轴内圆柱之间流动的稳定性分析。另一种研究泰勒涡的非传统几何构型是“体育场形”，即两个半圆形端腔与一个矩形腔体相连 [68]。

本文研究了一种新型几何构型，据我们所知，目前尚无关于其中泰勒涡结构及特性的研究。该构型由一个椭圆圆柱构成，圆柱与其同心放置。内圆柱旋转，外圆柱静止。这种几何构型可应用于椭圆轴承的内部润滑 [69–73]。内旋转圆柱驱动下，椭圆圆柱中的基流比偏心圆柱构型中的基流更为复杂，因为会形成角涡。由于椭圆长轴方向的间隙较大，内旋转圆柱产生的圆周运动会驱动另一组反向旋转涡，其形态类似于剪切驱动腔体中的莫法特涡 [74–81]。近期，我们采用 [82] 研究了旋转圆柱置于椭圆内部时的二维流动，使用

高精度无网格求解程序 [83–86]。在 [82], 中，我们报告了雷诺数、椭圆长宽比以及内圆柱放置偏心率对流动和压力场的影响。该数值算法和流动均为二维，因此无法捕捉基流不稳定性所产生的任何三维涡旋。

本文介绍了采用近期开发的傅里叶谱无网格法开展三维研究所得的结果。傅里叶谱方法假设轴向具有周期性，并在横流平面的散布点处于傅里叶空间中求解纳维-斯托克斯方程。我们展示了泰勒涡的形成；这些涡旋与圆柱中的泰勒涡相似，但由于流动经过长轴和短轴时涡旋受到挤压和膨胀而产生差异。第 2 节首先简要介绍数值算法。第 3 节给出验证和网格无关性测试的结果。第 4 节给出内圆柱同心布置时的结果。第 5 节总结主要发现。

2. 方法

2.1. 流动几何与所求解的方程

研究的流动几何如图 1 所示。半径为 r_i 的内圆柱在半长轴为 a 、半短轴为 b 的椭圆内旋转。在本研究中，长宽比 a/b 取为 2，间隙（$b-r_i$）取为 r_i。因此，椭圆的短半轴是内圆柱半径的两倍。无量纲化后，内圆柱半径取为 0.5，间隙取为 0.5。流动在轴向（z）方向上被视为周期性的，傅里叶空间中解析的波数数量根据能量随波数的衰减来确定。流动雷诺数定义为 $Re = \omega r_i(b-r_i)/\nu$，其中 ω 是内圆柱的旋转速度（弧度/秒）， ν 是流体运动黏度。流体被视为牛顿流体，密度和黏度被视为常数。流动被视为不可压缩。

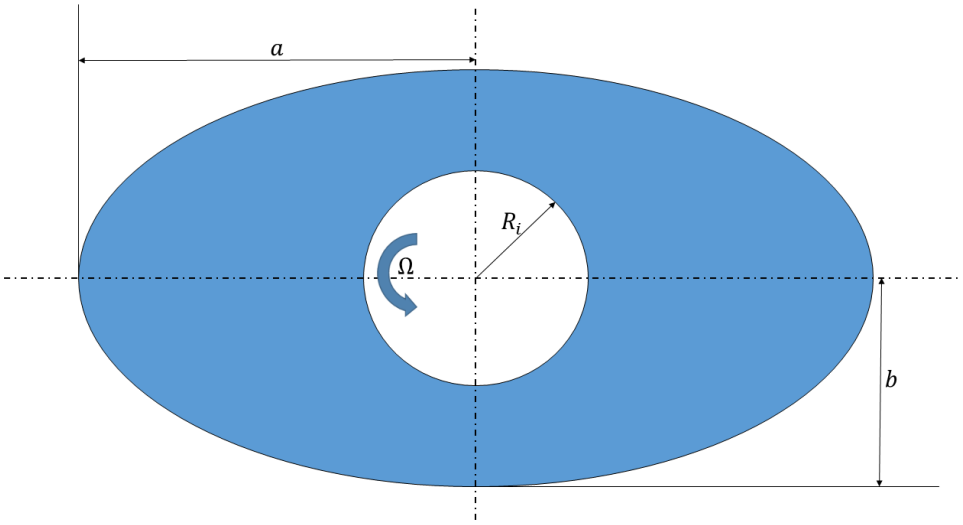


图 1：本研究所分析模型的横截面

圆柱壁面设为不可渗透且无滑移。对于传热计算，内壁加热至无量纲温度 1，外壁保持在无量纲温度 0。通过对三维非定常方程进行时间推进，确定流动随雷诺数变化时非定常性的 onset。求解的方程为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\nabla^2 u_i \tag{2}$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = k\nabla^2 T + S \tag{3}$$

其中， μ 是流体的动力黏度， ρ 是流体的密度， T 是温度， u_i 是速度分量， k 是热导率， S 表示源项。连续性方程和对流项采用张量求和记号。当相邻时间步之间的数值差异降至10^{-5} 无量纲单位以下时，即认为达到稳态。同时，还会随时间计算扭矩和努塞尔数，并比较不同时间步的结果。无量纲扭矩的计算公式为

$$\tau_c = \mu r_i u_\theta L \tag{4}$$

其中， u_θ 是内圆柱的切向速度， r_i 是内圆柱的半径， L 是轴向长度。努塞尔数的计算公式为

$$Nu = \frac{2r_i}{k_t}\left(\frac{1}{2\pi r_i L\Delta T}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{z=0}^{z=L}\left[k_t\frac{\partial T}{\partial r}r_i\right]d\theta dz\right) \tag{5}$$

其中， k_t 是热导率， ΔT 是内外圆筒之间的温差。

2.2. 数值方法 *2.2.1.* 谱分解

为实现笛卡尔空间的第三维计算，采用傅里叶谱方法。由于具有周期性，首先通过展开式将控制变量 ψ（x、 y、 z、 t）表示在傅里叶空间中（Fornberg [87],Canuto 等人 [88]）：

$$\psi\left(x,y,z_l,t\right) = \sum_{k=-N}^{k=N}\widehat{\psi_k}(x,y,t)\exp\left(\mathrm{i}kz_l\right), \quad l = 0,1,...,2N \tag{6}$$

其中， ψ_k 是一个复值函数，对应于波数 k ，其范围从 $-N$ 到 N 和$\mathrm{i}^2 = -1$。 $\widehat{\psi_k}$ 可表示为式 (7) 所示的逆傅里叶变换。 ψ 是一个实值函数（场变量），因此变换系数函数 $\psi_k(x,\ y,\ t)$ 是复数

对于 k 的正值和负值互为共轭量。

$$\widehat{\psi_k}(x,y,t)=\frac{1}{2N+1}\sum_{l=0}^{l=2N}\psi\left(x,y,z_l,t\right)\exp\left(-\mathrm{i}kz_l\right),\quad k=-N,...,0,...,N \tag{7}$$

通过在变换空间中计算各阶导数，可以将偏微分方程变换到波数空间。例如，偏微分方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left[\frac{\partial(u\psi)}{\partial x}+\frac{\partial(v\psi)}{\partial y}+\frac{\partial(w\psi)}{\partial z}\right]=\Gamma\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]+S \tag{8}$$

在变换空间中变为

$$\frac{\partial\widehat{\psi_k}}{\partial t}+\left[\frac{\partial\widehat{(u\psi)_k}}{\partial x}+\frac{\partial\widehat{(v\psi)_k}}{\partial y}+\mathrm{i}k\widehat{(w\psi)_k}\right]=\Gamma\left[\frac{\partial^2\widehat{\psi_k}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widehat{\psi_k}}{\partial y^2}-k^2\widehat{\psi_k}\right]+\widehat{S_k} \tag{9}$$

其中，$[u,v,w]$ 为速度分量，Γ 为扩散系数，S 为源项。

为求解非定常纳维-斯托克斯方程，我们采用常用的分数步法 [89] ，该方法包括动量步，随后是压力计算步，后者将动量速度投影到无散状态。在当前工作中，我们采用显式方法计算对流通量和扩散通量。然而，压力投影步需要求解一个隐式方程，因此需要使用迭代算法。动量步通过在波数空间中显式更新速度，计算速度的中间值。因此，

$$\frac{\widehat{\tilde{u}_k}-\widehat{u_k^n}}{\Delta t}=-\left[\frac{\partial\widehat{(u^nu^n)_k}}{\partial x}+\frac{\partial\widehat{(v^nu^n)_k}}{\partial y}+\mathrm{i}k\widehat{(w^nu^n)_k}\right]+\nu\left[\frac{\partial^2\widehat{u_k^n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widehat{u_k^n}}{\partial y^2}-k^2\widehat{u_k^n}\right] \tag{10}$$

$$\frac{\widehat{\tilde{v}_k}-\widehat{v_k^n}}{\Delta t}=-\left[\frac{\partial\widehat{(u^nv^n)_k}}{\partial x}+\frac{\partial\widehat{(v^nv^n)_k}}{\partial y}+\mathrm{i}k\widehat{(w^nv^n)_k}\right]+\nu\left[\frac{\partial^2\widehat{v_k^n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widehat{v_k^n}}{\partial y^2}-k^2\widehat{v_k^n}\right] \tag{11}$$

$$\frac{\widehat{\tilde{w}_k}-\widehat{w_k^n}}{\Delta t}=-\left[\frac{\partial\widehat{(u^nw^n)_k}}{\partial x}+\frac{\partial\widehat{(v^nw^n)_k}}{\partial y}+\mathrm{i}k\widehat{(w^nw^n)_k}\right]+\nu\left[\frac{\partial^2\widehat{w_k^n}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widehat{w_k^n}}{\partial y^2}-k^2\widehat{w_k^n}\right] \tag{12}$$

上标 n 表示前一时间步的值。请注意，显式时间步长通常比半隐式或全隐式算法的限制严格得多。不过，显式算法实现起来更简单。由于这些动量速度不满足连续性方程，因此需要求解压力泊松方程，将中间速度投影到无散状态。波数空间中的压力泊松方程为

$$\frac{\partial^2\widehat{p_k^{n+1}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widehat{p_k^{n+1}}}{\partial y^2}-k^2\widehat{p_k^{n+1}}=\frac{\rho}{\Delta t}\left[\frac{\partial\widehat{\tilde{u}_k}}{\partial x}+\frac{\partial\widehat{\tilde{v}_k}}{\partial y}+\mathrm{i}k\widehat{\tilde{w}_k}\right] \tag{13}$$

求解压力泊松方程后，在波数空间中对动量速度进行修正，得到

$$\begin{aligned}\widehat{u_k^{n+1}} &= \widehat{\tilde{u}_k} - \frac{\Delta t}{\rho}\widehat{\frac{\partial p_k^{n+1}}{\partial x}} \\ \widehat{v_k^{n+1}} &= \widehat{\tilde{v}_k} - \frac{\Delta t}{\rho}\widehat{\frac{\partial p_k^{n+1}}{\partial y}} \\ \widehat{w_k^{n+1}} &= \widehat{\tilde{w}_k} - \frac{\Delta t}{\rho}\mathrm{i}k\widehat{p_k^{n+1}}\end{aligned} \tag{14}$$

在波数空间中更新速度后，将其反变换至物理空间，以计算下一个时间步的数值。随后，通过显式计算对流项和扩散项来求解温度方程。为了计算横流向导数 $\frac{\partial \psi}{\partial x}$、$\frac{\partial \psi}{\partial y}$ 等，我们采用一种无网格方法，利用多调和径向基函数（PHS-RBF）对散布数据中的变量进行插值。对于复杂几何，通常采用非结构化有限体积法 [90] 或有限元法。在这里，我们采用无网格方法，以充分利用其所提供的灵活性和精度。我们使用 GMSH 软件 [91]，将横截面离散为一组散布点，这些散布点由有限元网格的顶点生成。散布点集合不依赖任何底层网格，且点与点之间不通过边或单元相互连接。

无网格方法的第一步是在散布点之间进行插值。我们使用基于云的插值，其中利用多调和样条径向基函数，在一组邻近点构成的点云上对基点处的任意变量进行插值。任意变量 $s(\mathbf{x})$的插值形式为

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \phi(||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i}||_2) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i P_i(\boldsymbol{x}) \tag{15}$$

其中，$\phi(r) = r^{2a_1+1}$，$a_1 \in \mathbb{N}$ 为多调和样条径向基函数，m 为单项式的数量（P_i），其最高次数为 l；而（λ_i，γ_i）为 $q+m$ 系数。本研究采用 $a_1 = 1$。通过在 q 云点上对式（15）进行配点，可得到 q 个方程。为使线性方程组封闭而需要的 m 个附加方程，则作为多项式 [92]的约束条件施加：

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i P_j(\boldsymbol{x_i}) = 0 \quad \text{for } 1 \le j \le m \tag{16}$$

将这些方程写成矩阵向量形式，可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中，转置用上标 T，$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, ..., \lambda_q]^T$，$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, ..., \gamma_m]^T$，$\boldsymbol{s} = [s(\boldsymbol{x_1}) \ldots, \ s(\boldsymbol{x_q})]^T$表示，$\mathbf{0}$ 为零向量。子矩阵 $\boldsymbol{P}$和 $\boldsymbol{\Phi}$ 的维数分别为 $q \times m$ 和 $q \times q$。

设 $(l = 2)$ 为附加多项式的次数，问题的维数为 $(d = 2)$，共有 $m = \binom{l+d}{l} = 6$ 个多项式项，表示为 $[1, x, y, x^2, xy, y^2]$。微分算子可以

可通过对径向基函数和多项式求导得到。

$$\mathcal{L}[s(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathcal{L}[\phi(||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i}||_{\mathbf{2}})] + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathcal{L}[P_i(\boldsymbol{x})] \tag{18}$$

将方程（18）应用于该区域中的所有点，可得到由方程（19）给出的矩形矩阵向量系统。

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{s}] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\boldsymbol{\Phi}] & \mathcal{L}[\boldsymbol{P}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \tag{19}$$

其中， $\mathcal{L}[\boldsymbol{P}]$ 和 $\mathcal{L}[\boldsymbol{\Phi}]$ 分别是大小为 $q \times m$ 和 $q \times q$ 的矩阵。将方程（17）代入方程中可得：

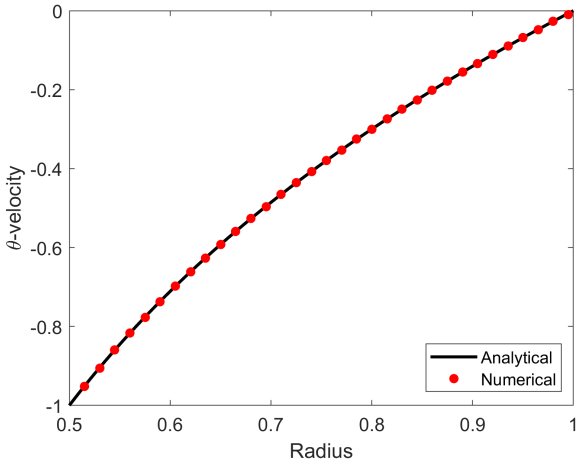
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\boldsymbol{s}] &= \left(\begin{bmatrix} \mathcal{L}[\boldsymbol{\Phi}] & \mathcal{L}[\boldsymbol{P}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{B_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{B_1}][\boldsymbol{s}] + [\boldsymbol{B_2}][\mathbf{0}] = [\boldsymbol{B_1}][\boldsymbol{s}] \end{aligned} \tag{20}$$

如果离散值已知，则可以计算系数（λ，γ），进而可以计算函数在插值区域内任意位置处的值。或者，如果 $\mathcal{L}[\boldsymbol{s}]$ 满足控制方程，则可以计算任意位置处 s（x）的值。在当前算法中，首先在波数空间中计算所有横截面点和所有波数对应的中间动量速度。由于这是一个显式步骤，因此只需进行更新。随后同样在波数空间中隐式求解压力泊松方程。我们使用eigen库中的BiCGSTAB算法 [93] 求解所需波数对应的隐式离散压力泊松方程。将速度更新为无散后，再将其变换到物理空间，并开始新的时间步。时间推进持续进行，直到达到稳态或达到指定时间为止。该算法应用于椭圆外圆柱中的泰勒-库埃特问题将在下面各节中介绍。有关二维问题无网格方法的更多细节，请参见 [83, 84, 86, 94]。

