arXiv:2305.01282v1 [math.NA] 2 May 2023

基于霍尔-李特尔伍德多项式的求积公式

J.F. VAN DIEJEN 和 E. EMSIZ

Abstract. 利用霍尔-利特尔伍德多项式的离散正交关系，推导出用于积分齐次对称函数的求积公式，所依据的密度为圆酉系综的密度（该系综源自特殊酉群$SU(n;\mathbb{C})$上的Haar测度）。此外，通过转向麦克唐纳的超八面体霍尔-利特尔伍德多项式，我们还得到了类似的求积公式，用于对圆四元数系综的密度进行积分（该系综则源自紧辛群 $Sp(n;\mathbb{H})$上的Haar测度）。所研究的求积公式对于一类有理对称函数是精确的，这些函数的简单极点支撑在预先指定的复超平面排列上。在平面情形（对应于 $SU(3;\mathbb{C})$和 $Sp(2;\mathbb{H})$），克里斯托费尔权重的行列式表达式使我们能够写出紧凑的求积公式，分别用于在等边三角形和等腰直角三角形上积分。

1. Introduction

众所周知，经典紧李群的Haar测度[S96, P07] 给出了无处不在的随机矩阵系综 [M04, F10]的密度。从应用的角度来看，一个关键问题是发展出能够针对这些密度进行高效数值积分的技术。近年来，借助基于正交多项式 [S71, HW88, B91, S92, SV97, C97, CMS01, DX14]的基础工具集，人们构造了服务于这一目的的类高斯求积公式 [MK06, LX10, MP11, MMP14, HM14, HMP16],。对于所涉及的这类积分，求积节点在这一框架中由相关李群的不可约表示的特征标的零点给出。这些特征标可由舒尔多项式显式表示，而本文旨在将相应的构造从舒尔多项式推广到Hall-Littlewood多项式 [M95, M00, NR03]。为此，我们利用源于数理物理[D06, D07, DE17]的Hall-Littlewood多项式的离散正交结构。我们的方法给出了在复超平面排列上对带有指定极点的有理对称函数进行积分的求积公式，其受Hall-Littlewood多项式的正交测度控制。在秩一李群的特殊情形下，我们由此复现了若干已知的特殊

Date：2019年11月。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：65D32；次要分类号：05E05、15B52、28C10、33C52、33D52、43A75。求积公式、Hall-Littlewood多项式、随机矩阵、紧致经典李群、哈尔测度。本研究部分得到

Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico(FONDECYT) 资助，资助编号：1170179。

求积公式实例，这些公式源自Bernstein-Szeg¨o多项式 [DGJ06, BCDG09, DE18], , 其构造目的是针对切比雪夫权函数对带有指定极点的有理函数进行积分。全文组织如下。

第 2 节将阐述由 Hall-Littlewood 多项式导出的求积公式。该公式用于对齐次对称函数进行积分，所依据的密度是圆酉系综的密度，由特殊酉群 $SU(n;\mathbb{C})$ 上的 Haar测度给出。

第 3 节将介绍一种类似的构造，该构造基于 Macdonald 的超八面体 Hall-Littlewood 多项式。相应的求积公式旨在对对称函数进行积分，所依据的密度是圆四元数系综的密度，而该密度由紧辛群 $Sp(n;\mathbb{H})$ 上的 Haar测度给出。

在这两种情形下，求积节点都位于相关拟正交多项式族的公共根处。第 4 节将推导出所关注的拟正交多项式的显式公式。

我们的求积公式中的克里斯托费尔权重由平方范数编码，这些平方范数由文献 [D06、D07、DE17] 中（超八面体）Hall-Littlewood 多项式的离散正交关系确定。第 5 节将为平面积分情形下的这些克里斯托费尔权重给出一个紧凑的行列式公式（分别对应 $SU(3;\mathbb{C})$ 和 $Sp(2;\mathbb{H})$）。相应的求积公式分别用于在等边三角形和等腰直角三角形上进行积分。

第6节总结了我们的论述，并指出在 [MK06、LSX10、LX10、MP11、MMP14、HM14、HMP16、DE19、DE20] 中研究的各种既有求积公式，如何被视为本文所讨论公式的参数退化。在所关注的参数取值下，霍尔-利特尔伍德多项式分别特化为（辛）Schur 多项式或对称单项式。

注。下文中我们偶尔会提及 $\mathbb{R}^n$ 中向量的支配偏序：

$$\mathbf{x}\leq\mathbf{y}\Longleftrightarrow x_1+\cdots+x_k\leq y_1+\cdots+y_k\quad(k=1,\ldots,n). \tag{1.1}$$

我们还将采用以下记号来计数 $x\in\mathbb{R}$在 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$中的重数：

$$\mathrm{m}_x(\mathbf{x}):=|\{1\leq j\leq n\mid x_j=x\}|. \tag{1.2}$$

2. Cubature rules associated with Hall-Littlewood polynomials

本节我们给出一种求积公式，用于计算变量 $z_j=e^{i\xi_j}(j=1,\ldots,n)$ 中齐次对称函数在基本域上的积分。

$$\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}:=\{(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}_0^n\mid\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_n>\xi_1-2\pi\} \tag{2.1}$$

对于该超平面

$$\mathbb{R}_0^n:=\{(\xi_1,\ldots\xi_n)\in\mathbb{R}^n\mid\xi_1+\cdots+\xi_n=0\}. \tag{2.2}$$

这里的积分是相对于圆酉系综的密度进行的

$$\rho_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}):=\prod_{1\leq j<k\leq n}|e^{i\xi_j}-e^{i\xi_k}|^2=2^{n(n-1)}\prod_{1\leq j<k\leq n}\sin^2\left(\frac{\xi_j-\xi_k}{2}\right) \tag{2.3}$$

该密度源自特殊酉群 $SU(n;\mathbb{C})$ 上的 Haar测度。在此图景中，坐标 $\boldsymbol{\xi}:=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 对应于特征值的角度。

2.1. 霍尔-利特尔伍德多项式。Hall-Littlewood多项式构成了 n 个变量上的对称函数空间的一组重要正交基。从代数组合学的角度来看，这类多项式因其与仿射Hecke代数表示论的联系而受到深入研究。对于我们的目的，只需从标准参考文献 [M95, Chapter III], [M00, §10] and [NR03]中摘录少数几条基本性质。

一种方便的标记霍尔-利特尔伍德多项式的方法，是使用主导权向量

$$\Lambda_{\mathsf{a}}^{(n)}:=\{l_1\omega_1+\cdots+l_{n-1}\omega_{n-1}\mid l_1,\dots,l_{n-1}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\} \tag{2.4a}$$

这些向量由 $SU(n;\mathbb{C})$基本权基生成（参见 [B68, Planche I]）

$$\omega_j=e_1+\cdots+e_j-\tfrac{j}{n}(e_1+\cdots+e_n)\qquad(j=1,\dots,n-1) \tag{2.4b}$$

张成超平面 $\mathbb{R}_0^n$。（此处向量 $e_1,\dots,e_n$ 指 $\mathbb{R}^n$的标准单位基。）具体而言，对于任意 $\mu=(\mu_1,..,\mu_n)\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(n)}$，相应的霍尔-利特尔伍德多项式可明确写为

$$P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q):=\sum_{\sigma\in S_n}C_{\mathsf{a}}(\xi_{\sigma_1},\dots,\xi_{\sigma_n};q)\exp(i\xi_{\sigma_1}\mu_1+\cdots+i\xi_{\sigma_n}\mu_n), \tag{2.5a}$$

其中

$$C_{\mathsf{a}}(\xi_1,\dots,\xi_n;q)=C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q):=\prod_{1\leq j<k\leq n}\left(\frac{1-qe^{-i(\xi_j-\xi_k)}}{1-e^{-i(\xi_j-\xi_k)}}\right), \tag{2.5b}$$

求和是对构成对称群 S_n 的所有排列 $\sigma=\left(\begin{smallmatrix}1&2&\cdots&n\\ \sigma_1&\sigma_2&\cdots&\sigma_n\end{smallmatrix}\right)$ 进行的。对于 $-1<q<1$，已知 Hall-Littlewood 多项式满足以下基本正交关系，参见例如 [M00，第 10] 节，或[NR03，第 3] 节（根系 R 为 A_{n-1}型）：

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{n-1}n^{1/2}}\int_{\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}}P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q)\overline{P_{\mathsf{a};\nu}(\boldsymbol{\xi};q)}|C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q)|^{-2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}&\\ =\begin{cases}\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ \mu_j-\mu_k=0}}\frac{1-q^{1+k-j}}{1-q^{k-j}} & \text{if } \nu=\mu,\\ 0 & \text{if } \nu\neq\mu\end{cases}&\end{aligned} \tag{2.6}$$

$(\mu,\nu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(n)})$。

注释 2.1。在正交关系 (2.6) 中，积分是相对于源自与 $(n-1)$ 维欧几里得空间 $\mathbb{R}_0^n$ 相关联的标准体积形式的 Lebesgue测度 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ 进行的。特别地：$\int_{\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{Vol}\big(\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}\big)=\frac{(2\pi)^{n-1}n^{1/2}}{n!}$.

2.2. 有限维正交关系。给定固定的正整数层级 m，我们考虑 $\Lambda_{\mathsf{a}}^{(n)}$ 中的以下有限 alcove：

$$\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}:=\{l_1\omega_1+\cdots+l_{n-1}\omega_{n-1}\mid l_1,\dots,l_{n-1}\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\,l_1+\cdots+l_{n-1}\leq m\}. \tag{2.7}$$

在 [D06] a 上构造了一个格点拉普拉斯算子 $\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$（带有涉及参数 q 的罗宾型边界条件），对于该算子，$P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi})$（视为关于$\mu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$的函数）在谱变量 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}$ 的条件下构成一个特征函数。

属于一个离散节点集 $\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a}\,\lambda}^{(m,n)}$, $\lambda\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$，该集合用于参数化特征值。对于 $-1<q<1$，相关构造得出了一种新颖的有限维霍尔-利特尔伍德多项式正交关系，其形式为 [D06, Section 5.2]:

$$\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}} P_{\mathsf{a};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)};q\big)\overline{P_{\mathsf{a};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\kappa}^{(m,n)};q\big)}\delta_{\mathsf{a};\mu}^{(m,n)}(q)=0\quad\text{if }\lambda\neq\kappa \tag{2.8a}$$

($\lambda,\kappa\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$)，其中

$$\delta_{\mathsf{a};\mu}^{(m,n)}(q):=\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ \mu_j-\mu_k=0}}\frac{1-q^{k-j}}{1-q^{1+k-j}}\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ \mu_j-\mu_k=m}}\frac{1-q^{n-k+j}}{1-q^{n+1-k+j}}. \tag{2.8b}$$

2.3. 节点位置。对于一般参数值 $-1<q<1$，遗憾的是，谱节点 $\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a}\,\lambda}^{(m,n)}$, $\lambda\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$的位置没有显式公式。因此，我们将采用一种源自 [D06，第 4] 节的简单数值算法。具体而言，对于任意 $-1<q<1$ 和 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$，相关节点 $\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a}\,\lambda}^{(m,n)}$ 的明确位置可由以下半有界莫尔斯函数 $V_{\mathsf{a}\,\lambda}^{(m,n)}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的唯一全局最小值给出:

$$V_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}(\boldsymbol{\xi}):=\sum_{1\leq j<k\leq n}\int_0^{\xi_j-\xi_k}v_q(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\sum_{1\leq j\leq n}\left(\tfrac{m}{2}\xi_j^2-2\pi(\varrho_{\mathsf{a};j}+\lambda_j)\xi_j\right), \tag{2.9a}$$

其中

$$\varrho_{\mathsf{a};j}:=\frac{1}{2}\big(n+1-2j\big)\qquad(j=1,\ldots,n) \tag{2.9b}$$

and

$$v_q(\vartheta):=\int_0^{\vartheta}u_q(\theta)\mathrm{d}\theta\quad\text{with}\quad u_q(\theta):=\frac{1-q^2}{1-2q\cos(\theta)+q^2}. \tag{2.9c}$$

请注意，在这方面，该全局最小值的存在性有保证，因为 $V_{\mathsf{a}\,\lambda}^{(m,n)}(\boldsymbol{\xi})\to+\infty$ 当 $|\boldsymbol{\xi}|\to\infty$，而其唯一性则由凸性得出:

$$\begin{aligned}H_{\mathsf{a};j,k}^{(n,m)}(\boldsymbol{\xi})&:=\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_k}V_{\mathsf{a};\lambda}^{(n,m)}(\boldsymbol{\xi})\\ &=\begin{cases}m+\sum_{\substack{1\leq l\leq n\\ l\neq j}}u_q(\xi_j-\xi_l) & \text{if } k=j\\ -u_q(\xi_j-\xi_k) & \text{if } k\neq j\end{cases},\end{aligned} \tag{2.10}$$

因此（对于任意的 $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$）

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j,k\leq n}H_{\mathsf{a};j,k}^{(m,n)}(\boldsymbol{\xi})x_jx_k&=\sum_{1\leq j\leq n}mx_j^2+\sum_{1\leq j<k\leq n}u_q(\xi_j-\xi_k)(x_j-x_k)^2\\ &\geq m\sum_{1\leq j\leq n}x_j^2.\end{aligned}$$

现在可以方便地根据临界点 $\partial_{\xi_j}V_{(m,n)\,\mathsf{a};\lambda}(\boldsymbol{\xi})=0$ 的方程计算节点的数值位置:

$$m\xi_j+\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j}}v_q(\xi_j-\xi_k)=2\pi(\lambda_j+\varrho_{\mathsf{a},j})\qquad(j=1,\ldots,n), \tag{2.11}$$

可采用牛顿法等不动点迭代格式。在此过程中，应避免通过数值积分来计算 $v_q(\xi)$，因为结合准周期性 $v_q(\vartheta+2\pi) = v_q(\vartheta)+2\pi$ for$\vartheta \in \mathbb{R}$，调用显式公式 $v_q(\vartheta) = 2\arctan\left(\frac{1+q}{1-q}\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)$ for$-\pi < \vartheta < \pi$ 要高效得多。当参数取特殊值 $q = 0$ 时，方程 (2.11) 退化为一个线性方程组，其解由 $\xi_j = {}^{2\pi}\!/_{(\lambda_j+\varrho_{\mathsf{a},j})\,n+m}$, $j = 1,\dots,n$ 显式给出；在 $q = 0$ 处的这个显式解可作为合适的初始估计，用于在一般参数值 $-1 < q < 1$ 下启动牛顿迭代（参见下文备注 2.3）。

