arXiv:2305.01285v1 [math.NA] 2 May 2023

采用广义数值通量的 Vlasov-黏性 Burgers 系统间断 Galerkin 方法

HARSHA HUTRIDURGA、KRISHAN KUMAR 和 AMIYA K. PANI*

摘要：本文构造并分析了用于近似周期 Vlasov-黏性 Burgers 系统的半离散数值格式。该格式将 Vlasov 方程的间断 Galerkin 逼近与黏性 Burgers 方程的局部间断 Galerkin 逼近相结合。这两种方法均采用广义数值通量。所提出的格式同时保持质量和动量守恒。基于广义 Gauss-Radau 投影，本文推导了光滑紧支撑初始数据情形下的最优收敛阶。最后，计算结果验证了我们的理论结果。

关键词。Vlasov-黏性 Burgers 系统、间断 Galerkin 方法、局部间断伽辽金方法、广义数值通量、离散质量和动量守恒、广义 Gauss-Radau 投影、最优误差估计、数值实验。

AMS 学科分类。65N30, 65M60, 65M12, 65M15, 82D10。

1. 引言

对于非蒸发稀薄两相流，最简单的运动学模型仅考虑两相之间的动量交换，由以下黏性 Burgers 方程与 Vlasov 型方程构成的耦合系统描述：

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f + \partial_v\left((u-v)\,f\right) = 0 & \text{in} \quad (0,T]\times I\times\mathbb{R}, \\ f(0,x,v) = f_0(x,v) & \text{in} \quad I\times\mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u - \epsilon\partial_x^2 u = \rho V - \rho u & \text{in} \quad (0,T]\times I, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in} \quad I, \end{cases} \tag{1.2}$$

其满足周期边界条件：

$$f(t,L,v) = f(t,0,v),\ \ u(t,L) = u(t,0) \quad \text{and} \quad u_x(t,L) = u_x(t,0).$$

这里，$I=[0,L]$, $u=u(t,\ x)$ 表示流体速度，$f=f(t,\ x,\ v)$ 表示分布函数，而 $\epsilon>0$ 表示流体的黏度。两个系统通过阻力耦合，该阻力与相对速度（$u-v$）成正比。

在上述模型中，$f(t,\ x,\ v)$ 描述分散相，而 $u(t,\ x)$ 描述背景连续相。此类分散两相系统在许多应用中都十分重要，例如，可用于模拟柴油发动机中的燃烧现象：液滴喷雾被喷入装置中，并在燃烧前与气体混合[O'R81，Wil85]。在此，分散相是喷雾，连续相则是周围的气体。

(1.1)-(1.2) 的适定性、对于 $u_0\in C^2(\mathbb{R})$ 和 $f_0\in C_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ 的 $u\in C^0([0,T];\ C^2(\mathbb{R}))$ 和 $f\in C^0([0,T];\ C_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}))$ 的解的整体存在性与唯一性，已由 Domelevo 和 Roquejoffre 在 [DR99] 中证明。此外，Goudon 在 [Gou01], 中证明了 $(u_0,f_0)\in L^2(\mathbb{R})\times L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ 的弱解 $(u,f)\in L^2(0,T;\ H^1(\mathbb{R}))\times L^\infty(0,T;\ \mathrm{M}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}))$ 的整体存在性，其中 $\mathrm{M}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ 表示定义域 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的有界测度集合。在本文中，取定义域 $I\times\mathbb{R}$，并且

日期：2023年5月3日。*
通讯作者。

周期边界条件，我们在附录中证明了唯一强解 $(u,\ f) \in \big(L^\infty(0,\ T;\ H^1(I)) \cap L^2(0,\ T;\ H^2(I))\big) \times \big(L^\infty(0,\ T;\ L^1(I \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(I \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(0,\ T;\ H^1(I \times \mathbb{R}))\big)$对于 $(u_0,\ f_0) \in H^1(I) \times L^1(I \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(I \times \mathbb{R}) \cap H^1(I \times \mathbb{R})$。

间断伽辽金（DG）方法属于有限元方法的一类，能够保持近似问题的守恒性质。该方法最早由 Reed 和 Hill 于 1973年提出[RH73] ，用于求解线性一阶双曲方程；随后，Cockburn 和 Shu 于 1989 [CS89] 将其发展用于求解含时非线性守恒律。局部间断伽辽金（LDG）方法是用于近似非线性双曲方程解的一类特殊间断伽辽金格式，最早由 Cockburn 和 Shu 于 1998 [CS98] 提出。对于局部间断伽辽金（LDG）方法，我们首先将含有高阶导数项的系统改写为等价的一阶系统，然后使用适当的数值通量，采用标准 DG 方法对其进行离散。

本文针对 Vlasov 方程提出 DG 方法，并针对黏性 Burgers 方程提出 LDG 方法。为了定义 DG 方法，数值通量是确保该方法稳定性和精度的最重要要素。本文对这两个方程均采用广义数值通量，因为若干数值实验表明，黏性参数 ϵ 与广义通量参数之间存在权衡。我们在此指出，与连续情形不同，离散分布函数的非负性难以证明，这给后续分析带来了一个主要难题。

我们提及一些与本文相关的已有研究。文献 [MSW16], 针对线性双曲方程考虑了上风偏置数值通量；文献 [LP15、PKP17]则针对线性扩散项采用广义交替数值通量，并针对非线性对流项采用中心通量。此外，为求解线性对流扩散方程，文献 [CMZ17]定义了含有两个独立权函数的广义数值通量。对于广义数值通量，借助某些特殊的全局投影，可以推导出最优误差估计。受 [CSZ17、MSZW12、CCLX17、LZMW19、MSW16、LZM$^+$20、LWM20、DDCS09], 的启发，我们定义了一个与高斯-拉杜投影相关的全局投影。本文的主要贡献如下：

- 采用 DG 格式求解 Vlasov 方程，采用 LDG 格式求解黏性伯格斯方程，并保持时间变量连续，同时使用广义数值通量，从而建立了耦合问题（1.1）-（1.2）的半离散系统。随后，证明了其离散守恒性质。
- 首次基于广义 Gauss-Radau 投影，推导出了半离散系统的最优误差估计。在误差分析中，通过采用 Gr¨onwall 型结果的非线性版本，特别注意避免得到不依赖于$e^{\epsilon t}$ 、而依赖于$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ 的界。
- 开展了一些数值实验，其结果证实了我们的理论结果。

本文结构安排如下。在第2节中，我们介绍连续模型及其一些性质和记号。在第3节中，我们介绍采用广义数值通量的半离散DG方法、本文中将用到的一些记号，以及离散解的一些性质。半离散方法的误差分析详见第4 节，随后第5 节给出一些计算结果，以验证我们的理论结果。最后，在附录A中，我们证明连续介质模型强解的存在唯一性。

2. 连续问题

我们分别将局部密度 ρ 和局部宏观速度 V定义为

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v \quad \text{and} \quad V(t,x) = \frac{1}{\rho}\int_{\mathbb{R}} f(t,x,v) v\,\mathrm{d}v.$$

现在分别将质量和动量定义为

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{I} f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}}\int_{I} v f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

我们将 k^{th} 阶速度矩记为

$$m_k f(t,x) = \int_{\mathbb{R}} |v|^k f(t,x,v)\,\mathrm{d}v, \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

本文采用 Sobolev 空间的标准记号。我们用 $W^{m,\,p}$ 表示 L^p 阶的 Sobolev 空间，用 $C_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上紧支撑的 C^1 函数类。本文中，定义在 I 上的任意函数都假定关于 x 变量是周期的。

以下定理说明了定义在 上的系统 (1.1)-(1.2) 的经典解存在且唯一$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (详细证明见 [DR99，定理 2.1，第 65] 页)。

定理 2.1。 设给定 $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ 和 $f_0 \in C_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ $f_0 \geq 0$。则 *Vlasov*-黏性 *Burgers* 系统存在唯一解 (u, f) $\in C^0([0,\infty); C^2(\mathbb{R}))\times C^0([0,\infty); C_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}))$。

2.1. **解的一些性质**。 本小节首先汇总（1.1)-（1.2）的一些守恒性质，其证明见 [Gou01，命题 2.1，第 1374] 页。

引理 2.2。 *Vlasov*-黏性 *Burgers* 系统的解(f, u) 具有以下性质：

(i) **(**保正性**)** 对于任意给定的非负初始数据 f_0，解 f 也非负。*(ii)* **(**质量守恒**)** 总质量守恒，即

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{I} f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}}\int_{I} f_0(x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v, \quad t\in[0,T].$$

*(iii)***(**总动 量守恒**)** 解对(f, u) 在以下意义下守恒总动量 如下 *nse:*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{I} v f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_{I} u(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\int_{I} v f_0(x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_{I} u_0(x)\,\mathrm{d}x,\ t\in[0,T].$$

(iv) (总能量耗散**)**系统的总能量以如下意义耗散：

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{I} v^2 f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_{I} u^2(t,x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}}\int_{I} v^2 f_0(x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_{I} u_0^2(x)\,\mathrm{d}x, \quad t\in[0,T] \tag{2.1}$$

在 $f(t, x, v)$ 非负的条件下。

在证明能量耗散性质 (2.1) 时，我们还得到以下恒等式：

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I} v^2 f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_{I} u^2\,\mathrm{d}x + \epsilon\int_0^t\int_{I} u_x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}}\int_{I} (u-v)^2 f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{I} v^2 f_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_{I} u_0^2\,\mathrm{d}x.$$

若 $v^2 f_0 \in L^1(I\times\mathbb{R})$ 且 $u_0 \in L^2(I)$，则上述等式表明

$$u \in L^\infty(0,T;L^2(I)) \quad \text{and} \quad u_x \in L^2([0,T]\times I). \tag{2.2}$$

利用索伯列夫不等式可得

$$u \in L^2(0,T;L^\infty(I)). \tag{2.3}$$

注意，对于任意 $z \in L^\infty(I)$，

$$\|z\|_{L^4(I)} \leq C\|z\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\|z\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}}.$$

因此，

$$\int_0^T\int_{I} |u|^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq C\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(I)}^2\|u\|_{L^2(0,T;L^\infty(I))}^2 \leq C. \tag{2.4}$$

以下引理给出了局部密度和动量的可积性估计。由于它们是黏性 Burgers 方程中的源项，这些估计对于推导方程 (1.2) 解的正则性结果至关重要。以下结果的证明与 [Ham98，引理 2.2，第56]页类似。因此，我们略去证明。

Lemma 2.3. 令 $p, r \geq 1$. 令 $u \in L^r(0,T;\, L^{p+1}(I))$ $f_0 \in L^\infty(I\times\mathbb{R}) \cap L^1(I\times\mathbb{R})$. 此外，$l$ et

$$\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^p f_0 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v < \infty.$$

那么，局部密度 ρ 和动量 ρV 满足以下条件：

$$\rho \in L^\infty(0,T;L^{p+1}(I)) \quad and \quad \rho V \in L^\infty(0,T;L^{\frac{p+1}{2}}(I)).$$

注记 2.4. 取 $p=3$，由引理 *2.3* 可得

$$\rho \in L^\infty(0,T;L^4(I)) \quad and \quad \rho V \in L^\infty(0,T;L^2(I)). \tag{2.5}$$

以下引理给出了 L^∞ 局部密度的估计 ρ 关于时间和空间变量。其证明可见 [HKMMM20，命题 4.6，第 44]页。

引理 *2.5.* 设 $u \in L^1(0,T;\, L^\infty(I))$. 设 $f_0(x,v)$ 满足对所有 $r>0$，有 $sup^{C^r_{t,v}} f_0 \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}_+;\, L^1(\mathbb{R})\right)$，其中 $C^r_{t,v} := I \times B(e^t v, r)$。这里，$B(e^{tv}, r)$ 表示以 e^{tv} 为中心、半径为 r 的球。于是，成立以下估计：

$$\|\rho\|_{L^\infty((0,T)\times I)} \leq e^T \sup_{t\in[0,T]} \|\sup_{C^r_{t,v}} f_0\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

为完整起见，问题（1.1）-（1.2）存在唯一强解的论证见附录A。

3. Semi-discrete scheme

本节讨论用于近似（1.1）-（1.2）解的半离散格式，以及该离散系统的一些性质。注意，对于紧支撑初始数据 f_0，解$f(t,x,v)$具有紧支撑。因此，不失一般性，假设存在 $M>0$，使得当 $v\in[-M,M]=$ 时：J 且 $t\in(0,T], \mathrm{supp} f(t,x,v) \subset \Omega = I\times J$。

设 $I_h = \{I_i\}_{i=1}^{N_x}$ 和 $J_h = \{J_j\}_{j=1}^{N_v}$ 分别是区间 I 和 J 的剖分。令 T_h 为这两个剖分的笛卡尔积，即

$$\mathcal{T}_h = \{T_{ij} = I_i \times J_j : 1\leq i\leq N_x, 1\leq j\leq N_v\},$$

with

$$I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \quad \forall\ 1\leq i\leq N_x; \quad J_j = [v_{j-\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}}] \quad \forall\ 1\leq j\leq N_v.$$

相对于上述剖分的网格尺寸 h_x 和 h_v 定义如下：

$$0 < h_x = \max_{1\leq i\leq N_x} h_i^x, \quad \text{where} \quad h_i^x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}},$$

and

$$0 < h_v = \max_{1\leq j\leq N_v} h_j^v, \quad \text{where} \quad h_j^v = v_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}.$$

剖分 T_h 的网格尺寸定义为 $h := \max(h_x, h_v)$。这里假设网格是规则且准均匀的，即存在正定常数 c_1, c_2, c_1', c_2'，使得在网格加密过程中，最大网格尺寸与最小网格尺寸之比保持有界，具体如下：

$$c_1 \leq \frac{h_x}{h_i^x} \leq c_2 \quad \text{and} \quad c_1' \leq \frac{h_v}{h_j^v} \leq c_2', \qquad \forall \quad 1\leq i\leq N_x, 1\leq j\leq N_v.$$

该 s 所有竖直边和所有水平边的集合分别记为 Γ_x 和 Γ_v ，

$$\Gamma_x := \bigcup_{i,j}\left\{\{x_{i-\frac{1}{2}}\}\times J_j\right\} \quad \text{and} \quad \Gamma_v := \bigcup_{i,j}\left\{I_i \times \{v_{j-\frac{1}{2}}\}\right\}.$$

我们将所有边的集合记为 $\Gamma_h := \Gamma_x \cup \Gamma_v$。我们定义用于逼近 $(u,\ f)$ 的间断有限元空间如下：

$$
\begin{aligned}
X_h &:= \{\psi \in L^2(I) : \psi \in \mathbb{P}^k(I_i),\ \ i = 1, \ldots, N_x\},\\
V_h &:= \{\psi \in L^2(J) : \psi \in \mathbb{P}^k(J_j),\ \ j = 1, \ldots, N_v\},\\
\mathcal{Z}_h &:= \left\{\phi \in L^2(\Omega) : \phi \in \mathbb{Q}^k(T_{ij}),\ i = 1, \ldots, N_x;\ j = 1, \ldots, N_v\right\},
\end{aligned}
$$

其中，$\mathbb{P}^k$ 是次数至多为 k 的标量多项式空间，而 $\mathbb{Q}^k(T_{ij})$ 是每个变量次数至多为 k 的多项式张量积空间。

下面，我们定义函数在节点处的跳跃值和平均值。设 $(\phi_h)^+_{i+\frac{1}{2},v}$ 和 $(\phi_h)^-_{i+\frac{1}{2},v}$ 分别表示 ϕ_h 在来自右单元 $I_{i+1} \times J_j$ 和左单元 $I_i \times J_j$ 的 $\left(x_{i+\frac{1}{2}}, v\right)$ 处的值。更精确地说，

$$
(\phi)^+_{i+\frac{1}{2},v} = \lim_{\eth \to 0^+} \phi_h\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \eth, v\right) \quad \text{and} \quad (\phi)^-_{i+\frac{1}{2},v} = \lim_{\eth \to 0^+} \phi_h\left(x_{i+\frac{1}{2}} - \eth, v\right).
$$