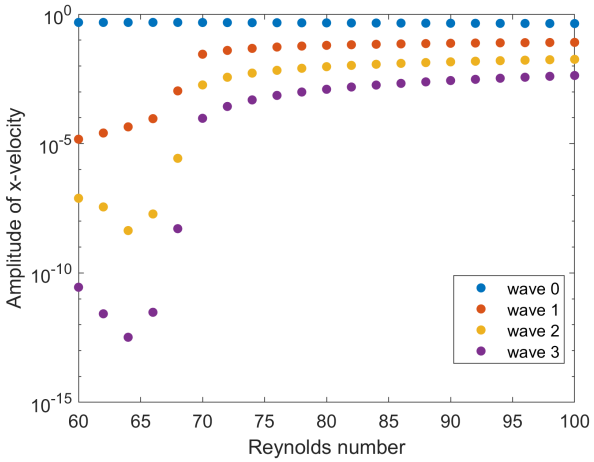
3. 验证与网格无关性

上述数值算法已在开源 C++ 代码 Mem- Phys [95] 中实现，并经过正确性检验。该计算机代码在多种二维流动中进行了验证，这些流动在轴向上仅具有零阶波数，包括图2a所示的亚临界圆柱库埃特流。随后，通过验证该代码能够重现同心环隙中的轴对称泰勒-库埃特流，进一步检验了其正确性。将流动模式以及内圆柱上的扭矩与 Fasel 和 Booz [96]的数据进行了比较。此外，还将泰勒涡开始出现时的临界雷诺数范围缩小至68–70（图2b至图2d），这与 Fasel 和 Booz [96]给出的69.19这一数值非常吻合。图2b绘出了在雷诺数为60至.....的范围内，前四个傅里叶模态的 x 方向速度在整个区域上的平均振幅。

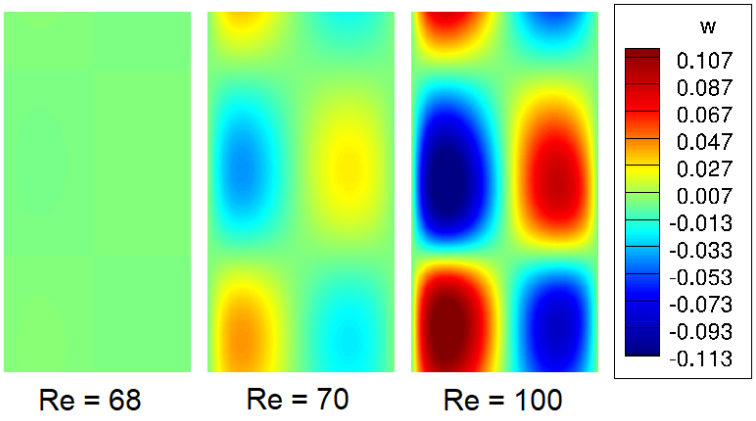
100.



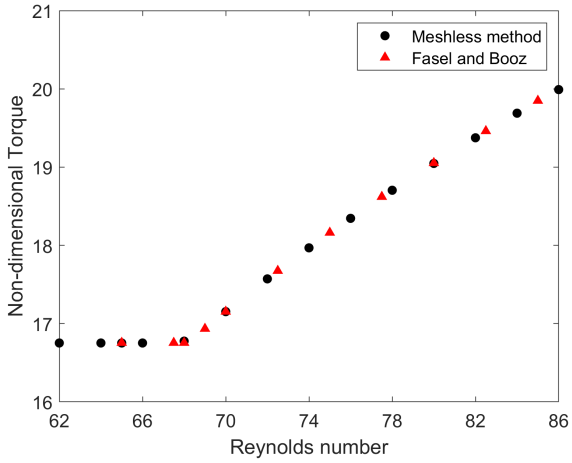
(a)



(b)



(c)



(d)

图2：用于验证泰勒-库埃特装置亚临界和超临界阶段代码的图表与等值线：a）在轴向位置 $z = 0.5$ 处，沿半径方向对比圆柱库埃特流数据的解析解和数值解（亚临界阶段）；b）多个雷诺数下 x 方向速度的四个区域平均振幅图。圆柱库埃特流向泰勒-库埃特流的转变发生在雷诺数 68 至 70 之间；c）超临界雷诺数附近 $r - z$ 平面上的轴向速度等值线；d）圆形泰勒-库埃特流的无量纲扭矩与雷诺数关系图，并与 Fasel 和 Booz [96] 的结果进行验证

随后，通过首先确定精度所需的散布点数量，以及轴向所需的波模态数量，以解析场变量的流向变化，开始进行椭圆形腔体内旋转内圆柱三维流动的计算。这些

网格无关性计算在 $Re = 300$ 下进行，该值略低于流动开始变得非定常时的雷诺数。我们在横截面上使用三组不同的散布点。在周期方向上，我们考虑二十五个模态（$N = 25$），并研究能量含量随波数的变化。散布点的横截面分布（图 3）以相邻散布点之间的平均点间距来表征。随后，在八个离散位置（$r = 0.6$、0.7、0.8、0.9 和 $\theta = 0°$、90°）处，绘制三种速度对应的每个波数的能量含量。在图 4 中，我们展示了四幅具有代表性的速度振幅随流向波数变化的曲线图。可以看出，0.0158 的中等点间距所得数值与 ≈ 0.008 的结果非常接近。此外，当波数大于 15 时，速度振幅降至 1.0e-5 以下。因此，我们得出结论，点间距为 ≈ 0.0158 且包含 15 个波数时，所得结果已足够准确，同时计算成本较低。当变量中的时间变化减小并保持在 1.0e-5 以下时，流动被认为是稳态且已收敛。

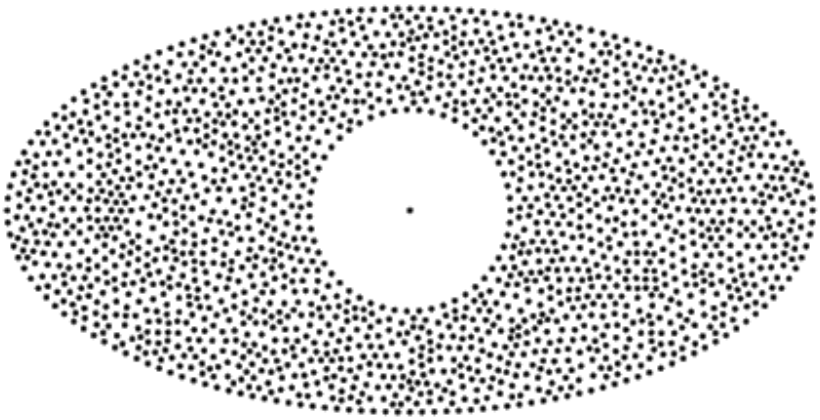


图 3：1874 个采样点的分布

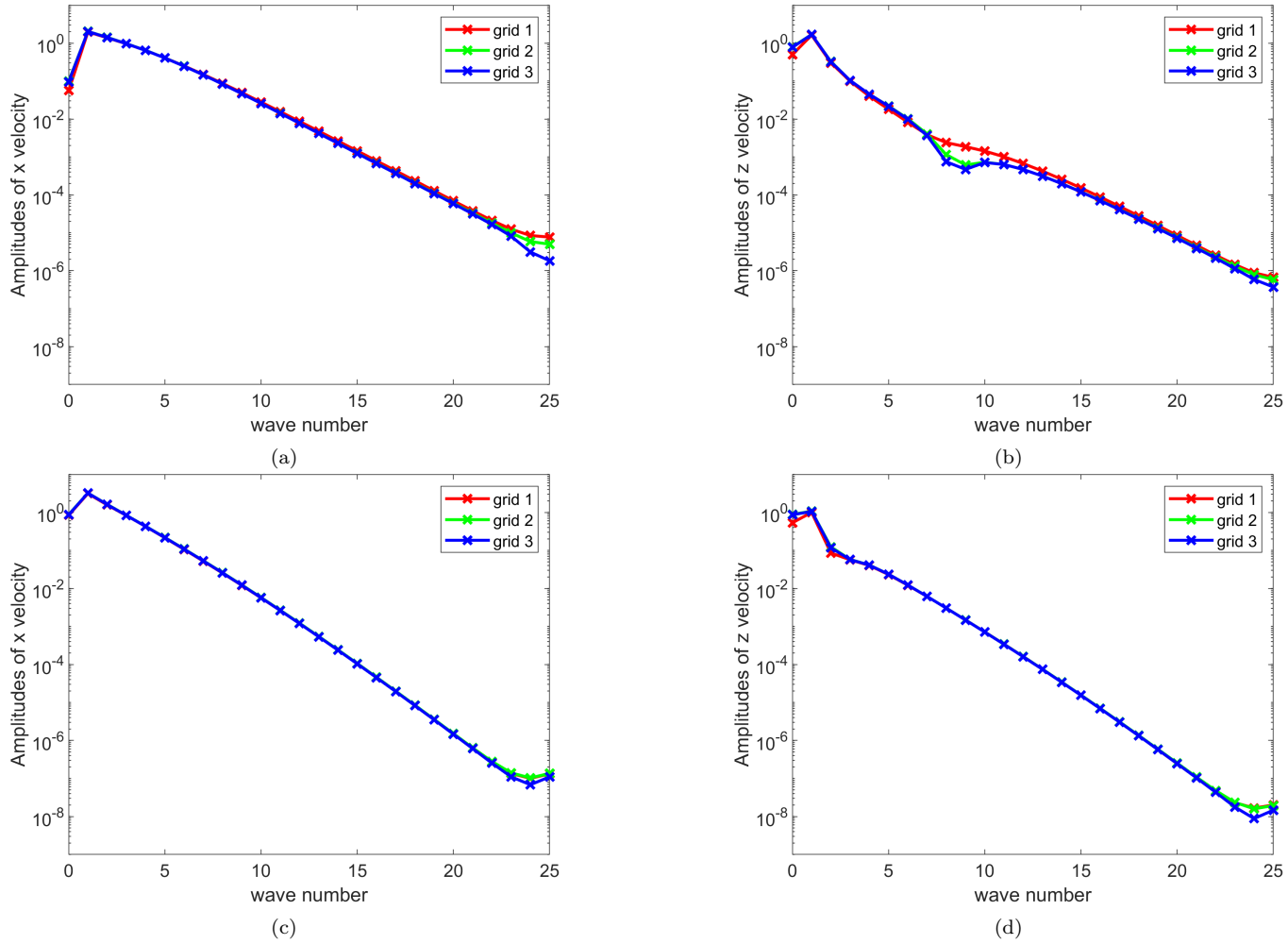


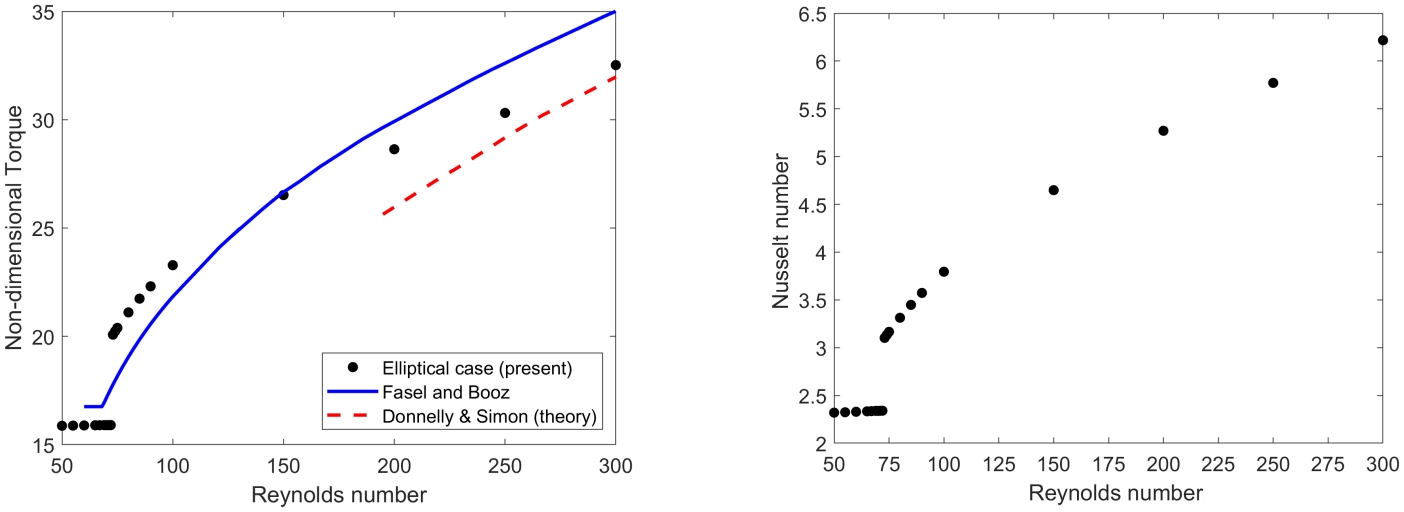
图4：a) $\theta = 0°$ $r = 0.7$下x方向速度的振幅与波数的关系；b) $\theta = 0°$ $r = 0.7$下z方向速度的振幅与波数的关系；c) $\theta = 0°$ $r = 0.9$下x方向速度的振幅与波数的关系；以及 d) $\theta = 0°$ $r = 0.9$下z方向速度的振幅与波数的关系；

4. 同心内圆柱的结果

4.1. 扭矩和传热率

图 5a 和图 5b 展示了无量纲扭矩和努塞尔数随雷诺数的变化。无量纲扭矩和传热的计算方法分别见式 (4) 和式 (5)。从图 5a 可以看出，正如预期的那样，亚临界雷诺数下无量纲扭矩保持恒定，而后随雷诺数增加突然呈非线性增长。同样，从基础库埃特流转变为泰勒-库埃特流时，努塞尔数也会跃升。之前已在 [82] 中展示了基础二维流动，其中记录了不同流动条件和几何参数下的若干流动模式。一旦转变为超临界状态，努塞尔数和无量纲扭矩均随雷诺数单调增加。转变发生在雷诺数 70 至 75 之间，但本研究未精确确定其数值。图 6 绘出了所计算雷诺数下前五个振荡模态和零阶模态的振幅。可以看出，当雷诺数处于 70 至 75 之间时，振荡模态的振幅会突然跃升至中等数值，这与扭矩和努塞尔数的变化相符。图 6 中的振幅值未经缩放。

然而，要观察分岔，并不需要实际振幅。我们再次观察到，第一次分岔发生在雷诺数 70 至 75 之间，流动由库埃特流转变为泰勒-库埃特流。



(a) (b)

图5：a）本研究椭圆外圆筒情形下无量纲扭矩随雷诺数的变化，并与 Donnelly 和 Simon [97]，以及 Fasel 和 Booz [96] 的简单泰勒-库埃特流结果进行比较；b）本研究情形下努塞尔数随雷诺数的变化

4.2. 流线图

在图7至图10中，我们展示了雷诺数从 70 逐步增至 300 时的流线（可以看到，在所有这些雷诺数下，流动都是稳定的）。低于临界雷诺数时，流线沿半长轴向外流动，沿半短轴向内流动。这是由于流动挤入较小间隙时受到压缩，随后进入较大横截面积时膨胀所致。向内的流线反映了旋转圆筒引起的主旋转流剪切所形成的次级涡旋。在 Re $=50$、60 和 70 时，我们观察到相同的流动模式。泰勒涡首次出现时的雷诺数为 75，不过它们可能在略低的雷诺数下就已形成。在 Re $=75$ 及更高雷诺数下，$(r-z)$ 平面内的流线显示出泰勒胞的形成。与同心圆柱的情形一样，会形成一对周期性排列的反向旋转涡，其高度等于较小间隙（短轴处）的宽度。然而，这些涡旋不再是轴对称的（如圆柱情形），而是在椭圆的长轴与短轴之间膨胀和收缩。可以看出，在半长轴处，涡旋占据整个间隙，涡旋高度为 0.5 个单位，宽度为 1.0 个单位。而在短轴方向上，涡胞形状更接近正方形，宽度和高度均为 0.5。由这些 $(r-z)$ 平面图可以清楚地看到，泰勒胞向较大间隙扩展。