注 2.2. 值得注意的是，节点 $\boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathsf{a}\,\lambda}$, $\lambda \in \Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}$ 属于区域 $\mathbb{A}^{(n)}_{\mathsf{a}}$(2.1)。事实上，将表征 $\boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathsf{a}\,\lambda}$ 位置的式子中的 n 个方程相加，并利用 $v_q(\vartheta)$ 关于 ϑ 为奇函数 (2.11) 可以看出，所讨论的临界点位于超平面 $\mathbb{R}^n_0$ 上。此外，将第 k 个方程减去第 j 个方程：

$$m(\xi_j-\xi_k)+\sum_{1\le l\le n}\Big(v_q(\xi_j-\xi_l)-v_q(\xi_k-\xi_l)\Big)=2\pi(\lambda_j-\lambda_k+k-j), \tag{2.12}$$

显然，在 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathsf{a}\,\lambda}$ 处，当$1 \le j < k \le n$时，不等式 $2\pi > \xi_j - \xi_k > 0$ 成立。这里利用了 $v_q(\vartheta)$ 关于 ϑ 的单调性和（上述）准周期性，同时注意到在这种情况下 $0 \le \lambda_j - \lambda_k \le m$（因为 $\lambda \in \Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}$）。

备注 2.3. 由于 $\frac{1-|q|}{1+|q|} \le u_q(\theta) \le \frac{1+|q|}{1-|q|}$ 对于 $\theta \in \mathbb{R}$，通过中值定理，利用公式 (2.12) 可立即得到节点 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathsf{a}\,\lambda}$,($\lambda \in \Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}$) 位置的以下界：

$$\frac{2\pi(k-j+\lambda_j-\lambda_k)}{m+\kappa_{\mathsf{a};-}(q)} \le \xi_j-\xi_k \le \frac{2\pi(k-j+\lambda_j-\lambda_k)}{m+\kappa_{\mathsf{a};+}(q)} \tag{2.13a}$$

对于 $1 \le j < k \le n$，其中

$$\kappa_{\mathsf{a};\pm}(q) := n\left(\frac{1-|q|}{1+|q|}\right)^{\pm 1}. \tag{2.13b}$$

这些界证实了

$$\boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathsf{a};\lambda}\Big|_{q=0} = \frac{2\pi(\lambda+\varrho_{\mathsf{a}})}{n+m} \qquad (\lambda \in \Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}), \tag{2.14}$$

其中 ϱ_{a}:=($\varrho_{\mathsf{a},1}$、...、 $\varrho_{\mathsf{a},n}$)。此外，由于在 $\boldsymbol{\xi} = {}^{2\pi}\!/_{(\lambda+\varrho_{\mathsf{a}})\,n+m}$($\lambda \in \Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}$) 处，公式 (2.13a)、(2.13b) 中的不等式对任意 $-1 < q < 1$ 均成立，因此这一特殊点为通过牛顿法由公式 (2.11) 数值计算节点 $\boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathsf{a}\,\lambda}$ 位置时提供了一个方便的初始估计。

2.4. 求积公式。设

$$\mathbb{P}^{(m,n)}_{\mathsf{a}} := \mathrm{Span}_{\mu\in\Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}}\{M_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi})\}, \tag{2.15}$$

with

$$M_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{N_{\mathsf{a};\mu}}\sum_{\sigma\in S_n}\exp(i\xi_{\sigma_1}\mu_1+\cdots+i\xi_{\sigma_n}\mu_n) \tag{2.16a}$$

归一化，使得右侧的每个指数项出现的重数 y
one:

$$N_{\mathsf{a};\mu} := \prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ \mu_j-\mu_k=0}} \frac{1+k-j}{k-j}. \tag{2.16b}$$

注意，空间 $\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$ 同构于一个 $\binom{m+n-1}{m}$ 维空间，该空间由每个变量 $z_j = e^{i\xi_j}$（$j\in\{1,\dots,n\}$）的次数至多为 m 、满足关系 $z_1\cdots z_n = 1$ 的对称多项式构成。

定理 2.1（霍尔-利特尔伍德求积）。对于 $q \in$ （$-1, 1$）和 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，以下求积公式对 $\mathbb{P}_{a}^{(2m-1,n)}$ 中任意对称多项式 f（$\boldsymbol{\xi}$）成立：

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}n^{1/2}}\int_{\mathbb{A}_a^{(n)}} f(\boldsymbol{\xi})|C_a(\boldsymbol{\xi};q)|^{-2}d\boldsymbol{\xi} = \sum_{\lambda\in\Lambda_a^{(m,n)}} f\big(\boldsymbol{\xi}_{a;\lambda}^{(m,n)}\big)\hat{\Delta}_{a;\lambda}^{(m,n)}, \tag{2.17a}$$

克里斯托费尔权重为

$$\hat{\Delta}_{a;\lambda}^{(m,n)} := \left(\sum_{\mu\in\Lambda_a^{(m,n)}} \Big|P_{a;\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{a;\lambda}^{(m,n)};q\big)\Big|^2 \delta_{a;\mu}^{(m,n)}(q)\right)^{-1}. \tag{2.17b}$$

证明。由式 (2.8a)、(2.8b) 中的离散正交关系可立即得出，下列矩阵是酉矩阵：

$$\left[\sqrt{\delta_{\mathsf{b};\mu}^{(m,n)}(q)}P_{\mathsf{a};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)};q\big)\sqrt{\hat{\Delta}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}}\right]_{\mu,\lambda\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}}.$$

根据“列行对偶”，这意味着对于任意 μ， $\nu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$（参见 D07 中的 [，定理 1]）：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}} P_{\mathsf{a};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)};q\big)\overline{P_{\mathsf{a};\nu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)};q\big)}\hat{\Delta}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)} = \begin{cases}1/\delta_{\mathsf{a};\mu}^{(m,n)}(q) & \text{if } \nu=\mu,\\ 0 & \text{if } \nu\neq\mu.\end{cases} \tag{2.18}$$

将此公式与式 (2.6) 中相应 Hall-Littlewood多项式的标准正交关系相比较，可知若将 ν （例如）限制为 $\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m-1,n)}$，则两个标量积相等。因此，由于 $P_{\mathsf{a};\nu}(\boldsymbol{\xi};q) = P_{\mathsf{a};(-\nu_n,\dots,-\nu_1)}(\boldsymbol{\xi};q)$，且 $(-\nu_n,\dots,-\nu_1) = l_{n-1}\omega_1 + l_{n-2}\omega_2 + \cdots + l_1\omega_{n-1}$ 当 $\nu = l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \cdots + l_{n-1}\omega_{n-1}$，我们得出结论：所述求积公式对形如以下形式的所有对称多项式 $f(\boldsymbol{\xi})$ 均成立

$$f(\boldsymbol{\xi}) = P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q)P_{\mathsf{a};\nu}(\boldsymbol{\xi};q) \quad \text{with} \quad \mu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)},\ \nu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m-1,n)}. \tag{2.19}$$

相关乘积实际上张成 $\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(2m-1,n)}$（因为 $f(\boldsymbol{\xi})$ 的单项式展开式 (2.19) 包含 $M_{\mathsf{a};\mu+\nu}(\boldsymbol{\xi})$，以及与支配权 κ 相对应的单项式对称函数 $M_{\mathsf{a};\kappa}(\boldsymbol{\xi})$；这些支配权在支配偏序下小于 $\mu+\nu$）。因此，由线性性可知，该求积公式对 $\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(2m-1,n)}$ 中一般的对称多项式 $f(\boldsymbol{\xi})$ 均成立。□

下面的推论将定理 2.1 解释为一种精确求积公式，用于计算圆酉系综（CUE）密度下某类有理对称函数的积分。

推论 2.2（圆酉系综中的求积）。对于 $q \in (-1,1)$ 和 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，有

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1} n^{1/2}} \int_{\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}} R_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}} R_{\mathsf{a}}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}\big) \rho_{\mathsf{a}}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}\big) \Delta_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}$$

其中 $\Delta_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)} := |C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}; q)|^2 \hat{\Delta}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}$，以及 $R_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}) := f(\boldsymbol{\xi}) O_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}; q)$，其中分母的形式为

$$O_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}; q) := \prod_{1 \le j < k \le n} \big(1 - 2q\cos(\xi_j - \xi_k) + q^2\big)$$

分子 $f(\boldsymbol{\xi})$ 可以是 $\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(2m-1,n)}$ 中任意对称多项式。

证明。由定理 2.1 通过恒等式立即得出。

$$|C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}; q)|^{-2} = \rho_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}) / O_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}; q).$$

□

注 2.4。当 $n = 2$ 时，定理 2.1 归结为 [DE18 中介绍的、关于 $m+1$ 个节点的特殊˜求积公式实例，定理 5]（即分别取 $d = d = 1$、$\epsilon_+ = \tilde{\epsilon}_+ = 0$、$\epsilon_- = \tilde{\epsilon}_- = 1$ 和 $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = -q$）。相应的精确度为 $\mathsf{D} = 2m-1$，与最优高斯精确度 $2m+1$ 相差 2。更一般地，通过形如（例如参见 [MK06，第 3 节、4], [LX10，第 5 节，或 [HMP16，第 3] 节）的变量替换：

$$X_j := \begin{cases} \frac{1}{2}\big(M_{\mathsf{a};\omega_j}(\boldsymbol{\xi}) + M_{\mathsf{a};\omega_{n-j}}(\boldsymbol{\xi})\big) & \text{if } j = 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} M_{\mathsf{a};\omega_j}(\boldsymbol{\xi}) & \text{if } j = \frac{n}{2}, \\ \frac{1}{2i}\big(M_{\mathsf{a};\omega_j}(\boldsymbol{\xi}) - M_{\mathsf{a};\omega_{n-j}}(\boldsymbol{\xi})\big) & \text{if } j = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil, \dots, n-1, \end{cases} \tag{2.21}$$

定理 2.1 可以重新表述为一个精确的求积公式，该公式支撑于 $f \in \Pi^{(2m-1,n-1)}$，并以 $\dim(\Pi^{(m,n-1)})$ 个节点为支撑，其中 $\Pi^{(\mathsf{D},n-1)}$ 指的是由 X_1、…、X_{n-1} 中总次数至多为 D 的所有多项式构成的 $\binom{\mathsf{D}+n-1}{\mathsf{D}}$ 维空间：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\big(\pi\sqrt{2}\big)^{n-1}} \int_{\mathrm{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}} f(X_1, \dots X_{n-1}) \frac{\sqrt{\rho_{\mathsf{a}}(X_1, \dots, X_{n-1})}}{O_{\mathsf{a}}(X_1, \dots, X_{n-1}; q)} \mathrm{d}X_1 \cdots \mathrm{d}X_{n-1} \\ = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}} f\big(\boldsymbol{X}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}\big) \hat{\Delta}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

这里，ρ_{a} 和 O_{a} 指的是用新坐标 X_1、…、X_{n-1} 表示的变换后的函数，而

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{\mathsf{a}}^{(n)} &:= \Big\{ \big(X_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, X_{n-1}(\boldsymbol{\xi})\big) \mid \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)} \Big\}, \\ \boldsymbol{X}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)} &:= \big(X_1(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}), \dots, X_{n-1}(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)})\big). \end{aligned}$$

要进行这一坐标变换，可以利用超平面 $\xi_1 + \cdots + \xi_n = 0$ 雅可比行列式由 $\left|\frac{\partial(X_1,\dots,X_{n-1})}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}\right| = \big(\frac{n}{2}\big)^{n-1} \sqrt{\rho_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi})}$ 给出（参见 [LX10, 引理 5.5] 或 [HMP16, 命题 4]），体积形式为 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \sqrt{n}\mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_{n-1}$。由此变量替换诱导的空间 $\mathbb{P}_{(\mathsf{D},n)\mathsf{a}}$ 与 $\Pi^{(\mathsf{D},n-1)}$ 之间的线性同构表明，要对所有 $f \in \mathbb{P}_{(2m-1,n)\mathsf{a}}$ 实现精确积分，所需节点数至少为（高斯）值 $\dim\big(\mathbb{P}_{(m-1,\mathsf{a}}^{n}\big)$

（例如参见 [DX14, 第 3.8] 章）。因此，定理 2.1 中求积公式所用的节点数超过这一下界

$$\dim\big(\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(m,n)}\big)-\dim\big(\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(m-1,n)}\big)=\binom{n+m-2}{m}=\dim\big(\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(m,n-1)}\big).$$

注 2.5. 对称函数 $R_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}) = {}^{f}{}_{(\boldsymbol{\xi})}\ O_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q)$ 在分母 $O_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q)$ 的零点集上有简单极点。对于 $0<q<1$，相关的极点轨迹由以下复超平面组成

$$\xi_j-\xi_k=i\log(q)\mod 2\pi\qquad(1\le j\neq k\le n),$$

而对于 $-1<q<0$，它由以下复超平面组成

$$\xi_j-\xi_k=\pi+i\log(-q)\mod 2\pi\qquad(1\le j\neq k\le n).$$

在参数域 $-1<q<1$ 的边界处，该复超平面配置逼近积分域 $\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}$(2.1) 的闭包。事实上，对于 $q\to 1$，极点轨迹与 $\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}$ 的闭包在边界超平面 $\xi_j-\xi_{j+1}=0$ ($j=1,\dots n-1$) 和 $\xi_1-\xi_n=2\pi$ 处相交；而对于 $q\to -1$，交集则来自穿过内部的超平面： $\xi_j-\xi_k=\pi(1\le j<k\le n)$。

3. Cubature rules associated with hyperoctahedral Hall-Littlewood polynomials

本节将上述构造应用于紧辛群 $Sp(n;\mathbb{H})$。相应的 Haar测度对应于圆形四元数系综的密度。

$$\rho_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi}):=2^{n(n+1)}\prod_{1\le j\le n}\big(1-\cos^2(\xi_j)\big)\prod_{1\le j<k\le n}\big(\cos(\xi_j)-\cos(\xi_k)\big)^2\tag{3.1}$$

在基本域上

$$\mathbb{A}_{\mathsf{b}}^{(n)}:=\{\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\mid\pi>\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_n>0\}.\tag{3.2}$$

Macdonald超八面体Hall-Littlewood多项式在此情形下，为关于密度 $\rho_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})$ 在基本域 $\mathbb{A}_{\mathsf{b}}^{(n)}$ 上对 $z_j=\cos(\xi_j)$ ($j=1,\dots,n$) 中对称函数的积分生成求积公式。

3.1. 超八面体霍尔-利特尔伍德多项式。麦克唐纳的超八面体霍尔-利特尔伍德多项式是与由带符号排列构成的超八面体群相关联的霍尔-利特尔伍德多项式的一种变体，通过选取 BC_n型的根系 R，可从 [M00, §10] 中得到。相关多项式由 $Sp(n;\mathbb{H})$ 主导权向量标记

$$\Lambda_{\mathsf{b}}^{(n)}:=\{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{Z}^n\mid\mu_1\ge\cdots\ge\mu_n\ge 0\}\tag{3.3}$$