类似地，我们令 $(\phi_h)^+_{x,j+\frac{1}{2}}$ 和 $(\phi_h)^-_{x,j-\frac{1}{2}}$。$\phi_h$ 在 $(x_{i+\frac{1}{2}}, v)\ \ \forall v \in J_j$ 处的跳跃 $[\![\cdot]\!]$ 和平均值 $\{\cdot\}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
[\![\phi_h]\!]_{i+\frac{1}{2},v} &:= (\phi_h)^+_{i+\frac{1}{2},v} - (\phi_h)^-_{i+\frac{1}{2},v} \quad \forall \phi_h \in \mathcal{Z}_h,\\
\{\phi_h\}_{i+\frac{1}{2},v} &:= \frac{1}{2}\left((\phi_h)^+_{i+\frac{1}{2},v} + (\phi_h)^-_{i+\frac{1}{2},v}\right) \quad \forall \phi_h \in \mathcal{Z}_h.
\end{aligned}
$$

类似地，可以定义 $(x,\ v_{j+1/2})\ \ \forall x \in I_i$ 处的跳跃和平均值。

离散范数：我们定义以下离散半范数和范数：

$$
|w|_{m,\mathcal{T}_h} = \left(\sum_{R \in \mathcal{T}_h} |w|^2_{m,R}\right)^{\frac{1}{2}},\ \|w\|_{m,\mathcal{T}_h} = \left(\sum_{R \in \mathcal{T}_h} \|w\|^2_{m,R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall w \in H^m(\mathcal{T}_h),\ m \geq 0,
$$

$$
\|w\|_{\infty,\mathcal{T}_h} = \sup_{R \in \mathcal{T}_h} \|w\|_{L^\infty(R)}, \quad \|w\|_{L^p(\mathcal{T}_h)} = \left(\sum_{R \in \mathcal{T}_h} \|w\|^p_{L^p(R)}\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall w \in L^p(\mathcal{T}_h),
$$

对所有 $1 \leq p < \infty$。

接下来，我们回顾一些在我们的分析中经常用到的标准估计：

分析：

逆不等式：（见[DPE12，引理 1.44，第 26]页）若 $w_h \in \mathbb{P}^k$（I_i），则

$$
\|\partial_x w_h\|_{0,I_i} \leq C h_x^{-1} \|w_h\|_{0,I_i}. \tag{3.1}
$$

迹不等式：（参见 [DPE12，引理 1.46，第 27]页）对于 $w_h \in \mathbb{P}^k$（I_i），

$$
\|w_h\|_{0,\partial I_i} \leq C h_x^{-\frac{1}{2}} \|w_h\|_{0,I_i}. \tag{3.2}
$$

范数系数 <escape>**比较：**（参见 [DPE12，引理 1.50，第 29]）令 $1 \leq p, q \leq \infty$ 和 $w_h \in \mathbb{P}^k(I_i)$。该</escape> n,

$$
\|w_h\|_{L^p(I_i)} \leq C h_x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|w_h\|_{L^q(I_i)}. \tag{3.3}
$$

3.1. **LDG 公式。**通过引入辅助变量，我们将方程（1.2）重写如下：$w = \sqrt{\epsilon}\,\partial_x u$

$$
\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 - \sqrt{\epsilon}\,\partial_x w + \rho u = \rho V, \tag{3.4}
$$

$$
w - \sqrt{\epsilon}\,\partial_x u = 0. \tag{3.5}
$$

这有助于为 Burgers 方程设计 LDG 格式。我们将 $(u_h(t)\ \ w_h(t)) \in X_h \times X_h$ 记为 $(u(t)\ \ w(t))$ 对所有 $t \in [0, T]$ 的离散近似，并将 $f_h(t) \in Z_h$ 记为一个离散

近似，用于表示所有 $t \in [0,T]$ 的 $f(t)$。与连续情形一样，我们将离散局部密度和离散动量定义为

$$\rho_h = \sum_{j=1}^{N_v} \int_{J_j} f_h \,\mathrm{d}v \qquad \text{and} \qquad \rho_h V_h = \sum_{j=1}^{N_v} \int_{J_j} v f_h \,\mathrm{d}v, \tag{3.6}$$

分别。我们的离散问题是求解 $(u_h(t)\ w_h(t)\ f_h(t)) \in X_h \times X_h \times \mathsf{Z}_h$，其中 $t \in [0,T]$ 满足

$$\left(\frac{\partial f_h}{\partial t}, \psi_h\right) + \mathcal{B}_h(u_h; f_h, \psi_h) = 0 \ \ \forall\ \psi_h \in \mathcal{Z}_h, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \phi_h\right) + a_h(u_h, \phi_h) + \sqrt{\epsilon}\, b_h(w_h, \phi_h) + (\rho_h u_h, \phi_h) \\ = (\rho_h V_h, \phi_h) \quad \forall\ \phi_h \in X_h,\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$(w_h, q_h) + \sqrt{\epsilon}\, b_h(u_h, q_h) = 0 \quad \forall\ q_h \in X_h, \tag{3.9}$$

其中 $f_h(0) = f_{0h} \in \mathcal{Z}_h$ 且 $u_h(0) = u_{0h} \in X_h$ 稍后定义。在 (3.7) 中，

$$\mathcal{B}_h(u_h; f_h, \psi_h) := \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_v} \mathcal{B}_{ij}^h(u_h; f_h, \psi_h), \tag{3.10}$$

with

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{ij}^h(u_h; f_h, \psi_h) := &- \int_{T_{ij}} v f_h \partial_x \psi_h \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x - \int_{T_{ij}} f_h (u_h - v) \partial_v \psi_h \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{J_j} \left[\left(\widehat{v f_h} \psi_h^-\right)_{i+1/2,v} - \left(\widehat{v f_h} \psi_h^+\right)_{i-1/2,v} \right] \mathrm{d}v \\ &+ \int_{I_i} \left[\left((u_h - v) f_h \psi_h^-\right)_{x,j+1/2} - \left((u_h - v) f_h \psi_h^+\right)_{x,j-1/2} \right] \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中广义数值通量为

$$\begin{cases} \widehat{v f_h}\big|_{\{x_{i-1/2}\} \times J_j} := \begin{cases} (1-\lambda_1)\, v f_h^+ + \lambda_1 v f_h^- & \text{if} \quad v \geq 0 \\ (1-\lambda_1)\, v f_h^- + \lambda_1 v f_h^+ & \text{if} \quad v < 0 \end{cases} \\ \qquad\qquad = \{v f_h\} + \left(\dfrac{1-2\lambda_1}{2}\right) |v| \, [\![f_h]\!] \quad \text{on} \ \ \{x_{i-1/2}\} \times J_j, \\ (u_h - v) f_h\big|_{I_i \times \{v_{j-1/2}\}} := \begin{cases} (1-\lambda_2)\,(u_h - v)\, f_h^+ + \lambda_2\,(u_h - v)\, f_h^- & \text{if} \quad (u_h - v) \geq 0 \\ (1-\lambda_2)\,(u_h - v)\, f_h^- + \lambda_2\,(u_h - v)\, f_h^+ & \text{if} \quad (u_h - v) < 0 \end{cases} \\ \qquad\qquad = \{(u_h - v)\, f_h\} + \left(\dfrac{1-2\lambda_2}{2}\right) |u_h - v| \, [\![f_h]\!] \quad \text{on} \ \ I_i \times \{v_{j-1/2}\}, \end{cases} \tag{3.12}$$

其中 $\lambda_1,\ \lambda_2 > 1/2$。我们在边界 $\partial\Omega$ 上定义数值通量为

$$\left(\widehat{v f_h}\right)_{1/2,v} = \left(\widehat{v f_h}\right)_{N_x+1/2,v}, \qquad \left((u_h - v) f_h\right)_{x,1/2} = \left((u_h - v) f_h\right)_{x,N_v+1/2} = 0,$$

对于所有 $(x,v) \in I_i \times J_j$ 对于 $1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_v$。

注记 3.1. 尽管线性双曲方程的 *DG* 格式采用经典纯上风通量，但存在变系数时，要定义这类数值通量并不容易。近年来，得益于定义简洁，类似于 (3.12) 的广义数值通量已用于此类情形 [LWM20]。此外，这类广义数值通量在处理黏性 *Burgers* 方程中的小黏性系数时更加灵活；相关说明见第 *5* 节观察事项 *(ii)*。

在 (3.8)-(3.9) 中,

$$a_h(u_h,\phi_h) := -\sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i}\frac{u_h^2}{2}\partial_x\phi_h\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{N_x-1}\left(\frac{\widehat{u_h^2}[\![\phi_h]\!]}{2}\right)_{i+1/2} \tag{3.13}$$

and

$$b_h(w_h,\phi_h) := \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} w_h\partial_x\phi_h\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{N_x-1}(\widehat{w_h}[\![\phi_h]\!])_{i+1/2} \tag{3.14}$$

与数值通量

$$\widehat{u_h^2} := \frac{1}{3}\left(\left(u_h^+\right)^2 + u_h^+u_h^- + \left(u_h^-\right)^2\right), \tag{3.15}$$

$$\widehat{w_h} := (1-\lambda)\,w_h^- + \lambda w_h^+ = \{w_h\} + \left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)[\![w_h]\!], \tag{3.16}$$

and

$$\widehat{u_h} := \lambda u_h^- + (1-\lambda)\,u_h^+ = \{u_h\} + \left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)[\![u_h]\!], \tag{3.17}$$

其中 $\lambda \geq 1/2$。注意，(3.16)-(3.17) 中给出的数值通量是在广义意义下定义的。还需注意，I的端点处的数值通量由$(u_h)^+_{\frac{1}{2}} = (u_h)^+_{N_x+\frac{1}{2}}$、$(u_h)^-_{\frac{1}{2}} = (u_h)^-_{N_x+\frac{1}{2}}$、$(w_h)^+_{\frac{1}{2}} = (w_h)^+_{N_x+\frac{1}{2}}$和$(w_h)^-_{\frac{1}{2}} = (w_h)^-_{N_x+\frac{1}{2}}$定义。$\widehat{u_h^2}$不是广义数值通量，而被称为中心通量，该通量由 Liu 等人在[LP15]中引入。

注记 3.2。作者 [Plo19] 进行了长时间模拟，以了解源自中心通量 (3.15) 的数值格式的稳定性，并将其与采用以下 *Lax-Friedrich*通量的数值格式的稳定性进行了比较：

$$\widehat{u_h^2} = \frac{1}{2}[(u_h^+)^2 + (u_h^-)^2 - 2\max|u|(u_h^+ - u_h^-)],$$

参见第 3 节（例 3.3）[Plo19]以了解更多细节。作者指出，采用中心数值通量定义的格式比采用 *Lax-Friedrich*通量的格式更稳定。

下面我们观察双线性型 $b_h(w_h,\ \phi_h)$ 的某些性质：

- 对于 $w_h \in X_h$,

$$\begin{aligned} b_h(w_h,w_h) &= \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} w_h\partial_x w_h\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{N_x-1}(\widehat{w_h}[\![w_h]\!])_{i+1/2} \\ &= \sum_{i=0}^{N_x-1}\left(\widehat{w_h}[\![w_h]\!] - \frac{1}{2}[\![w_h^2]\!]\right)_{i+1/2} = \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{N_x-1}[\![w_h]\!]^2_{i+1/2}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

- 对于 $w_h,\ \phi_h \in X_h$，有丁香五月

$$\begin{aligned} b_h(w_h,\phi_h) &= \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} w_h\partial_x\phi_h\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{N_x-1}(\widehat{w_h}[\![\phi_h]\!])_{i+1/2} \\ &= -\sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i}\partial_x w_h\,\phi_h\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{N_x-1}([\![w_h\phi_h]\!] - \widehat{w_h}[\![\phi_h]\!])_{i+1/2} \\ &= -b_h(\phi_h,w_h) - \sum_{i=0}^{N_x-1}\left([\![w_h\phi_h]\!] - \widehat{w_h}[\![\phi_h]\!] - \widehat{\phi_h}[\![w_h]\!]\right)_{i+1/2}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

由于 $X_h \times X_h \times \mathcal{Z}_h$ 是有限维的，离散问题（3.7）-（3.9）导出一个由非线性常微分方程和线性代数方程耦合而成的系统，该系统称为微分代数方程系统。由方程（3.9）， w_h 可显式表示为 u_h的函数。代入（3.8）后，我们得到一个非线性常微分方程系统。应用皮卡德定理可知，局部时间唯一解（u_h， w_h，f_h）存在。只要能够在适当范数下对解进行有界估计，该解便可延拓为全局时间解。本文将在末尾对此作进一步讨论。

3.2. 离散解的一些性质。

引理3.3 (离散质量守恒)。 设 $k \geq 0$ ，并设 f_h 是 f 的*DG* 近似，满足(3.7) ，其中 $f_h(0) = \mathcal{P}_h f_0$，其中 $\mathcal{P}_h$ 是 L^2-投影到 $\mathcal{Z}_h$上的投影。则离散质量守恒性质如下：

$$\int_\Omega f_h(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_\Omega f_0(x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \quad \forall\, t > 0.$$

证明。 根据 L^2-投影的定义，可以得到

$$\sum_{i,j}\int_{T_{ij}} f_h(0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \sum_{i,j}\int_{T_{ij}} \mathcal{P}_h f_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \sum_{i,j}\int_{T_{ij}} f_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

固定任意一个单元 T_{ij}，并在（3.7）中取测试函数 ψ_h，使得 $\psi_h = 1$ 在 T_{ij} 中成立，且$\psi_h = 0$ 在其他地方为零。于是，（3.7）可化简为

$$\int_{T_{ij}} \frac{\partial f_h}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \mathcal{B}_{ij}^h(u_h; f_h, 1) = 0.$$

根据 B_{ij}^h 的定义，可得

$$\begin{aligned}\int_{T_{ij}} \frac{\partial f_h}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_{J_j}\left[\left(\widehat{vf_h}\right)_{i+1/2,v} - \left(\widehat{vf_h}\right)_{i-1/2,v}\right]\mathrm{d}v \\ + \int_{I_i}\left[\Big((u_h - v)f_h\Big)_{x,j+1/2} - \Big((u_h - v)f_h\Big)_{x,j-1/2}\right]\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

注意， T_{ij} 的选取是任意的。此外，左侧的第二个和第三个积分项对所有 i， j 都成立。由于 x 中的边界条件是周期的，且 v 中的支集是紧的，对所有 i， j 求和并对时间积分，即可得到所需结果。□

由上述引理可知，对于任意给定的非负初始数据，我们有 e

$$\int_\Omega f_h(t,x,v)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \geq 0 \quad \text{and} \quad \int_I \rho_h(t,x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

引理3.4 (离散总动量守恒)。 设 $(f_h,\ u_h) \in C^1([0,T];\ \mathcal{Z}_h \times X_h)$ 为通过求解 (3.7) 和 (3.8)得到的 *DG-LDG*近似。则对于 $k \geq 1$,

$$\int_\Omega v f_h(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_I u_h(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v f_0(x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_I u_0(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, t \geq 0.$$

证明。 在 $\phi_h = 1 \in X_h$ 中取 (3.8，并使用定义 (3.6) 得到

$$\sum_i \int_{I_i} \frac{\partial u_h}{\partial t}\,\mathrm{d}x = \sum_i \int_{I_i} \left(\rho_h V_h - \rho_h u_h\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{i,j}\int_{T_{ij}} (v - u_h)\, f_h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

现在，将 $\psi_h = v \in \mathcal{Z}_h$ 代入方程 (3.7，可得

$$\sum_{i,j}\int_{T_{ij}} \left(\frac{\partial}{\partial t}(v f_h) - (u_h - v)\, f_h\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0.$$