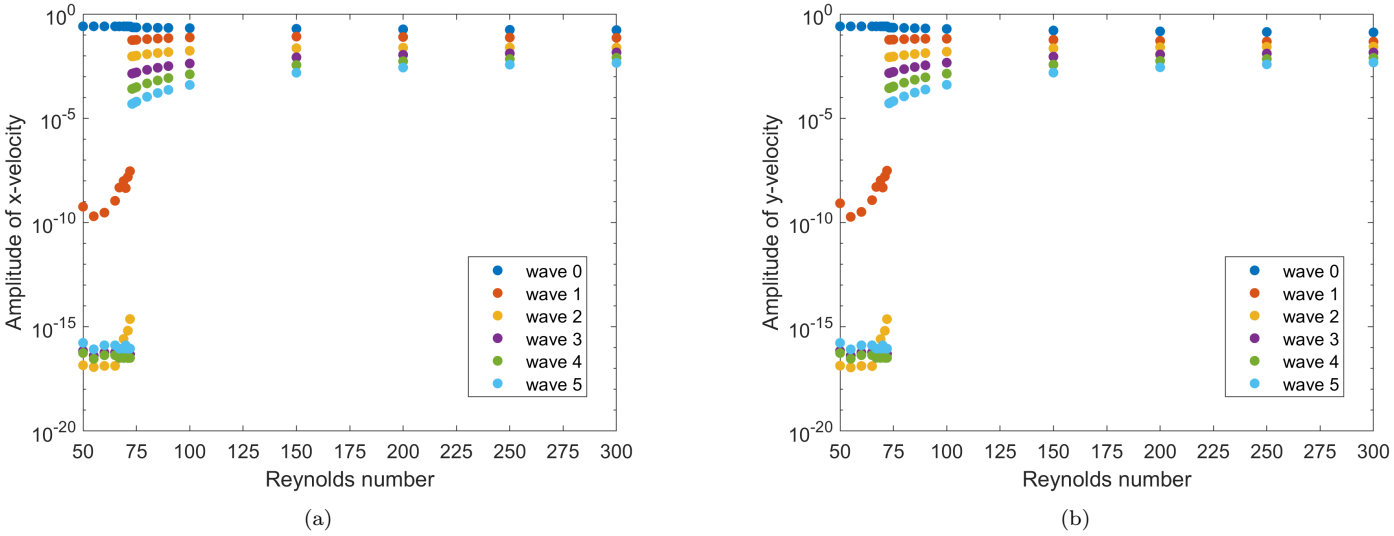


图 6：三种速度分量在整个区域内的前六个傅里叶模态振幅平均值随雷诺数的变化图：a) x 方向速度的平均振幅随雷诺数的变化；b) y 方向速度的平均振幅随雷诺数的变化；c) z 方向速度的平均振幅随雷诺数的变化

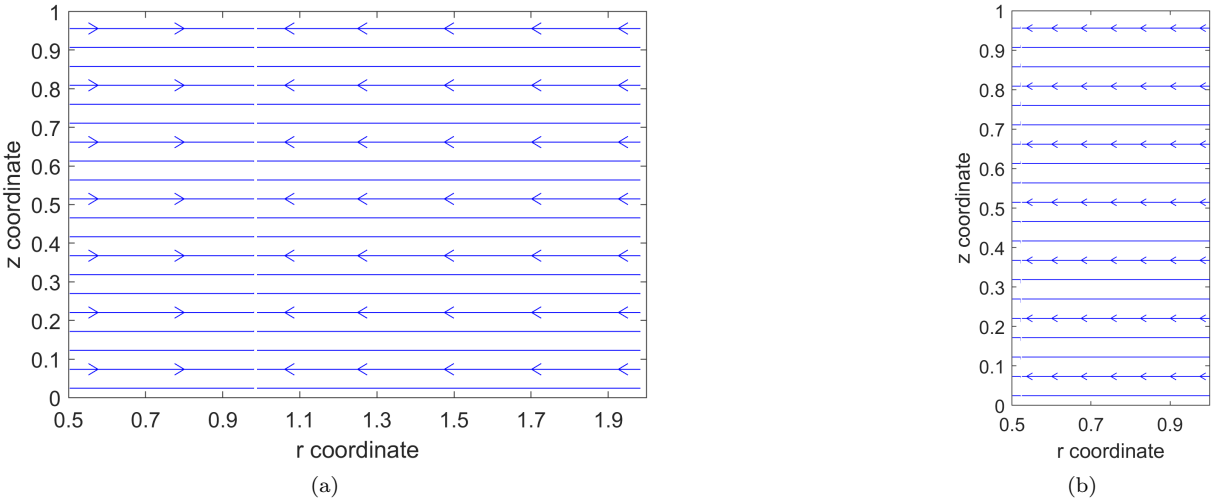
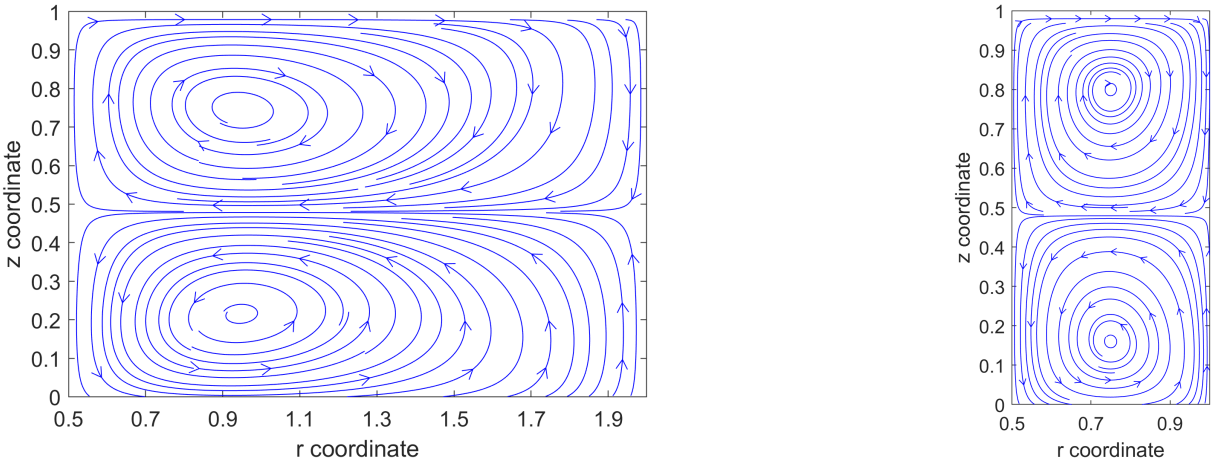
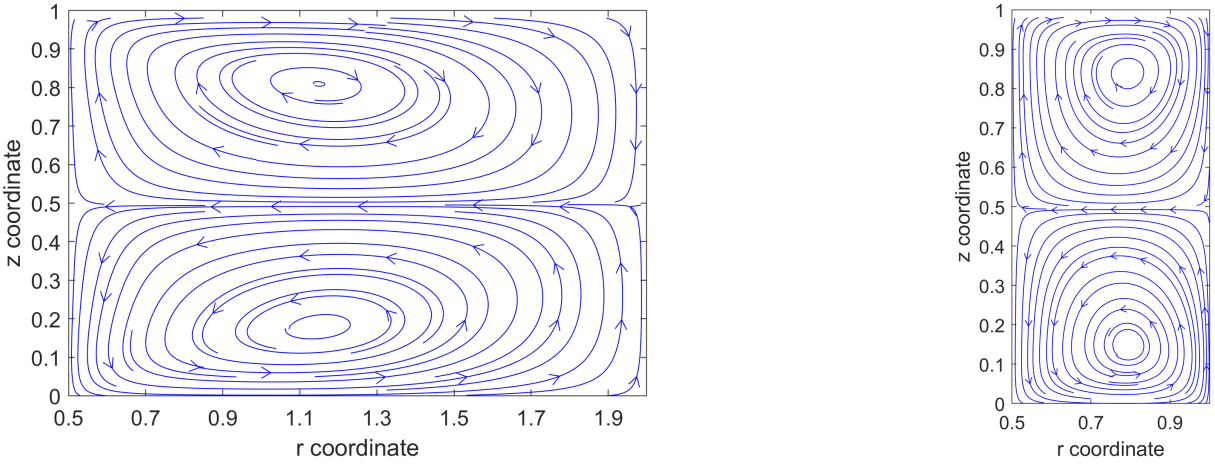


图 7：　沿以下方向截面的流线：a) 半长轴；b) 半短轴；对于雷诺数 $= 70$



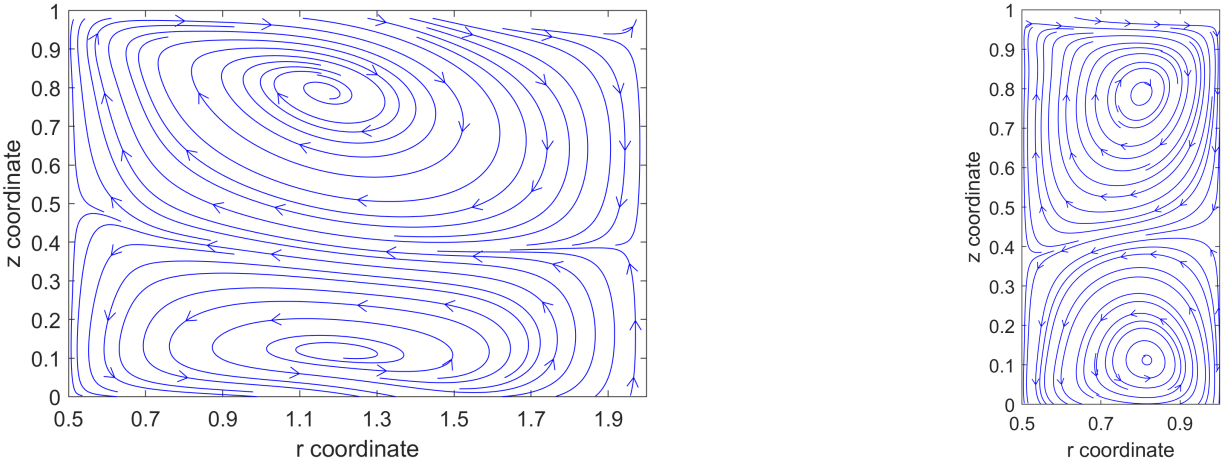
(a) (b)

图 8: 雷诺数为 $= 75$ 时，沿以下方向剖面中的流线：a）半长轴；b）半短轴



(a) (b)

图 9: 雷诺数为 $= 20$ 时，沿以下方向剖面中的流线：a）半长轴；b）半短轴 0



(a) (b)

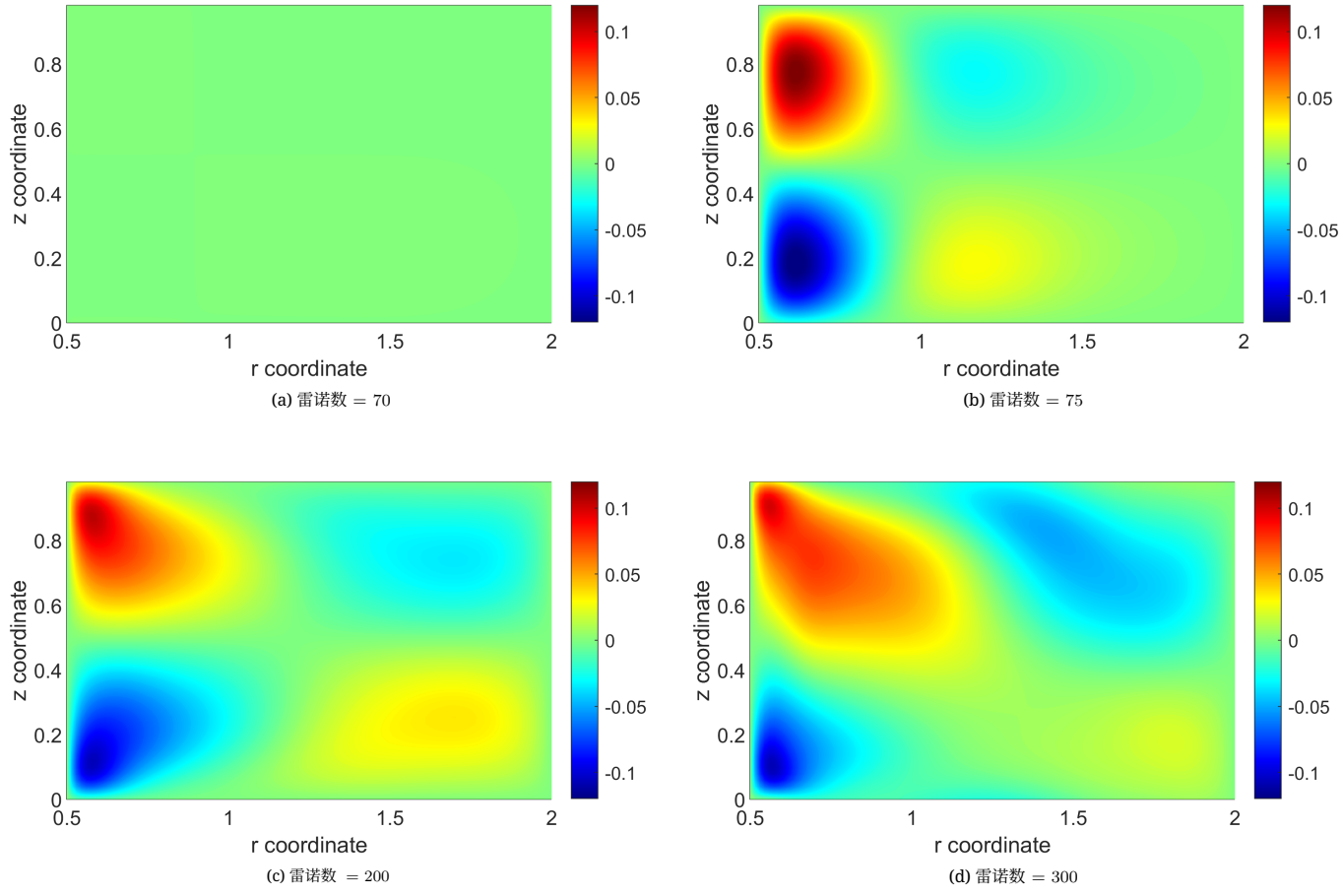
图 10: 雷诺数为 $= 30$时，沿以下方向剖面中的流线：a）半长轴；b）半短轴 0