它们由基本基底 $e_1+\cdots+e_j$, $j=1,\dots,n$ 非负生成（参见 [B68, Planche III]）。这里我们将注意力限制在这些多项式的一个二参数子族上，其定义为

$$P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0):=\tag{3.4a}$$
$$\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \epsilon\in\{1,-1\}^n}}C_{\mathsf{b}}(\epsilon_1\xi_{\sigma_1},\dots,\epsilon_n\xi_{\sigma_n};q,q_0)\exp(i\epsilon_1\xi_{\sigma_1}\mu_1+\cdots+i\epsilon_n\xi_{\sigma_n}\mu_n),$$

其中 $\mu \in \Lambda_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ 且

$$C_{\mathfrak{b}}(\xi_1,\dots,\xi_n;q,q_0)=C_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0):= \tag{3.4b}$$
$$\prod_{1\le j\le n}\frac{1-q_0e^{-i\xi_j}}{1-e^{-2i\xi_j}}\prod_{1\le j<k\le n}\left(\frac{1-qe^{-i(\xi_j-\xi_k)}}{1-e^{-i(\xi_j-\xi_k)}}\right)\left(\frac{1-qe^{-i(\xi_j+\xi_k)}}{1-e^{-i(\xi_j+\xi_k)}}\right).$$

现在是相对于带符号排列的超八面体群作用进行对称化，这涉及对所有 $\sigma=\left(\begin{smallmatrix}1&2&\cdots&n\\ \sigma_1&\sigma_2&\cdots&\sigma_n\end{smallmatrix}\right)\in S_n$以及所有 $\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{1,-1\}^n$求和。对于 $-1<q$, $q_0<1$，多项式 $P_{\mathfrak{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};\,q,q_0)$ 满足以下正交关系 [M00, §10]:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{A}_{\mathfrak{b}}^{(n)}}P_{\mathfrak{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)\overline{P_{\mathfrak{b};\nu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)}|C_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)|^{-2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{3.5}$$
$$=\begin{cases}\prod_{\substack{1\le j<k\le n\\ \mu_j-\mu_k=0}}\frac{1-q^{1+k-j}}{1-q^{k-j}} & \text{if } \nu=\mu,\\ 0 & \text{if } \nu\neq\mu\end{cases}$$

$(\mu,\nu\in\Lambda_{\mathfrak{b}}^{(n)})$。

注 3.1。在正交关系 (3.5) 中，积分是相对于标准 Lebesgue测度 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n$ 而言的，其中 $\mathbb{R}^n$。特别地：$\int_{\mathbb{A}_{\mathfrak{b}}^{(n)}}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{Vol}\big(\mathbb{A}_{\mathfrak{b}}^{(n)}\big)=(\pi)^n/n!$ 。

3.2. 有限维正交关系。沿用前述思路，在层级为

$$\Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}:=\{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{Z}^n\mid m\ge\mu_1\ge\cdots\ge\mu_n\ge 0\} \tag{3.6}$$

$m\in\mathbb{Z}_{>0}$的有限 alcove 上构造适当的格点拉普拉斯算子（满足罗宾型边界条件），由此得到了一个关于超八面体霍尔-利特尔伍德多项式的新型有限维正交关系，其形式为 [DE17, 第 11 节。4]:

$$\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}}P_{\mathfrak{b};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b};\lambda}^{(m,n)};q,q_0\big)\overline{P_{\mathfrak{b};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b};\kappa}^{(m,n)};q,q_0\big)}\delta_{\mathfrak{b};\mu}^{(m,n)}(q)=0\quad\text{if }\kappa\neq\lambda \tag{3.7a}$$

$(\lambda,\kappa\in\Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)})$，其中

$$\delta_{\mathfrak{b};\mu}^{(m,n)}(q):=\prod_{\substack{1\le j<k\le n\\ \mu_j-\mu_k=0}}\frac{1-q^{k-j}}{1-q^{1+k-j}}. \tag{3.7b}$$

在当前情形下，用于参数化格点拉普拉斯算子特征值的节点位置 $\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b}\,\lambda}^{(m,n)}$；，$\lambda\in\Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}$ 最终发现取决于区间 (−1,1) 内的三个参数：q_0（控制墙 $\mu_n=0$ 处的边界条件）、q（控制墙 $\mu_j=\mu_{j+1}, j\in\{1,\dots,n-1\}$ 处的边界条件），以及另一个参数 q_1（控制仿射墙 $\mu_1=m$ 处的边界条件） [DE17]。

3.3. 节点位置。对于参数$q, q_0, q_1 \in (-1, 1)$的一般取值，式 (3.7a)、(3.7b) 中节点位置的显式公式尚不存在，因此我们再次借助关联的 Morse 函数的最小值来刻画节点位置，参见 [DE17，第 10 节。1] 以便进行数值计算。

具体而言，节点 $\boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathfrak{b}\,\lambda}$，$\lambda \in \Lambda^{(m,n)}_{\mathfrak{b}}$ 的位置由下列半有界莫尔斯函数 $V^{(m,n)}_{\mathfrak{b}\,\lambda}$ 的唯一全局最小值决定：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$：

$$V^{(m,n)}_{\mathfrak{b};\lambda}(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{1\leq j<k\leq n}\left(\int_0^{\xi_j+\xi_k} v_q(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta + \int_0^{\xi_j-\xi_k} v_q(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right) + \sum_{1\leq j\leq n}\left((m+1)\xi_j^2 - 2\pi(\varrho_{\mathfrak{b};j}+\lambda_j)\xi_j + \int_0^{\xi_j}\big(v_{q_0}(\vartheta)+v_{q_1}(\vartheta)\big)\mathrm{d}\vartheta\right), \quad (3.8a)$$

其中，$v_q(\vartheta)$ 的形式如式（2.9c）所示，且

$$\varrho_{\mathfrak{b};j} := n+1-j \quad (j=1,\ldots,n). \quad (3.8b)$$

与之前一样，$\boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathfrak{b}\,\lambda}; V^{(m,n)}_{\mathfrak{b}\,\lambda};(\boldsymbol{\xi})$ 的全局最小值存在且唯一，这是由无界径向增长 $V^{(m,n)}_{\mathfrak{b}\,\lambda};(\boldsymbol{\xi}) \to +\infty$ 对 $|\boldsymbol{\xi}| \to \infty$ 成立，再结合凸性所保证的：

$$H^{(n,m)}_{\mathfrak{b}\;\;k\;;j,} := \partial_{\xi_j}\partial_{\xi_k} V_{(n,m)\,\mathfrak{b};\lambda}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.9)$$
$$= \begin{cases} 2(m+1) + u_{q_0}(\xi_j) + u_{q_1}(\xi_j) + \sum_{\substack{1\leq l\leq n\\ l\neq j}}\big(u_q(\xi_j+\xi_l)+u_q(\xi_j-\xi_l)\big) & \text{if } k=j \\ u_q(\xi_j+\xi_k) - u_q(\xi_j-\xi_k) & \text{if } k\neq j \end{cases}$$

（其中 $u_q(\theta)$ 取自式（2.9c）），因此

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j,k\leq n} H^{(m,n)}_{\mathfrak{b};j,k}x_jx_k &= \sum_{1\leq j\leq n}\Big(2(m+1)+u_{q_0}(\xi_j)+u_{q_1}(\xi_j)\Big)x_j^2 \\ &\quad + \sum_{1\leq j<k\leq n}\Big(u_q(\xi_j+\xi_k)(x_j+x_k)^2 + u_q(\xi_j-\xi_k)(x_j-x_k)^2\Big) \\ &\geq 2(m+1)\sum_{1\leq j\leq n} x_j^2.\end{aligned}$$

用于通过牛顿法数值计算节点位置的方程 $\partial_{\xi_j} V_{(m,\,n)\;\mathfrak{b};\;\lambda}(\boldsymbol{\xi}) = 0$ 现在变为：

$$2(m+1)\xi_j + v_{q_0}(\xi_j) + v_{q_1}(\xi_j) + \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j}}\Big(v_q(\xi_j+\xi_k)+v_q(\xi_j-\xi_k)\Big) = 2\pi(\varrho_{\mathfrak{b};j}+\lambda_j), \quad (3.10)$$

对于 $j = 1,\ldots,n$。由参数空间中线性点 $(q, q_0, q_1) = (0, 0, 0)$ 处该系统的显式解，可得到相应的合适初始估计 $\xi_j = \frac{\pi}{(\lambda_j+\varrho_{\mathfrak{b};j})\,n+m+1}$，$j = 1,\ldots,n$（参见下文注记 3.2）。

注记 3.2。通过调整注记 2.2 和 2.3，可由式（3.10）推得，对于任意 $\lambda \in \Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}$ (3.6)，有 $\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}{}_{;\lambda} \in \mathbb{A}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ (3.2)，并且在 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b}\,\lambda}^{(m,n)}{}_{;}$ 处：

$$\frac{\pi(n+1-j+\lambda_j)}{m+1+\kappa_{\mathfrak{b};-}(q,q_0,q_1)} \le \xi_j \le \frac{\pi(n+1-j+\lambda_j)}{m+1+\kappa_{\mathfrak{b};+}(q,q_0,q_1)} \tag{3.11a}$$

对于 $1 \le j \le n$，以及

$$\frac{\pi(k-j+\lambda_j-\lambda_k)}{m+1+\kappa_{\mathfrak{b};-}(q,q_0,q_1)} \le \xi_j - \xi_k \le \frac{\pi(k-j+\lambda_j-\lambda_k)}{m+1+\kappa_{\mathfrak{b};+}(q,q_0,q_1)} \tag{3.11b}$$

对于 $1 \le j < k \le n$，其中

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{b};\pm}(q,q_0,q_1) :=& \frac{1}{2}\left(\frac{1-|q_0|}{1+|q_0|}\right)^{\pm 1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-|q_1|}{1+|q_1|}\right)^{\pm 1} \\ &+ (n-1)\left(\frac{1-|q|}{1+|q|}\right)^{\pm 1}.\end{aligned} \tag{3.11c}$$

这些界证实，当参数值趋于零时：

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b};\lambda}^{(m,n)}\Big|_{q,q_0,q_1=0} = \frac{\pi(\lambda+\varrho_{\mathfrak{b}})}{n+m+1} \qquad (\lambda \in \Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}), \tag{3.12}$$

其中 $\varrho_{\mathfrak{b}} := (\varrho_{\mathfrak{b},1}, \dots, \varrho_{\mathfrak{b},n})$。此外，由于在 $\boldsymbol{\xi} = {}^{\pi}{}_{(\lambda+\varrho_{\mathfrak{b}})}\overline{{}_{n+m+1}}$ $(\lambda \in \Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)})$ 处，对于任意 $-1 < q$、q_0、$q_1 < 1$，方程 (3.11a)–(3.11c) 中的不等式均成立，因此，在通过牛顿法利用方程 (3.10) 数值计算节点 $\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b}\,\lambda}^{(m,n)}{}_{;}$ 的位置时，这个特殊点可作为一个方便的初始估计。

3.4. 求积公式。设

$$\mathbb{P}_{\mathfrak{b}}^{(m,n)} := \operatorname{Span}_{\mu \in \Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}}\{M_{\mathfrak{b};\mu}(\boldsymbol{\xi})\}, \tag{3.13}$$

with

$$M_{\mathfrak{b};\mu}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{N_{\mathfrak{b};\mu}} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \epsilon \in \{1,-1\}^n}} \exp(i\epsilon_1 \xi_{\sigma_1}\mu_1 + \cdots + i\epsilon_n \xi_{\sigma_n}\mu_n) \tag{3.14a}$$

经过归一化，使得右侧的每个指数项的重数均为一：

$$N_{\mathfrak{b};\mu} := 2^{\mathrm{m}_0(\mu)} \prod_{\substack{1 \le j < k \le n \\ \mu_j - \mu_k = 0}} \frac{1+k-j}{k-j} \tag{3.14b}$$

（参见公式 (1.2)）。注意，$\mathbb{P}_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}$ 等于$\binom{m+n}{m}$维空间，即由每个变量 $z_j = \cos(\xi_j)$ $(j \in \{1,\dots,n\})$ 的次数至多为 m 的对称多项式所构成的空间。

定理 3.1（超八面体霍尔-李特尔伍德求积公式）。对于 q、q_0、$q_1 \in (-1,1)$ 和 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，以下求积公式对 $\mathbb{P}_{\mathfrak{b}}^{(2m,n)}$ 中任意对称多项式 $f(\boldsymbol{\xi})$ 均成立：

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{A}_{\mathfrak{b}}^{(n)}} f(\boldsymbol{\xi})|C_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)|^{-2}\,d\boldsymbol{\xi} = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}} f\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b};\lambda}^{(m,n)}\big)\hat{\Delta}_{\mathfrak{b};\lambda}^{(m,n)}, \tag{3.15a}$$

其中克里斯托费尔权重为

$$\hat{\Delta}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)} := \left(\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}} \left| P_{\mathsf{b};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)};q,q_0\big)\right|^2 \delta_{\mathsf{b};\mu}^{(m,n)}(q)\right)^{-1}. \tag{3.15b}$$

证明。由公式 (3.7a)、(3.7b) 中的离散正交关系可立即得出，下列矩阵是酉矩阵：

$$\left[\sqrt{\delta_{\mathsf{b};\mu}^{(m,n)}(q)}P_{\mathsf{b};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)};q,q_0\big)\sqrt{\hat{\Delta}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}}\right]_{\mu,\lambda\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}}.$$

所谓“列行对偶”是指，对于任意 μ、$\nu\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}} P_{\mathsf{b};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)};q,q_0\big)\overline{P_{\mathsf{b};\nu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)};q,q_0\big)}\hat{\Delta}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)} = \begin{cases} 1/\delta_{\mathsf{b};\mu}^{(m,n)}(q) & \text{if } \nu=\mu,\\ 0 & \text{if } \nu\neq\mu.\end{cases} \tag{3.16}$$

与式 (3.5) 中相应超八面体霍尔-利特尔伍德多项式的标准正交关系进行比较后可以看出，所断言的求积公式对如下形式的所有对称多项式 $f(\boldsymbol{\xi})$ 均成立。

$$f(\boldsymbol{\xi}) = P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)P_{\mathsf{b};\nu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0) \quad \text{with} \quad \mu,\nu\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)} \tag{3.17}$$

（此处我们用到了 $P_{\mathsf{b};\nu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)=\overline{P_{\mathsf{b};\nu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)}$）。由于所讨论的乘积张成 $\mathbb{P}_{\mathsf{b}}^{(2m,n)}$（因为 $f(\boldsymbol{\xi})$ 的单项式展开（3.17）包含 $M_{\mathsf{b};\mu+\nu}(\boldsymbol{\xi})$，以及在支配偏序下 κ 小于 $\mu+\nu$ 的对称单项式 $M_{\mathsf{b};\kappa}(\boldsymbol{\xi})$），由线性性可再次推出一般对称多项式 $f(\boldsymbol{\xi})$ 在 $\mathbb{P}_{\mathsf{b}}^{(2m,n)}$ 上的求积公式。□