将上述两个表达式相加，再进行时间积分，即可得到所需结果。 □

引理 3.5（离散总能量恒等式）。设 $k \geq 2$ and let $(f_h, u_h, w_h) \in \mathrm{C}^1(0,T;\mathrm{Z}_h)\times\mathrm{C}^1(0,T;\ X_h)\times\mathrm{C}^0(0,T;\ X_h)$ 为方程 (3.7) 和 (3.8)-(3.9) 的 DG-LDG 近似解。则,

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}\int_{T_{ij}} v^2 f_h \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} u_h^2 \,\mathrm{d}x\right) + \sum_{i=1}^{N_x}\int_0^t \int_{I_i} w_h^2 \,\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{i,j}\int_0^t \int_{T_{ij}} (u_h - v)^2 f_h \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}\int_{T_{ij}} v^2 f_h(0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} u_h^2(0)\,\mathrm{d}x\right) \quad \forall\ t \geq 0.$$

证明。在方程（ $\psi_h = \frac{v^2}{2} \in \mathcal{Z}_h$ 中取3.7），可得

$$\sum_{i,j}\int_{T_{ij}} \left(\frac{v^2}{2}\frac{\partial f_h}{\partial t} + v^2 f_h - u_h v f_h\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0. \tag{3.20}$$

在方程（ $\phi_h = u_h$ 和 $q_h = w_h$ 中取3.8）-（3.9），得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_h\|_{0,I_h}^2 + \|w_h\|_{0,I_h}^2 + a_h(u_h,u_h) + \sqrt{\epsilon}\,b_h(w_h,u_h)\\ + \sqrt{\epsilon}\,b_h(u_h,w_h) + \left((\rho_h u_h - \rho_h V_h),u_h\right) = 0.\end{aligned} \tag{3.21}$$

由方程（3.13）可得

$$a_h(u_h,u_h) = \sum_{i=0}^{N_x-1}\left(\frac{[\![u_h^3]\!]}{6} - \frac{\widehat{u_h^2}[\![u_h]\!]}{2}\right)_{i+1/2} = 0,$$

得益于（3.15）中定义的数值通量以及周期边界条件。由（3.16）和（3.17）中定义的数值通量，可推得

$$b_h(u_h,w_h) + b_h(w_h,u_h) = 0. \tag{3.22}$$

因此，将方程（3.20）和（3.21）相加可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i,j}\int_{T_{ij}} v^2 f_h \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} u_h^2 \,\mathrm{d}x\right) + \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} w_h^2 \,\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{i,j}\int_{T_{ij}} (u_h - v)^2 f_h \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0.$$

经过时间积分即可得到所需的恒等式。 □

在离散情形中，很难证明总能量像式（2.1）那样耗散，因为难以证明 f_h 的非负性。在连续情形中，这一耗散性质在证明系统（1.1）-（1.2）的适定性时起着至关重要的作用。

引理 3.6。设 $k \geq 0$，并设 f_h 是 f 的 *DG* 近似，满足（3.7）。那么，

$$\max_{t\in[0,T]} \|f_h(t,\cdot)\|_{0,\mathcal{T}_h} \leq e^{\frac{T}{2}}\|f_0\|_{0,\mathcal{T}_h}.$$

证明。取 $\psi_h = f_h$ 代入（3.7），得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 - \sum_{i,j}\left(\frac{1}{2}\int_{T_{ij}}\left(v\partial_x f_h^2 + (u_h - v)\partial_v f_h^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\right)$$
$$- \sum_{i,j}\int_{J_j}\left(\widehat{v f_h}[\![f_h]\!]\right)_{i-1/2,v}\mathrm{d}v - \sum_{i,j}\int_{I_i}\left((u_h - v)f_h[\![f_h]\!]\right)_{x,j-1/2}\mathrm{d}x = 0.$$

应用 i 后 对第二项和第三项分部积分，并利用 $[\![f_h^2]\!] = 2\{f_h\}[\![f_h]\!]$，可得 t

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 - \frac{1}{2}\|f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + \sum_{i,j}\int_{J_j}\left(\frac{2\lambda_1-1}{2}\right)|v|\,[\![f_h]\!]_{i-1/2,v}^2\,\mathrm{d}v\\ &+\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\frac{2\lambda_2-1}{2}\right)\left(|u_h-v|\,[\![f_h]\!]^2\right)_{x,j-1/2}\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

注意，对于 λ_1，$\lambda_2 > 1/2$，左侧的最后两项均为非负，因此可以舍去。经过时间积分即可得到所需结果。□

为了后续使用，我们需要以下引理。

引理 3.7. 设 f 和 f_h 分别为 *Vlasov*-黏性 *Burgers* 系统的连续解和离散解。此外，设 ρ 为与 f 相关联的局部密度，且 ρ_h 为按 (3.6)定义的离散局部密度。则，

$$\|\rho-\rho_h\|_{0,I_h} \le (2M)^{\frac{1}{2}}\|f-f_h\|_{0,\mathcal{T}_h} \quad and \quad \|\rho-\rho_h\|_{\infty,I_h} \le 2M\|f-f_h\|_{\infty,\mathcal{T}_h}.$$

此外，

$$\|\rho V-\rho_h V_h\|_{0,I_h} \le 2M\|f-f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}.$$

证明。 应用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\|\rho-\rho_h\|_{0,I_h}^2 &= \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i}\left(\sum_{j=1}^{N_v}\int_{J_j}(f-f_h)\,\mathrm{d}v\right)^2\mathrm{d}x\\ &\le 2M\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}(f-f_h)^2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

根据定义，可得

$$\rho-\rho_h = \int_J (f-f_h)\,\mathrm{d}v \le 2M\|f-f_h\|_{L^\infty(J)}$$

因此，得到第二个结果。应用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\|\rho V-\rho_h V_h\|_{0,I_h}^2 &= \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i}\left(\sum_{j=1}^{N_v}\int_{J_j}(f-f_h)\,v\,\mathrm{d}v\right)^2\mathrm{d}x\\ &\le 4M^2\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}(f-f_h)^2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

由引理 3.6，可得

$$\|\rho_h\|_{0,I_h} \le C(T)M\|f_0\|_{0,\mathcal{T}_h}. \tag{3.24}$$

4. A priori Estimates

本节讨论离散解的一些先验误差估计。为推导出最优收敛阶，我们采用以下策略：

- 利用投影算子 Q_λ^x（由 Liu 等人在 [LP15] 中提出）及其逼近性质，我们得到 $\|Q_\lambda^x u-u_h\|_{0,I_h}$ 的一个界（参见推论 4.6）。
- 受 Liu 等人在 [LWM20], 中引入的投影算子启发，我们定义了一个新的投影$\Pi_{\lambda_1,\ \lambda_2}$ 这进而帮助我们得到 $\|\Pi_{\lambda_1,\ \lambda_2}f-f_h\|_{0,\ \mathcal{T}_h}$ 的界，这得益于其逼近性质（参见引理 4.12）。

- 上述界满足：k$Q_\lambda^x u - u_h$k0,I_h 的界取决于 k$f - f_h$k0,T$_h$（参见方程 (4.13)-(4.14)）。此外，kΠ_{λ_1}, $_{\lambda_2} f - f_h$k0,T$_h$ 的界取决于 k$u - u_h$k$_{\infty,I_h}$（参见引理 4.10）。
- 在引理 4.1中，利用逆假设，我们得到
$$\|u - u_h\|_{\infty,I_h} \lesssim h + h^{-\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_{0,I_h}.$$
- 然后，应用 Gr¨onwall 型不等式的非线性版本，可得最优收敛阶（参见定理4.13）。

这里的最优性是指相对于证明中所采用的投影算子的近似性质而言的最优性。

4.1. 黏性 Burgers 系统的误差估计。 本小节讨论黏性 Burgers 系统的误差估计。

令 P$_x$： $L^2(I_h) \to X_h$ 为标准的 L^2-投影。
全局投影　节。 令 $s \geq k+1$ 和 $\lambda \geq \frac{1}{2}$。考虑投影 Q_λ^x: $H^s(I_h) \to X_h$ 定义为 b y

$$\int_{I_i} ((Q_\lambda^x \Upsilon) - \Upsilon)\, z \,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{P}^{k-1}(I_i),\ 1 \leq i \leq N_x, \tag{4.1}$$

以及数值通量关系

$$\left(\widehat{Q_\lambda^x \Upsilon}\right)_{i+1/2} = \lambda \Upsilon^-_{i+1/2} + (1-\lambda)\, \Upsilon^+_{i+1/2},\ 1 \leq i \leq N_x - 1. \tag{4.2}$$

上述投影 Q_λ^x 在 $\lambda > 1/2$ 时唯一确定（参见 [LP15，引理 4。1]即使 $\lambda = 1/2$，只要 Q_λ^x 为偶函数且 k 为奇函数，投影 N_x 仍唯一确定（证明同样参见 [LP15，引理 4。1] ）。

下面，我们回顾上述定义的投影的一些性质（证明参见 [LP15，引理 4.2–4.3，第 331]。

全局投影的逼近性质。 对于 $\Upsilon|_{I_i} \in H^{k+1}(I_i)$ 和 $i = 1, 2, \ldots, N_x$，存在一个正定常数 $C = C(k, \lambda)$，与 Υ 无关，使得对于 $k \geq 0$,

$$\begin{cases} \|Q_\lambda^x \Upsilon - \Upsilon\|_{0,I_h} \leq C h_x^{k+1} |\Upsilon|_{k+1,I_h}, \\ \|Q_\lambda^x \Upsilon - \Upsilon\|_{0,\Gamma_x} \leq C h_x^{k+1/2} |\Upsilon|_{k+1,I_h}. \end{cases} \tag{4.3}$$

引理 4.1。 设 u 是黏性 *Burgers* 问题 (1.2) 的解。设 $u_h \in X_h$ 是其有限元逼近。假设 $u \in W^{1,\infty}(I) \cap H^{k+1}(I)$。那么，

$$\|u - u_h\|_{\infty,I_h} \lesssim h \|u\|_{W^{1,\infty}(I)} + h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1,I_h} + h^{-\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_{0,I_h}.$$

证明。 注意到

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\infty,I_h} &\leq \|u - \mathcal{P}_x u\|_{\infty,I_h} + \|\mathcal{P}_x u - u_h\|_{\infty,I_h} \\ &\lesssim h \|u\|_{W^{1,\infty}(I)} + h^{-\frac{1}{2}} \|\mathcal{P}_x u - u_h\|_{0,I_h} \\ &\lesssim h \|u\|_{W^{1,\infty}(I)} + h^{-\frac{1}{2}} \|u - \mathcal{P}_x u\|_{0,I_h} + h^{-\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_{0,I_h} \\ &\lesssim h \|u\|_{W^{1,\infty}(I)} + h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1,I_h} + h^{-\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_{0,I_h}. \end{aligned}$$

在此，第一步中我们使用了三角不等式。在第二步中，第一项源于投影估计[BS07] ，第二项源于范数比较不等式（3.3）。第三步再次应用三角不等式。最后，在第四步中，我们对第二项使用投影估计。□

黏性 Burgers 系统的误差方程： 由于采用数值通量（3.15）-（3.17）的格式具有一致性，（3.8）-（3.9）对于解（u, w）也成立。因此，两式相减可得误差

方程

$$\left(\frac{\partial e_u}{\partial t},\phi_h\right)+a_h(u,\phi_h)-a_h(u_h,\phi_h)+\sqrt{\epsilon}\,b_h(e_w,\phi_h) + (\rho u-\rho_h u_h,\phi_h)=(\rho V-\rho_h V_h,\phi_h)\quad\forall\ \phi_h\in X_h, \tag{4.4}$$

$$(e_w,q_h)+\sqrt{\epsilon}\,b_h(e_u,q_h)=0\quad\forall\ q_h\in X_h, \tag{4.5}$$

其中

$$e_u=u-u_h,\quad e_w=w-w_h.$$

利用投影算子，我们重写

$$\begin{aligned} e_u &:= u-u_h=(u-Q_\lambda^x u)+(Q_\lambda^x u-u_h)=\theta_u-\eta_u,\\ e_w &:= w-w_h=(w-Q_{1-\lambda}^x w)+(Q_{1-\lambda}^x w-w_h)=\theta_w-\eta_w. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Here

$$Q_\lambda^x u-u=:\eta_u,\quad Q_\lambda^x u-u_h=:\theta_u,\quad Q_{1-\lambda}^x w-w=:\eta_w,\quad Q_{1-\lambda}^x w-w_h=:\theta_w.$$

利用（4.6）以及由 Q_λ^x （4.1）-（4.2）给出的投影定义，我们可以将误差方程（4.4）和（4.5）重写为

$$\begin{aligned} (\partial_t\theta_u,\phi_h)+\sqrt{\epsilon}b_h(\theta_w,\phi_h) &= (\rho V-\rho_h V_h,\phi_h)+(\partial_t\eta_u,\phi_h)-(\rho\theta_u.\phi_h)+(\rho\eta_u,\phi_h)\\ &\quad+((\rho-\rho_h)\,\theta_u,\phi_h)-((\rho-\rho_h)\,\eta_u,\phi_h)-((\rho-\rho_h)\,u,\phi_h)\\ &\quad-a_h(u,\phi_h)+a_h(u_h,\phi_h),\quad\forall\ \phi_h\in X_h, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$(\theta_w,q_h)+\sqrt{\epsilon}b_h(\theta_u,q_h)=(\eta_w,q_h),\quad\forall\ q_h\in X_h. \tag{4.8}$$

注记 4.2. 注意，(4.2)给出

$$(\widehat{\eta_u})_{i+1/2}=\{\eta_u\}_{i+1/2}+\left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)[\![\eta_u]\!]_{i+1/2}=0,$$

这意味着

$$\{\eta_u\}_{i+1/2}=\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)[\![\eta_u]\!]_{i+1/2}. \tag{4.9}$$

因此，若 $\lambda=1/2$，则 $\{\eta_u\}=0$；若 $\lambda>1/2$，则 $\{\eta_u\}\neq 0$。

若 $\lambda>1/2$则有以下结果（详细证明见[WZS19，引理 2.3，第 2085]页）.