4.3. 轴向速度分布

4.3.1. r-z 平面中的轴向速度等值线

图11和图12展示了在切过长轴和短轴的 $(r - z)$ 平面上的轴向速度等值线，涵盖了所计算的多个雷诺数中的四个。图中显示的结构与

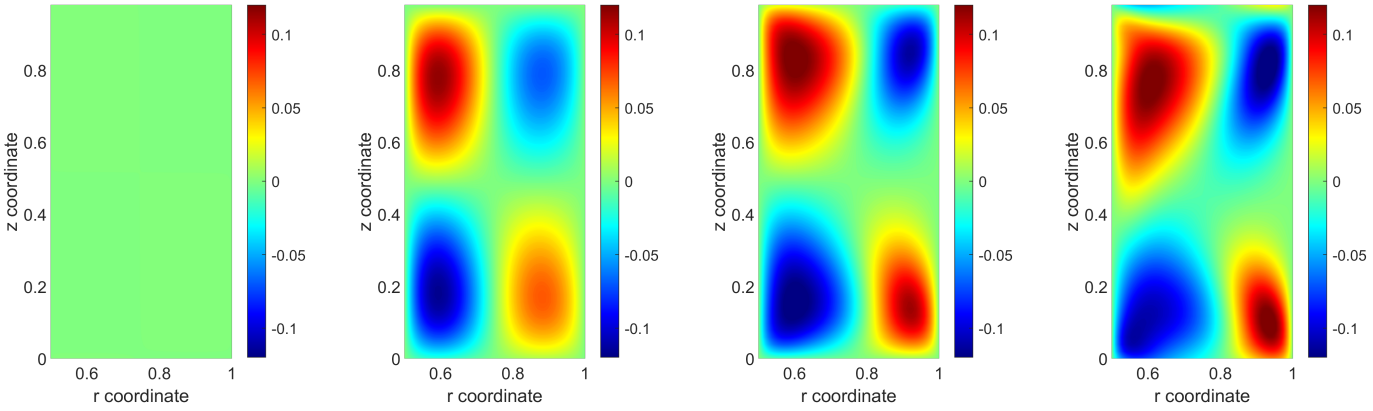
流线图所示的泰勒涡胞相同，但此处显示的是轴向速度的大小。这对涡旋呈现了流动的向上和向下运动。如前所述，雷诺数低于75时不存在轴向流。雷诺数为 Re $= 75$ 时，我们首次观察到泰勒胞的出现。这个雷诺数值接近同心圆柱中观察到的相应数值。我们注意到，沿长轴方向，泰勒胞中心约位于 r $= 0.95$ 处。向下的轴向流沿径向流动，抵达外壁并占据整个间隙。我们只看到一个沿长轴方向径向拉长的泰勒胞。在外壁处，径向流转而向上流动，并流向内壁。顺时针旋转涡胞的流动模式则恰好相反。由于流动占据了外壁区域，流动面积增大，轴向速度随之降低。随着雷诺数增加，泰勒胞略有变形，胞中心向外壁移动（$r \approx 1.1$）。随着雷诺数进一步增加，涡胞持续变形；在 $Re = 300$ 时，流动转变为复杂结构。不过，我们观察到此雷诺数下流动仍然稳定。图12展示了切过椭圆短轴的平面上的结果。此处间隙仅为 0.5，涡胞结构与圆柱情形相似。即使在 $Re = 300$ 时，涡胞仍然结构良好。请注意，雷诺数以短轴处的间隙为基准定义，因此以长轴处间隙定义的雷诺数将大三倍。因此，长轴间隙中的流动可能已转变为某种螺旋涡。



(a) 雷诺数 $= 70$　(b) 雷诺数 $= 75$

(c) 雷诺数 $= 200$　(d) 雷诺数 $= 300$

图11：椭圆长半轴所在平面内的轴向速度等值线

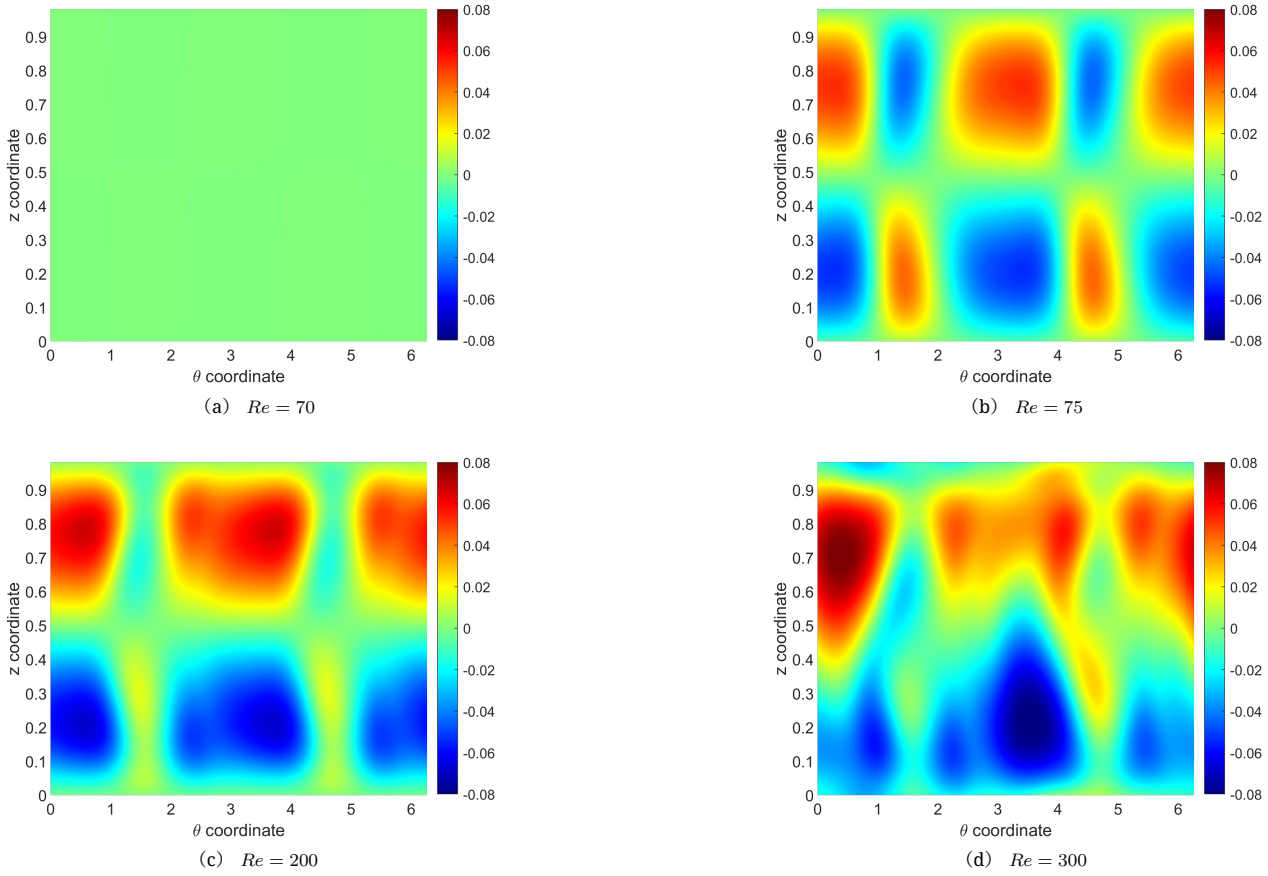


(a) 雷诺数 $= 70$ (b) 雷诺数 $= 75$ (c) 雷诺数 $= 200$ (d) 雷诺数 $= 300$

图12：椭圆短半轴所在平面上的轴向速度等值线

4.3.2. z-θ 平面上的轴向速度等值线： $r = 0.8$

图13显示了（$z - \theta$）平面中的轴向速度等值线。我们任意选取了0.8（$r_i = 0.5$、 $b = 1.0$和 $a = 2.0$）的半径，并绘制轴向速度等值线。对于 $Re = 75$，即超临界区域中考虑的第一个雷诺数，我们看到正速度和负速度交替分布的区域。这与圆柱情形中整个 θ 空间内所见的水平带状分布形成对比。这些交替区域是由于泰勒涡胞从大间隙移动到小间隙时涡旋中心发生偏移所致。我们绘制了 $r = 0.8$的等值线，这对应于大间隙中涡旋中心的左侧，在 $z = 0.5$ 上方为向上（正）速度，而在 $z = 0.5$附近下方为负轴向速度。然而，在小间隙中，涡旋中心向$r = 0.75$ （间隙中心）移动，因此在 $r = 0.8$处，可以看到上部区域中的向下流动以及下方区域中的向上流动。这仍然是一个单一的环形涡旋，其环形涡旋在大间隙和小间隙之间发生汇聚和发散。由于我们考虑的是恒定绝对半径，因此观察到了这些交替模式。对于 $Re = 100$ （此处未显示）和 $Re = 200$，也可看到相同的模式。对于 $Re = 300$，上述模式发生畸变，并伴随涡胞结构的破裂。如前所述，这可能是流动中非定常性的 onset 的前兆，尽管$Re = 300$ 处的流动最终收敛到了稳态。



（a） $Re = 70$　（b） $Re = 75$

（c） $Re = 200$　（d） $Re = 300$

图13：定半径平面中不同雷诺数下的 z 方向速度等值线，其中半径为 $r = 0.8$

4.3.3. r-θ 平面中的轴向速度等值线

图 15a、16a 和 17a 显示了三个恒定 z 平面（$r-\theta$）上的轴向速度等值线，适用于 Re =75。正如预期，泰勒涡胞关于垂直平面呈镜像对称，但关于水平平面呈反对称。 $Re = 200$ 的图（图 15b、16b 和 17b）显示出与 $Re = 75$ 类似的特征。不过，我们观察到内部同心流出现轻微变形，同时沿外壁的流动中出现了更长的“舌状结构”。随着雷诺数增至 300（图 15c、16c 和 17c），内部旋转流进一步变形，外侧舌状结构也发生变化。这些变形再次表明，流动在超过 $Re = 300$ 后即将出现非定常性。流动也失去了关于垂直（水平）坐标轴的对称性（镜像对称性）。

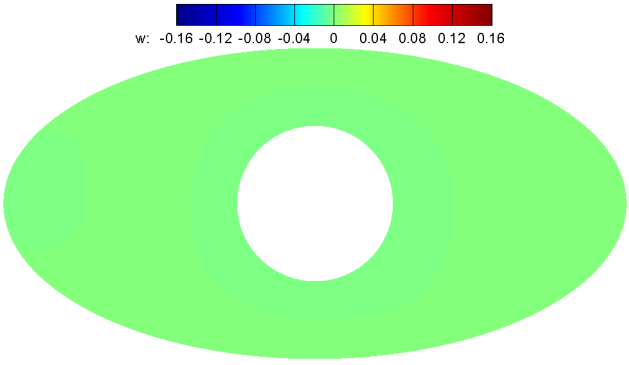
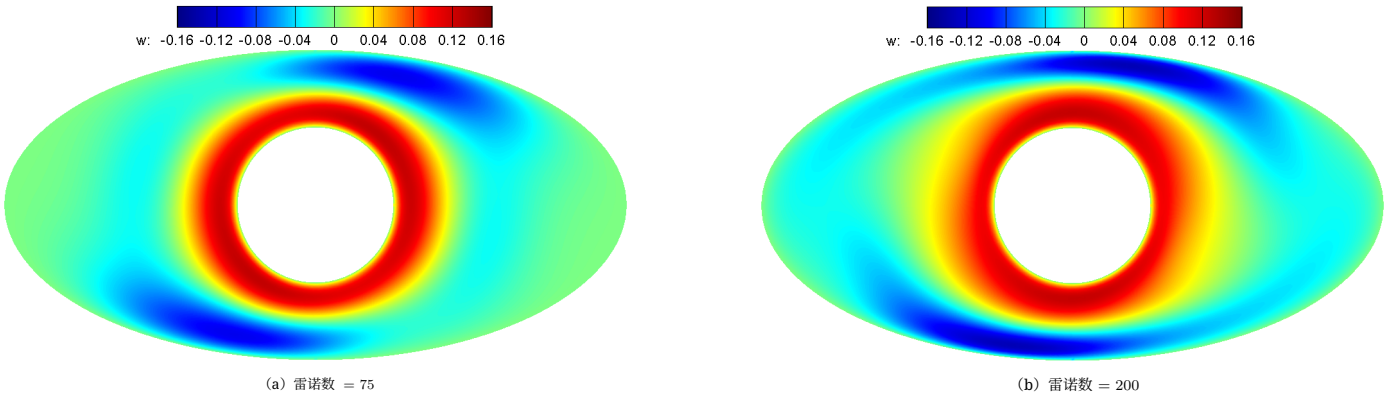
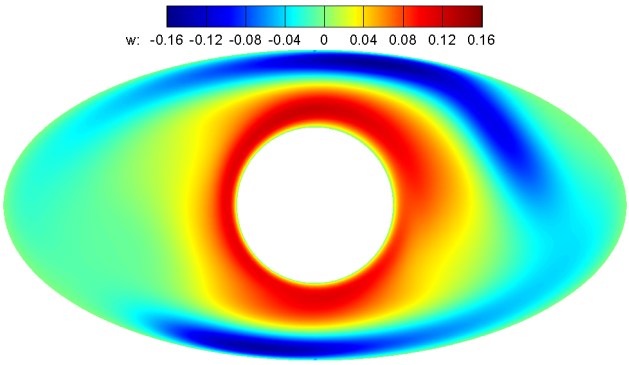