定理 3.1 进而可重新诠释为一个精确的求积公式，用于对一类有理对称函数按照圆四元数系综（CQE）的密度进行积分。

推论 3.2（CQE 中的求积）。对于 $q,q_0,q_1\in(-1,1)$ 和 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$，有

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{A}_{\mathsf{b}}^{(n)}} R_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})\rho_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}} R_{\mathsf{b}}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}\big)\rho_{\mathsf{b}}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}\big)\Delta_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}$$

其中 $\Delta_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)} := |C_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)|^2\hat{}\Delta_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}$；且 $R_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi}) := f(\boldsymbol{\xi})/O_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)$，其中分母的形式为

$$O_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0) := \prod_{1\leq j<k\leq n}(1-2q\cos(\xi_j-\xi_k)+q^2)(1-2q\cos(\xi_j+\xi_k)+q^2) \times \prod_{1\leq j\leq n}(1-2q_0\cos(\xi_j)+q_0^2).$$

分子 $f(\boldsymbol{\xi})$ 可以是 $\mathbb{P}_{\mathsf{b}}^{(2m,n)}$ 中任意对称多项式。

证明。由定理 3.1 通过恒等式可立即得到

$$|C_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)|^{-2} = \rho_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})/O_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0).$$

□

注 3.3。对于 $n = 1$，定理 3.1 得到了 [DE18 中所述的 $m+1$ 节点求积公式的另一个特殊情形，即定理 5] （分别取 $d = d = 1$、$\epsilon_\pm = \tilde{\epsilon}_\pm = 1$ 和 $\alpha_1 = -q_0$ $\tilde{\alpha}_1 = -q_1$）。其精确度 D $= 2m$ 仅比最优高斯精确度 $2m+1$低一阶。对于一般的 n，我们可以按照注 2.4 的方法进行变量替换，形式如下：

$$X_j := M_{\mathfrak{b};e_1+\cdots+e_j}(\boldsymbol{\xi}), \quad j = 1, \dots, n \tag{3.19}$$

（例如参见 [HW88，第 7], [节； 3] MP11，第 [节；以及 3]HMP16，第 $f \in \Pi^{(2m,n)}$ 节），从而将定理 3.1 重新表述为一个针对 $f \in \Pi^{(2m,n)}$ 的精确（高斯）求积公式，其节点数为 dim($\Pi^{(m,n)}$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathrm{A}_{\mathfrak{b}}^{(n)}} f(X_1, \dots X_n)\frac{\sqrt{\rho_{\mathfrak{b}}(X_1, \dots, X_n)}}{O_{\mathfrak{b}}(X_1, \dots, X_n; q, q_0)}\mathrm{d}X_1 \cdots \mathrm{d}X_n \\ = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}} f\big(\boldsymbol{X}_{\mathfrak{b};\lambda}^{(m,n)}\big)\hat{\Delta}_{\mathfrak{b};\lambda}^{(m,n)},\end{aligned} \tag{3.20}$$

其中 $\rho_{\mathfrak{b}}$ 和 $O_{\mathfrak{b}}$ 指的是用新坐标 X_1，…，X_n 表示的变换后的函数，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{\mathfrak{b}}^{(n)} &:= \Big\{\big(X_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, X_n(\boldsymbol{\xi})\big) \mid \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{A}_{\mathfrak{b}}^{(n)}\Big\}, \\ \boldsymbol{X}_{\mathfrak{b};\lambda}^{(m,n)} &:= \big(X_1(\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b};\lambda}^{(m,n)}), \dots, X_n(\boldsymbol{\xi}_{\mathfrak{b};\lambda}^{(m,n)})\big).\end{aligned}$$

这里我们利用了雅可比行列式现在具有形式 $\left|\frac{\partial(X_1,\dots,X_n)}{\partial\ \xi_1\ \dots\ \xi_n}(,,)\right| = \sqrt{\rho_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{\xi})}$（例如参见 [MP11，命题 3.3]；以及 [HMP16，命题 4]）。由此可见，在当前情形下，从这一变量替换可以看出，定理 3.1 中求积公式所采用的节点数——该公式对所有 $f \in \mathbb{P}_{\mathfrak{b}}^{(2m,n)}$ 都能实现精确积分 —— 恰好等于（高斯）下界 dim($\mathbb{P}_{\mathfrak{b}}^{(m,n)}$)（例如参见[DX14，第 3.8] 章）。

注 3.4. 对称函数 $R_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{O_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)}$ 中由分母 $O_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{\xi};\, q, q_0)$ 引起简单极点的位置由以下复超平面配置给出：

$$\begin{aligned}\xi_j - \xi_k &= \frac{\pi}{2}\big(1 - \operatorname{sign}(q)\big) \pm i\log(|q|) \mod 2\pi \\ \xi_j + \xi_k &= \frac{\pi}{2}\big(1 - \operatorname{sign}(q)\big) \pm i\log(|q|) \mod 2\pi\end{aligned}$$

$(1 \le j < k \le n)$，并且

$$\xi_j = \frac{\pi}{2}\big(1 - \operatorname{sign}(q_0)\big) \pm i\log(|q_0|) \mod 2\pi$$

（$1 \le j \le n$）。在参数域 $-1 < q, q_0 < 1$ 的边界处，该极点轨迹近似于积分域 $\mathbb{A}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ (3.2) 的闭包，具体如下：（i）当 $q \to 1$ 时的边界超平面 $\xi_j - \xi_{j+1} = 0$ $(j = 1, \dots n-1)$；（ii）当 $q_0 \to 1$ 时的边界超平面 $\xi_n = 0$；（iii）当 $q \to -1$ 时穿过内部的超平面：$\xi_j \pm \xi_k = \pi$ $(1 \le j < k \le n)$；以及（iv）当 $q_0 \to -1$ 时的边界超平面 $\xi_1 = \pi$。

4. The positions of the (hyperoctahedral) Hall-Littlewood cubature nodes as roots of associated quasi-orthogonal polynomials

本节将证明，这些求积节点是 $\mathbb{P}_{\mathsf{c}}^{(m+1,n)} \setminus \mathbb{P}_{\mathsf{c}}^{(m,n)}$ 中相关拟正交多项式的公共根（其中 $\mathsf{c} = \mathsf{a}$ 或 $\mathsf{c} = \mathsf{b}$），参见下文命题4.1。

4.1. 结果陈述。对于 $\mu \in \Lambda_{\mathsf{a}}^{(m+1,n)} \setminus \Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$，令

$$Q_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi}) := P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q) - q^{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)\mathrm{m}_{\mu_n}(\mu)} P_{\mathsf{a};\mu-\omega_{\mathsf{a};\mu}}(\boldsymbol{\xi};q) \tag{4.1a}$$

with

$$\omega_{\mathsf{a};\mu} := \sum_{j=1}^{\min(\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu),\mathrm{m}_{\mu_n}(\mu))} \big(e_{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)+1-j} - e_{n-\mathrm{m}_{\mu_n}(\mu)+j}\big), \tag{4.1b}$$

对于 $\mu \in \Lambda_{\mathsf{b}}^{(m+1,n)} \setminus \Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$，令

$$\begin{aligned} Q_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi}) :=& P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0) \\ &- q^{\frac{1}{2}\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)(\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)-1)} q_1^{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)} P_{\mathsf{b};\mu-\omega_{\mathsf{b};\mu}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0) \end{aligned} \tag{4.2a}$$

with

$$\omega_{\mathsf{b};\mu} := e_1 + e_2 + \cdots + e_{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)}. \tag{4.2b}$$

这些定义保证 $\mu - \omega_{\mathsf{c};\mu} \in \Lambda_{\mathsf{c}}^{(m,n)}$，并且 $Q_{\mathsf{c};\mu}(\boldsymbol{\xi})$ 具有如下拟正交性质：所讨论的多项式分别关于内积 (2.6) 和 (3.5)，与 $\mathbb{P}_{\mathsf{c}}^{(m,n)}$ 的有限维子空间正交；该子空间由单项式 $M_{\mathsf{c};\nu}(\boldsymbol{\xi})$ 张成，其中 $\nu \in \Lambda_{\mathsf{c}}^{(m,n)}$ 在支配偏序中小于 $\mu - \omega_{\mathsf{c};\mu}$（$\mathsf{c} \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$）。

命题 4.1（求积节点是 $Q_{\mathsf{c};\mu}(\boldsymbol{\xi})$ 的根）。对于 $\mathsf{c} \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$，(超八面体) Hall-Littlewood求积节点 $\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{c}\,\lambda}^{(m,n)}$, $\lambda \in \Lambda_{\mathsf{c}}^{(m,n)}$是多项式 $Q_{\mathsf{c};\mu}(\boldsymbol{\xi})$, $\mu \in \Lambda_{\mathsf{c}}^{(m+1,n)} \setminus \Lambda_{\mathsf{c}}^{(m,n)}$ 的公共根，其中 $n_{\mathsf{a}} := n-1$ 且$n_{\mathsf{b}} := n$。

注4.1。由命题 4.1 可知，在 $q_1 = 0$ 时，有 $Q_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi}) = P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};\, q, q_0)$，其中 $\mu \in \Lambda_{\mathsf{b}}^{(m+1,n)} \setminus \Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$。因此，在这种情况下，求积节点是超八面体霍尔-利特尔伍德多项式 $P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};\, q, q_0)$,$\mu \in \Lambda_{\mathsf{b}}^{(m+1,n)} \setminus \Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$ 的公共根。式 (3.5) 和 (3.16) 中内积之间的等式由此推广到所有 $\mu \in \Lambda_{\mathsf{b}}^{(m+1,n)}$ 且 $\nu \in \Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$。因此，在$q_1 = 0$ 时，定理 3.1 中的求积公式对 $\mathbb{P}^{2m+1}{}_{,\mathsf{b}}{}^{n}$ 中所有的 $f(\boldsymbol{\xi})$ 均成立，即此时精确度提升至最优高斯值 $2m+1$。

4.2. 当 $\mathsf{c} = \mathsf{a}$ 时命题 4.1 的证明。为推导该命题，暂时将 $P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q)$（2.5a）、（2.5b）的定义方便地扩展到任意 $\mu \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$。相应的 Hall-Littlewood多项式已知满足以下标准化规则（参见例如 [M95，第 III 章 §2，例 2]）。

引理 4.2（标准化规则）。对于任意 $\mu \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$，有 tha t

$$\mu_j - \mu_{j+1} = -1 \Longrightarrow P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q) = qP_{\mathsf{a};\mu+e_j-e_{j+1}}(\boldsymbol{\xi};q) \quad (j \in \{1,\ldots,n-1\}).$$

证明。对于 $j \in \{1,\dots,n-1\}$，令 r_j 通过交换 ξ_j 和 ξ_{j+1} 作用于 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ 的各分量：

$$r_j(\xi_1,\dots,\xi_n) := (\xi_1,\dots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\xi_j,\xi_{j+2},\dots,\xi_n).$$

Then

$$\frac{C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q)}{C_{\mathsf{a}}(r_j\boldsymbol{\xi};q)} = \frac{q - e^{i(\xi_j-\xi_{j+1})}}{1 - qe^{i(\xi_j-\xi_{j+1})}},$$

因此

$$C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q) + C_{\mathsf{a}}(r_j\boldsymbol{\xi};q)e^{i(\xi_j-\xi_{j+1})} = qC_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q)e^{i(\xi_j-\xi_{j+1})} + qC_{\mathsf{a}}(r_j\boldsymbol{\xi};q).$$

将后一恒等式两边乘以 $\exp(i\xi_1\mu_1+\cdots+i\xi_n\mu_n)$，其中 $\mu \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})$，且满足 $\mu_j - \mu_{j+1} = -1$（因此 $r_j\mu = \mu + e_j - e_{j+1}$），然后对（作用于 $\boldsymbol{\xi}$ 上的）置换作用进行对称化，即可得到所述标准化规则。□

此外，在求积节点 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a}\,\lambda}^{(m,n)}$ 处，变量 $\xi_1,\dots,\xi_n$ 满足一组代数关系：

$$e^{im\xi_j} = (-1)^{n-1} \prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne j}} \left(\frac{1 - qe^{i(\xi_j-\xi_k)}}{e^{i(\xi_j-\xi_k)} - q}\right) \qquad (j = 1,\dots,n). \tag{4.3}$$

事实上，将式 (2.11) 两边乘以虚数单位并借助恒等式进行指数运算后，式 (4.3) 便可直接得到

$$\exp\bigl(-iv_q(\vartheta)\bigr) = \left(\frac{1 - qe^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta} - q}\right) \qquad (-1 < q < 1).$$

在这种情况下，Hall-Littlewood多项式还满足上述标准化规则的一个仿射类比（参见文献 [D06]）。

引理 4.3（仿射直化规则）。对于任意 $\mu \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})$ 及满足式 (4.3) 的变量 $\boldsymbol{\xi}$，有

$$\mu_1 - \mu_n = m + 1 \Longrightarrow P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q) = qP_{\mathsf{a};\mu-e_1+e_n}(\boldsymbol{\xi};q).$$

证明。令 r_{a} 通过转置 ξ_1 和 ξ_n 作用于 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ 的各分量：

$$r_{\mathsf{a}}(\xi_1,\dots,\xi_n) := (\xi_n,\xi_2,\dots,\xi_{n-1},\xi_1).$$

于是式 (4.3) 意味着

$$e^{im(\xi_1-\xi_n)} = \frac{C_{\mathsf{a}}(r_{\mathsf{a}}\boldsymbol{\xi};q)}{C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q)} \left(\frac{1 - qe^{i(\xi_1-\xi_n)}}{q - e^{i(\xi_1-\xi_n)}}\right),$$

从而

$$C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q) + C_{\mathsf{a}}(r_{\mathsf{a}}\boldsymbol{\xi};q)e^{-i(m+1)(\xi_1-\xi_n)} = qC_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q)e^{-i(\xi_1-\xi_n)} + qC_{\mathsf{a}}(r_{\mathsf{a}}\boldsymbol{\xi};q)e^{-im(\xi_1-\xi_n)}.$$

将后一恒等式两边乘以 $\exp(i\xi_1\mu_1+\cdots+i\xi_n\mu_n)$，其中 $\mu \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})$ 满足 $\mu_1-\mu_n = m+1$（因此 $r_{\mathsf{a}}\mu = \mu-(m+1)(e_1-e_n)$），再对（作用于 $\boldsymbol{\xi}$ 上的）置换作用进行对称化，即可得到所述的仿射直化规则。□

通过反复应用引理 4.2 和 4.3 中的直化规则，命题 4.1 即得。事实上，若先将引理 4.3 中的仿射直化规则应用于$P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q)$，其中 $\mu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m+1,n)}\setminus\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$，然后通过反复使用换位并应用引理 4.2 的直化规则，将 $\mu-e_1+e_n$ 的各分量重新排列为弱递减顺序，那么很容易看出，在 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a}\,\lambda}^{(m,n)}$,$\lambda\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$:

$$P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q)=q^{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)+\mathrm{m}_{\mu_n}(\mu)-1}P_{\mathsf{a};\mu-e_{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)}+e_{n-\mathrm{m}_{\mu_n}(\mu)+1}}(\boldsymbol{\xi};q).$$