引理 4.3. 设 $\lambda>1/2$。假设 $(\theta_u,\theta_w)\in X_h\times X_h$ 满足 (4.8)。那么，存在一个正定常数C，与 h 和 ϵ无关，使得

$$\|\partial_x\theta_u\|_{0,I_h}+\sum_{i=0}^{N_x-1}h^{-\frac{1}{2}}[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}\le C\epsilon^{-\frac{1}{2}}\|\theta_w\|_{0,I_h}. \tag{4.10}$$

引理 *4.4.* 设 (u,w) 是黏性 *Burgers* 方程 *(3.4)-(3.5)* 的解。设 $(u_h,w_h)\in X_h\times X_h$ 是 *(3.8)-(3.9)* 的解。设 $u\in L^\infty(0,T;H^{k+1}(I))$。那么，存在一个与 h 无关的正定常数 C，使得对于所有 $t\in(0,T]$，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_u\|_{0,I_h}^2+\frac{1}{2}\|\theta_w\|_{0,I_h}^2 &\le C\left(h^{2k+2}+\|\theta_u\|_{0,I_h}^2+\|f-f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2\right)+Ch^{-\frac{3}{2}}\|\theta_u\|_{0,I_h}^3\\ &\quad+h^{-1}\|\theta_u\|_{0,I_h}^4+\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)C\left(h^{k+1}+h^{k+\frac{1}{2}}\|\theta_u\|_{0,I_h}\right)\left(\sum_{i=0}^{N_x-1}h^{-1}[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

证明。 在方程 $\phi_h = \theta_u$ 和 $q_h = \theta_w$ 中选取(4.7) 和 (4.8，分别相加可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_u\|_{0,I_h}^2 + \|\theta_w\|_{0,I_h}^2 + \sqrt{\epsilon}\, b_h(\theta_w,\theta_u) + \sqrt{\epsilon}\, b_h(\theta_u,\theta_w) + \|\rho^{\frac{1}{2}}\theta_u\|_{0,I_h}^2 = ((\eta_u)_t,\theta_u)\\
&\quad + (\rho\eta_u,\theta_u) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i}\left(u^2-u_h^2\right)\partial_x\theta_u\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N_x-1}\left(u^2-\{u_h\}^2\right)[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N_x-1}\left(\{u_h\}^2-\widehat{u_h^2}\right)[\![\theta_u]\!]_{i+1/2} + (\eta_w,\theta_w) - ((\rho-\rho_h)\,\eta_u,\theta_u)\\
&\quad - ((\rho-\rho_h)\,u,\theta_u) + (\rho V-\rho_h V_h,\theta_u) + ((\rho-\rho_h)\,\theta_u,\theta_u)
\end{aligned}$$

注意，由于 (3.22) 以及 (4.1)-(4.2) 中投影的定义，上述等式左端的第三项和第四项之和为零。此外，左端的第五项非负，因此在估计时可以舍去。应用 H¨older 不等式和杨氏不等式、引理 3.7 中的估计，以及恒等式$\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2} = a(a-b) - (a-b)_2^{\ 2}$，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_u\|_{0,I_h}^2 + \|\theta_w\|_{0,I_h}^2 \lesssim \|(\eta_u)_t\|_{0,I_h}^2 + \|\rho\|_{L^\infty(I)}^2\|\eta_u\|_{0,I_h}^2 + \|\eta_w\|_{0,I_h}^2 + \|f-f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2\\
&\quad + h^{-1}\|f-f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2\|\eta_u\|_{0,I_h}^2 + \|f-f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2\|u\|_{L^\infty(I)}^2 + \|\theta_u\|_{0,I_h}^2 + \|\theta_u\|_{L^4(I_h)}^4\\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} u\,(u-u_h)\,\partial_x\theta_u\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i}(u-u_h)^2\,\partial_x\theta_u\,\mathrm{d}x\\
&\quad + \sum_{i=0}^{N_x-1} u\,\{u-u_h\}\,[\![\theta_u]\!]_{i+1/2} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N_x-1}\left(\{u-u_h\}\right)^2[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N_x-1}\left(\{u_h\}^2-\widehat{u_h^2}\right)[\![\theta_u]\!]_{i+1/2} + \frac{1}{2}\|\theta_w\|_{0,I_h}^2.
\end{aligned}$$

利用范数比较不等式（3.3）、逼近性质（4.3）、恒等式（4.9），并在上述方程中代入 $u-\{u_h\} = \{u-u_h\} = \{\theta_u\} - \{\eta_u\}$，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_u\|_{0,I_h}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_w\|_{0,I_h}^2 \le{}& Ch^{2k+2} + C\|f-f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + \|\theta_u\|_{0,I_h}^2 + h^{-1}\|\theta_u\|_{0,I_h}^4\\
&+ \kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4+\kappa_5.
\end{aligned}\tag{4.12}$$

Here

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &:= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} u\,\partial_x\theta_u^2\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{N_x-1} u\,\{\theta_u\}\,[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}\\
\kappa_2 &:= -\sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i} u\,\eta_u\,\partial_x\theta_u\,\mathrm{d}x - \left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)\sum_{i=0}^{N_x-1} u\,[\![\eta_u]\!]_{i+1/2}[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}\\
\kappa_3 &:= -\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i}\partial_x\theta_u^3\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N_x-1}\{\theta_u\}^2\,[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}\\
\kappa_4 &:= \sum_{i=1}^{N_x}\int_{I_i}\left(\theta_u-\frac{1}{2}\eta_u\right)\eta_u\,\partial_x\theta_u\,\mathrm{d}x + \left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)\sum_{i=0}^{N_x-1}\left(\{\theta_u\}-\frac{1}{2}\{\eta_u\}\right)[\![\eta_u]\!]_{i+1/2}[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}\\
\kappa_5 &:= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N_x-1}\left(\{u_h\}^2-\widehat{u_h^2}\right)[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}.
\end{aligned}$$

利用分部积分和恒等式 $[\![ab]\!] = \{a\}[\![b]\!] + [\![a]\!]\{b\}$，可得

$$\kappa_1 \leq C\|u_x\|_{L^\infty(I)}\|\theta_u\|^2_{0,I_h}.$$

泰勒定理指出，对于所有 $x \in I_i$， $u(x) = u(x_i) + (x - x_i)\,\partial_x u(x_i^*)$，其中 $x_i^* \in (x,\ x_i)$。因此，

$$\begin{aligned}
\kappa_2 &= -\sum_{i=1}^{N_x} u(x_i) \int_{I_i} \eta_u\, \partial_x\theta_u \,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{N_x} \partial_x u(x_i^*) \int_{I_i} (x - x_i)\ \eta_u\, \partial_x\theta_u \,\mathrm{d}x \\
&\quad - \left(\frac{2\lambda - 1}{2}\right) \sum_{i=0}^{N_x-1} u\, [\![\eta_u]\!]_{i+1/2}[\![\theta_u]\!]_{i+1/2} \\
&\leq h^{k+1} C\|\partial_x u\|_{L^\infty(I)}\|\theta_u\|_{0,I_h} + \|u\|_{L^\infty(I)} \left(\frac{2\lambda - 1}{2}\right) \sum_{i=0}^{N_x-1} h^{\frac{1}{2}} [\![\eta_u]\!]_{i+1/2} h^{-\frac{1}{2}} [\![\theta_u]\!]_{i+1/2} \\
&\leq C\left(h^{2k+2} + \|\theta_u\|^2_{0,I_h}\right) + \left(\frac{2\lambda - 1}{2}\right) C\|\eta_u\|_{0,I_h} \left(\sum_{i=0}^{N_x-1} h^{-1} [\![\theta_u]\!]^2_{i+1/2}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

请注意，上述 κ_2 表达式中的第一项由于全局投影的定义（4.1）而消失。为了对第二项进行估计，我们采用了逼近性质（4.3）和逆不等式（3.1）。最后一步是杨氏不等式、迹不等式（3.2）以及柯西-施瓦茨不等式的推论。

对于 κ_3，进行分部积分可得

$$\kappa_3 = \frac{1}{24} \sum_{i=0}^{N_x-1} [\![\theta_u]\!]^3_{i+1/2} \lesssim \|\theta_u\|_{\infty,I_h}\|\theta_u\|^2_{0,\partial I_h} \leq Ch^{-\frac{3}{2}}\|\theta_u\|^3_{0,I_h},$$

其中在最后一步中，我们使用了范数比较估计（3.3）和迹不等式（3.2）。为了估计 κ_4，利用投影估计以及（3.1）-（3.2）、H¨older 不等式和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
\kappa_4 &\leq \|\theta_u\|_{0,I_h}\|\eta_u\|_{0,I_h}\|\partial_x\theta_u\|_{\infty,I_h} + C\|\partial_x\theta_u\|_{\infty,I_h}\|\eta_u\|^2_{0,I_h} \\
&\quad + \left(\frac{2\lambda - 1}{2}\right) C\left(\|\theta_u\|_{0,\partial I_h} + \|\eta_u\|_{0,\partial I_h}\right)\|\eta_u\|_{0,\partial I_h} \left(\sum_{i=0}^{N_x-1} h^{-1} [\![\theta_u]\!]^2_{i+1/2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(h^{2k+2} + \|\theta_u\|^2_{0,I_h}\right) + \left(\frac{2\lambda - 1}{2}\right) Ch^{k+\frac{1}{2}}\|\theta_u\|_{0,I_h} \left(\sum_{i=0}^{N_x-1} h^{-1} [\![\theta_u]\!]^2_{i+1/2}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

最后，利用 $\{u_h\}_2^2 - \frac{u_h^2}{2} = -\frac{[\![u_h]\!]^2}{24}$，$[\![u_h]\!] = [\![\theta_u]\!] - [\![\eta_u]\!]$，并结合逼近性质（4.3）、迹不等式（3.2）和逆不等式（3.1），以及 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}
\kappa_5 &= -\frac{1}{24} \sum_{i=0}^{N_x-1} \left([\![\theta_u]\!]^2_{i+1/2} - 2[\![\eta_u]\!]_{i+1/2}[\![\theta_u]\!]_{i+1/2} + [\![\eta_u]\!]^2_{i+1/2}\right) [\![\theta_u]\!]_{i+1/2} \\
&\leq C\|\theta_u\|_{\infty,I_h}\left(\|\theta_u\|^2_{0,\partial I_h} + \|\theta_u\|_{0,\partial I_h}\|\eta_u\|_{0,\partial I_h} + \|\eta_u\|^2_{0,\partial I_h}\right) \\
&\leq h^{-\frac{1}{2}}\|\theta_u\|_{0,I_h}\left(h^{-1}\|\theta_u\|^2_{0,I_h} + Ch^k\|\theta_u\|_{0,I_h} + Ch^{2k+1}\right) \\
&\leq C\left(h^{2k+2} + \|\theta_u\|^2_{0,I_h} + h^{-\frac{3}{2}}\|\theta_u\|^3_{0,I_h}\right).
\end{aligned}$$

将上述所有估计代入方程（4.12），即可得到所需结果。 □

注记 4.5。 在得到估计 （4.11）时，针对 θ_u，我们采用代数恒等式 $\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} = a\,(a-b) - (a-b)_2^2$，、泰勒定理以及中心数值通量 u_h^2的定义（3.15）。

推论 4.6。 若 $\lambda = 1/2$ 中 k 为偶函数且 N_x 为奇函数，则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_u\|_{0,I_h}^2 + \|\theta_w\|_{0,I_h}^2 \le C\left(h^{2k+2} + \|f - f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + \|\theta_u\|_{0,I_h}^2 + h^{-\frac{3}{2}}\|\theta_u\|_{0,I_h}^3 + h^{-1}\|\theta_u\|_{0,I_h}^4\right). \tag{4.13}$$

若 $\lambda > 1/2$，则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_u\|_{0,I_h}^2 + \|\theta_w\|_{0,I_h}^2 \le C\left(\left(1+\epsilon^{-1}\right)h^{2k+2} + \|f - f_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + \left(1+\epsilon^{-1}h^{2k+1}\right)\|\theta_u\|_{0,I_h}^2 + h^{-\frac{3}{2}}\|\theta_u\|_{0,I_h}^3 + h^{-1}\|\theta_u\|_{0,I_h}^4\right). \tag{4.14}$$

证明。 对于 $\lambda = 1/2$，其中 k 为偶函数，且 N_x 为奇函数，(4.11) 中的最后一项为零 sh.

现在，若 $\lambda > 1/2$，则为了估计 (4.11) 的最后一项，我们使用 (4.10)。

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)\left(h^{k+1} + h^{k+\frac{1}{2}}\|\theta_u\|_{0,I_h}\right)\left(\sum_{i=0}^{N_x-1} h^{-1}[\![\theta_u]\!]_{i+1/2}^2\right)^{\frac{1}{2}} &\le C\epsilon^{-\frac{1}{2}}\left(h^{k+1} + h^{k+\frac{1}{2}}\|\theta_u\|_{0,I_h}\right)\|\theta_w\|_{0,I_h} \\ &\le C(\delta)\epsilon^{-1}\left(h^{2k+2} + h^{2k+1}\|\theta_u\|_{0,I_h}^2\right) + \delta\|\theta_w\|_{0,I_h}^2.\end{aligned}$$

当 $\delta > 0$ 足够小时，所需结果即可得出。 □

4.2. **Vlasov 方程的误差估计**。 由于采用数值通量 (3.7) 的格式与数值通量 (3.12) 相一致，因此解 (3.7) 对解 $(u,\ f)$ 也成立。因此，通过作差，我们得到误差方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(f - f_h), \psi_h\right) + \mathcal{B}(u; f, \psi_h) - \mathcal{B}_h(u_h; f_h, \psi_h) = 0 \quad \forall\, \psi_h \in \mathcal{Z}_h.$$

令 $e_f := f - f_h$，我们将误差方程改写为

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial t}, \psi_h\right) + a_h^0(e_f, \psi_h) + \mathcal{N}(u; f, \psi_h) - \mathcal{N}^h(u_h; f_h, \psi_h) = 0 \quad \forall\, \psi_h \in \mathcal{Z}_h, \tag{4.15}$$

其中

$$a_h^0(e_f, \psi_h) := -\sum_{i,j}\int_{T_{ij}} e_f v\, \partial_x\psi_h \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^{N_v}\sum_{i=0}^{N_x-1}\int_{J_j} (\widehat{ve_f}[\![\psi_h]\!])_{i+1/2,v}\,\mathrm{d}v, \tag{4.16}$$

$$\mathcal{N}(u; f, \psi_h) := -\sum_{i,j}\int_{T_{ij}} f(u-v)\,\partial_v\psi_h \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x \ - \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_v-1}\int_{I_i}((u-v)f[\![\psi_h]\!])_{x,j+1/2}\,\mathrm{d}x\,, \tag{4.17}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^h(u_h; f_h, \psi_h) := &-\sum_{i,j}\int_{T_{ij}} f_h(u_h - v)\,\partial_v\psi_h \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x \\ &- \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_v-1}\int_{I_i}\left((u_h - v)f_h[\![\psi_h]\!]\right)_{x,j+1/2}\mathrm{d}x\,.\end{aligned} \tag{4.18}$$

4.3. **二维投影。** 受 [LWM20]，的启发，我们现在引入一个二维全局投影 $\Pi_{\lambda_1,\ \lambda_2} : \mathrm{C}^0(\mathrm{T}_h) \to \mathrm{Z}_h$ 对于 $\lambda_1, \lambda_2 > \frac{1}{2}$，定义为

$$\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g = \left(\Pi_{\lambda_1} \otimes \Pi_{\lambda_2}\right) g, \quad \forall \quad g \in \mathcal{C}^0(\overline{T_{ij}}), 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_v. \tag{4.19}$$

其中

$$\Pi_{\lambda_1} g := \begin{cases} Q^x_{\lambda_1} g & \text{if} \quad v > 0, \\ Q^x_{1-\lambda_1} g & \text{if} \quad v < 0, \\ Q^x_1 g & \text{if} \quad v = 0, \end{cases}$$

and

$$\Pi_{\lambda_2} g := \begin{cases} Q^v_{\lambda_2} g & \text{if} \quad (u(x) - v) > 0, \\ Q^v_{1-\lambda_2} g & \text{if} \quad (u(x) - v) < 0, \\ Q^v_1 g & \text{if} \quad (u(x) - v) = 0. \end{cases}$$

更确切地说，上述定义的投影 $\Pi_{\lambda_1,\ \lambda_2}$ 可显式定义如下：令 γ_1，$\mathbb{k}_1^+$和$\mathbb{k}_1^-$分别为所有满足以下条件的指标 j 的集合：v 在 J_j内分别变号、保持为正和保持为负。令 γ_2，$\mathbb{k}_2^+$和 $\mathbb{k}_2^-$分别为所有满足以下条件的指标 i 的集合：对于固定的 v，$(u(x) - v)$ 在 I_i 内分别变号、保持为正和保持为负。

投影 $\Pi_{\lambda_1,\ \lambda_2} g$ 满足以下涉及体积分的等式：

$$\int_{T_{ij}} \Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g z_h \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}v = \int_{T_{ij}} g z_h \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}v, \quad \forall \quad z_h \in \mathbb{Q}^{k-1}(T_{ij}) \tag{4.20}$$