图 14：亚临界雷诺数为 70 时的轴向速度等值线

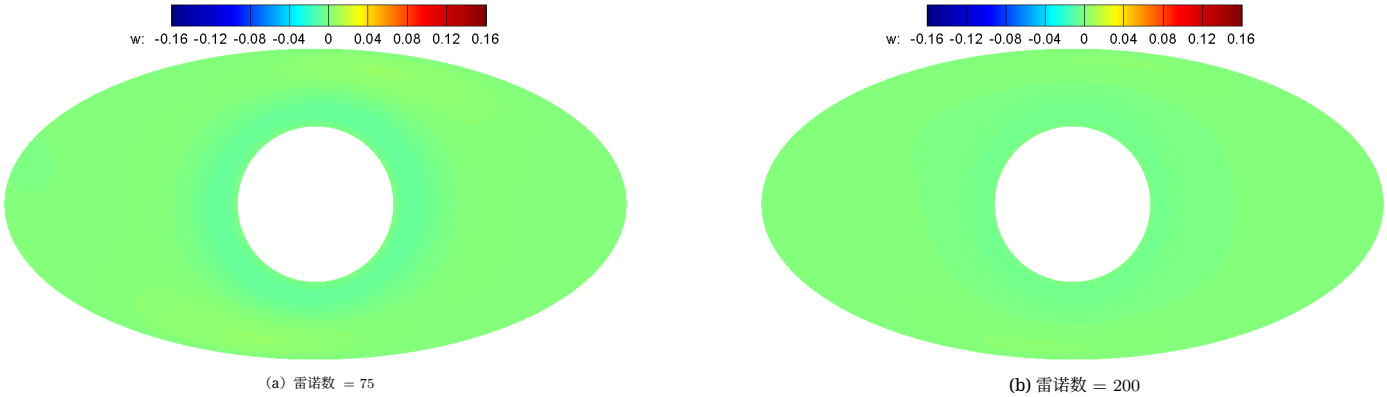


（a）雷诺数 = 75　　（b）雷诺数 = 200

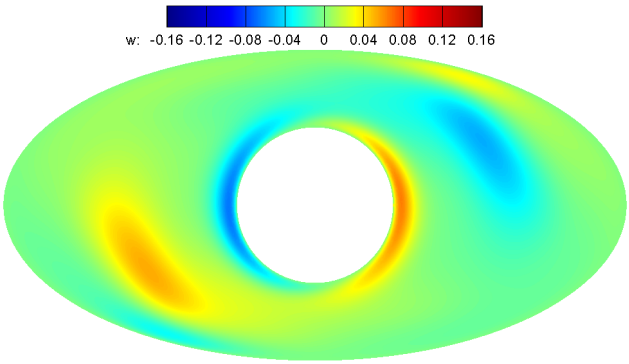


（c）雷诺数 = 300

图 15：中　　穿过超临界阶段顺时针旋转的泰勒胞中心的 d 截面

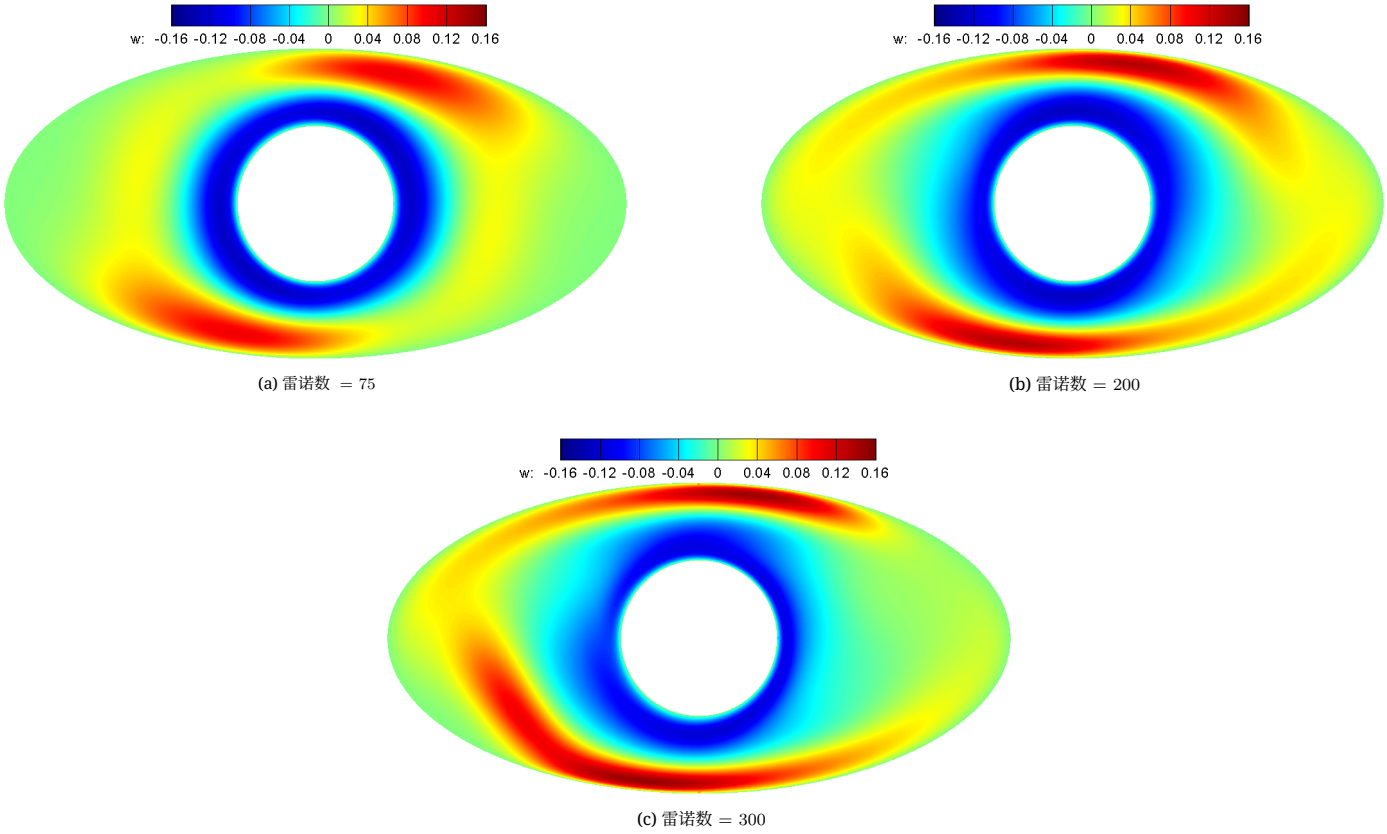


（a）雷诺数 = 75　　(b) 雷诺数 = 200



(c) 雷诺数 = 300

图 16：超临界阶段泰勒涡胞之间的截面



(a) 雷诺数 $= 75$

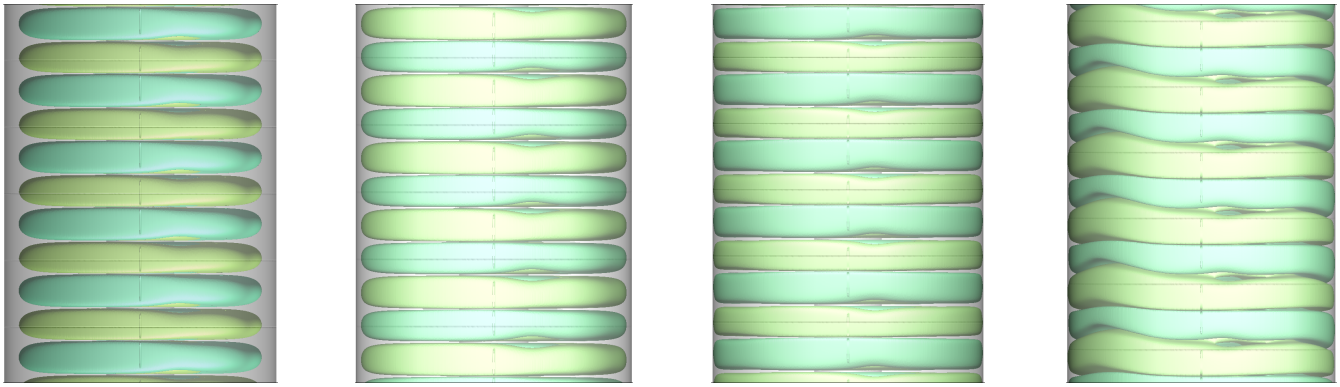
(b) 雷诺数 $= 200$

(c) 雷诺数 $= 300$

图 17：中截面　　穿过超临界阶段逆时针旋转的泰勒胞中心的 n

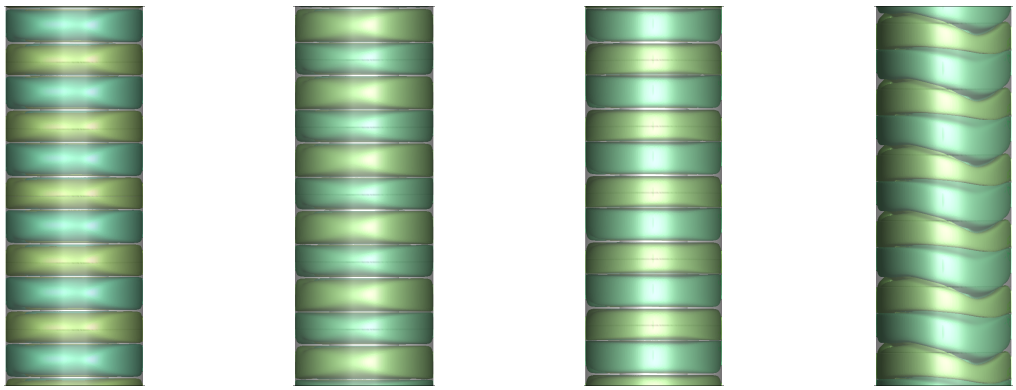
4.3.4. 轴向速度的等值面

图 18 和图 19 展示了不同超临界雷诺数下的轴向速度等值面。这些管状结构是对应两种不同速度的轴向速度等值面，分别为$+0.005$ 和 -0.005 。两者共同构成一个泰勒胞。随着雷诺数从 200 变为 300，泰勒胞似乎逐渐转变为波状结构。如图 19 所示，这种变化在短轴截面视图中更为明显。图 18 中可以看到，管状结构在穿过中间截面时略有收缩。该处正是流体离开压力较高的小间隙区域的位置。Fenstermacher 等人 [7] 观察到，在简单泰勒-库埃特流转变为湍流之前，会出现更高阶的不稳定性，表现为泰勒涡胞的振荡和扭曲。从泰勒涡旋开始的第一次转变是向波状涡流的转变，其特征是沿方位角方向呈波状。我们在椭圆形情形下观察到波状涡流的特征——扭曲和振荡；如雷诺数为 300 时的图 19d 所示。当雷诺数达到 350 时，流动由此变得非定常。本研究未模拟湍流情形。



(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图18：轴向速度等值面　从 $x-z$ 平面观察的 $w=\pm 0.005$（椭圆长轴截面视图）



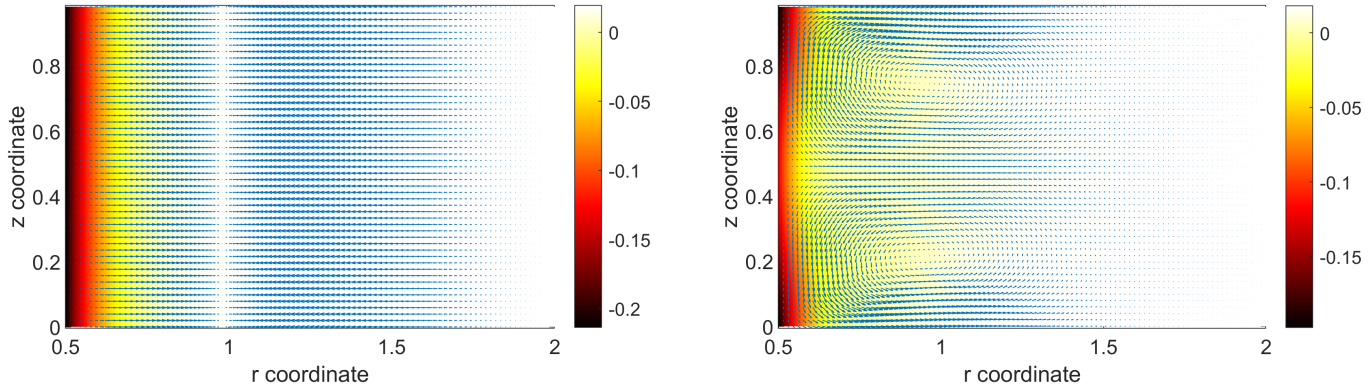
(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图 19：轴向速度等值面　从 $y-z$ 平面观察的 $w=\pm 0.005$（椭圆短轴截面视图）

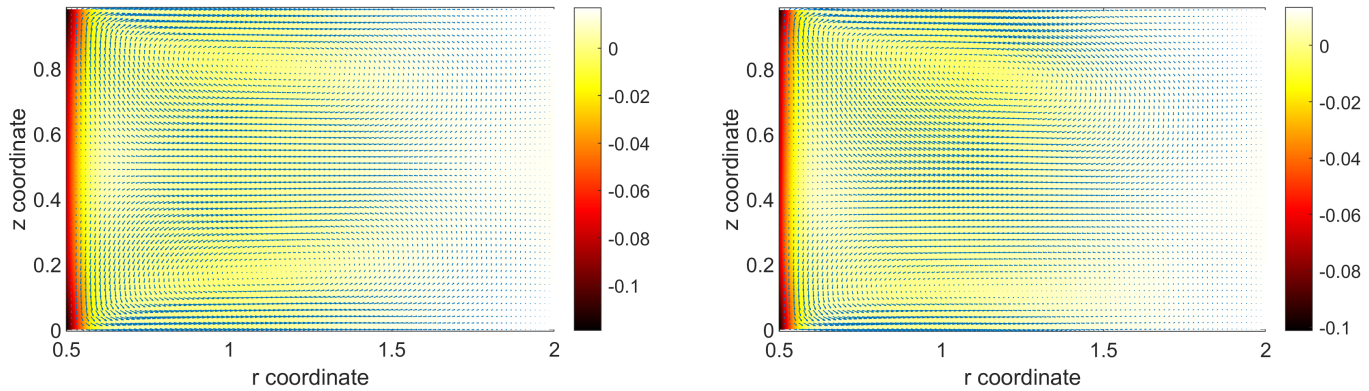
4.4. 压力分布

4.4.1. r-z 平面中的压力等值线

在亚临界雷诺数下，压力分布主要由旋转流动决定。对于亚临界雷诺数下的同心库埃特流，压力分布呈轴对称且为一维。然而，对于椭圆外圆筒情形，压力分布则呈非轴对称且为二维。随着雷诺数升至超临界值，与速度分布和流线相一致的三维压力分布逐渐形成。图 20 和图 21 展示了沿半长轴和半短轴的 $(r-z)$ 平面上的压力分布及速度矢量。在亚临界 $Re=70$下，由于不存在泰勒胞，压力仅随半径变化。当泰勒胞在 $Re=75$ 及更高值下形成时，内圆柱上的压力会发生畸变，并在上下涡旋的分界点处升高。较高的压力会使向下和向上流动的流体沿径向朝内圆柱移动。如轴向速度等值线所示，在 $Re=300$处压力等值线（以及速度矢量）开始发生畸变。在达到这样的 Re之前，半长轴（$r-z$）平面内的流动结构相当规整。即使在 $Re=300$，半短轴（$r-z$）平面内所示的压力分布也相对规整。较高压力出现在 z 附近，大约为 0.5，即向上流和向下流的交汇处。

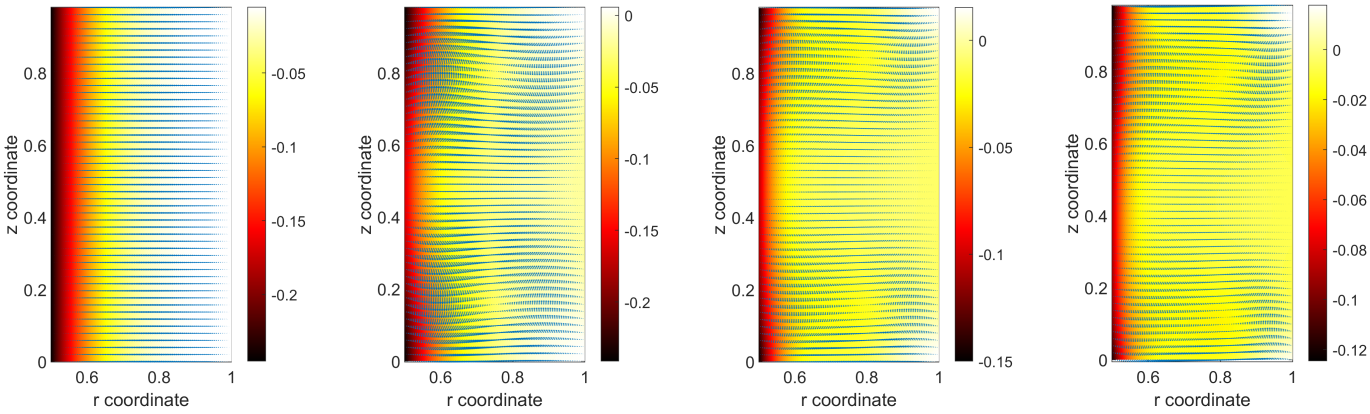


(a) 雷诺数 = 70　　(b) 雷诺数 = 75



(c) 雷诺数 = 200　　(d) 雷诺数 = 300

图20：椭圆长半轴所在平面上的压力图



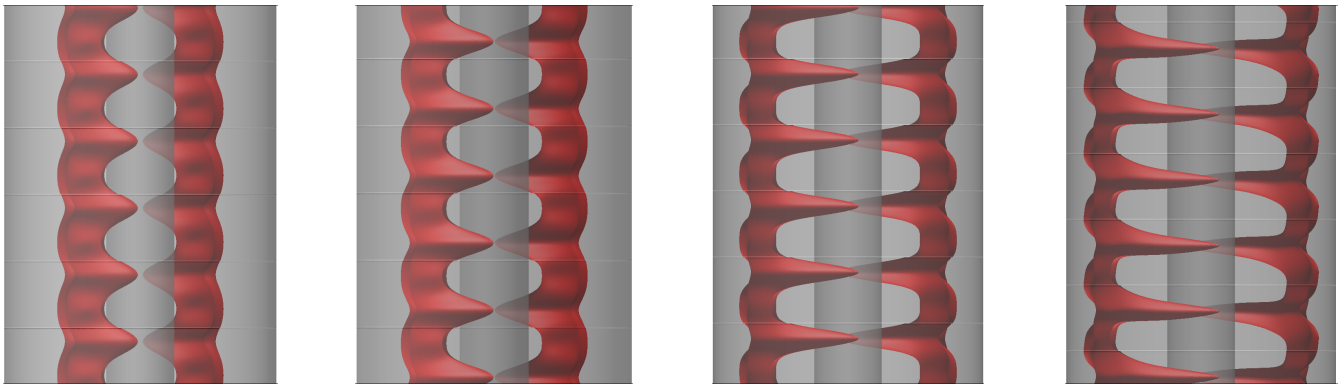
(a) 雷诺数 = 70　(b) 雷诺数 = 75　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图21：椭圆短半轴所在平面内的压力图