对后一个关系进行迭代可得，在 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a}\,\lambda}^{(m,n)}$, $\lambda\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$:

$$P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};q)=q^{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)\mathrm{m}_{\mu_n}(\mu)}P_{\mathsf{a};\mu-\omega_{\mathsf{a};\mu}}(\boldsymbol{\xi};q),$$

这就完成了命题在 $\mathsf{c}=\mathsf{a}$ 情形下的证明。

4.3. 命题 4.1 在 $\mathsf{c}=\mathsf{b}$ 情形下的证明。上述针对 $\mathsf{c}=\mathsf{a}$ 情形的证明很容易推广到 $\mathsf{c}=\mathsf{b}$ 的情形。具体而言，在暂时将 $P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)$ (3.4a)、(3.4b) 的定义扩展到任意 $\mu\in\mathbb{Z}^n$ 后，我们首先验证相应的标准化规则（参见 [NR03，命题 2.1]）。

引理 4.4（标准化规则）。对于任意 $\mu\in\mathbb{Z}^n$，有

$$\mu_j-\mu_{j+1}=-1\Longrightarrow P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)=qP_{\mathsf{b};\mu+e_j-e_{j+1}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)\quad(j\in\{1,\ldots,n-1\}).$$

证明。采用引理 4.2 证明中的记号，我们再次有

$$\frac{C_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)}{C_{\mathsf{b}}(r_j\boldsymbol{\xi};q,q_0)}=\frac{q-e^{i(\xi_j-\xi_{j+1})}}{1-qe^{i(\xi_j-\xi_{j+1})}}\qquad(j\in\{1,\ldots,n-1\}).$$

因此，标准化规则的推导方式与之前相同，只不过现在$\mu\in\mathbb{Z}^n$ （带有 $\mu_j-\mu_{j+1}=-1$），并且我们改为相对于（作用于 $\boldsymbol{\xi}$ 上的）带符号置换作用进行对称化。□

变量 ξ_1、……、ξ_n 之间的附加代数关系在节点 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b}\,\lambda}^{(m,n)}$; 、 $\lambda\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$ 处成立，其推导方式类似：将式 (3.10) 指数化即可得到:

$$\begin{aligned}e^{2i(m+1)\xi_j}=&\left(\frac{1-q_0e^{i\xi_j}}{e^{i\xi_j}-q_0}\right)\left(\frac{1-q_1e^{i\xi_j}}{e^{i\xi_j}-q_1}\right)\\&\times\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\k\neq j}}\left(\frac{1-qe^{i(\xi_j+\xi_k)}}{e^{i(\xi_j+\xi_k)}-q}\right)\left(\frac{1-qe^{i(\xi_j-\xi_k)}}{e^{i(\xi_j-\xi_k)}-q}\right)\qquad(j=1,\ldots,n).\end{aligned}\tag{4.4}$$

现在我们 得到了以下仿射直化规 则。

引理 4.5（仿射直化规则）。对于任意 $\mu\in\mathbb{Z}^n$ 和满足式 (4.4) 的变量 $\boldsymbol{\xi}$，有:

$$\mu_1=m+1\Longrightarrow P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)=q_1P_{\mathsf{b};\mu-e_1}(\boldsymbol{\xi};q,q_0).$$

证明。令 r_{b} 通过翻转 ξ_1 的符号作用于 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 的各个分量:

$$r_{\mathsf{b}}(\xi_1,\ldots,\xi_n):=(-\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n).$$

于是，式 (4.4) 与 $j=1$ 可改写为

$$e^{2i(m+1)\xi_1}=\frac{C_{\mathsf{b}}(r_{\mathsf{b}}\boldsymbol{\xi};q,q_0)}{C_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)}\left(\frac{1-q_1e^{i\xi_1}}{q_1e^{-i\xi_1}-1}\right),$$

这意味着

$$C_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)+C_{\mathsf{b}}(r_{\mathsf{b}}\boldsymbol{\xi};q,q_0)e^{-2i(m+1)\xi_1}= \\ q_1C_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)e^{-i\xi_1}+q_1C_{\mathsf{b}}(r_{\mathsf{b}}\boldsymbol{\xi};q,q_0)e^{-i(2m+1)\xi_1}.$$

将后一个恒等式两边乘以 $\exp(i\xi_1\mu_1+\cdots+i\xi_n\mu_n)$，其中$\mu\in\mathbb{Z}^n$ 满足 $\mu_1=m+1$（因此 $r_{\mathsf{b}}\mu=\mu-2(m+1)e_1$），在关于带符号置换作用（作用于 $\boldsymbol{\xi}$）进行对称化时，即可得到所断言的仿射直化规则。□

首先对带有 $\mu\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m+1,n)}\setminus\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$ 的 $P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)$ 应用引理 4.5 的仿射直化规则，然后借助引理 4.4 将 $\mu-e_1$ 的各分量按弱递减顺序重新排列，由此可推得，对于 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b}\,\lambda}^{(m,n)}$，$\lambda\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$：

$$P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)=q^{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)-1}q_1P_{\mathsf{b};\mu-e_{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0).$$

通过反复迭代这一过程，我们得到

$$P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)=q^{\frac{1}{2}\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)(\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)-1)}q_1^{\mathrm{m}_{\mu_1}(\mu)}P_{\mathsf{b};\mu-\omega_{\mathsf{b};\mu}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0),$$

从而完成了命题在 $\mathsf{c}=\mathsf{b}$ 中的证明。

5. Specialization to planar domains: determinantal formula for the Christoffel weights

为了将推论 2.2 和 3.2 中的求积公式转化为有效的数值工具，需要给出克里斯托费尔权重 $\Delta_{\mathsf{c}\,\lambda}^{(m,n)}$ 的紧凑表达式。对于 $n_{\mathsf{c}}=1$，通过特化[DE18 中的定理 5]（参见备注 2.4 和 3.3），即可直接得到实现这一目的的显式公式。在本节中，我们将克里斯托费尔权重的相应公式推广到平面情形：$n_{\mathsf{c}}=2$。所关注的求积公式分别用于在等边三角形和等腰直角三角形上对（三角）有理函数进行积分；因此，它们属于多项式空间中三角形区域上的求积公式（参见例如文献 [C73、LC94、P16]）以及三角多项式空间中的求积公式（参见例如文献 [MK06、LSX08、LSX 10]）这一丰富传统的一部分。

5.1. 等边三角形上的积分。对于 $n=2$ 和 $n=3$，基本区域 $\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}$(2.1) 分别由一条线段和一个等边三角形组成。在这些情况下，以下命题给出了推论 2.2 中克里斯托费尔权重的行列式公式。

命题 5.1（$\Delta_{\mathsf{a}\,\lambda}^{(m,n)}$，$n_{\mathsf{a}}\le 2$ 的行列式公式）。对于 $n_{\mathsf{a}}=n-1\le 2$，推论 2.2 中的克里斯托费尔权重具有如下形式

$$\Delta_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)}=\frac{m}{n}\left(\det\left[H_{\mathsf{a};j,k}^{(m,n)}(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)})\right]_{1\le j,k\le n}\right)^{-1},\tag{5.1}$$

其中 $H_{\mathsf{a}\;k}^{(m,n)}{}_{;j,}(\boldsymbol{\xi})$ 取自公式 (2.10)。

证明。所述行列式公式可直接由定理 2.1 和推论 2.2 中的克里斯托费尔权重表达式得到，只需应用 [D07，命题 3] 中的行列式求值公式即可。□

注 5.1. 在平面情形中，注 2.4 的求积在坐标 $X_1 = \cos(\xi_1) + \cos(\xi_2) + \cos(\xi_1 + \xi_2)$、$X_2 = \sin(\xi_1) + \sin(\xi_2) - \sin(\xi_1 + \xi_2)$ 下（其中 $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ 使得 $\xi_1 - \xi_2 > 0$, $\xi_1 + 2\xi_2 > 0$ 和 $2\xi_1 + \xi_2 < 2\pi$）成为一个对施泰纳三尖瓣线围成的内部区域进行积分的求积公式，该区域的面积为 2π（例如参见 [K74iii，第 3]节）。

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathrm{A}_{\mathsf{a}}^{(3)}} f(X_1,X_2)\frac{\sqrt{\rho_{\mathsf{a}}(X_1,X_2)}}{O_{\mathsf{a}}(X_1,X_2;q)}\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 = \sum_{\substack{l_1,l_2\geq 0\\ l_1+l_2\leq m}} f\big(\boldsymbol{X}^{(m,3)}_{\mathsf{a};l_1\omega_1+l_2\omega_2}\big)\hat{\Delta}^{(m,3)}_{\mathsf{a};l_1\omega_1+l_2\omega_2}, \tag{5.2}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\mathsf{a}}^{(3)} =& \{(X_1,X_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \rho_{\mathsf{a}}(X_1,X_2)>0\},\\
\rho_{\mathsf{a}}(X_1,X_2) =& 8(X_1^3-3X_1X_2^2)-(X_1^2+X_2^2+9)^2+108,\\
O_{\mathsf{a}}(X_1,X_2;q) =& 1+q^6-(q+q^5)\big(X_1^2+X_2^2-3\big)\\
&+(q^2+q^4)\big(6-5(X_1^2+X_2^2)+2(X_1^3-3X_1X_2^2)\big)\\
&-q^3\big((X_1^2+X_2^2+3)^2-4(X_1^3-3X_1X_2^2)-16\big),\\
\hat{\Delta}^{(m,3)}_{\mathsf{a};l_1\omega_1+l_2\omega_2} =& \frac{\rho_{\mathsf{a}}\big(\boldsymbol{X}^{(m,3)}_{\mathsf{a};l_1\omega_1+l_2\omega_2}\big)}{O_{\mathsf{a}}\big(\boldsymbol{X}^{(m,2)}_{\mathsf{b};l_1\omega_1+l_2\omega_2};q\big)}\Delta^{(m,3)}_{\mathsf{a};l_1\omega_1+l_2\omega_2},
\end{aligned}$$

且 $f(X_1, X_2)$ 可以是关于 X_1、X_2 的总次数至多为 $2m-1$ 的任意多项式。对于 $q=0$，求积公式 (5.2) 可见于 [LSX08, 第 5.2] 节（另见下文第 6.1 节）；对于 $q\to 1$，可见于 [MK06, 第 3.4], [节、3]LSX08, 第 5. [节以及 1] HMP16, 第 4.1] 节（另见下文第 6.3 节）。

5.2. 等腰直角三角形上的积分。当$n=1$ 且 $n=2$时，基本域 $\mathbb{A}_{\mathsf{b}}^{(n)}$ (3.2)分别归结为一条线段和一个等腰直角三角形。推论 3.2 中相应的克里斯托费尔权重由以下行列式公式给出。

命题 5.2（ $\Delta^{(m,n)}_{\mathsf{b}\,\lambda}$;, $n_{\mathsf{b}}\leq 2$ 的行列式公式）。对于 $n_{\mathsf{b}}=n\leq 2$，推论 3.2 中的克里斯托费尔权重具有如下形式

$$\Delta^{(m,n)}_{\mathsf{b};\lambda} = \left(\det\Big[H^{(m,n)}_{\mathsf{b};j,k}(\boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathsf{b};\lambda})\Big]_{1\leq j,k\leq n}\right)^{-1}, \tag{5.3}$$

其中，$H^{(m,n)}_{\mathsf{b}\ \ k}$; $_{j,}$ (ξ) 取自式 (3.9)。

证明。证明的思路是，为定理 3.1 和推论 3.2 中克里斯托费尔权重的表示给出相应的行列式求值公式。为此，利用求积节点 $\boldsymbol{\xi}^{(m,n)}_{\mathsf{b}\,\lambda}$;, $\lambda\in\Lambda^{(m,n)}$ 满足式 (4.4) 中的关系。具体而言，由式 (3.4a)、(3.4b) 中超八面体霍尔-利特尔伍德多项式的显式公式可得

that

$$|C_{\mathtt{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)|^{-2}\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathtt{b}}^{(m,n)}}\left|P_{\mathtt{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)\right|^2\delta_{\mathtt{b};\mu}^{(m,n)}(q) \tag{5.4a}$$

$$=\sum_{\substack{\sigma,\sigma'\in S_n\\ \epsilon,\epsilon'\in\{1,-1\}^n}}\frac{C_{\mathtt{b}}\left(\epsilon_1\xi_{\sigma_1},\ldots,\epsilon_n\xi_{\sigma_n};q,q_0\right)}{C_{\mathtt{b}}\left(\epsilon_1'\xi_{\sigma_1'},\ldots,\epsilon_n'\xi_{\sigma_n'};q,q_0\right)}G_{\mathtt{b}}\left(\epsilon_1\xi_{\sigma_1}-\epsilon_1'\xi_{\sigma_1'},\ldots,\epsilon_n\xi_{\sigma_n}-\epsilon_n'\xi_{\sigma_n'}\right),$$

其中

$$G_{\mathtt{b}}(\xi_1,\ldots,\xi_n):=\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathtt{b}}^{(m,n)}}\delta_{\mathtt{b};\mu}^{(m,n)}(q)e^{i\mu_1\xi_1+\cdots+i\mu_n\xi_n}. \tag{5.4b}$$

对于 $n=1$，这简化为

$$2(m+1)+\frac{C_{\mathtt{b}}(\xi_1;q,q_0)}{C_{\mathtt{b}}(-\xi_1;q,q_0)}G_{\mathtt{b}}(2\xi_1)+\frac{C_{\mathtt{b}}(-\xi_1;q,q_0)}{C_{\mathtt{b}}(\xi_1;q,q_0)}G(-2\xi_1) \tag{5.5a}$$

with

$$G_{\mathtt{b}}(\xi_1)=\sum_{0\le\mu_1\le m}e^{i\mu_1\xi_1}, \tag{5.5b}$$

而对于 $n=2$，可得

$$\sum_{\substack{\sigma,\sigma'\in S_2\\ \epsilon,\epsilon'\in\{1,-1\}^2}}\frac{C_{\mathtt{b}}\left(\epsilon_1\xi_{\sigma_1},\epsilon_2\xi_{\sigma_2};q,q_0\right)}{C_{\mathtt{b}}\left(\epsilon_1'\xi_{\sigma_1'},\epsilon_2'\xi_{\sigma_2'};q,q_0\right)}G_{\mathtt{b}}\left(\epsilon_1\xi_{\sigma_1}-\epsilon_1'\xi_{\sigma_1'},\epsilon_2\xi_{\sigma_2}-\epsilon_2'\xi_{\sigma_2'}\right) \tag{5.6a}$$

with

$$G_{\mathtt{b}}(\xi_1,\xi_2)=\sum_{m\ge\mu_1>\mu_2\ge0}e^{i\mu_1\xi_1+i\mu_2\xi_2}+\frac{1}{1+q}\sum_{m\ge\mu_1=\mu_2\ge0}e^{i\mu_1\xi_1+i\mu_2\xi_2}. \tag{5.6b}$$