投影 $\Pi_{\lambda_1,\ \lambda_2} g$ 满足以下涉及垂直边界积分的等式：

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{J_j} (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^-_{i+\frac{1}{2},v} \, (z_h)^-_{i+\frac{1}{2},v} \,\mathrm{d}v = \int_{J_j} g^-_{i+\frac{1}{2},v} (z_h)^-_{i+\frac{1}{2},v} \,\mathrm{d}v, & \text{if} \quad j \in \gamma_1 \\ \displaystyle\int_{J_j} (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{\lambda_1}_{i+\frac{1}{2},v} \, (z_h)^-_{i+\frac{1}{2},v} \,\mathrm{d}v = \int_{J_j} g^{\lambda_1}_{i+\frac{1}{2},v} (z_h)^-_{i+\frac{1}{2},v} \,\mathrm{d}v, & \text{if} \quad j \in \mathbb{k}_1^+ \\ \displaystyle\int_{J_j} (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{1-\lambda_1}_{i-\frac{1}{2},v} \, (z_h)^+_{i-\frac{1}{2},v} \,\mathrm{d}v = \int_{J_j} g^{1-\lambda_1}_{i-\frac{1}{2},v} (z_h)^+_{i-\frac{1}{2},v} \,\mathrm{d}v, & \text{if} \quad j \in \mathbb{k}_1^- \end{cases} \tag{4.21}$$

对所有 $z_h \in \mathbb{Q}^{k-1}(T_{ij})$。投影 $\Pi_{\lambda_1,\ \lambda_2} g$ 满足以下涉及水平边界积分的等式：

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{I_i} (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^-_{x,j+\frac{1}{2}} \, (z_h)^-_{x,j+\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \int_{I_i} g^-_{x,j+\frac{1}{2}} (z_h)^-_{x,j+\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x, & \text{if } i \in \gamma_2 \\ \displaystyle\int_{I_i} (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{\lambda_2}_{x,j+\frac{1}{2}} \, (z_h)^-_{x,j+\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \int_{I_i} g^{\lambda_2}_{x,j+\frac{1}{2}} (z_h)^-_{x,j+\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x, & \text{if } i \in \mathbb{k}_2^+ \\ \displaystyle\int_{I_i} (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{1-\lambda_2}_{x,j-\frac{1}{2}} \, (z_h)^-_{x,j-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \int_{I_i} g^{1-\lambda_2}_{x,j-\frac{1}{2}} (z_h)^-_{x,j-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x, & \text{if } i \in \mathbb{k}_2^- \end{cases} \tag{4.22}$$

对所有 $z_h \in \mathbb{Q}^{k-1}(T_{ij})$，投影 $\Pi_{\lambda_1,\ \lambda_2} g$ 满足以下涉及边界点的等式：

$$(\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{-,-}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = g^{-,-}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad \text{if} \quad (i,j) \in (\gamma_2, \gamma_1) \tag{4.23}$$

$$\begin{cases} (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{\lambda_1,-}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = g^{\lambda_1,-}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, & \text{if} \quad (i,j) \in (\gamma_2, \mathbb{k}_1^+) \\ (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{1-\lambda_1,-}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = g^{1-\lambda_1,-}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, & \text{if} \quad (i,j) \in (\gamma_2, \mathbb{k}_1^-) \end{cases} \tag{4.24}$$

$$\begin{cases} (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{-,\lambda_2}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = g^{-,\lambda_2}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, & \text{if} \quad (i,j) \in (\mathbb{k}_2^+, \gamma_1) \\ (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{-,1-\lambda_2}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = g^{-,1-\lambda_2}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, & \text{if} \quad (i,j) \in (\mathbb{k}_2^-, \gamma_1) \end{cases} \tag{4.25}$$

$$(\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{\lambda_1,\lambda_2}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = g^{\lambda_1,\lambda_2}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad \text{if} \quad (i,j) \in (\Bbbk_2^+, \Bbbk_1^+) \tag{4.26}$$

$$(\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{\lambda_1,1-\lambda_2}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = g^{\lambda_1,1-\lambda_2}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \quad \text{if} \quad (i,j) \in (\Bbbk_2^-, \Bbbk_1^+) \tag{4.27}$$

$$(\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{1-\lambda_1,\lambda_2}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = g^{1-\lambda_1,\lambda_2}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad \text{if} \quad (i,j) \in (\Bbbk_2^+, \Bbbk_1^-) \tag{4.28}$$

$$(\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} g)^{1-\lambda_1,1-\lambda_2}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = g^{1-\lambda_1,1-\lambda_2}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \quad \text{if} \quad (i,j) \in (\Bbbk_2^-, \Bbbk_1^-). \tag{4.29}$$

这里，我们使用了以下记号：

$$\begin{aligned} g^{\varkappa,\varsigma}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &:= \varkappa\varsigma g^{-,-}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \varkappa(1-\varsigma)\, g^{-,+}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ &\quad + (1-\varkappa)\,\varsigma g^{+,-}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (1-\varkappa)(1-\varsigma)\, g^{+,+}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{\varkappa}_{i-1/2,v} &:= (1-\varkappa)\,(g)^+_{i-1/2,v} + \varkappa\,(g)^-_{i-1/2,v}\,, \\ g^{\varsigma}_{x,j-1/2} &:= (1-\varsigma)\,(g)^+_{x,j-1/2} + \varsigma\,(g)^-_{x,j-1/2}\,, \\ g^{\varkappa,-}_{i-1/2,j-1/2} &:= (1-\varkappa)\, g\left(x^+_{i-1/2}, v^-_{j-1/2}\right) + \varkappa g\left(x^-_{i-1/2}, v^-_{j-1/2}\right), \\ g^{-,\varkappa}_{i-1/2,j-1/2} &:= (1-\varkappa)\, g\left(x^-_{i-1/2}, v^+_{j-1/2}\right) + \varkappa g\left(x^-_{i-1/2}, v^-_{j-1/2}\right), \\ g^{\pm,\pm}_{i-1/2,j-1/2} &:= g\left(x^{\pm}_{i-1/2}, v^{\pm}_{j-1/2}\right), \end{aligned}$$

其中 $x^{\pm}_{i-1/2}$ 表示 $\lim_{\varrho\to 0^+}\left(x_{i-1/2}\pm\varrho\right)$，而 $\{v^{\pm}_{j-1/2}\}$表示 $\lim_{\varrho\to 0^+}\left(v_{j-1/2}\pm\varrho\right)$。在上述记号中，括号 $\varkappa$取值为 λ_1 和 $1-\lambda_1$，而 ς取值为 λ_2 和 $1-\lambda_2$。

在下面的引理中，我们陈述全局投影的逼近性质$\Pi_{\lambda_1,\,\lambda_2}$ 其证明见于[LWM20，引理 3.1，第 8]页。

引理 4.7。对于 $f \in H^{k+1}(\Omega)$，存在唯一的$\Pi_{\lambda_1,\,\lambda_2} f$ 由(4.19) 定义，并满足以下逼近性质：

$$\|f - \Pi_{\lambda_1,\lambda_2} f\|_{0,\mathcal{T}_h} + h^{\frac{1}{2}} \|f - \Pi_{\lambda_1,\lambda_2} f\|_{0,\Gamma_h} \le C\, h^{k+1} \|f\|_{k+1,\Omega}, \tag{4.30}$$

其中$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_{20,\,\Gamma_h} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_{20,\,\Gamma_x} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_{20,\,\Gamma_v}$。

利用投影，将 $f - f_h$ 拆分为

$$e_f := f - f_h := (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} f - f_h) - (\Pi_{\lambda_1,\lambda_2} f - f) =: \theta_f - \eta_f, \tag{4.31}$$

其中

$$\theta_f = \Pi_{\lambda_1,\lambda_2} f - f_h \quad \text{and} \quad \eta_f = \Pi_{\lambda_1,\lambda_2} f - f.$$

引理 4.8. 设 $u \in C^0(I)$ $f \in C^0(\Omega)$ 和 $f_h \in \mathcal{Z}_h$ 满足 $k \ge 0$。则下列恒等式成立：

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(u; f, \theta_f) - \mathcal{N}^h(u_h; f_h, \theta_f) &= \sum_{i,j} \int_{I_i} \left(\frac{2\lambda_2 - 1}{2}\right) |(u_h - v)|\, [\![\theta_f]\!]^2_{x,j-1/2}\, \mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{i,j} \int_{T_{ij}} \left((u - u_h)\, \partial_v f\, \theta_f - \frac{1}{2}\theta_f^2\right) \mathrm{d}v\, \mathrm{d}x + \mathcal{K}^2(u_h - v, f, \theta_f), \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{K}^2(u_h - v, f, \theta_f) = \sum_{i,j} \int_{T_{ij}} \eta_f (u_h - v)\, \partial_v \theta_f \, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}x + \sum_{i,j} \int_{I_i} \Big((u_h - v)\, \eta_f [\![\theta_f]\!]\Big)_{x,j-1/2} \mathrm{d}x\,. \tag{4.32}$$

证明。 证明与 [DDCS09，引理 4 类似。8] 边界项略有变化。因此，我们给出一个简短的证明。将非线性项（4.17）和（4.18）相减后，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(u;f,\theta_f)-\mathcal{N}^h(u_h;f_h,\theta_f)&=-\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}\left[f(u-v)-f_h(u_h-v)\right]\partial_v\theta_f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\&-\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\left((u-v)f\hat{-}(u_h-v)f_h\right)[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\mathrm{d}x=T_1+T_2+T_3.\end{aligned}\tag{4.33}$$

在体积项中加上并减去 $(u_h-v)f$ 后，我们得到

$$\begin{aligned}T_1&=-\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}\left(f(u-u_h)\right)\partial_v\theta_f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v,\\T_2&=-\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}\left((u_h-v)(f-f_h)\right)\partial_v\theta_f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v,\\T_3&=-\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\left((u-v)f\hat{-}(u_h-v)f_h\right)[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对 v 变量进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}T_1&=\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}(u-u_h)\,\partial_v f\theta_f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v+\sum_{i,j}\int_{I_i}(u-u_h)\,f[\![\theta_f]\!]_{x,j-1/2}\,\mathrm{d}x\\&=:T_{11}+T_{12}.\end{aligned}$$

我们将项 T_2 改写为

$$\begin{aligned}T_2&=-\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}(f-f_h)(u_h-v)\,\partial_v\theta_f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\&=\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}\eta_f(u_h-v)\,\partial_v\theta_f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}(u_h-v)\,\partial_v\theta_f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\&=:T_{21}+T_{22}.\end{aligned}$$

对项 T_{22} 关于 v 变量进行分部积分，得到

$$T_{22}=-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}\theta_f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v+\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\frac{(u_h-v)}{2}[\![\theta_f^2]\!]\right)_{x,j-1/2}\mathrm{d}x=:T_{221}+T_{222}.$$

最后，我们按如下方式处理边界项 T_3：

$$\begin{aligned}T_3&=-\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\left((u-v)f\hat{-}(u_h-v)f_h\right)[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\mathrm{d}x\\&=-\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\left((u-v)f-(u_h-v)f\right)[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\mathrm{d}x\\&\quad-\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\left((u_h-v)f\hat{-}(u_h-v)f_h\right)[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\mathrm{d}x\\&=-\sum_{i,j}\int_{I_i}\left((u-u_h)f[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\mathrm{d}x-\sum_{i,j}\int_{I_i}\left((u_h-v)(f-f_h)[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\mathrm{d}x\\&=T_{31}+T_{32}.\end{aligned}$$

由 T_{12}，T_{222}，T_{31} 和 T_{32} 项，得到

$$T_{31}+T_{12}=0.$$

$$
\begin{aligned}
T_{222}+T_{32} &= \sum_{i,j}\int_{I_i}\left((u_h-v)\left\{\theta_f\right\}[\![\theta_f]\!]-(u_h-v)\left\{f-f_h\right\}[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad+\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\frac{2\lambda_2-1}{2}\right)\left(|(u_h-v)|\,[\![f-f_h]\!]\,[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\frac{2\lambda_2-1}{2}\right)\left(|(u_h-v)|\,[\![\theta_f]\!]^2+\hat{}\,(u_h-v)\,\eta_f[\![\theta_f]\!]\right)_{x,j-1/2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

这里，第一步中我们使用 $[\![ab]\!]=\{a\}[\![b]\!]+[\![a]\!]\{b\}$。现在，将所有恒等式代入方程（4.33）后，我们便完成了证明。□

在误差方程中选取 $\psi_h=\theta_f$ （4.15），并使用方程（4.31）和引理 4.8，我们将方程（4.15）在 θ_f 中改写为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2+\sum_{i,j}\int_{J_j}\left(\frac{2\lambda_1-1}{2}\right)|v|\,[\![\theta_f]\!]_{i-1/2,v}^2\,\mathrm{d}v+\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\frac{2\lambda_2-1}{2}\right)|u_h-v|\,[\![\theta_f]\!]_{x,j-1/2}^2\,\mathrm{d}x \\
&=((\eta_f)_t,\theta_f)-\mathcal{K}^1(v,\eta_f,\theta_f)-\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}\left((u-u_h)\,\partial_v f\,\theta_f-\frac{1}{2}\theta_f^2\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x \\
&\quad-\mathcal{K}^2(u_h-v,f,\theta_f),
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

其中，

$$
\mathcal{K}^1(v,\eta_f,\theta_f)=\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}\eta_f v\,\partial_x\theta_f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v+\sum_{i,j}\int_{J_j}(\widehat{v\,\eta_f}[\![\theta_f]\!])_{i-1/2,v}\,\mathrm{d}v\,. \tag{4.35}
$$

为了证明关于 $e_f:=\theta_f-\eta_f$的估计，只需证明关于 θ_f 的估计，因为根据（4.30），关于 η_f 的估计已知。

设 $J^{i+1/2}=\{x_{i+1/2}\}\times J$和 $I^{j+1/2}=I\times\{v_{j+1/2}\}$】【。

引理 4.9. 设 $k\geq 1$，并设 $f\in C^0([0,T];W^{1,\infty}(\Omega)\cap H^{k+1}(\Omega))$ 是 *(1.1)* 的解。设$f_h(t)\in Z_h$ 是其满足 *(3.7)* 的近似，并设 $K^1(v,\eta_f,\theta_f)$ 按照 *(4.35)* 定义。假设剖分 T_h 的构造满足 v 的任何分量都不会在任何单元内部消失。那么，以下估计成立：

$$
|\mathcal{K}^1(v,\eta_f,\theta_f)|\leq Ch^{k+1}\|f\|_{k+1,\Omega}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}\quad\forall\quad t\in[0,T]. \tag{4.36}
$$

证明。定义

$$
\mathcal{K}^1(v,\eta_f,\theta_f)=\sum_{i,j}\mathcal{K}_{ij}^1(v,\eta_f,\theta_f),
$$

其中

$$
K_{ij}^1(v,\eta_f,\theta_f)=\int_{T_{ij}}\eta_f v\,\partial_x\theta_f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v+\int_{J_j}(v\eta_f[\![\theta_f]\!])_{i-1/2,v}\,\mathrm{d}v.
$$

我们先对任意一个单元 T_{ij}估计 $\mathrm{K}^1(v,\ \eta_f,\ \theta_f)$，然后对所有单元求和。令$\bar{v}=\mathrm{P}_v^0(v)$为 T_{ij} 上的分片常数 L^2-投影。对于 v，于是有

$$
\mathcal{K}_{ij}^1(v,\eta_f,\theta_f)=\mathcal{K}_{ij}^1(v-\bar{v},\eta_f,\theta_f)+\mathcal{K}_{ij}^1(\bar{v},\eta_f,\theta_f). \tag{4.37}
$$

该 H¨older不等式结合投影估计以及式（3.1）-（3.2）可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_{ij}^1(v-\bar{v},\eta_f,\theta_f)&=\|v-\bar{v}\|_{L^\infty(J)}\left(\|\eta_f\|_{0,T_{ij}}\|\partial_x\theta_f\|_{0,T_{ij}}+\sum_{m=i+1/2}\|\eta_f\|_{0,J^m}\|\theta_f\|_{0,J^m}\right) \\
&\leq h_v h^k\|f\|_{k+1,T_{ij}}\|\theta_f\|_{0,T_{ij}}.
\end{aligned}
$$