4.4.2. 压力等值面

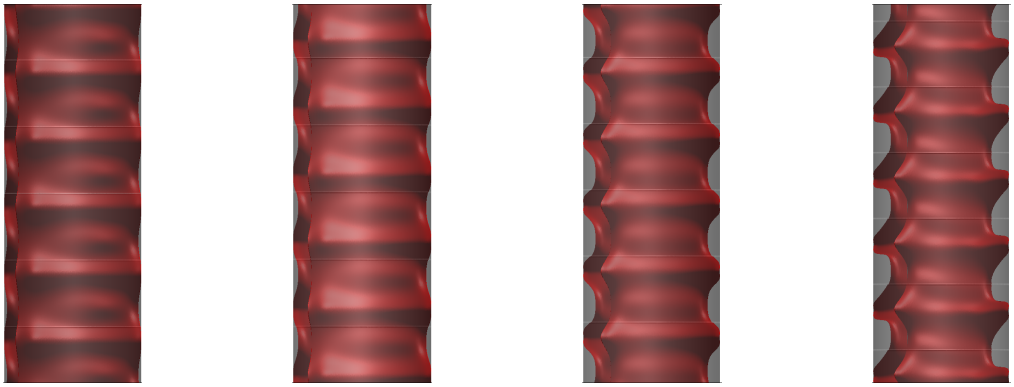
图22和图23从两个视角展示了压力大小为 0.01 时的压力等值面。压力表面的畸变是由泰勒胞造成的。等值面的波浪状形态表明，沿轴向存在交替分布的高压区和低压区。在泰勒涡胞之间的截面处可观察到高压区，而在泰勒涡胞的中部则为低压区。图22中压力等值面上的指状结构可见于流动接近椭圆短轴时形成。该区域的间隙最短，产生文丘里效应，使间隙中的流速增加，进而导致压力降低。这些指状结构的尖端位于两个反向旋转的泰勒涡胞之间的轴向截面处，

压力被观察到降至 0.01 以下。在 $Re = 300$ a 处，结构出现轻微变形，表面似乎略微倾斜于轴线，表明形成了螺旋流。



(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图2： $p = 0.01$的压力等值面，从 $x - z$ 平面观察（椭圆长轴截面视图）



(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图2 3： $p = 0.01$的压力等值面，从 $y - z$ 平面观察（椭圆短轴截面视图）

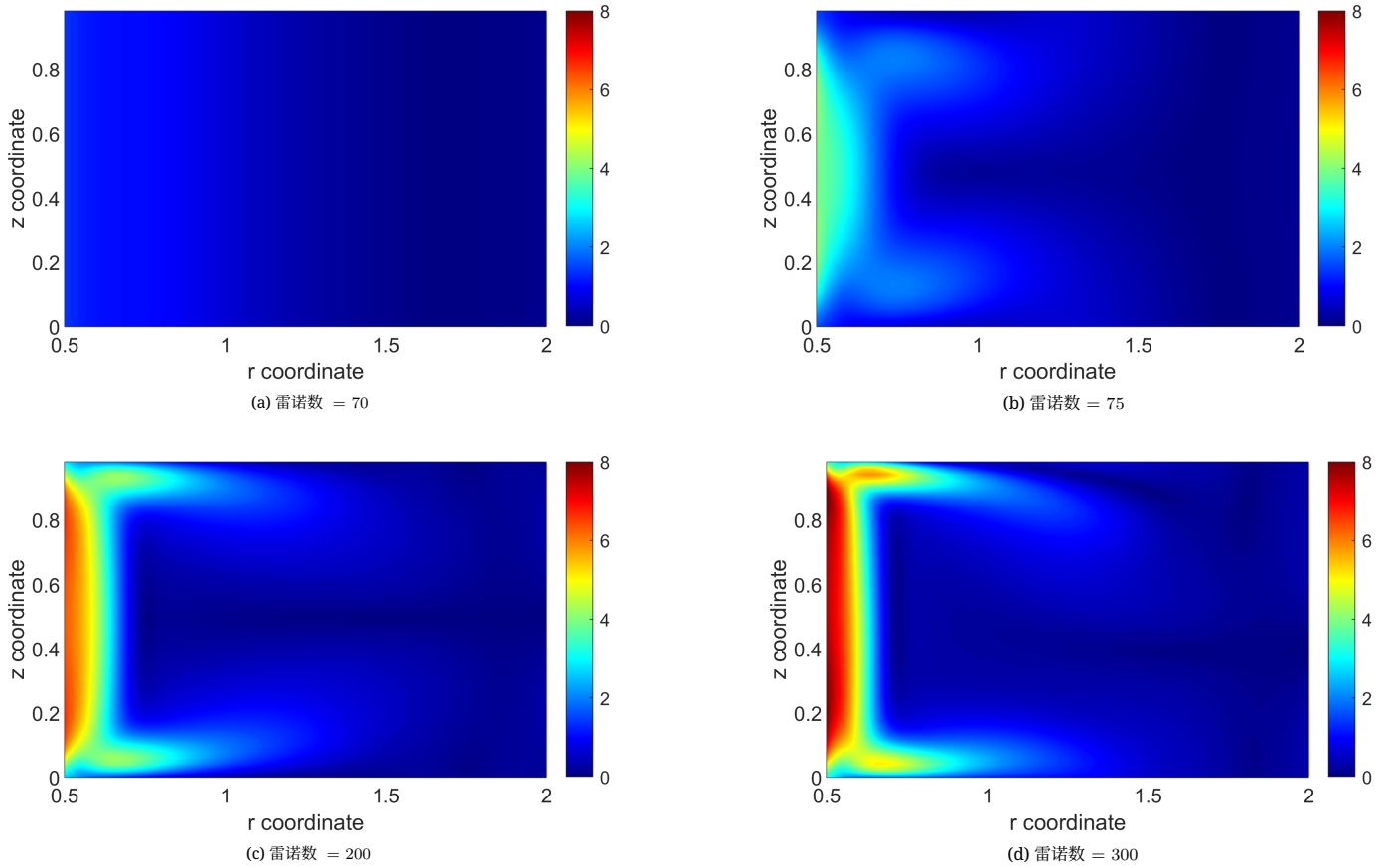
4.5. 涡量分布

涡量 $\boldsymbol{\eta}$定义为速度矢量（$\nabla \times \mathbf{u}$）的旋度，其分量沿 x、 y、和 z 方向。它衡量流体微元沿局部轴线的旋转程度。涡量矢量的大小衡量流体局部旋转的强度。以下小节将展示不同平面上的涡量大小等值线以及涡量大小的等值面。

4.5.1. r-z 平面中的涡量大小等值线

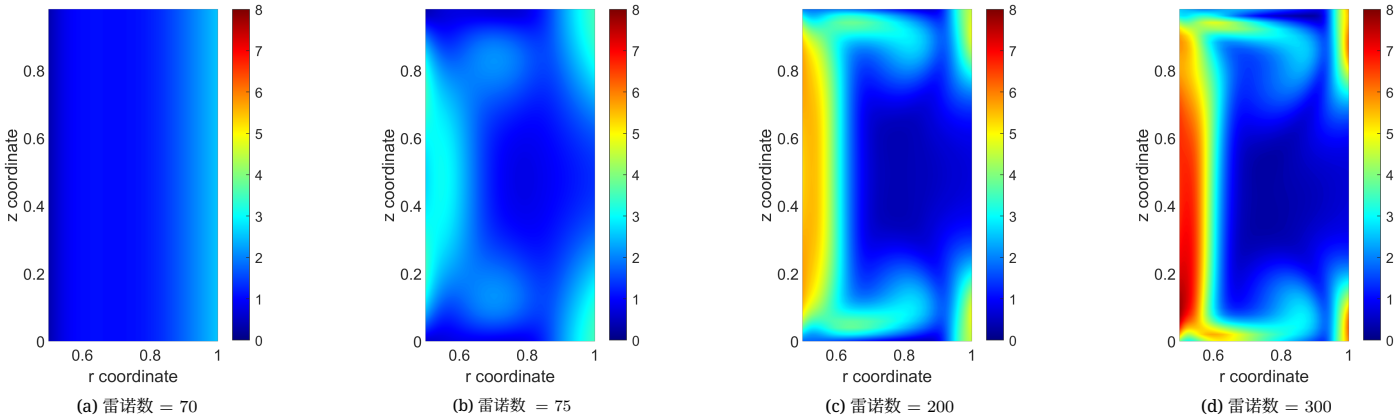
在亚临界 Re下，涡量仅由 $x - y$ 平面内的运动产生。由于横截面为椭圆形，因此沿长轴和短轴方向的分布存在差异。在图24和图25中，我们绘制了分别对应于长轴和短轴的两个 $r - z$ 平面内的涡量大小等值线。在亚临界 Re 为70时，涡量非常小。然而，在 $Re = 75$下，由于泰勒涡胞的形成，内壁附近（$r = 0.5$）的涡量因剪切分量 $\frac{\partial w}{\partial r}$ 而增大。随着雷诺数的增加，涡胞逐渐增强，涡量也随之增大。尽管这些涡胞沿相反方向旋转，但由于我们绘制的是涡量大小，因此可以看到其关于 $z = 0.5$呈对称分布。在等值线的顶部和底部，我们可以看到涡量的“指状”结构，这是流动转向所产生的结果。

在泰勒涡胞的角落处。这些结构会随着雷诺数的增加而增强，在 $Re = 300$ 时，我们观察到一定程度的非对称性，这可能是螺旋流开始出现所致。在小间隙中，我们观察到了相同的特征，但对于 $Re = 300$，底部的涡量指状结构更为明显。这可能是因为大间隙中的螺旋涡在小间隙中重新排列，从而呈现出更接近轴对称的形态。



(a) 雷诺数 = 70　(b) 雷诺数 = 75　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图24：沿椭圆长半轴所在平面上的涡量大小等值线



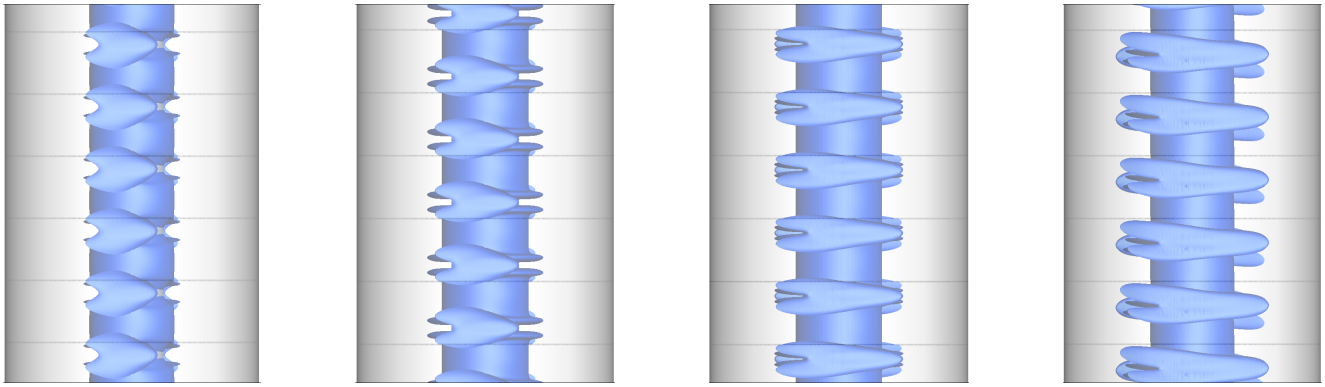
(a) 雷诺数 = 70　(b) 雷诺数 = 75　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图25：椭圆短半轴所在平面内的涡量大小等值线

4.5.2. 涡量大小等值面

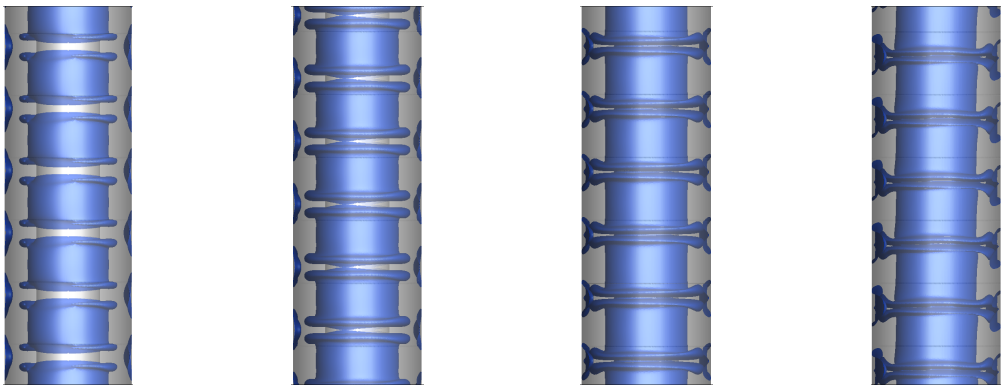
从大间隙和小间隙区域的等涡量表面可以获得更多视觉信息。我们展示了涡量大小为 2.0 个无量纲单位的表面。可以看出，涡量集中在内旋转圆柱附近，以及来自内外圆柱的回流中。在大间隙中可以看到 $Re = 300$ 处略微倾斜，涡旋向上倾斜。

涡量的倾斜强化了压力和轴向速度所呈现的相同模式。



(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图26： $\eta = 2.0$的涡量大小等值面，从 $x - z$ 平面观察（椭圆长轴截面视图）



(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图27： $\eta = 2.0$的涡量大小等值面，视角为 $y - z$ 平面（从椭圆短轴截面观察）

*4.6. Q*准则

Q准则是一种用于流体动力学的数学工具，可用于识别易发生湍流的区域。Q准则的值为正且较高时，有助于显示涡量和剪切较强的区域，此时涡拉伸占主导地位。与Q准则值为负、表示涡压缩的区域相比，这些区域更有可能出现湍流。Q准则常用于显示流体流动中湍流区域的位置和范围。Q的值定义为速度梯度张量的第二不变量，表示为：

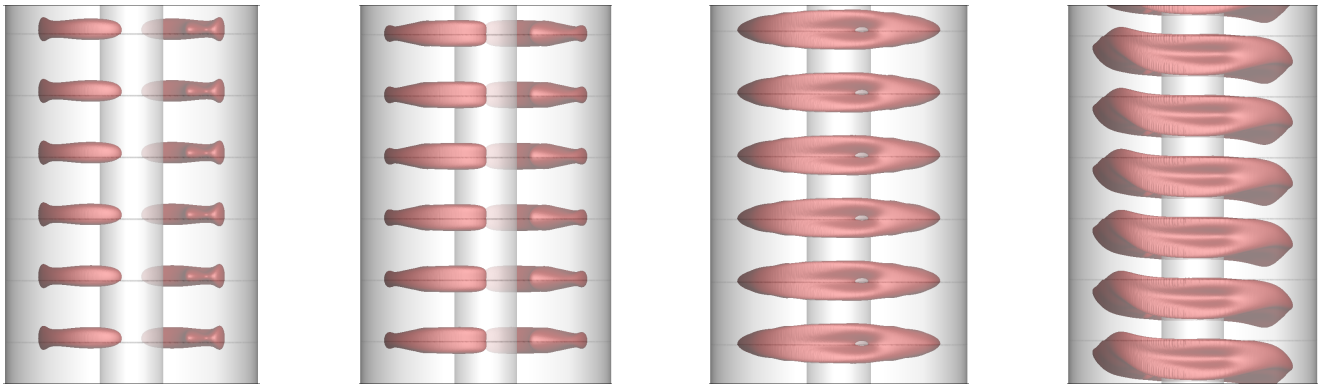
$$Q = \frac{1}{2}(||\Omega||^2 - ||S||^2) \tag{21}$$