在这两种情况下，对相关几何级数求和，随后利用式（4.4）中的关系消去所有 $e^{\pm im\xi_j}(j=1,\ldots,n)$，会得到一个（繁琐的）表达式，可将其改写为 det $\left[H_{\mathtt{b}\,j\,k}^{(m,n)}\ ;\ ,\ (\boldsymbol{\xi})\right]_{1\le j,\ k\le n_\circ}$

□

注 5.2. 在平面情形下，注 3.3 中以坐标$X_1=2\cos(\xi_1)+2\cos(\xi_2)$、 $X_2=2\cos(\xi_1+\xi_2)+2\cos(\xi_1-\xi_2)$（其中 $(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$使得 $\pi>\xi_1>\xi_2>0$）表示的求积公式，变为在抛物线 $X_1^2-4X_2=0$ 以及直线 $-2X_1+X_2+4=0$ 和 $2X_1+X_2+4=0$ 所围成区域上的积分公式（例如参见 [K74i，第 3] 节）：

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathrm{A}_{\mathtt{b}}^{(2)}}f(X_1,X_2)\frac{\sqrt{\rho_{\mathtt{b}}(X_1,X_2)}}{O_{\mathtt{b}}(X_1,X_2;q,q_0)}\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \tag{5.7}$$

$$=\sum_{m\ge\lambda_1\ge\lambda_2\ge0}f\big(\boldsymbol{X}_{\mathtt{b};(\lambda_1,\lambda_2)}^{(m,2)}\big)\hat{\Delta}_{\mathtt{b};(\lambda_1,\lambda_2)}^{(m,2)},$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\mathsf{b}}^{(2)} =&\{(X_1,X_2)\in\mathbb{R}^2 \mid X_1^2-4X_2>0,\, -2|X_1|+X_2+4>0\},\\
\rho_{\mathsf{b}}(X_1,X_2) =&(X_1^2-4X_2)(2X_1+X_2+4)(-2X_1+X_2+4),\\
O_{\mathsf{b}}(X_1,X_2;q,q_0) =&\big(1+q^4-(q+q^3)X_2+q^2(X_1^2-2X_2-2)\big)\\
&\times\big(1+q_0^4-(q_0+q_0^3)X_1+q_0^2(X_2+2)\big),\\
\hat{\Delta}_{\mathsf{b};(\lambda_1,\lambda_2)}^{(m,2)} =&\frac{\rho_{\mathsf{b}}\big(\boldsymbol{X}_{\mathsf{b};(\lambda_1,\lambda_2)}^{(m,2)}\big)}{O_{\mathsf{b}}\big(\boldsymbol{X}_{\mathsf{b};(\lambda_1,\lambda_2)}^{(m,2)};q,q_0\big)}\Delta_{\mathsf{b};(\lambda_1,\lambda_2)}^{(m,2)},
\end{aligned}$$

且 $f(X_1,X_2)$ 可以是关于 X_1,X_2 的任意总次数不超过 $2m$ 的多项式。对于 $q,q_0\in\{0,1\}$，求积公式 (5.7) 属于平面求积这一类；更一般地，这类求积公式在 [MP11、X12、MMP 14] 和 [HMP16 第 4 节中已有研究。（另见下文第 6.2 节和第 6.4 节。）

5.3. $\Delta_{\mathsf{c}\,\lambda}^{(m,n)}$;且 $n_{\mathsf{c}}>2$ 时行列式公式的数值检验。命题 5.1 和命题 5.2 中关于克里斯托费尔权重的行列式公式，预计实际上对 $n_{\mathsf{c}}>2$ 也成立；但若按照上述证明的思路直接验证 $n_{\mathsf{c}}=2$，很快就会演变成一场极其繁琐的计算攻坚。另一方面，对于 $f(\boldsymbol{\xi})\equiv 1$，我们可以结合式 (2.18) 和 (3.16) 中的正交关系（其中 $\mu=\nu=0$），以及 Macdonald 常数项恒等式（参见 [M00，第 10] 节），将所考虑的多重积分显式地计算为闭式。

$$P_{\mathsf{a};0}(\boldsymbol{\xi};q)=P_{\mathsf{b};0}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)=\prod_{1\leq j<k\leq n}\frac{1-q^{1+k-j}}{1-q^{k-j}}=\prod_{1\leq j\leq n}\frac{1-q^j}{1-q}. \tag{5.8}$$

通过与求积公式产生的积分（精确）值进行比较，可得到克里斯托费尔权重的以下恒等式：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathsf{c}}^{(m,n)}}|C_{\mathsf{c}}(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{c};\lambda}^{(m,n)})|^{-2}\Delta_{\mathsf{c};\lambda}^{(m,n)}=\prod_{1\leq j\leq n}\frac{1-q}{1-q^j} \tag{5.9}$$

（其中，当 \(c \= a\) 时，\($C_{\mathsf{c}}(\boldsymbol{\xi};q):=C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q)$\)（2.5b）；当 \(c =b\) 时，\($C_{\mathsf{c}}(\boldsymbol{\xi}):=C_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0)$\)（3.4b））。对于 \($m=1$\)，所考虑的恒等式特化为

$$\sum_{0\leq j\leq n_{\mathsf{c}}}|C_{\mathsf{c}}(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{c};\omega_{\mathsf{c};j}}^{(1,n)})|^{-2}\Delta_{\mathsf{c};\omega_{\mathsf{c};j}}^{(1,n)}=\prod_{1\leq j\leq n}\frac{1-q}{1-q^j}, \tag{5.10}$$

其中，若 \(c\) = \(a\)，则 $\omega_{\mathsf{c};j}:=\omega_j$ (2.4b)；若 \(c\) = \(b\)，则 $\omega_{\mathsf{c};j}:=e_1+\cdots+e_j$，并约定 $\omega_{\mathsf{c};0}:=0$。

表 1 和表 2 给出了 $m=1$ 和 $n_{\mathsf{c}}=3$ 的数值示例，其中列出了求积节点、由行列式公式预测的克里斯托费尔权重值，以及节点处的（超八面体）Hall-Littlewood 正交测度值。这些表中的数据是使用 Maple 以 8 位精度计算得出的。表 3 和表 4 分别展示了通过公式 (2.11) 和 (3.10) 计算相关节点时牛顿法的二次收敛；为了展示直到第四次迭代的收敛情况，我们使用 Maple 进行了 50 位高精度计算。

表 1 和表 2 的数据与公式（5.10）中的等式一致（在表格数值精度范围内）。事实上，当 c =a 时，左侧得到 0.53850,

这与右侧的 15625 29016 在小数点~~后五~~位时相同。类似地，当 c = b 时，左侧得到 0.67205，与右侧的 125 186 相差小数点后第五位的一个单位（~~这~~是由表格数据产生的舍入误差造成的）。

作为第二项检验，我们在精确积分区域之外，使用克里斯托费尔权重的行列式表达式，对所讨论的求积公式进行了测试。为此，函数

$$\exp(\tfrac{1}{2}\cos\xi_1+\cdots+\tfrac{1}{2}\cos\xi_n)/O_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q) \quad (5.11a)$$

$(=\exp(\frac{1}{2}\mathrm{Re}(M_{a;\omega_1(\boldsymbol{\xi})}))/O_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi};q))$ 在 $q=\frac{1}{5}$ 条件下，于 Maple 中以 8 位精度针对权函数 $\rho_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi})$ 进行了积分，分别取 $n=3$ （此时行列式表达式由命题 5.1 证明成立）和 $n=4$ （此时行列式表达式尚属猜想）。表 5 显示，对于 $m=1$，两种情况下，推论 2.2 中相应的霍尔-利特尔伍德求积公式均略优于命题 6.1（下文）中的相应舒尔求积公式。类似地，函数

$$\exp(\cos\xi_1+\cdots+\cos\xi_n)/O_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0) \quad (5.11b)$$

$(=\exp(\frac{1}{2}M_{\mathsf{b};\omega_1(\boldsymbol{\xi})})/O_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi};q,q_0))$ 在权函数 $\rho_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})$ 下，针对 $q=\frac{1}{5}$, $q_0=\frac{1}{3}$ 和 $q_1=\frac{1}{7}$，使用 Maple 以 8 位精度进行了积分；对于 $m=1$，表6显示，推论 3.2 中相应的超八面体霍尔-李特尔伍德求积公式明显优于式 (6.4)（下文）中的辛舒尔求积，无论是 $n=2$ （其行列式表达式由命题 5.3 证明成立），还是 $n=3$ （其行列式表达式仍属猜想）。

表7表明，随着节点数量增加，在这两个例子中，平面（超八面体）霍尔-利特尔伍德求积均明显优于（辛）舒尔求积。为达到所需精度，计算后一个表时使用 Maple 并采用了 12 位精度。

TABLE 1. 四面体上的霍尔-利特尔伍德求积 $\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(4)}$（2.1）：求积节点、克里斯托费尔权重（通过行列式公式（5.1））以及 $n_{\mathsf{a}}=3$ 和 $m=1$ 的正交测度，其中 $q=\frac{1}{5}$。

	$\boldsymbol{\xi}^{(1,4)}_{\mathsf{a};\omega_{\mathsf{a};j}}$	$\Delta^{(1,4)}_{\mathsf{a};\omega_{\mathsf{a};j}}$	$\lvert C_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}^{(1,4)}_{\mathsf{a};\omega_{\mathsf{a};j}})\rvert^{-2}$
$j=0$	(1.7848, 0.58020, −0.58020, −1.7848)	$2.6453\cdot10^{-3}$	50.892
$j=1$	(2.9276, 0.21398, −0.99059, −2.1510)	$2.6453\cdot10^{-3}$	50.892
$j=2$	(2.5614, 1.3568, −1.3568, −2.5614)	$2.6453\cdot10^{-3}$	50.892
$j=3$	(2.1510, 0.99059, −0.21398, −2.9276)	$2.6453\cdot10^{-3}$	50.892

6. DEGENERATIONS: $q=0$ AND $q=1$

定理 2.1 和 3.1 中的（超八面体）Hall-Littlewood求积公式，结果统一了文献中此前提出的若干求积公式。本节将通过特化 $q=0$ 和 $q=1$，列举几个例子。

TABLE 2. 四面体上的超八面体霍尔-李特尔伍德求积公式 $\mathbb{A}_{\mathsf{b}}^{(3)}$ (3.2)：求积节点、克里斯托费尔权重（通过行列式公式 (5.3)），以及 $n_{\mathsf{b}} = 3$和 $m = 1$的正交测度，其中 $q = \frac{1}{5}$、 $q_0 = \frac{1}{3}$、 $q_1 = \frac{1}{7}$。

	$\boldsymbol{\xi}^{(1,3)}_{\mathsf{b}\,\omega_{\mathsf{b};j}}$	$\Delta^{(1,3)}_{\mathsf{b};\omega_{\mathsf{b};j}}$	$\lvert C_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi}^{(1,3)}_{\mathsf{b}\,\omega_{\mathsf{b};j}})\rvert^{-2}$
$j=0$	(1.6920, 1.1134, 0.56095)	$9.1533 \cdot 10^{-4}$	98.915
$j=1$	(2.3903, 1.1508, 0.57998)	$1.0877 \cdot 10^{-3}$	232.57
$j=2$	(2.4257, 1.7964, 0.60785)	$1.1607 \cdot 10^{-3}$	212.18
$j=3$	(2.4470, 1.8327, 1.2423)	$1.1394 \cdot 10^{-3}$	72.198

TABLE 3. 节点 $\boldsymbol{\xi}^{(1,4)}_{\mathsf{a};\omega_{\mathsf{a};j}}$ 与从初始估计$\frac{2\pi}{5}$（$\omega_{\mathsf{a};j} + \varrho_{\mathsf{a}}$）开始的式（2.11）牛顿迭代值之间的欧几里得距离，其中 $q = \frac{1}{5}$。

	0	1	2	3	4
$j=0$	$1.57 \cdot 10^{-1}$	$8.49 \cdot 10^{-4}$	$9.32 \cdot 10^{-8}$	$1.08 \cdot 10^{-15}$	$1.53 \cdot 10^{-31}$
$j=1$			idem		
$j=2$			idem		
$j=3$			idem		

TABLE 4. 节点 $\boldsymbol{\xi}^{(1,3)}_{\mathsf{b}}\,;\,\omega_{\mathsf{b};j}$ 与从初始估计$\frac{\pi}{5}(\omega_{\mathsf{b};j} + \varrho_{\mathsf{b}})$出发、对方程（3.10）进行牛顿迭代所得结果之间的欧几里得距离，其中 $q = \frac{1}{5}$、 $q_0 = \frac{1}{3}$、 $q_1 = \frac{1}{7}$。

	0	1	2	3	4
$j=0$	$2.50 \cdot 10^{-1}$	$3.35 \cdot 10^{-3}$	$7.49 \cdot 10^{-7}$	$4.02 \cdot 10^{-14}$	$1.29 \cdot 10^{-28}$
$j=1$	$1.69 \cdot 10^{-1}$	$8.19 \cdot 10^{-4}$	$4.82 \cdot 10^{-8}$	$1.66 \cdot 10^{-16}$	$2.11 \cdot 10^{-33}$
$j=2$	$1.26 \cdot 10^{-1}$	$2.70 \cdot 10^{-4}$	$3.12 \cdot 10^{-9}$	$6.72 \cdot 10^{-19}$	$3.15 \cdot 10^{-38}$
$j=3$	$8.56 \cdot 10^{-2}$	$2.03 \cdot 10^{-4}$	$9.34 \cdot 10^{-10}$	$4.86 \cdot 10^{-20}$	$1.60 \cdot 10^{-40}$

TABLE 5. 使用行列式公式 (5.1) 的 Hall-Littlewood 求积 HLC（推论 2.2）与舒尔求积 SC（命题 6.1）在对 $\rho_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi})$ 积分测试函数 (5.11a) 时，对 $m = 1$ （其中 $q = \frac{1}{5}$ ）的比较。

	$n_{\mathsf{a}} = 2$		$n_{\mathsf{b}} = 3$	
	值 积分	相对的 误差	值 积分	相对的 误差
Maple	0.7317		0.5825	
HLC	0.7450	$1.8 \cdot 10^{-2}$	0.5926	$1.7 \cdot 10^{-2}$
SC	0.6862	$6.2 \cdot 10^{-2}$	0.5452	$6.4 \cdot 10^{-2}$

6.1. $\mathsf{c} = \mathsf{a}$ 的舒尔求积。当 $q = 0$ 霍尔-利特尔伍德多项式 $P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi}; q)$ (2.5a)、(2.5b) 简化为舒尔多项式时。定理 2.1（在其代数