利用（4.19）和（3.12），（4.37）的最后一项为零。证明完毕。□

引理 *4.10.* 设 T_h 是 Ω 的笛卡尔网格，$k \geq 1$ 且令 $(u_h,\ f_h) \in X_h \times Z_h$ 为 (3.7) 的解。令 $(u,\ f) \in L^\infty([0,T];\ W^{1,\infty}(I) \cap H^{k+1}(I)) \times L^\infty([0,T];\ W^{1,\infty}(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega))$，并令 K^2 按 (4.32) 定义。则有如下估计

$$|\mathcal{K}^2(u_h - v, f, \theta_f)| \leq C\left(h^k \|u_h - u\|_{\infty, I_h} + h^{k+1}\|u\|_{W^{1,\infty}(I)}\right)\|f\|_{k+1,\Omega}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}. \tag{4.38}$$

证明。设

$$\mathcal{K}^2(u_h - v, f, \theta_f) = \sum_{i,j} \mathcal{K}^2_{ij}(u_h - v, f, \theta_f),$$

其中

$$\mathcal{K}^2_{ij}(u_h - v, f, \theta_f) = \int_{T_{ij}} (u_h - v)\,\eta_f\,\partial_v\theta_f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_{I_i} \Big((u_h - v)\,\eta_f [\![\theta_f]\!]\Big)_{x, j+1/2} \,\mathrm{d}x.$$

首先，我们证明单个单元 T_{ij} 上的估计，然后对所有单元求和。在 K^2_{ij} 中的 $(u - v)$ 两侧同时加上和减去 $(u_h - v, f, \theta_f)$，得到

$$\mathcal{K}^2_{ij}(u_h - v, f, \theta_f) \leq \mathcal{K}^2_{ij}((u_h - u), f, \theta_f) + \mathcal{K}^2_{ij}((u - v), f, \theta_f). \tag{4.39}$$

利用 H¨ol 由不等式 (3.1)-(3.2) 以及第一项的投影估计，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^2_{ij}(u_h - u), f, \theta_f) &\leq \|u_h - u\|_{\infty, I_i}\Big(\|\eta_f\|_{0,T_{ij}}\|\partial_v\theta_f\|_{0,T_{ij}} \\ &\quad + \sum_{m=i+1/2} \|\eta_f\|_{0,I^m}\|\theta_f\|_{0,I^m}\Big) \\ &\leq Ch^k\|u_h - u\|_{\infty,I_i}\|f\|_{k+1,T_{ij}}\|\theta_f\|_{0,T_{ij}}.\end{aligned}$$

现在，为了完成 证明，我们需要估计 (4.39) 的最后一项。为此，我们分情况讨论 s:

(1) 若 $(u(x) - v) \neq 0, \quad \forall\, x \in I_i$。

(2) 若 $(u - v)$ 在 T_{ij} 内消失。

在情形 (1) 中，不失一般性，假设 $(u(x) - v) > 0$ 对所有 $x \in I_i$成立。利用方程 (4.19) 和 (3.12) 可得:

$$\mathcal{K}^2_{ij}\left((u - v), f, \theta_f\right) = 0.$$

在情形 (2) 中，投影算子为 $\Pi_{\lambda_1,\ \lambda_2}$。然后，结合 (3.1)-(3.2) 和投影估计，利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^2_{ij}((u - v), f, \theta_f) &\leq \|u - v\|_{L^\infty(I)}\left(\|\eta_f\|_{0,T_{ij}}\|\partial_v\theta_f\|_{0,T_{ij}} + \sum_{m=j+1/2} \|\eta_f\|_{0,I^m}\|\theta_f\|_{0,I^m}\right) \\ &\leq Ch^k\|u - v\|_{L^\infty(I)}\|f\|_{k+1,T_{ij}}\|\theta_f\|_{0,T_{ij}}.\end{aligned}$$

现在，利用这一事实：存在 $x^* \in I_i$ 使得 $(u(x^*) - v) = 0$，再结合中值定理，我们得到

$$\|u - v\|_{L^\infty(I)} = \max_{x \in I_i} |u(x) - u(x^*)| \leq C \max_{x \in I_i} |x - x^*|\,\|u_x\|_{L^\infty(I)} \leq Ch\|u\|_{W^{1,\infty}(I)}.$$

因此，

$$\mathcal{K}^2_{ij}((u - v), f, \theta_f) \leq Ch^{k+1}\|u\|_{W^{1,\infty}(I)}\|f\|_{k+1,T_{ij}}\|\theta_f\|_{0,T_{ij}}.$$

证明至此完成。 □

引理 4.11. 设 $f(t)$ 是 *Vlasov* 方程(1.1)的解。设 $f_h(t) \in \mathcal{Z}_h$ 为有限近似。假设 $f \in L^\infty([0,T];\ H^{k+1}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega))$。那么存在常数 $C > 0$，使得当$t \in (0, T]$

$$\|f(t) - f_h(t)\|_{\infty,\mathcal{T}_h} \leq C\left(h\|f(t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + h^{k+\frac{1}{2}}\|f(t)\|_{k+1,\Omega} + h^{-\frac{1}{2}}\|f(t) - f_h(t)\|_{0,\mathcal{T}_h}\right).$$

证明。 证明与引理 4.1 类似，只需取 $u = f, u_h = f_h$ 和 $Q_\lambda u = \Pi_{\lambda_1,\lambda_2} f$。证毕。

□

引理 *4.12.* 设 $k \geq 1$，且 $f \in C^1([0,T];\ H^{k+1}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega))$ 为 *Vlasov*-黏性*Burgers*问题 *(1.1)-(1.2)* 的解，$u \in C^0([0,T];\ H^{k+1}(I) \cap W^{1,\infty}(I))$ 为其对应的流体速度。设 $(u_h, f_h) \in X_h \times Z_h$ 为 (u, f) 的近似，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 \leq Ch^{2k+2} + C\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + C\|u-u_h\|_{0,I_h}^2, \tag{4.40}$$

其中，C 取决于多项式次数 k、剖分的形状正则性，且还取决于 (u, f)。

证明。由方程 (4.34) 和三角不等式可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + \sum_{i,j}\int_{J_j}\left(\frac{2\lambda_1-1}{2}\right)|v|[\![\theta_f]\!]_{i-1/2,v}^2\,\mathrm{d}v\\ &+\sum_{i,j}\int_{I_i}\left(\frac{2\lambda_2-1}{2}\right)|u_h-v|[\![\theta_f]\!]_{x,j-1/2}^2\,\mathrm{d}x \leq ((\eta_f)_t,\theta_f) + \frac{1}{2}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + |\mathcal{K}^1| + |\mathcal{K}^2| + |T_1|.\end{aligned} \tag{4.41}$$

这里，

$$T_1 = \sum_{i,j}\int_{T_{ij}}(u-u_h)\,\partial_v f\,\theta_f\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x.$$

首先估计 T_1，

$$\begin{aligned}|T_1| &= \left|\sum_{i,j}\int_{T_{ij}}(u-u_h)\,\partial_v f\,\theta_f\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\right| \leq \|u-u_h\|_{0,I_h}\|\partial_v f\|_{L^\infty(\Omega)}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}\\ &\leq \|u-u_h\|_{0,I_h}^2\|\partial_v f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\partial_v f\|_{L^\infty(\Omega)}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2,\end{aligned} \tag{4.42}$$

这里，第二步使用 H¨older 不等式，第三步使用 Young 不等式 y.

现在，$\mathcal{K}^1$ 由引理4.9 和算术-几何平均不等式进行估计，

$$|\mathcal{K}^1| \leq Ch^{2k+2}\|f\|_{k+1,\Omega}^2 + C\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2. \tag{4.43}$$

为处理$\mathcal{K}^2$, ，我们注意到引理4.10中的界（4.38）给出

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}^2| &\leq C\left(h^k\|u-u_h\|_{\infty,I_h} + Ch^{k+1}\|u\|_{W^{1,\infty}(I)}\right)\|f\|_{k+1,\Omega}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}\\ &\leq Ch^k\left(h\|u\|_{W^{1,\infty}(I)} + h^{k+\frac{1}{2}}\|u\|_{k+1,I} + h^{-\frac{1}{2}}\|u-u_h\|_{0,I_h}\right)\|f\|_{k+1,\Omega}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}\\ &\quad + Ch^{k+1}\|u\|_{W^{1,\infty}(I)}\|f\|_{k+1,\Omega}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}\\ &\leq C_{u,f}h^{2k+2} + C\|u-u_h\|_{0,I_h}^2 + C\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2.\end{aligned} \tag{4.44}$$

这里，第二步使用引理4.1，第三步使用杨氏不等式。

现在，将估计式（4.42）-（4.44）代入（4.41），并利用左端最后两项非负这一事实，以及 H¨older 不等式、投影估计（4.30）和杨氏不等式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 \leq Ch^{2k+2} + C\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + C\|u-u_h\|_{0,I_h}^2.$$

其中，C现在与 h和 f_h无关，并通过其范数依赖于 t和解（u，f）。证明完毕。□

定理*4.13.* 设 $k \geq 1$，且$(u, f) \in C^1(0,T;\ H^{k+1}(I) \cap W^{1,\infty}(I)) \times C^1(0,T;\ H^{k+1}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega))$为*Vlasov*-黏性*Burgers* 系统的解。设$(f_h, u_h, w_h) \in C^1(0,T;\ Z_h) \times C^1(0,T;\ X_h) \times C^0(0,T;\ X_h)$为*(3.7),(3.8)-(3.9)*的*DG-LDG*近似，则对于 $\lambda = 1/2$，其中 k为偶数，且 N_x为奇数或 $\lambda > \frac{1}{2}$，存在一个与 h无关的正定常数 C，使得对所有 $t \in (0,T]$

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))} + \|w-w_h\|_{L^2([0,T]\times I)} + \|f-f_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\tilde{C}h^{k+1},$$

其中，$\tilde{C} = 2$当 $\lambda = 1/2$ 时，$\tilde{C} = \left(1+\epsilon^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\epsilon^{-1}h^{2k+1}\right)^{\frac{1}{2}}$当 $\lambda > 1/2$ 时。

证明。 利用方程（4.6）、（4.31）以及三角不等式可得

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{0,I_h}+\|w-w_h\|_{0,I_h}+\|f-f_h\|_{0,\mathcal{T}_h} \leq \|\eta_u\|_{0,I_h}+\|\theta_u\|_{0,I_h}+\|\eta_w\|_{0,I_h}\\ +\|\theta_w\|_{0,I_h}+\|\eta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}+\|\theta_f\|_{0,\mathcal{T}_h}.\end{aligned}$$

由方程（4.3）和（4.30），我们分别知道 $\mathrm{k}\eta_u\mathrm{k}_{0,I_h}, \mathrm{k}\eta_w\mathrm{k}_{0,I_h}$ 和 $\mathrm{k}\eta_f\mathrm{k}_{0,\mathcal{T}_h}$ 的估计，因此只需估计 $\mathrm{k}\theta_u\mathrm{k}_{0,I_h}+\mathrm{k}\theta_w\mathrm{k}_{0,I_h}+\mathrm{k}\theta_f\mathrm{k}_{0,\mathcal{T}_h}$。
将（4.13）-（4.14）与（4.40）结合杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\theta_u\|^2_{0,I_h}+\|\theta_f\|^2_{0,\mathcal{T}_h}\right)+\|\theta_w\|^2_{0,I_h} &\leq C\Big(Ah^{2k+2}+B\|\theta_u\|^2_{0,I_h}+h^{-\frac{3}{2}}\|\theta_u\|^3_{0,I_h}\\ &\quad+h^{-1}\|\theta_u\|^4_{0,I_h}+\|\theta_f\|^2_{0,\mathcal{T}_h}\Big)\\ &\leq C\left(Ah^{2k+2}+B\|\theta_u\|^2_{0,I_h}+\ h^{-3}\|\theta_u\|^4_{0,I_h}+\|\theta_f\|^2_{0,\mathcal{T}_h}\right)\end{aligned} \tag{4.45}$$

此处 $A=1, B=1$ 对于 $\lambda=1/2$ 和 $A=1+\epsilon^{-1}, B=1+\epsilon^{-1}h^{2k+1}$ 对于 $\lambda>1/2$。令

$$|||(\theta_f,\theta_u,\theta_w)|||^2 := \|\theta_f\|^2_{0,\mathcal{T}_h}+\|\theta_u\|^2_{0,I_h}+\int_0^t\|\theta_w\|^2_{0,I_h}\,\mathrm{d}s \tag{4.46}$$

以及一个函数 Φ as

$$\Phi(t)=Ah^{2k+2}+\int_0^t\left(B|||(\theta_f,\theta_u,\theta_w)|||^2+h^{-3}|||(\theta_f,\theta_u,\theta_w)|||^4\right)\mathrm{d}s. \tag{4.47}$$

对方程 (4.45) 关于 t 从 0 到 t 并使用 (4.46)-(4.47) 可得

$$|||(\theta_f,\theta_u,\theta_w)|||^2 \leq C\Phi(t).$$

不失一般性，假设 $|||(\theta_f,\ \theta_u,\ \theta_w)|||>0$，否则，我们加上一个任意小量，例如 δ，并按下文所述的类似方式进行，然后令 $\delta\to 0$ 并取极限。注意，$0<\Phi(0)\leq\Phi$，且 Φ 可微。对 Φ 关于 t 求导，可得

$$\begin{aligned}\partial_t\Phi(t)&=B|||(\theta_f,\theta_u,\theta_w)|||^2+h^{-3}|||(\theta_f,\theta_u,\theta_w)|||^4\\ &\leq C\left(B\Phi(t)+h^{-3}\left(\Phi(t)\right)^2\right).\end{aligned}$$

此外，$\partial_t\Phi(t)>0$，因此，$\Phi(t)$ 是一个严格单调递增且为正的函数。进行时间积分 t 得到

$$\int_0^t\frac{\partial_s\Phi(s)}{\Phi(s)\left(B+h^{-3}\Phi(s)\right)}\,\mathrm{d}s\leq\int_0^t C\,\mathrm{d}s\leq CT.$$

在利用 $\Phi(0)=Ah^{2k+2}$ 对左端积分进行精确计算，并对等式两边取指数后，我们得到

$$\Phi(t)\left(B-Ah^{2k-1}(e^{CBT}-1)\right)\leq ABe^{CBT}h^{2k+2}.$$

现在，选择足够小的 $h>0$，使得 $\left(B-h^{2k-1}(e^{CBT}-1)\right)>0$，由此可得

$$\Phi(t)\leq\tilde{C}\,e^{CBT}h^{2k+2},$$

其中，$\tilde{C}=\left(1+\epsilon^{-1}\right)\left(1+\epsilon^{-1}h^{2k+1}\right)$。这就完成了对所有 $t\in(0,\ T]$ 的证明。 □

注4.14。 根据引理*3.6* 和定理 *4.13* 以及方程 (2.2)，我们有

$$f_h\in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{T}_h)),\quad u_h\in L^\infty(0,T;L^2(I_h))\quad and\quad w_h\in L^2([0,T]\times I_h).$$