其中， S 为应变率张量，定义为 $S = \frac{1}{2}\left[(\partial u_i/\partial x_j) + (\partial u_j/\partial x_i)\right]$ ， Ω 为旋转率或涡量张量，定义为 $\Omega = \frac{1}{2}\left[(\partial u_i/\partial x_j) - (\partial u_j/\partial x_i)\right]$ 。

*4.6.1. Q*准则等值面

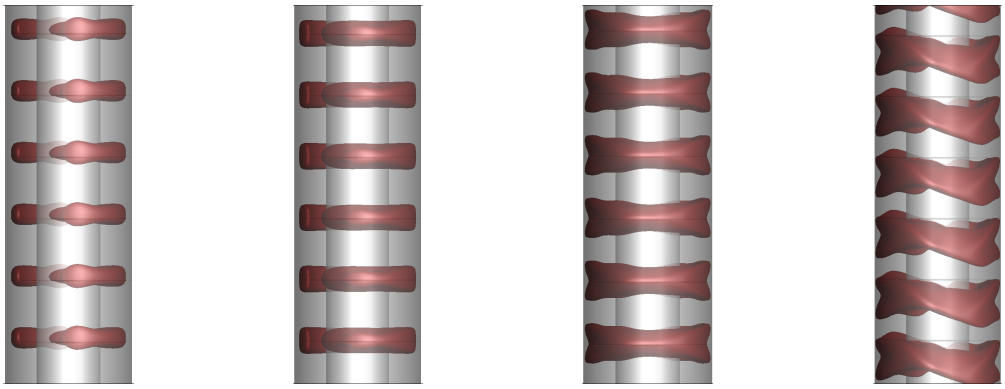
图 28 和图 29 中的 Q 判据等值面显示了流动趋于湍流的倾向。流动更容易转变为湍流的区域，位于两个反向旋转的泰勒涡胞之间。在 $Re = 300$ 处，波状泰勒涡胞形成，Q 等值面也呈倾斜的波状

形态。这实际上表明，泰勒涡胞之间轴向速度达到峰值的区域，是流动状态中最先趋于湍流的区域。



(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图28　：$Q = 1.0$的等值面，从 $x - z$ 平面观察（椭圆长轴截面视图　）



(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

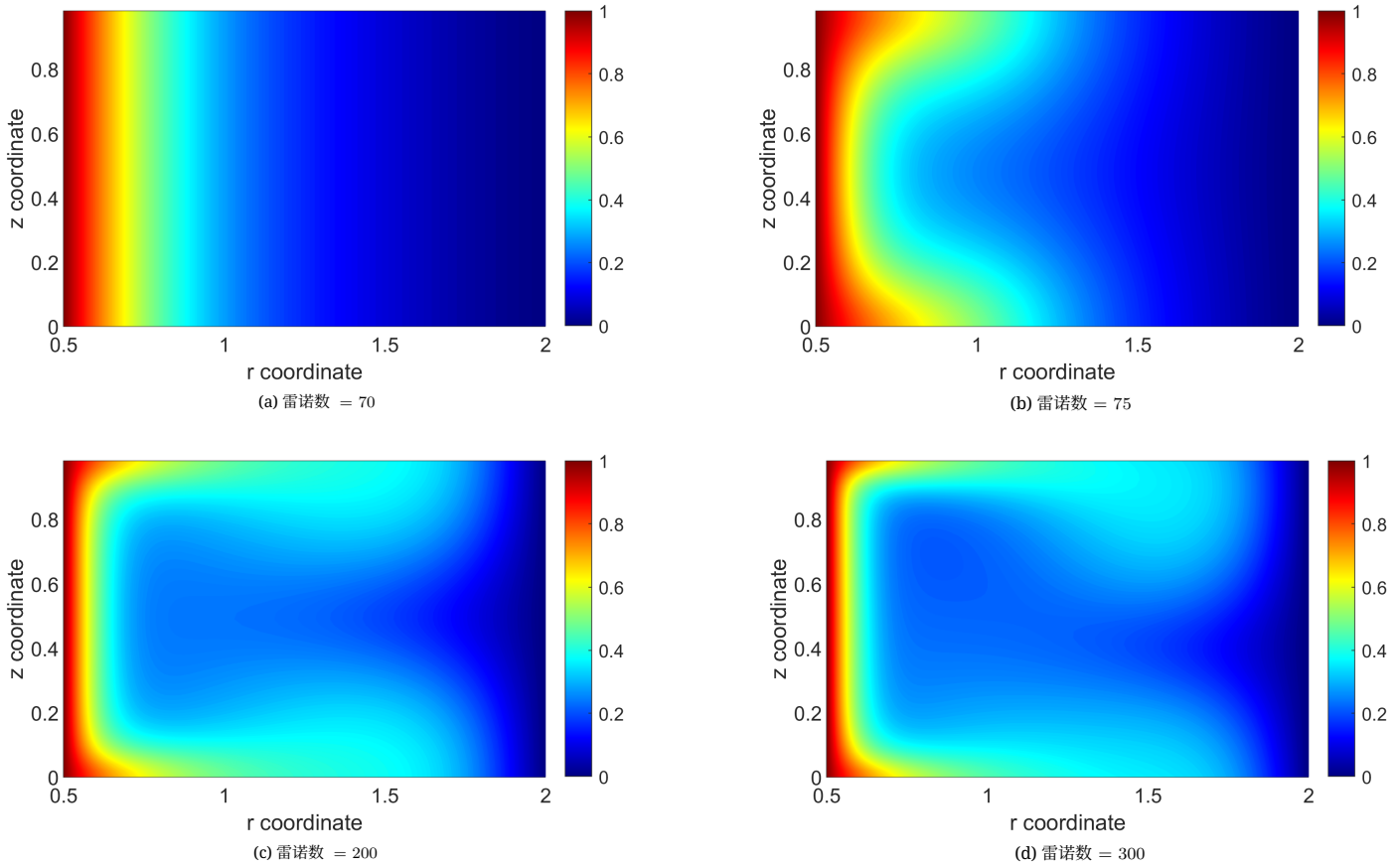
图29　：$Q = 1.0$的等值面，从 $y - z$ 平面观察（椭圆短轴截面视图　）

4.7. 温度分布

最后，我们给出内壁传热的结果。内壁加热至无量纲温度 1.0，外壁则维持在 $T = 0$。此前已在图 5b 中以努塞尔数的形式给出了传热率。

4.7.1. r-z 平面中的温度等值线

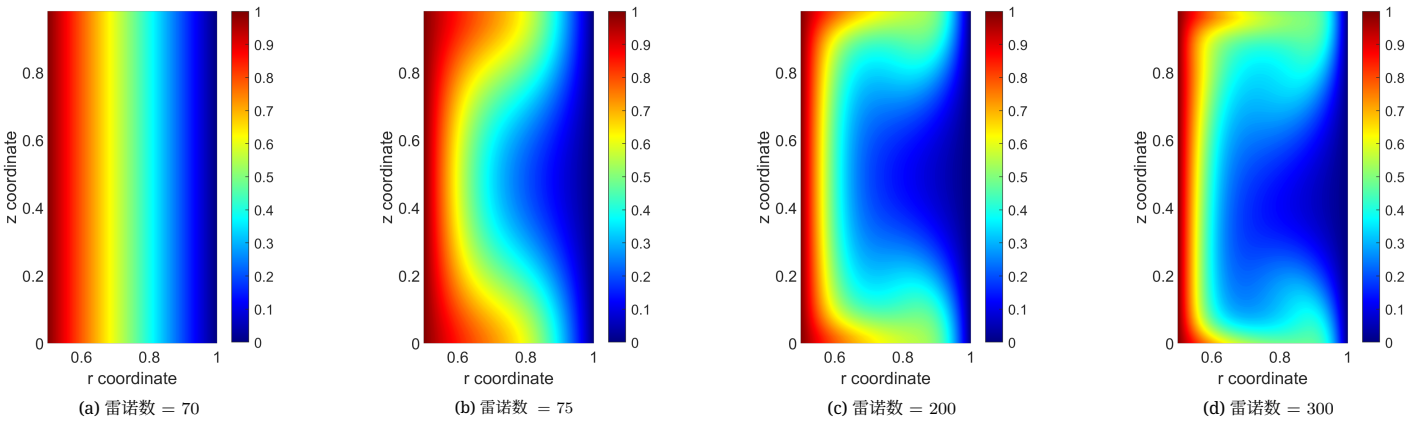
超临界雷诺数下的温度等值线显示了流体运动对泰勒涡胞的影响。顶部和底部环流中的热流体从内壁输送到外壁，而较冷的流体则从外壁返回内圆柱。随着环流强度增大，这种现象会随着雷诺数的增加而增强。在小间隙平面上也能观察到相同的模式。与我们讨论过的其他所有场变量类似，图 30 和图 31 所示的等值线在雷诺数低于 300 时关于平面 $z = 0.5$ 对称。雷诺数为 300 时出现的对称性丧失，是由于此流态下泰勒涡胞具有波动特性。



(a) 雷诺数 = 70　(b) 雷诺数 = 75

(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图 30：沿椭圆长半轴所在平面的温度等值线

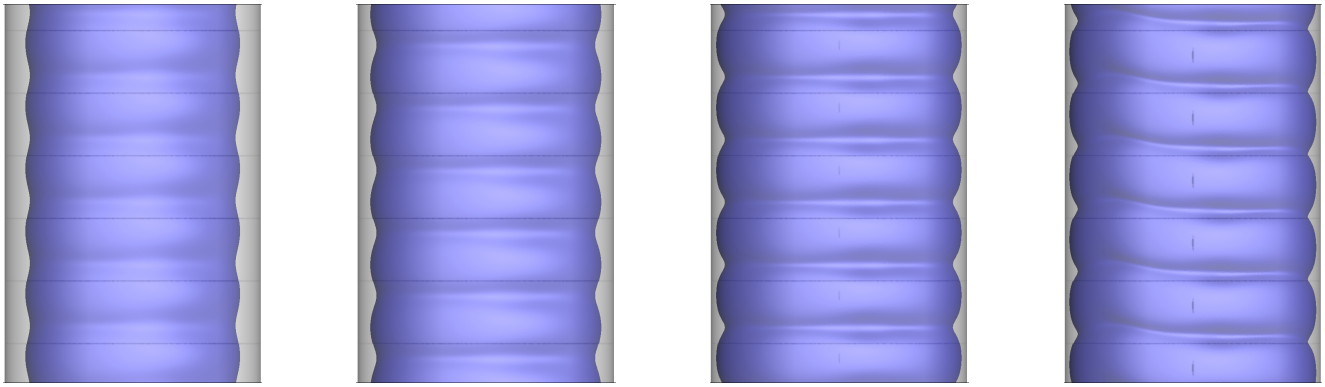


(a) 雷诺数 = 70　(b) 雷诺数 = 75　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图 31：椭圆短半轴所在平面上的温度等值线

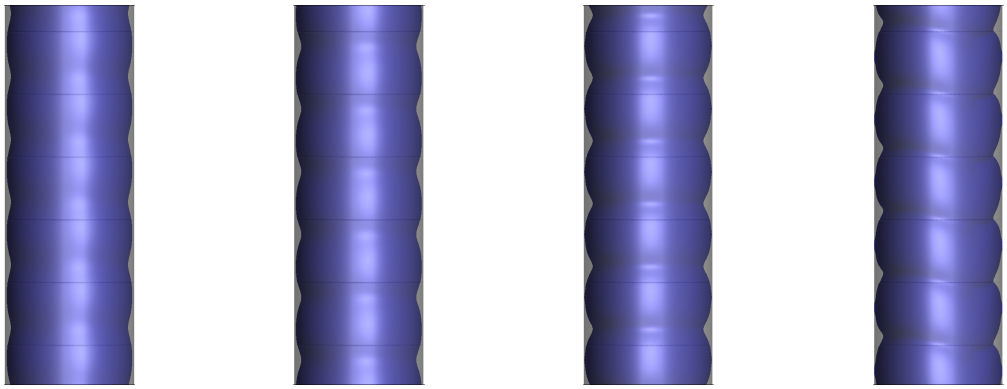
4.7.2. 温度等值面

雷诺数低于 300 的超临界情况下，温度等值面呈波纹管状。由于温度是通过标量输运方程求解的，因此它会随流体流动而变化。也就是说，波纹管状等值面的凸起出现在泰勒涡胞之间与外圆柱相接的区域，因为该区域的流动沿径向向外。同样，波纹管状等值面的凹陷出现在泰勒涡胞之间与内圆柱相接的区域，因为该处流动沿径向向内。 $Re = 300$ 处的表面呈倾斜状，这是因为泰勒涡胞具有螺旋形态。



(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图32：等值面的温　　度，适用于 $T = 0.1$，从 $x - z$ 平面观察（椭圆长轴截面视图）



(a) 雷诺数 = 75　(b) 雷诺数 = 100　(c) 雷诺数 = 200　(d) 雷诺数 = 300

图33： $T = 0.1$的温度等值面，从 $y - z$ 平面观察（椭圆短轴截面视图）

5. 总结

本文采用一种新颖的傅里叶谱无网格技术，研究内圆柱同心旋转的椭圆（长宽比为 2）中泰勒胞的演化及其特性。该无网格技术利用径向基函数插值构造模板，在散布点上求解笛卡尔坐标系下的纳维-斯托克斯方程。我们假设轴向具有周期性，从而能够沿圆柱轴向进行傅里叶谱展开。首先将纳维-斯托克斯方程转换到傅里叶空间，再用无网格方法求解所得的各波数对应的方程。本文给出了亚临界和超临界区域中的速度、压力、温度及涡量分布。内圆柱所受扭矩以及泰勒胞形成的临界雷诺数，与文献中同心圆柱的结果几乎相同。然而，由于泰勒涡在长轴间隙和短轴间隙之间经过时受到压缩和膨胀，椭圆中的泰勒胞结构有所不同。在低雷诺数下，泰勒胞呈同心结构；由于间隙之间的拉伸和挤压，它们在短轴间隙中形成正方形，在长轴间隙中则形成长方形。然而，当雷诺数达到 300 时，这些结构化胞体逐渐变形，表明流动转变为波状模式。我们展示了轴向速度、压力、涡量和温度的等值面，它们

表明了泰勒胞的形状。这些等值面与胞体在间隙之间受到挤压和膨胀的情形相吻合。

数据可用性

支持本研究结论的数据可在提出合理请求后向通讯作者获取。

作者声明

作者无须披露任何利益冲突。

参考文献

[1] A. Mallock，IV. 水的黏度测定，《伦敦皇家学会会刊》45（1889）126–132。

[2] A. Mallock，《流体黏度实验》，《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑：数学或物理学论文（1896），41–56。

[3] M. Couette，《流体运动中两种状态的区别》，《理论与应用物理学杂志》9 (1890) 414–424。

[4] G. I. Taylor，《VIII. 两个旋转圆柱之间黏性液体的稳定性》，《伦敦皇家学会哲学汇刊：A辑，数学或物理学论文集》223（1923）289–343。

[5] D. Coles，《圆形库埃特流中的转捩》，《流体力学杂志》21 (1965) 385–425。doi: 10.1017/S0022112065000241。

[6] C. D. Andereck、S. S. Liu、H. L. Swinney，《独立旋转圆柱组成的圆形库埃特系统中的流动状态》，《流体力学杂志》164（1986）155–183。doi:10.1017/S0022112086002513。

[7] P. R. Fenstermacher、H. L. Swinney、J. P. Gollub，《动力学不稳定性与向混沌泰勒涡流的转变》，《流体力学杂志》94（1979）103–128。doi:10.1017/S0022112079000963。