TABLE 6. 使用行列式公式 (5.3) 的超八面体霍尔-利特尔伍德求积 HHLC （推论 3.2 ）与辛舒尔求积 SSC （式 (6.4) ）的比较：在 $q = \frac{1}{5}$、$q_0 = \frac{1}{3}$ 和 $q_1 = \frac{1}{7}$ 条件下，将测试函数 (5.11b) 对 $\rho_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})$ 积分。

	$n_{\mathsf{b}} = 2$		$n_{\mathsf{b}} = 3$	
	数值积分	相对误差	数值积分	相对误差
Maple	1.17979		0.964386	
HHLC	1.18029	$4.2 \cdot 10^{-4}$	0.964801	$4.3 \cdot 10^{-4}$
SSC	1.11198	$5.7 \cdot 10^{-2}$	0.905819	$6.1 \cdot 10^{-2}$

TABLE 7. 测试函数 (5.11a)、(5.11b) 对 $\rho_{\mathsf{c}}(\boldsymbol{\xi})$ 积分时的相对求积误差比较，其中 $n_{\mathsf{c}} = 2(q = \frac{1}{5}、\ q_0 = \frac{1}{3}和\ q_1 = \frac{1}{7})$。

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
HLC	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$9.8 \cdot 10^{-9}$
SC	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$
HHLC	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$5.7 \cdot 10^{-10}$
SSC	$5.7 \cdot 10^{-2}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$	$8.3 \cdot 10^{-5}$

对注 2.4 的重新表述）继而化简为文献 [LX10、MP11] 中一个更基本的求积公式。在目前的表述下，该公式非常适合对圆酉系综的密度进行齐次对称多项式积分。

命题 6.1（舒尔求积：$\mathsf{c} = \mathsf{a}$）。对于 $q = 0$ （以及 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$），定理 2.1 中的求积公式特化为

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1} n^{1/2}} \int_{\mathbb{A}_{\mathsf{a}}^{(n)}} f(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathsf{a}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{n(n+m)^{n-1}} \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}} f\Big(\frac{2\pi(\varrho_{\mathsf{a}} + \lambda)}{m+n}\Big) \rho_{\mathsf{a}}\Big(\frac{2\pi(\varrho_{\mathsf{a}} + \lambda)}{m+n}\Big), \tag{6.1}$$

其中 $\varrho_{\mathsf{a}} = (\varrho_{\mathsf{a};1}, \dots, \varrho_{\mathsf{a};n})$ 和 $f(\boldsymbol{\xi})$ 表示关于 $\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(2m+1,n)}$ 的任意对称多项式。

证明。正如备注 2.3 中所述，当 $q=0$ 节点位于以下位置时：$\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{a}}^{(m,n)};\lambda = 2\pi(\varrho_{\mathsf{a}}+\lambda)\ m+n$ ($\lambda\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$)。相应的克里斯托费尔权重在这种情况下可简化为

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathsf{a};\lambda}^{(m,n)} &= \left|C_{\mathsf{a}}\left(\frac{2\pi(\varrho_{\mathsf{a}}+\lambda)}{m+n};0\right)\right|^2\left(\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}}\left|P_{\mathsf{a};\mu}\left(\frac{2\pi(\varrho_{\mathsf{a}}+\lambda)}{m+n};0\right)\right|^2\right)^{-1}\\ &=\left(\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}}\left|\det\left[\exp\left(\frac{2\pi i(\varrho_{\mathsf{a};j}+\mu_j)(\varrho_{\mathsf{a};k}+\lambda_k)}{m+n}\right)\right]_{1\leq j,k\leq n}\right|^2\right)^{-1}\\ &=\frac{1}{n(n+m)^{n-1}}\end{aligned}$$

（其中最后一步依赖于反对称单项式众所周知的离散正交关系，参见例如 [K90，第 13 节。8], [D07，第 4 节。2], 以及 [MP11，第 7 节。4]）。还需推断，在 $q=0$ 处，求积公式从$f\in\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(2m-1,n)}$扩展到 $f\in\mathbb{P}_{\mathsf{a}}^{(2m+1,n)}$；为此，我们仔细审阅并调整了定理 2.1 的证明。事实上，若 $\mu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m+1,n)}\setminus\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$，则 $P_{\mathsf{a};\mu}\left(\frac{2\pi(\varrho_{\mathsf{a}}+\lambda)}{m+n};0\right)=0$对所有 $\lambda\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$均成立（由命题 4.1 可知）。因此，在 $q=0$ 处，式 (2.6) 和式 (2.18) 中的正交关系之间的等式（因而，具有式 (2.19) 形式的、带有$f(\boldsymbol{\xi})$的求积公式）实际上对任意 $\mu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m+1,n)}$ 和 $\nu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$均成立（参见注 4.1 ）。□

将底层根格和权格按因子n（指标）缩放后，命题 6.1 中的求积公式归结为 [LX10 定理 5.8]中的公式。此外，所讨论的求积也可视为 $R=A_{n-1}$ 根系对应的 [MP11 定理 7.2] 的一个特例（另见 [MK06]）。

备注 6.1。命题 6.1 特别阐明了，在 $q=0$ 处，精确度跃升至最优高斯值 $2m+1$。事实上，正如上述证明所强调的：命题 4.1 还原了这一已知事实，即 $q=0$ 求积节点$2\pi\ (\varrho_{\mathsf{a}}+\lambda)\ m+n$，$\lambda\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$是舒尔多项式 $P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};0)$ 的公共根，$\mu\in\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m+1,n)}\setminus\Lambda_{\mathsf{a}}^{(m,n)}$（参见 [LX10 定理 5.7] 及 [MP11 第 5]节）。

备注 6.2. 命题 6.1 证实，在 $q=0$ 处，命题 5.1 中关于克里斯托费尔权重的行列式公式对任意 $n_{\mathsf{a}}=n-1\geq 1$ 均成立。事实上，对于这个特殊的参数值：

$$\begin{aligned}\det\left[H_{\mathsf{a};j,k}^{(m,n)}(\boldsymbol{\xi})\right]_{1\leq j,k\leq n} &= \det\left[(m+n)\delta_{j,k}-1\right]_{1\leq j,k\leq n}\\ &= m(m+n)^{n-1}\end{aligned}$$

（其中 $\delta_{j,\ k}$ 表示克罗内克 δ。）

6.2. $\mathsf{c}=\mathsf{b}$ 的舒尔求积。在 $q=0$ 中，第 3.4 节的求积公式属于参考文献 [DE20] 所研究的一类。这些求积公式旨在针对圆四元数系综的密度，对具有坐标超平面上指定极点的对称函数进行积分。

命题 6.2（舒尔求积：$\mathsf{c}=\mathsf{b}$）。对于 $q=0$（其中 $q_0,q_1\in(-1,1)$ 且$m\in\mathbb{Z}_{>0}$），推论 3.2 中的求积公式特化为

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{A}_{\mathsf{b}}^{(n)}} R_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})\rho_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}=\sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}} R_{\mathsf{b}}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}\big)\rho_{\mathsf{b}}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}\big)\Delta_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}, \tag{6.2a}$$

其中

$$R_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})=\frac{f(\boldsymbol{\xi})}{\prod_{1\le j\le n}(1-2q_0\cos(\xi_j)+q_0^2)}, \tag{6.2b}$$

其中，$f(\boldsymbol{\xi})$ 表示 $\mathbb{P}_{\mathsf{b}}^{(2m,n)}$ 中任意一个对称多项式。相应的求积根和克里斯托费尔权重可写为

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}=\Big(\xi_{\lambda_1+n-1}^{(m+n)},\xi_{\lambda_2+n-2}^{(m+n)},\dots,\xi_{\lambda_{n-1}+1}^{(m+n)},\xi_{\lambda_n}^{(m+n)}\Big) \tag{6.2c}$$

and

$$\Delta_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}=\prod_{1\le j\le n}\Delta_{\lambda_j+n-j}^{(m+n)}, \tag{6.2d}$$

分别为，其中

$$\Delta_l^{(m+n)}:=\Delta_{\mathsf{b};l}^{(m+n-1,1)}=\Big(2(m+n)+u_{q_0}\big(\xi_l^{(m+n)}\big)+u_{q_1}\big(\xi_l^{(m+n)}\big)\Big)^{-1} \tag{6.2e}$$

且 $\xi_l^{(m+n)}:=\xi_{\mathsf{b}\,l}^{(m+n-1,1)}$;表示超越方程的唯一实根

$$2(m+n)\xi+v_{q_0}(\xi)+v_{q_1}(\xi)=2\pi(l+1) \tag{6.2f}$$

（$0\le l<m+n$）。

证明。由式（3.10）立即可知，在 $q=0$ 处，节点的形式如式（6.2c）所示，其中 $\xi_l^{(m+n)}$ 满足式（6.2f）。此外，我们有（参见 [DEZ18，注 3.7]）

$$P_\mu(\boldsymbol{\xi};0,q_0)=\frac{\det[p_{n-j+\mu_j}(\xi_k;q_0)]_{1\le j,k\le n}}{\prod_{1\le j<k\le n}(2\cos(\xi_j)-2\cos(\xi_k))},$$

with

$$p_l(\xi;q_0):=c(\xi;q_0)e^{il\xi}+c(-\xi;q_0)e^{-il\xi},\quad c(\xi;q_0):=\frac{1-q_0e^{-i\xi}}{1-e^{-2i\xi}}. \tag{6.3}$$

因此，相应的克里斯托费尔权重形式为

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}=&|C_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)};0,q_0)|^2\left(\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}}\Big|P_{\mathsf{b};\mu}\big(\boldsymbol{\xi}_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)};0,q_0\big)\Big|^2\right)^{-1}\\ =&\left|\prod_{1\le k\le n}c\big(\xi_{n-k+\lambda_k}^{(m+n)};q_0\big)\right|^2\\ &\times\left(\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}}\Big(\det[p_{n-j+\mu_j}(\xi_{n-k+\lambda_k}^{(m+n)};q_0)]_{1\le j,k\le n}\Big)^2\right)^{-1}.\end{aligned}$$

分母中的和可改写为:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}}\Big(\det[p_{n-j+\mu_j}(\xi_{n-k+\lambda_k}^{(m+n)};q_0)]_{1\leq j,k\leq n}\Big)^2\\
&=\sum_{m+n>\nu_1>\nu_2>\cdots>\nu_n\geq 0}\Big(\det[p_{\nu_j}(\xi_{n-k+\lambda_k}^{(m+n)};q_0)]_{1\leq j,k\leq n}\Big)^2\\
&\overset{(i)}{=}\det\left[\sum_{0\leq\nu<m+n}p_\nu(\xi_{n-j+\lambda_j}^{(m+n)};q_0)p_\nu(\xi_{n-k+\lambda_k}^{(m+n)};q_0)\right]_{1\leq j,k\leq n}\\
&\overset{(ii)}{=}\det\left(\mathrm{diag}\left[\sum_{0\leq\nu<m+n}\Big|p_\nu(\xi_{n-k+\lambda_k}^{(m+n)};q_0)\Big|^2\right]_{1\leq k\leq n}\right),
\end{aligned}$$

w这里我们用到了柯西-比内公式（i）以及
o式 (3.7a) 中对应于 $m+n$ 个节点上的单变量正交性（ii）。由此可知，克里斯托费尔权重可在 $q=0$ 处分解如下:

$$\Delta_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}=\prod_{1\leq j\leq n}\Delta_{n-j+\lambda_j}^{(m+n)}$$

with

$$\begin{aligned}
\Delta_l^{(m+n)}&=\Big|c\big(\xi_l^{(m+n)};q_0\big)\Big|^2\left(\sum_{0\leq\nu<m+n}\Big|p_\nu(\xi_l^{(m+n)};q_0)\Big|^2\right)^{-1}\\
&=\Delta_{\mathsf{b};l}^{(m+n-1,1)}=\Big(2(m+n)+u_{q_0}\big(\xi_l^{(m+n)}\big)+u_{q_1}\big(\xi_l^{(m+n)}\big)\Big)^{-1},
\end{aligned}$$

其中，最后一个等号依赖于命题 5.2 中的公式（带有 $n_{\mathsf{b}}=1$ 个和$m+n$ 个节点）。□

命题 6.2 中的公式可归结为 [DE20 定理 2]˜ 的一个特例，其中 $d=d=1$ 且 $\epsilon_\pm$、$\tilde{\epsilon}_\pm=1$。该公式属于 Berens、Schmid 和 Xu 提出的一个通用框架，该框架旨在将高斯求积推广为对称函数的求积公式，参见 [BSX95，公式 (8)]。此外，若 $q_0=q_1=0$，则我们的公式还能进一步简化:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{A}_{\mathsf{b}}^{(n)}}f(\boldsymbol{\xi})\rho_{\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\\
&\qquad\frac{1}{2^n(m+n+1)^n}\sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}}f\Big(\frac{\pi(\varrho_{\mathsf{b}}+\lambda)}{m+n+1}\Big)\rho_{\mathsf{b}}\Big(\frac{\pi(\varrho_{\mathsf{b}}+\lambda)}{m+n+1}\Big),
\end{aligned}\tag{6.4}$$

其中 $\varrho_{\mathsf{b}}:=(\varrho_{\mathsf{b};1},\ldots,\varrho_{\mathsf{b};n})$ 和 $f(\boldsymbol{\xi})$ 表示 $\mathbb{P}_{\mathsf{b}}^{(2m+1,n)}$ 中任意的对称多项式。与之前一样，当参数值为零时，精确度跃升至最优高斯精确度$2m+1$，这是因为相关的求积节点 $^{\pi_{(\varrho_{\mathsf{b}}+\lambda)}}\overline{{}_{m+n+1}}$, $\lambda\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$ 是（辛）Schur 多项式 $P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};0,0,0)$, $\mu\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m+1,n)}\setminus\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}$ 的公共根（参见注4.1）。事实上，式 (6.4) 中的（辛）舒尔求积公式可视为 [DE19, Eqs. (9.2a), (9.2b)] 中高斯求积公式的一个特例，其中 $\epsilon_\pm=1$。[HM14, Section 5] 讨论了密切相关的求积公式。

注 6.3. 命题 6.2 证实，当 $q=0$ 时，命题 5.2 中克里斯托费尔权重的行列式公式对任意 $n_{\mathsf{b}}=n\geq 1$ 仍然成立，因为对于这个特殊的参数值：

$$\begin{aligned}\det\Big[H^{(m,n)}_{\mathsf{b};j,k}(\boldsymbol{\xi})\Big]_{1\leq j,k\leq n}&=\det\Big(\operatorname{diag}\big[2(m+n)+u_{q_0}(\xi_j)+u_{q_1}(\xi_j)\big]_{1\leq j\leq n}\Big)\\&=\prod_{1\leq j\leq n}\big(2(m+n)+u_{q_0}(\xi_j)+u_{q_1}(\xi_j)\big).\end{aligned}$$