利用这些界，我们可以通过延长存在区间，将先前关于离散问题的局部时间存在性结果改进为全局时间存在性结果。

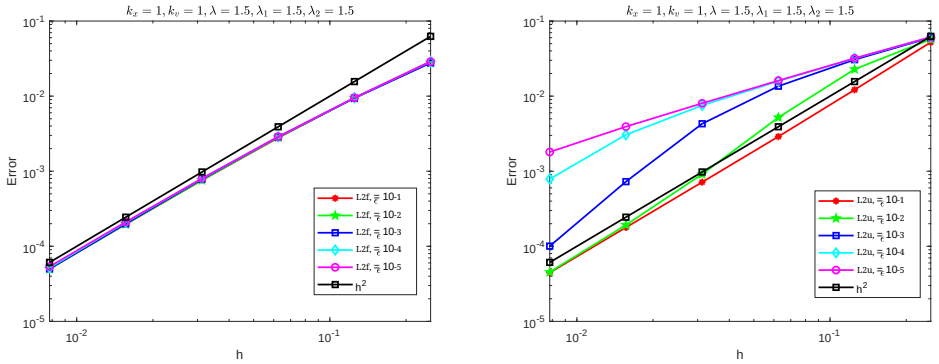

图 1. 分布函数的不同值对应的收敛率 ϵ f（左）和速度 u（右），对应示例 5.1； $k_x = 1$, $k_v = 1$

5. 数值模拟

本节将给出我们对 Vlasov-黏性 Burgers 系统进行数值模拟所得的一些结果:

$$\partial_t f + v\,\partial_x f + \partial_v\left((u-v)\,f\right) = F(t,x,v), x \in [0,L] = I, v \in [-M,M] = J, t > 0 \tag{5.1}$$

$$\partial_t u + u\,\partial_x u - \epsilon\partial_x^2 u = \rho V - \rho u + G(x,t), x \in [0,L], t > 0, \tag{5.2}$$

采用与（1.1）—（1.2）中相同的边界条件和初始条件。我们提出的格式将问题（5.1）—（5.2）转化为一个常微分方程系统:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\alpha}(t) = \mathcal{L}(\vec{\alpha}, t) \tag{5.3}$$

and

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\beta}(t) = \mathcal{M}(\vec{\beta}, t), \tag{5.4}$$

其中，$\vec{\alpha}(t)$ 和 $\beta(t)$ 分别是 f_h 和 u_h的系数向量。为进一步近似系统（5.3）—（5.4）的解，我们采用三阶 TVD RK 格式 [GS98]。

在图中，我们用记号 k_x, k_v 分别表示 x 和 v 变量中多项式的次数。N_x 和 N_v 分别表示在 x 和 v 域中采用的单元数。L2f 和 L2u 分别是在终止时刻 $t = T$ 下，$f(t, x, v)$ 和 $u(t, x)$ 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^2(I)$ 范数下的误差。

我们在两种不同情形下（见下文例5.1）—（5.2）检验所提出格式在系统（5.1 和例5.2 ）上的收敛阶。我们对这两个例子均采用 $I = [0, 2\pi]$, $J = [-1, 1]$, $T = 0.1$ 进行了模拟。

例5.1。取

$$F(t,x,v) = (v-1)\cos(x-t)e^{-v^2} - \left(2v\left(\sin(x-t)-v\right)+1\right)\left(1+\sin(x-t)\right)e^{-v^2}$$

$$G(t, x) = (\sin(x-t) - 1)\cos(x-t) + \epsilon\sin(x-t) + (1.493648265624854)(1+\sin(x-t))\sin(x-t)$$

and

$$f(0,x,v) = \left(1+\sin(x)\right)e^{-v^2}, \quad u(0,x) = \sin(x).$$

该问题的精确解为

$$f(t,x,v) = \left(1+\sin(x-t)\right)e^{-v^2}$$
$$u(t,x) = \sin(x-t).$$

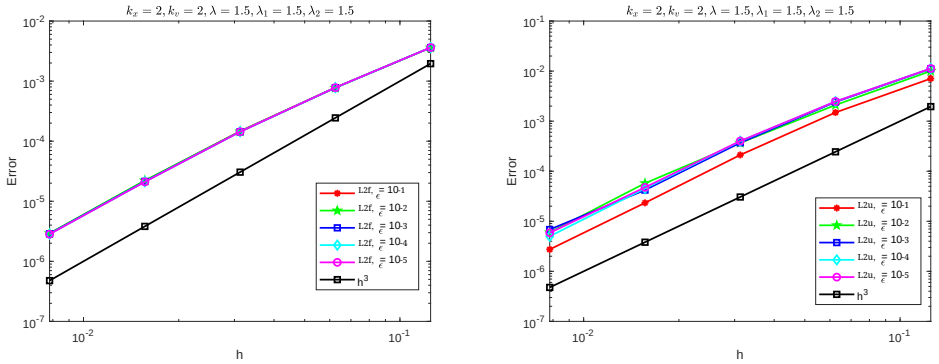

图 2。不同 ϵ 取值下分布函数 f（左）和速度 u（右）的收敛率，对应例5.1； $k_x = 2$, $k_v = 2$

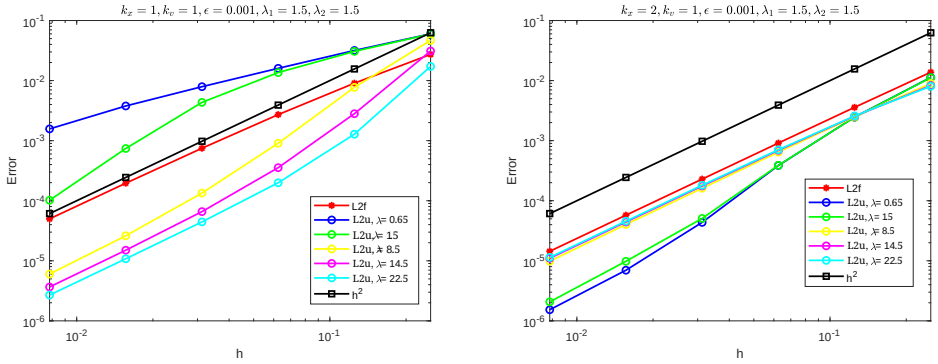

图3。 不同取值下的收敛率 λ 的 u 对于例 5.1； k_x =1, $k_v = 1$ （左）， $k_x = 2$, $k_v = 1$ （右）

例5.2。取

$$F(t,x,v) = \frac{e^t}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2}} \left(+ \left(e^{-t} \left(cos(x) + \sin(x) \right) - v \right) \left(1 + \cos(x) \right) \left(9v - 5v^3 \right) \right.$$
$$\left. -v \, \sin(x) \left(1 + 5v^2 \right) \right)$$
$$G(t,x) = (-1+\epsilon) \left(\cos(x) + \sin(x) \right) e^{-t} + e^{-2t} \cos(2x)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(4.202186105579451 \right) \left(1 + \cos(x) \right) \left(\cos(x) + \sin(x) \right)$$

and

$$f(0,x,v) = \frac{e^{\frac{-v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \cos(x) \right) \left(1 + 5v^2 \right), \quad u(0,x) = \cos(x) + \sin(x).$$

该问题的精确解为

$$f(t,x,v) = \frac{e^t}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2}} \left(1 + \cos(x) \right) \left(1 + 5v^2 \right)$$
$$u(t,x) = e^{-t} \left(cos(x) + \sin(x) \right).$$

观察： 下面，我们对示例5.1 和5.2的数值结果作几点观察。

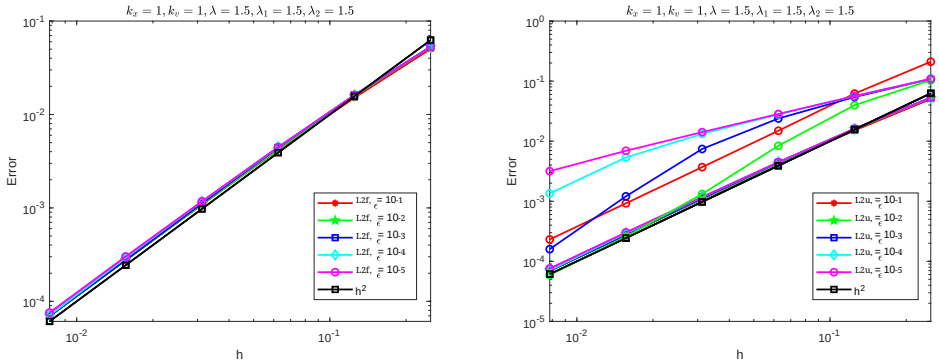

图4. 分布函数 ϵ 的收敛率 f（左）和速度 u（右），对应示例 5.2； $k_x = 1$， $k_v = 1$

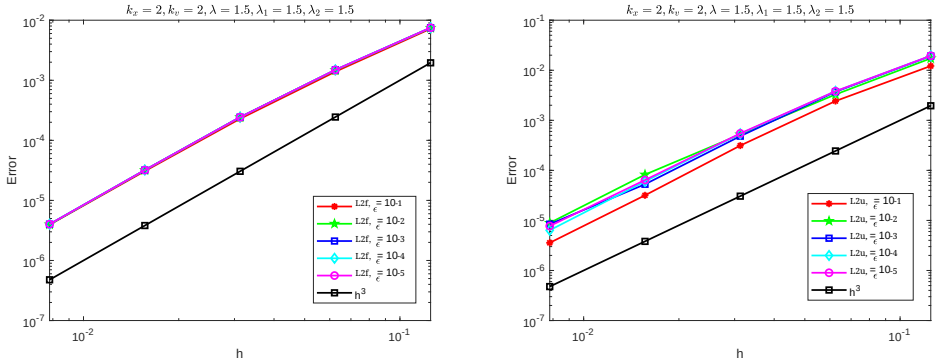

图5. 不同取值下的收敛率 ϵ 分布函数 f（左）和速度 u示例 5.2； $k_x = 2$， $k_v = 2$

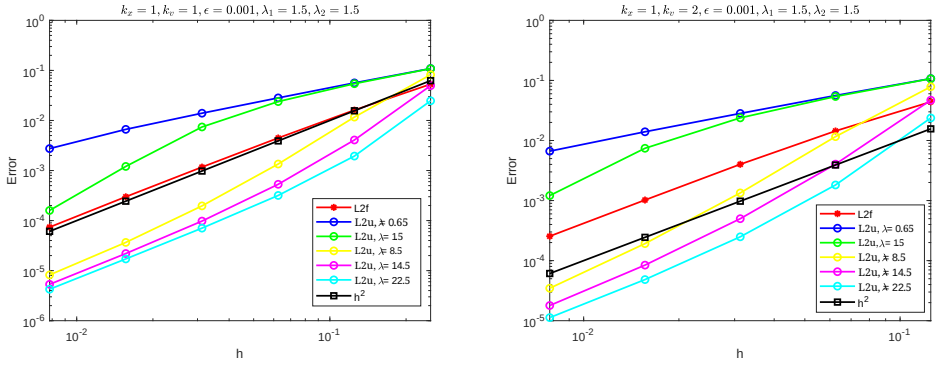

图6. 不同取值下的收敛率 λ 的 u 例 5.2； $k_x = 1, k_v = 1$ (左图), $k_x = 1, k_v = 2$ (右图)

(i) 在图1–2和图4–图5中， h 依次取 2^{-m}、 $m = 1$、…、7，而 ϵ 依次取$10^{-\ell}$、 $\ell = 1$、…、5，其中 $\epsilon < h$. 根据定理4.13可知， f和 u 的收敛阶均为 $O\left(\epsilon^{-1/2}h^{k+1}\right)$ 。在图1和图4中，采用次数为 $k = 1$ 的分片多项式，且 f 的计算阶与理论收敛阶一致，即为2 阶，

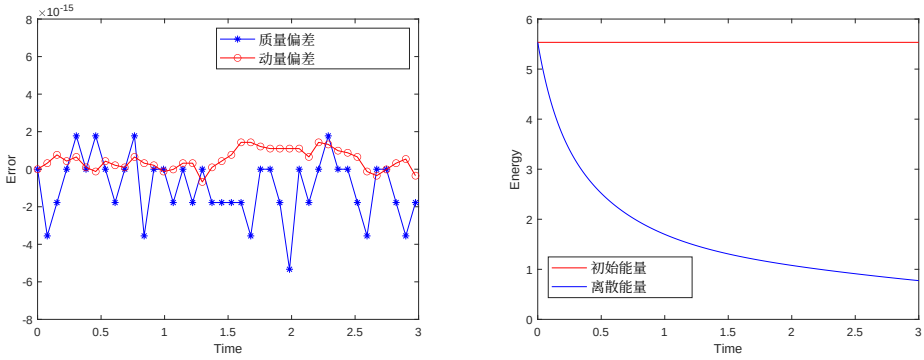

图 7. 示例的质量和动量偏差（左）以及能量耗散（右）5.3

但对于 u 收敛阶似乎有些偏差，显示了较小 ϵ. 图 2 和5 采用次数为 $k = 2$ 的分片多项式，且计算收敛阶证实了 f 和 u的理论收敛阶，这似乎在 ϵ.<style>

<escape>(ii) 在图 3 和图 6中，我们探讨收敛阶对参数 λ 大小的依赖关系，该参数出现在 Burgers 部分的广义数值通量中。这一实验表明，参数 λ 的大小与黏性参数ϵ的大小之间存在一种权衡关系。更具体地说，当 ϵ取值较小时，增大 λ 的取值有助于稳定收敛率。</escape>

在接下来的几个实验中，我们测试所提出数值格式的守恒性质。

例5.3。 在 (5.1)-(5.2)中，设 $I = [0, 2\pi]$ 且 $J = [-5, 5]$。此外，取 $F = G = 0$。考虑初始数据：

$$f(0, x, v) = \begin{cases} (1 + \sin(x))e^{-v^2} & if \quad v \in [-1, 1] \\ 0 & elsewhere. \end{cases}$$
$$u(0, x) = sin(x).$$

注意，我们无法获得精确解的显式表达式。现在，取多项式的次数 $k_x = 1$， $k_v = 2$ 子区间的数量 $N_x = 128$， $N_v = 128$ 其中 $\epsilon = 0.1$， $\lambda = 1.5$， λ_1 =1。5， $\lambda_2 = 1.5$。在图 7中，我们检验数值格式的离散质量和离散动量守恒性质。这印证了引理 3.3 和 3.4 分别关于离散质量守恒和离散动量守恒的结论。图 7 还表明，我们的数值格式会耗散离散能量。这暗示一般情况下应当存在这样的离散能量耗散性质；但与连续情形不同，我们没有任何理论依据来支持这一数值证据。

下面的例子针对另一组初始数据重复上述实验 .