[8] H. Snyder，《旋转库埃特流的稳定性。一、不对称波形》，《流体物理》11（1968）728–734。

[9] H. Snyder，旋转库埃特流中与波长变化相关的波形和平均流动的变化。第一部分，《流体力学杂志》35（1969），337–352。

[10] R. DiPrima、J. Stuart, 《偏心旋转圆柱间的流动》（1972 年）。

[11] R. DiPrima、J. Stuart, 《偏心旋转圆柱之间流动稳定性中的非局部效应》, 《流体力学杂志》54（1972年）393–415。[12] R. DiPrima、J. Stuart, 《偏心旋转圆柱之间泰勒涡流的非线性计算》, 《流体力学杂志》67（1975年）85–111。[13] R. DiPrima、P. Eagles, 《旋转圆柱之间泰勒涡流的放大率和扭矩》, 《流体物理》20（1977年）171–175。[14] J. T. Stuart、R. DiPrima, 《关于有限长度圆柱中泰勒涡流的数学研究》, 《伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学》372（1980年）357–365。[15] G. Smith、A. Townsend, 《大泰勒数下同心圆柱之间的湍流库埃特流》, 《流体力学杂志》123（1982年）187–217。[16] A. Davey、R. DiPrima、J. Stuart, 《关于泰勒涡的不稳定性》, 《流体力学杂志》31（1968年）17–52。[17] A. Lorenzen、T. Mullin, 《泰勒-库埃特流中的异常模态与有限长度效应》, 《物理评论A》31（1985年）3463。[18] T. Mullin、Y. Toya、S. Tavener, 《小长宽比泰勒-库埃特流中的对称性破缺与状态多重性》, 《流体物理》14（2002年）2778–2787。[19] O. Czarny、E. Serre、P. Bontoux、R. M. Lueptow, 《短反向旋转泰勒-库埃特单元中的螺旋涡流和波状涡流》, 《理论与计算流体力学》16（2002年）5–15。[20] A. Schulz、G. Pfister、S. Tavener, 《外圆柱旋转对小长宽比泰勒-库埃特流的影响》, 《流体物理》15（2003年）417–425。[21] M. Bilson、K. Bremhorst, 《湍流泰勒-库埃特流的直接数值模拟》, 《流体力学杂志》579（2007年）227–270。[22] D. Pirro、M. Quadrio, 《湍流泰勒-库埃特流的直接数值模拟》, 《欧洲力学杂志B辑/流体》27（2008年）552–566。[23] H. J. Brauckmann、B. Eckhardt, 《直至雷诺数Re= 30000的泰勒-库埃特流局部和整体扭矩直接数值模拟》, 《流体力学杂志》718（2013年）398–427。[24] S. Dong, 《湍流泰勒-库埃特流的直接数值模拟》, 《流体力学杂志》587（2007年）373–393。

[25] R. Ostilla、R. J. Stevens、S. Grossmann、R. Verzicco、D. Lohse，《最优泰勒-库埃特流：直接数值模拟》，《流体力学杂志》719（2013年）14–46。[26] S. T. Wereley, R. M. Lueptow，非波状与波状泰勒-库埃特流的时空特征，《流体力学杂志》364（1998年）59–80。[27] S. G. Huisman, D. P. van Gils, S. Grossmann, C. Sun, D. Lohse，极限湍流泰勒-库埃特流，《物理评论快报》108（2012年）024501。[28] S. T. Wereley, R. M. Lueptow，泰勒-库埃特旋转过滤器中的惯性颗粒运动，《流体物理》11（1999年）325–333。[29] L. Wang, R. D. Vigil, R. O. Fox，湍流泰勒-库埃特流中剪切诱导聚集与破碎的计算流体力学模拟，《胶体与界面科学杂志》285（2005年）167–178。[30] M. V. Majji, J. F. Morris，泰勒-库埃特流中的颗粒惯性迁移，《流体物理》30（2018年）033303。[31] A. Dash, A. Anantharaman, C. Poelma，含颗粒泰勒-库埃特流：高阶转变及方位局域波状涡旋的证据，《流体力学杂志》903（2020年）。[32] U. B. Holeschovsky, C. L. Cooney，旋转过滤装置中超滤的定量描述，《美国化学工程师学会会刊》37（1991年）1219–1226。[33] S. Lee, R. M. Lueptow，基于泰勒-库埃特流的旋转反渗透系统，载于：第12届国际库埃特-泰勒研讨会，2001年，第6–8页。[34] E. Serre, M. A. Sprague, R. M. Lueptow，具有径向贯流的有限长度腔体中泰勒-库埃特流的稳定性，《流体物理》20（2008年）034106。[35] N. Tilton, D. Martinand, E. Serre, R. M. Lueptow，泰勒-库埃特单元中的压力驱动径向流动，《流体力学杂志》660（2010年）527–537。[36] Q. Tu, T. Li, A. Deng, K. Zhu, Y. Liu, S. Li，一种用于无污堵反渗透海水淡化的放大型纳米多孔膜离心机，《Technology》6（2018年）36–48。[37] S. Cohen, D. M. Marom，旋转环隙流反应器的实验与理论研究，《化学工程杂志》27（1983年）87–97。[38] S. Poncet, S. Haddadi, S. Viazzo，窄隙泰勒-库埃特-泊肃叶系统中流体流动与传热的数值建模，《国际传热与流体流动杂志》32（2011年）128–144。[39] R. J. Campero, R. D. Vigil，液-液泰勒-库埃特-泊肃叶流中的流动模式，《工业与工程化学研究》38（1999年）1094–1098。

[40] S. T. Wereley、R. M. Lueptow，具有轴向流的泰勒-库埃特流的速度场，《流体物理》11（1999年）3637
3649
– .[41] K. Ball, B. Farouk，浮力效应下泰勒-库埃特流的分岔现象，《流体力学杂志》197 (1988) 479–501。[42] H. Teng, N. Liu, X. Lu, B. Khomami，径向温度梯度作用下泰勒-库埃特流的直接数值模拟，《流体物理》27 (2015) 125101。[43] R. Guillerm, C. Kang, C. Savaro, V. Lepiller, A. Prigent, K.-S. Yang, I. Mutabazi，具有径向热梯度的垂直泰勒-库埃特系统中的流动状态，《流体物理》27 (2015) 094101。[44] X.-Y. Leng, D. Krasnov, B.-W. Li, J.-Q. Zhong，具有轴向温度梯度的泰勒-库埃特系统中的流动结构与热传输，《流体力学杂志》920 (2021)。[45] O. Khawar, M. Baig, S. Sanghi，具有径向温度梯度的反向旋转泰勒-库埃特流，《国际传热与流体流动杂志》95 (2022) 108980。[46] P. Eagles, J. Stuart, R. DiPrima，偏心率对泰勒涡流中扭矩和载荷的影响，《流体力学杂志》87 (1978) 209–231。[47] M. Oikawa, T. Karasudani, M. Funakoshi，偏心旋转圆柱间流动的稳定性，《日本物理学会志》58 (1989) 2355–2364。URL: https://doi.org/10.1143/JPSJ.58.2355。doi:10.1143/JPSJ.58.2355。arXiv:https://doi.org/10.1143/JPSJ.58.2355。[48] C. Shu, L. Wang, Y. Chew, N. Zhao，偏心库埃特-泰勒流的数值研究及偏心率对流动模式的影响，《理论与计算流体力学》18 (2004) 43–59。[49]E. Krueger, A. Gross, R. Di Prima，旋转圆柱间流动中泰勒涡模态与非轴对称模态的相对重要性，《流体力学杂志》24 (1966) 521–538。[50]D. Rui-Xiu, Q. Dong, A. Szeri，偏心旋转圆柱间的流动：分岔与稳定性，《国际工程科学杂志》30 (1992) 1323–1340。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020722592901446。doi:https://doi.org/10.1016/0020-7225(92)90144-6。[51] C. Leclercq, B. Pier, J. F. Scott，偏心泰勒-库埃特-泊肃叶流的时间稳定性，《流体力学杂志》733 (2013) 68–99。[52] C. Leclercq, B. Pier, J. F. Scott，偏心泰勒-库埃特-泊肃叶流中的绝对不稳定性，《流体力学杂志》741 (2014) 543–566。

[53] M. Sprague, P. Weidman, S. Macumber, P. Fischer，定制泰勒涡，《流体物理》20 (2008) 014102。[54] M. A. Sprague, P. D. Weidman，连续定制泰勒涡，《流体物理》21 (2009) 114106。[55] M. Wimmer，同心旋转球体间黏性流体流动的实验研究，《流体力学杂志》78 (1976) 317–335。[56] K. Nakabayashi, Y. Tsuchida，球形库埃特系统环形涡上的调制与非调制行进方位波，《流体力学杂志》195 (1988) 495–522。[57] K. Nakabayashi, Y. Tsuchida，球形库埃特流中层流—湍流转捩的谱研究，《流体力学杂志》194 (1988) 101–132。[58] M. Wimmer，圆锥形圆柱间泰勒涡流的实验研究，《流体力学杂志》292 (1995) 205–227。[59] B. Denne, M. Wimmer，封闭系统中的行进泰勒涡，《力学学报》133 (1999) 69–85。[60] M. Soos, H. Wu, M. Morbidelli，横截面为瓣状内圆柱的泰勒-库埃特装置，《美国化学工程师学会会刊》53 (2007) 1109–1120。[61] H. Snyder，非圆形圆柱间旋转流动的实验，《流体物理》11 (1968) 1606–1611。[62] T. Mullin, A. Lorenzen，旋转圆柱与静止方形外圆柱之间流动的分岔现象，《流体力学杂志》157 (1985) 289–303。[63] T. Benjamin, T. Mullin，泰勒-库埃特流中的异常模态，《伦敦皇家学会会刊A辑》377 (1981) 221–249。[64] A. Greidanus, R. Delfos, S. Tokgoz, J. Westerweel，微型沟槽上的湍流泰勒-库埃特流：减阻及主体流体旋转的影响，《流体实验》56 (2015) 1–13。[65] M. A. Razzak, K. B. Cheong, K. B. Lua，具有纵向波纹表面的泰勒-库埃特流数值研究，《流体物理》32 (2020) 053606。[66] M. Kumar，用于矿物加工中高旋流建模的图形处理器并行非结构多相计算流体力学求解器的开发与应用，博士论文，2021年。

[67] P. Eagles, V. Soundalgekar，外圆柱存在恒定热流和径向温度梯度时两个旋转圆柱间的流动稳定性–宽间隙问题，Heat及传质 33 (1997) 257–260.[68] J. Kobine, T. Mullin, T. Price，体育场形区域内驱动旋转流动的动力学，《流体力学杂志》294 (1995) 47–69.[69] O. Pinkus，椭圆轴承分析，《美国机械工程师学会汇刊》78 (1956) 965–972.[70] H. Hashimoto, S. Wada, H. Tsunoda，湍流区椭圆滑动轴承的性能特性，《日本机械工程学会会刊》27 (1984) 2265–2271.[71] H. Hashimoto, K. Matsumoto，通过优化设计改善高速流体动压滑动轴承的运行特性：第一部分——方法的制定及其在椭圆轴承设计中的应用，《摩擦学杂志》123 (2001年) 305–312.[72] A. Ebrahimi, S. Akbarzadeh, H. Moosavi，椭圆滑动轴承的几何分析及其对摩擦和承载能力的影响，《机械工程师学会会刊J辑：工程摩擦学杂志》234 (2020年) 743–750。

[73] D. Singh, R. Sinhasan, K. P. Nair，《椭圆轴承中的弹性热流体动力效应》，《摩擦学国际》22 (1989) 43–49。

[74]A. F. Shinn, M. A. Goodwin, S. P. Vanka，《复杂封闭腔体中剪切与浮力驱动流的浸入边界计算》，《国际传热传质杂志》52 (2009) 4082–4089。doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.03.044。

[75] R. Jyotsna, S.P. Vanka，《三角腔内稳态黏性流动的多重网格计算》，《计算物理学杂志》122 (1995) 107–117。doi:10.1006/jcph.1995.1200。

[76] J. H. Darr, S. P. Vanka，《驱动梯形腔中的分离流》，《流体物理学A辑：流体动力学》3 (1991年) 385–392。doi:10.1063/1.858207.[77] E. Erturk, O. Gokcol，《三角腔流动的细网格数值解》，《欧洲物理学杂志：应用物理》38 (2007) 97–105。doi:10.1051/epjap:2007057.[78] B. An, J. M. Bergada, F. Mellibovsky，《顶盖驱动直角等腰三角腔流动》，《流体力学杂志》875 (2019) 476–519。doi:10.1017/jfm.2019.512.[79] W. D. McQuain, C. J. Ribbens, C.-Y. Wang, L. T. Watson，《梯形腔中的稳态黏性流动》，《计算机与流体》23 (1994) 613–626。doi:10.1016/0045-7930(94)90055-8。

[80] H anks 18 (1964) 1–18. doi:10.1017/S0022112064000015.[81] J. Ren, P. Guo, 半椭圆腔内稳态流动的格子玻尔兹曼模拟，《计算物理通讯》21 (2017) 692–717. doi:10.4208/cicp.OA-2015-0022.[82] A. Unnikrishnan, S. Shahane, V. Narayanan, S. P. Vanka，由内置旋转圆柱驱动的椭圆形腔体内剪切驱动流动，《流体物理》34 (2022) 013607.[83] S. Shahane, S. P. Vanka，一种用于复杂几何中不可压缩流动的半隐式无网格方法，arXiv预印本 arXiv:2106.07616 (2021).[84] S. Shahane, A. Radhakrishnan, S. P. Vanka，一种用于求解不可压缩流体流动问题的高阶精度无网格方法，《计算物理学杂志》445 (2021) 110623. doi:10.1016/j.jcp.2021.110623.[85] S. Shahane, A. Radhakrishnan, S. P. Vanka，一种用于求解不可压缩流体流动问题的高阶精度无网格方法，《计算物理学杂志》445 (2021) 110623.[86] N. Bartwal, S. Shahane, S. Roy, S. P. Vanka，将高阶精度无网格方法应用于复杂几何中的热传导求解，arXiv预印本 arXiv:2106.08535 (2021).[87] B. Fornberg，伪谱方法实用指南，1，剑桥大学出版社，1998年.[88] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang，谱方法：单一区域中的基础，Springer Science & Business Media，2007.[89] J. Kim, P. Moin，分步法在不可压缩纳维-斯托克斯方程中的应用，《计算物理学杂志》59 (1985) 308–323.[90] S. Shahane, N. Aluru, P. Ferreira, S. G. Kapoor, S. P. Vanka，带不确定性量化的压铸有限体积模拟框架，《应用数学建模》74 (2019) 132–150.[91]Geuzaine, Christophe and Remacle, Jean-Francois，Gmsh，2020。URL: http://http://gmsh.info/.[92] N. Flyer, B. Fornberg, V. Bayona, G. A. Barnett，关于多项式在径向基函数-有限差分近似中的作用：I. 插值与精度，《计算物理学杂志》321 (2016) 21–38. doi:10.1016/j.jcp.2016.05.026.[93] G. Guennebaud, B. Jacob, 等，Eigen v3, http://eigen.tuxfamily.org，2010年。

[94] A. Radhakrishnan, M. Xu, S. Shahane, S. P. Vanka，一种用于传热和流体流动中泊松方程无网格求解的非嵌套多层方法，arXiv预印本 arXiv:2104.13758 (2021).

[95] S. Shahane，S. P. Vanka，MeMPhyS：无网格多物理场软件，2021。网址： https://github.com/shahaneshantanu/memphys。

[96] H. Fasel、O. Booz，宽间隙超临界泰勒涡流的数值研究，《流体力学杂志》138 (1984) 21–52。doi:10.1017/S0022112084000021。

[97] R. Donnelly，N. Simon，旋转圆柱之间超临界流动的经验扭矩关系，《流体力学杂志》7（1960）401–418。