6.3. 单项式求积。在 $q=1$ 处，霍尔-利特尔伍德多项式退化为对称单项式 $P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};1)=N_{\mathsf{a};\mu}M_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi})$，$\mu\in\Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}$。相应的求积公式可见于 [LX10，第 5 节3] 中的注 2.4 的代数表述（通过对指标为 n 的变量进行重新缩放），以及 [MK06，第 3 节2] 和 [HMP16，第 3 节2]（特化到根系 $R=A_{n-1}$ 时）：

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}n^{1/2}}\int_{\mathbb{A}^{(n)}_{\mathsf{a}}}f(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{n\,m^{n-1}}\sum_{\lambda\in\Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}}f\left(\frac{2\pi\lambda}{m}\right)\delta^{(m,n)}_{\mathsf{a};\lambda}(1)\tag{6.5a}$$

对于 $f(\boldsymbol{\xi})$，其中 $\mathbb{P}^{(2m-1,n)}_{\mathsf{a}}$，其中

$$\delta^{(m,n)}_{\mathsf{a};\lambda}(1)=\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ \lambda_j-\lambda_k=0}}\frac{k-j}{1+k-j}\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ \lambda_j-\lambda_k=m}}\frac{n-k+j}{n+1-k+j}.\tag{6.5b}$$

备注 6.4. 通过调整定理 2.1 的证明，可以直接独立地推导出公式 (6.5a)、(6.5b) 中的求积公式。为此，只需将公式 (2.6) 和 (2.18) 中的正交关系替换为相应的 $q=1$ 退化形式：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}}P_{\mathsf{a};\mu}\left(\frac{2\pi\lambda}{m};1\right)\overline{P_{\mathsf{a};\nu}\left(\frac{2\pi\lambda}{m};1\right)}\delta^{(m,n)}_{\mathsf{a};\lambda}(1)=\begin{cases}1/\delta^{(m,n)}_{\mathsf{a};\mu}(1) & \text{if } \nu=\mu\\ 0 & \text{if } \nu\neq\mu\end{cases}$$

（例如参见 [DV98，第 5.2] 节），以及

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}n^{1/2}}\int_{\mathbb{A}^{(n)}_{\mathsf{a}}}P_{\mathsf{a};\mu}(\boldsymbol{\xi};1)\overline{P_{\mathsf{a};\nu}(\boldsymbol{\xi};1)}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\begin{cases}N_{\mathsf{a};\mu} & \text{if } \nu=\mu\\ 0 & \text{if } \nu\neq\mu\end{cases}$$

（μ，$\nu\in\Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{a}}$）。

6.4. 对称化求积。对于 $q=1$ 多元超八面体霍尔-利特尔伍德多项式，可按相应的一元多项式进行因式分解：

$$P_{\mathsf{b};\mu}(\boldsymbol{\xi};1,q_0)=\prod_{1\leq j\leq n}p_{\mu_j}(\xi_j;q_0)\tag{6.6}$$

（其中 $p_l(\xi;q_0)$ 取自公式 (6.3)）。因此，我们的求积公式变为限制在对称函数空间上的 n 重求积的乘积：

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{A}^{(n)}_{\mathsf{b}}}R_{\mathsf{b}}(\xi_1,\dots,\xi_n)\prod_{1\leq j\leq n}\rho_{\mathsf{b}}(\xi_j)\mathrm{d}\xi_j=\tag{6.7a}$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda^{(m,n)}_{\mathsf{b}}}R_{\mathsf{b}}\big(\xi^{(m+1)}_{\lambda_1},\dots,\xi^{(m+1)}_{\lambda_n}\big)\left(\prod_{1\leq j\leq n}\rho_{\mathsf{b}}(\xi^{(m+1)}_{\lambda_j})\Delta^{(m+1)}_{\lambda_j}\right)\delta^{(m,n)}_{\mathsf{b};\lambda}(1),$$

其中，积分测度由 $\rho_{\mathsf{b}}(\xi) = 4(1-\cos^2(\xi))$ 确定，克里斯托费尔权重 $\Delta_l^{(m+1)}$ 和节点 $\xi_{\lambda_j}^{(m+1)}$ 由公式 (6.2e) 和 (6.2f) 给出，并且

$$\delta_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}(1) = \prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ \lambda_j-\lambda_k=0}} \frac{k-j}{1+k-j}. \tag{6.7b}$$

所讨论的求积公式对于具有如下形式极点的对称有理函数是精确的

$$R_{\mathsf{b}}(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \frac{f(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\prod_{1\leq j\leq n}(1-2q_0\cos(\xi_j)+q_0^2)}, \tag{6.7c}$$

其中，$f(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 表示关于 $\mathbb{P}_{\mathsf{b}}^{(2m,n)}$（或在 $q_1=0$ 时关于 $\mathbb{P}_{\mathsf{b}}^{(2m+1,n)}$，参见注 4.1）的任意对称多项式。

注6.5。如前所述（参见注6.4），通过调整定理 3.1 的证明，即可验证式 (6.7a)—(6.7c) 中的求积公式。式 (3.5) 和 (3.16) 中正交关系的相关 $q=1$ 退化形式如下：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathsf{b}}^{(m,n)}}\left(P_{\mathsf{b};\mu}\big(\xi_{\lambda_1}^{(m+1)},\ldots,\xi_{\lambda_n}^{(m+1)};1,q_0\big)\overline{P_{\mathsf{b};\nu}\big(\xi_{\lambda_1}^{(m+1)},\ldots,\xi_{\lambda_n}^{(m+1)};1,q_0\big)}\delta_{\mathsf{b};\lambda}^{(m,n)}(1)\right.$$
$$\left.\times\prod_{1\leq j\leq n}|c(\xi_{\lambda_j}^{(m+1)};q_0)|^{-2}\Delta_{\lambda_j}^{(m+1)}\right) = \begin{cases}1/\delta_{\mathsf{b};\mu}^{(m,n)}(1) & \text{if } \nu=\mu,\\ 0 & \text{if } \nu\neq\mu,\end{cases}$$

and

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{A}_{\mathsf{b}}^{(n)}} P_{\mathsf{b};\mu}(\xi_1,\ldots,\xi_n;1,q_0)\overline{P_{\mathsf{b};\nu}(\xi_1,\ldots,\xi_n;1,q_0)}\prod_{1\leq j\leq n}|c(\xi_j;q_0)|^{-2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$
$$= \begin{cases}1/\delta_{\mathsf{b};\mu}^{(m,n)}(1) & \text{if } \nu=\mu,\\ 0 & \text{if } \nu\neq\mu.\end{cases}$$

注6.6。式 (6.7a)—(6.7c) 中的求积公式是 [BSX95] 中对称化 n 重求积公式的一个特例（参见该文第 31 页中部的公式）。相关的基础正交多项式 $p_l(\xi;q_0)$ (6.3) 可辨认为一参数第二类 Bernstein-Szegö 多项式 [S75，第 2 节.6]。当参数 q_0 取特定值时，分别可化为第二类切比雪夫多项式 ($q_0=0$)、第三类切比雪夫多项式 ($q_0=-1$) 或第四类切比雪夫多项式 ($q_0=1$)（例如参见 [DE19，注 6.1]）。以同样方式对 q_1 进行特化时，相应的求积公式源自标准离散（余）弦变换的正交关系：DCT-2 ($q_0=1$, $q_1=1$)、DCT-4 ($q_0=1$, $q_1=-1$)、DCT-8 ($q_0=1$, $q_1=0$)、DST-1 ($q_0=0$, $q_1=0$)、DST-2 ($q_0=-1$, $q_1=-1$)、DST-4 ($q_0=-1$, $q_1=1$)、DST-5 ($q_0=0$, $q_1=-1$)、DST-6 ($q_0=-1$, $q_1=0$)、DST-7 ($q_0=0$, $q_1=1$)，例如参见 [DE20，式 (3.8)]。参考文献 [HM14、MMP14、HMP16] 对其中一些以及其他密切相关的对称化 n 重求积公式进行了系统研究。

References

B91. R.J. Beerends，多个变量中的切比雪夫多项式与拉普拉斯-贝尔特拉米算子的径向部分，美国数学会汇刊 328 (1991), 779–814。

BSX95. H. Berens、H.J. Schmid 和 Y. Xu，多元高斯求积公式，Arch. Math. 64 (1995), 26–32。B68. N. Bourbaki， *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4–6*，Hermann，巴黎，1968。BCDG09. A. Bultheel、R. Cruz-Barroso、K. Deckers 和 P. Gonz´alez-Vera，与切比雪夫权函数相关的有理 Szeg¨o 求积公式，Math. Comp. 78 (2009), 1031–1059。C97. R. Cools，构造求积公式：艺术背后的科学，Acta Numerica 6 (1997), 1–54。CMS01. R. Cools、I.P. Mysovskikh 和 H.J. Schmid，求积公式与正交多项式，J. Comput. Appl. Math. 127 (2001), 121–152。C73. G.R. Cowper，三角形的高斯求积公式，Internat. J. Numer. Methods in Engineering 7 (1973) 405–408。DGJ06. L. Daruis、P. Gonz´alez-Vera、M. Jim´enez Paiz，与切比雪夫权函数的有理修正相关的求积公式，Comput. Math. Appl. 51 (2006), 419–430。D06. J.F. van Diejen，圆周上排斥性δ玻色气体的可积离散化的对角化，Comm. Math. Phys. 267 (2006), 451–476。D07.，Hall-Littlewood多项式的有限维正交结构，Acta Appl. Math. 99 (2007), 301–308。DE17. J.F. van Diejen 和 E. Emsiz，超八面体Weyl alcove上拉普拉斯算子的Bethe Ansatz特征函数的正交性，Comm. Math. Phys. 350 (2017), 1017–1067。DE18.，Bernstein-Szeg¨o多项式有限正交关系导出的求积公式，Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), 5333–5347。DE19.，对称函数的精确求积公式，Math. Comp. 88 (2019), 1229–1249。DE20.，酉Jacobi系综的求积公式，2018年预印本。DEZ18. J.F. van Diejen、E. Emsiz 和 I.N. Zurri´an，具有可积边界相互作用的开放 q-玻色系统Bethe Ansatz的完备性，Ann. Henri Poincar´e 19 (2018), 1349–1384。DV98. J.F. van Diejen 和 L. Vinet，紧化三角Ruijsenaars-Schneider模型的量子动力学，Comm. Math. Phys. 197 (1998), 33–74。DX14. C.F. Dunkl 和 Y. Xu，*Orthogonal Polynomials of Several Variables*，第二版，《数学及其应用百科全书》第155卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014。F10. P.J. Forrester， *Log-Gases and Random Matrices*，《伦敦数学会专著丛书》第34卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2010。HM14. J. Hrivn´ak 和 L. Motlochov´a，（反）对称多元余弦函数的离散变换与正交多项式，SIAM J. Numer. Anal. bf 52 (2014), 3021–3055。HMP16. J. Hrivn´ak、L. Motlochov´a 和 J. Patera，由对称轨道函数产生的多元多项式求积公式，Symmetry 8 (2016), no. 7, Art. 63。HW88. M.E. Hoffman 和 W.D. Withers，与仿射Weyl群相关的广义切比雪夫多项式，美国数学会汇刊 308 (1988), 91–104。K90. V.G. Kac，*Infinite-dimensional Lie algebras*，第三版，剑桥大学出版社，剑桥，1990。K74i. T.H. Koornwinder，二元中作为两个代数独立偏微分算子特征函数的正交多项式 I，Indag. Math. 36 (1974), 48–58。K74iii.，二元中作为两个代数独立偏微分算子特征函数的正交多项式 III，Indag. Math. 36 (1974), 357–369。LSX08. H. Li、J. Sun 和 Y. Xu，六边形和三角形上的离散傅里叶分析、求积与插值，SIAM J. Numer. Anal. 46 (2008), 1653–1681。LSX10.，平面区域上的格离散傅里叶分析，Numer. Algorithms 55 (2010), 279–300。LX10. H. Li 和 Y. Xu， d变量中 A_d格的基本域与单纯形上的离散傅里叶分析，J. Fourier Anal. Appl. 16 (2010), 383–433。

LC94. J.N. Lyness 和 R. Cools，《三角形上的数值求积综述》，载于：*Mathematics of Computation 1943–1993: a half-century of computational mathematics*，W. Gautschi（编），《应用数学讨论会论文集》，第48卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年，127–150页。M95. I.G. Macdonald，*Symmetric Functions and Hall Polynomials*，第二版，克拉伦登出版社，牛津，1995年。M00.，《与根系相关的正交多项式》，S´em. Lothar. Combin. 45 (2000/01)，文章编号 B45a。M04. M.L. Mehta，*Random Matrices*，第三版，爱思唯尔／学术出版社，阿姆斯特丹，2004年。MP11. R. Moody 和 J. Patera，《由紧单李群有限阶元素构造的正交多项式求积公式》，Adv. in Appl. Math. 47 (2011)，509–535页。MMP14. R.V. Moody、L. Motlochov´a 和 J. Patera，《由单李群混合特征导出的高斯求积》，J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014)，1257–1290页。MK06. H.Z. Munthe-Kaas，《群傅里叶分析与保持对称性的偏微分方程离散化》，J. Phys. A 39 (2006)，5563–5584页。NR03. K. Nelsen 和 A. Ram，《Kostka-Foulkes 多项式与 Macdonald 球函数》。载于：*Surveys in Combinatorics*，C. D. Wensley（编），伦敦数学学会讲义丛书307，剑桥大学出版社，剑桥，2003年，325–370页。P16. S.-A. Papanicolopulos，《利用最小正交归一基构造三角形上的新型全对称及旋转对称求积公式》，J. Comput. Appl. Math. 294 (2016)，39–48页。P07. C. Procesi，*Lie Groups. An Approach through Invariants and Representations*，Universitext，施普林格，纽约，2007年。S96. B. Simon，*Representations of Finite and Compact Groups*，数学研究生丛书第10卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996年。S92. S.L. Sobolev，*Cubature Formulas and Modern Analysis. An Introduction*，戈登-布雷奇科学出版社，蒙特勒，1992年。SV97. S.L. Sobolev 和 V.L. Vaskevich，*The Theory of Cubature Formulas*，数学及其应用丛书第415卷，克吕维尔学术出版社集团，多德雷赫特，1997年。S71. A.H. Stroud，*Approximate Calculation of Multiple Integrals*，普伦蒂斯-霍尔自动计算丛书，普伦蒂斯-霍尔公司，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1971年。S75. G. Szeg¨o，*Orthogonal Polynomials*，第四版，美国数学会学术讨论会出版物第XXIII卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1975年。X12. Y. Xu，《二元最小求积公式与多项式插值》，J. Approx. Theory 164 (2012)，6–30页。

Instituto de Matemática y Física、 Universidad de Talca、 Casilla 747、 Talca、 Chile*Email address*： diejen@inst-mat.utalca.cl

Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, Van Mourik Broekmanweg 6, 2628 XE, Delft, The Netherlands
Email address： e.emsiz@tudelft.nl