例5.4。 在 (5.1)-(5.2)中，令 $I = [0, 2\pi]$ 和 $J = [-5, 5]$。此外，取 $F = G = 0$。考虑以下初始数据：

$$f(0, x, v) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{-v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \cos(x)\right) \left(1 + 5v^2\right) & if \quad v \in [-1, 1] \\ 0 & elsewhere. \end{cases}$$
$$u(0, x) = sin(x) + cos(x).$$

取多项式次数 $k_x = 1$， $k_v = 2$ 以及子区间数 $N_x = 128$， $N_v = 128$ 其中$\epsilon = 0.1$， $\lambda = 1.5$， $\lambda_1 = 1.5$， $\lambda_2 = 1.5$。在图8中，我们注意到偏差最大达到机器误差，这些结果与理论结果一致。

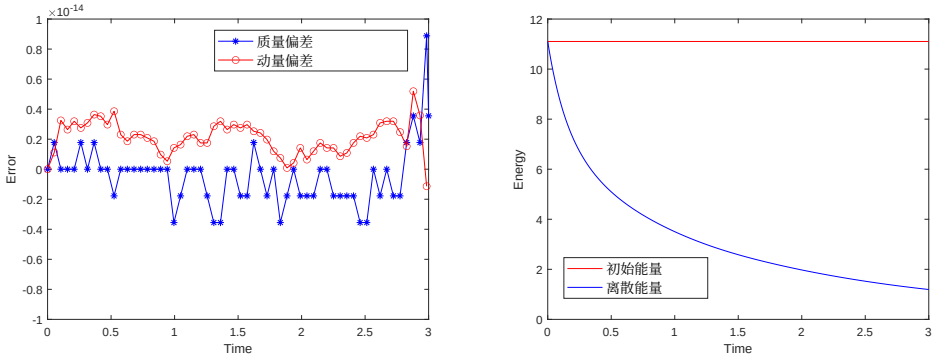

图 8. 该算例的质量和动量偏差（左）以及能量耗散（右）5.4

6. 结论

本文介绍并分析了一种用于 Vlasov-黏性 Burgers 方程的半离散数值方法。这是一种在相空间中对 Vlasov 方程采用 DG方法、对黏性 Burgers 方程采用 LDG METHOD 的方法，二者均使用广义数值通量。离散格式保持质量和动量。推导出了对于 $\lambda = 1/2$ 以及 x 的偶数次多项式和空间区域的奇数个单元的最优收敛阶。此外，还建立了对于 $\lambda > 1/2$ 以及对于 x 的偶数次和奇数次多项式的最优收敛阶，并且对于 v 也成立，但此时误差估计中的常数取决于 $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$.。误差估计所采用的主要工具是引入广义 Gauss-Radau 投影，以及应用非线性 Gr¨onwall 引理的一个变体。最后，计算结果证实了我们的理论结果。

致谢。 作者感谢匿名审稿人提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议有助于改进修订稿。K.K. 和 H.H. 感谢 Laurent Desvillettes 在波恩 Hausdorff 数学研究所举办的青年三月理论项目期间，向他们介绍了用于描述薄喷雾的流体-动力学方程。K.K. 和 H.H. 感谢波恩 Hausdroff 数学研究所于 2019 年夏季在青年三月理论项目期间接待他们，本研究正是在此期间启动的。K.K. 另感谢印度政府大学拨款委员会（UGC）的资助。

声明与陈述

经费： 第二作者感谢印度政府大学拨款委员会（UGC）的资助。第一作者和第二作者感谢波恩 Hausdroff 数学研究所在青年三月理论项目（2019 年夏季）期间接待他们，本研究正是在此期间启动的。

利益冲突： 作者声明不存在利益冲突。

作者贡献： 所有作者均为本手稿的撰写作出了同等贡献。所有作者均已阅读并批准最终稿。

数据可用性： 在本研究中使用的代码可在合理请求后向通讯作者索取。

参考文献

[BS07] S. Brenner 和 R.Scott。《有限元方法的数学理论》，第 15 卷。Springer Science & Business Media，2007年。[CCLX 17] Y. Cheng、C.-S. Chou、F. Li 和 Y. Xing。《一维双向波动方程的稳定间断 Galerkin 方法》。《Math. Comp.》，86(303):121–155，2017年。

[CMZ17] Yao Cheng、Xiong Meng 和 Qiang Zhang。广义 Gauss–Radau 投影在求解线性对流扩散方程的局部间断 Galerkin 方法中的应用。Math. Comp., 86 1267, 2017 305 1233( ): – .[CS89] B. Cockburn 和 C.-W. Shu。守恒律的 TVB Runge-Kutta 局部投影间断 Galerkin 有限元方法。II. 一般框架。Math. Comp., 52(186):411–435, 1989。 [CS98] B. Cockburn 和 C.-W. Shu。时间相关对流–扩散系统的局部间断 Galerkin 方法。SIAM J. Numer. Anal., 35(6):2440–2463, 1998。 [CSZ17] W. Cao、C.-W. Shu 和 Z. Zhang。具有退化变系数的一维线性双曲方程间断 Galerkin 方法的超收敛。ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 51(6):2213–2235, 2017。[DDCS09] B. Ayuso De Dios、J. A. Carrillo 和 Chi-Wang Shu。一维 Vlasov-Poisson 系统的间断 Galerkin 方法。Kinet. Relat. Models, 4(4):955–989, 2009。 [DL89] R. J. DiPerna 和 P.-L. Lions。常微分方程、输运理论与 Sobolev 空间。Invent. Math., 98(3):511–547, 1989。 [DPE12] Daniele Antonio Di Pietro 和 Alexandre Ern。间断 Galerkin 方法的数学方面, Math ´ematiques & Applications (Berlin) 系列第 69 卷 [数学与应用]。Springer，海德堡，2012年。[DR99] K. Domelevo 和 J.-M. Roquejoffre。两相流动理学模型中行波解的存在性与稳定性。Comm. partial differential equations, 24(1-2):61–108, 1999。 [Gou01] T. Goudon。两相流动理学模型的渐近问题。Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 131(6):1371–1384, 2001。 [GS98] S. Gottlieb 和 C.-W. Shu。总变差不增 Runge-Kutta 格式。Math. Comp., 67 85, 1998 221 73( ): – .[Ham98] K. Hamdache。Vlasov-Stokes 方程解的整体存在性与大时间渐近行为。15(1):51–74, 1998。[HKMMM20] D. Han-Kwan、 ´E. Miot、A. Moussa 和 I. Moyano。二维 Vlasov–Navier–Stokes 系统解的唯一性。Rev. Mat. Iberoam., 36(1):37–60, 2020。 [Hop50] E. Hopf。偏微分方程 $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$。Comm. Pure Appl. Math., 3:201–230, 1950。 [LP15] H. Liu 和 N. Ploymaklam。Burgers–Poisson 方程的局部间断 Galerkin 方法。Numer. Math., 129(2):321–351, 2015。 [LWM20] M. Liu、B. Wu 和 X. Meng。采用迎风偏置数值通量的二维线性变系数双曲方程间断 Galerkin 方法的最优误差估计。J. Sci. Comput., 83(1):1–19, 2020。 [LZM+20] J. Li、D. Zhang、X. Meng、B. Wu 和 Q. Zhang。非线性标量守恒律的间断 Galerkin 方法：广义局部 Lax–Friedrichs 数值通量。SIAM J. Numer. Anal., 58 20, 2020 1 1( ): – .[LZMW19] J. Li、D. Zhang、X. Meng 和 B. Wu。具有退化变系数的一维线性双曲方程迎风偏置通量间断 Galerkin 方法的分析。J. Sci. Comput., 78(3):1305–1328, 2019。 [MSW16] X. Meng、C.-W. Shu 和 B. Wu。基于迎风偏置通量的线性双曲方程间断 Galerkin 方法的最优误差估计。Math. Comp., 85(299):1225–1261, 2016。 [MSZW12] X. Meng、C.-W. Shu、Q. Zhang 和 B. Wu。一维标量非线性守恒律间断 Galerkin 方法的超收敛。SIAM J. Numer. Anal., 50(5):2336–2356, 2012。 [O'R81] P. J. O'ROURKE。蒸发液体喷雾中的液滴集体效应。博士论文，普林斯顿大学，1981年。 [PKP17] N Ploymaklam、P M Kumbhar 和 A K Pani。黏性 Burgers-Poisson 系统局部间断 Galerkin 方法的先验误差分析。Int. J. Numer. Anal. Model, 14(4-5):784–807, 2017。 [Plo19] N. Ploymaklam。约化 Burgers-Poisson 方程的局部间断 Galerkin 方法。Thai J. Math., 17(2):515–525, 2019。 [RH73] W. H. Reed 和 T. R. Hill。中子输运方程的三角网格方法。技术报告，洛斯阿拉莫斯科学实验室，新墨西哥州（美国），1973年。[Wil85] F. A. Williams。燃烧理论。CRC Press，1985年。[WZS19] H. Wang、Q. Zhang 和 C.-W. Shu。采用广义交替数值通量的对流–扩散问题隐式–显式局部间断 Galerkin 方法。Journal of Scientific Computing, 81(3):2080– 2114, 2019。

附录 A.

下面的引理给出了 u_x 在 L^∞范数下的估计，这有助于我们证明黏性伯格斯方程的正则性结果。

引理 A.1. 对于满足 $u \in C^2(I)$的周期函数 u， 有

$$\|u_x(t)\|_{L^\infty(I)} \le \sqrt{2}\,\|u_x(t)\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\|u_{xx}(t)\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}.$$

证明。 由于 u 是周期的。因此， $\int_I u_x \mathrm{d}x = 0$ ，并且存在某个 $x_0 \in I$ 使得 $u_x(x_0) = 0$

$$|u_x|^2 = \left|\int_{x_0}^{x} \partial_x (u_x)^2 \,\mathrm{d}x\right| = 2\left|\int_{x_0}^{x} u_x\, u_{xx}\,\mathrm{d}x\right| \le 2\,\|u_x\|_{L^2(I)}\,\|u_{xx}\|_{L^2(I)}.$$

这里，第一步使用微积分基本定理，最后一步使用柯西-施瓦茨不等式。对两边开平方，并对 $x \in I$ 取上确界，即完成证明。□

以下 引理给出了黏性 Burgers 方程解的正则性结果。

引理 A.2。 设 $\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^p f_0 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}v < \infty$ ，其中 $0 \le p \le 3$ 且 $u_0 \in H^1(I)$。那么

$$u \in L^2(0,T;H^2(I)) \cap L^\infty(0,T;H^1(I)) \cap H^1(0,T;L^2(I)). \tag{A.1}$$

证明。 将方程（1.2）乘以 $-u_{xx}$ 并对 x 积分，得到

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u_x\|_{L^2(I)}^2 + \epsilon\,\|u_{xx}\|_{L^2(I)}^2 = -\left(\rho V, u_{xx}\right) + \left(\rho u, u_{xx}\right) + \left(u u_x, u_{xx}\right). \tag{A.2}$$

利用 H¨older 不等式、引理 A.1 和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}(u u_x, u_{xx}) &\le \|u\|_{L^2(I)}\|u_x\|_{L^\infty(I)}\|u_{xx}\|_{L^2(I)}\\ &\le \sqrt{2}\,\|u\|_{L^2(I)}\|u_x\|_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\|u_{xx}\|_{L^2(I)}^{\frac{3}{2}}\\ &\le \epsilon^{-3}\,\|u\|_{L^2(I)}^4\|u_x\|_{L^2(I)}^2 + \frac{3\epsilon}{4}\|u_{xx}\|_{L^2(I)}^2.\end{aligned} \tag{A.3}$$

由方程 (A.2)，应用 H¨older 不等式、杨氏不等式以及结合回代论证的方程 (A.3)，我们得到

$$\partial_t\|u_x\|_{L^2(I)}^2 + \frac{2\epsilon}{5}\|u_{xx}\|_{L^2(I)}^2 \lesssim \epsilon^{-3}\left(\|\rho V\|_{L^2(I)}^2 + \|\rho\|_{L^2(I)}^2\|u\|_{L^\infty(I)}^2 + \|u\|_{L^2(I)}^4\|u_x\|_{L^2(I)}^2\right).$$

利用索伯列夫不等式并从 0 到 t 进行时间积分，得到

$$\begin{aligned}\|u_x\|_{L^2(I)}^2 + \frac{2\epsilon}{5}\int_0^t \|u_{xx}\|_{L^2(I)}^2\,\mathrm{d}s &\lesssim \epsilon^{-3}\,\|\rho V\|_{L^2([0,T]\times I)}^2\\ &\quad + \epsilon^{-3}\int_0^t \left(\|\rho\|_{L^2(I)}^2 + \|u\|_{L^2(I)}^4\right)\|u_x\|_{L^2(I)}^2\,\mathrm{d}s\\ &\lesssim \epsilon^{-3}\,\|\rho V\|_{L^2([0,T]\times I)}^2 + \epsilon^{-3}\left(\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^2\right.\\ &\quad \left.+\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4\right)\|u_x\|_{L^2([0,T]\times I)}^2.\end{aligned}$$

利用（2.2）和（2.5）可得

$$\|u_x\|_{L^2(I)}^2 + \frac{2\epsilon}{5}\int_0^t \|u_{xx}\|_{L^2(I)}^2\,\mathrm{d}s \le C\,\epsilon^{-3}.$$

对 $t \in [0,T]$ 取上确界后，我们得到第一个结果。

现在，将方程（1.2）乘以 u_t 并对 x 积分，得到

$$\|u_t\|_{L^2(I)}^2 + \frac{\epsilon}{2}\partial_t\|u_x\|_{L^2(I)}^2 = \left(\rho V, u_t\right) + \left(\rho u, u_t\right) - \left(u\,u_x, u_t\right).$$

运用赫尔德不等式、杨氏不等式、回代论证以及时间积分即可完成其余证明。□

作为上述引理的推论，可得

$$u \in L^2(0,T;H^2(I)) \subset L^2(0,T;W^{1,\infty}(I)) \subset L^1(0,T;W^{1,\infty}(I)).$$

这里，第二步使用索伯列夫不等式，第三步使用赫尔德¨不等式 ty.

以下结果涉及速度矩的传播，这对于强解的存在唯一性证明至关重要。

引理 A.3。 设 $u \in L^1(0,\ T;\ W^{1,\ \infty}(I))$，并设 $f_0 \geq 0$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k \left\{ f_0 + |\partial_x f_0|^2 + |\partial_v f_0|^2 \right\} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq C,$$

对于 $k \geq 0$。那么，*Vlasov* 方程的解 f 满足

$$\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k \left\{ f + |\partial_x f|^2 + |\partial_v f|^2 \right\} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq C,$$

对于 $k \geq 0$，以及所有 $t > 0$。

证明。 考虑关于 $\partial_x f$ 的方程

$$\partial_t \partial_x f + v\partial_x^2 f + \partial_x\left(\partial_x u\, f\right) + \partial_v\left((u-v)\,\partial_x f\right) = 0.$$

将上述方程乘以 $\left(1+|v|^k\right)\partial_x f$，并对 x 进行积分，v 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)|\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = I_1 + I_2 + I_3$$

其中

$$I_1 = -\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)\partial_x u\,\partial_v f\,\partial_x f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v, \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)|\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

and

$$I_3 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)(u-v)\,\partial_v |\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

在 I_1 中使用杨氏不等式后，我们得到

$$I_1 \leq \|u_x\|_{L^\infty(I)} \int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)\left(|\partial_x f|^2 + |\partial_v f|^2\right) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

经分部积分可得

$$I_3 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)|\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + I_4$$

with

$$I_4 = \frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^{k-2} v\,(u-v)\,|\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

利用杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \frac{k}{2}\|u\|_{L^\infty(I)} \int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^{k-1}\,|\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\,|\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\ &\leq \frac{k}{2}\|u\|_{L^\infty(I)} \int_{\mathbb{R}}\int_I \left(\frac{k-1}{k}|v|^k + \frac{1}{k}\right)|\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\,|\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\ &\leq C\left(1+\|u\|_{L^\infty(I)}\right)\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)|\partial_x f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

接下来，考虑关于 $\partial_v f$ 的方程

$$\partial_t \partial_v f + v\partial_x \partial_v f + \partial_x f - \partial_v f + \partial_v\left((u-v)\,\partial_v f\right) = 0.$$

将上述方程乘以 $\left(1+|v|^k\right)\partial_v f$，并对 $x,\ v$ 积分，可得 Mult

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)|\partial_v f|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = I_5 + I_6 + I_7$$

其中

$$I_5 = -\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)\partial_x f\,\partial_v f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$
$$I_6 = \int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)|\partial_v f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$
$$I_7 = -\int_{\mathbb{R}}\int_I \partial_v\left((u-v)\,\partial_v f\right)\left(1+|v|^k\right)\partial_v f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

在 I_5 中使用杨氏不等式后，我们得到

$$I_5 \le \int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)\left(|\partial_x f|^2+|\partial_v f|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

分部积分可得

$$I_7 = \int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)|\partial_v f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + I_8$$

with

$$I_8 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)(u-v)\,\partial_v|\partial_v f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

分部积分表明

$$I_8 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)|\partial_v f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v - \frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k|\partial_v f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + I_9$$

with

$$I_9 = \frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^{k-2}vu\,|\partial_v f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

应用杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} I_9 &\le \|u\|_{L^\infty(I)}\frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^{k-1}|\partial_v f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\ &\le \|u\|_{L^\infty(I)}\frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(\frac{k-1}{k}|v|^k+\frac{1}{k}\right)|\partial_v f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\ &\le C\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)|\partial_v f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

综上，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)\left(|\partial_x f|^2+|\partial_v f|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\right) \le C\left(1+\|u\|_{W^{1,\infty}(I)}\right)\int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)\left(|\partial_x f|^2+|\partial_v f|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

令 $F(t) = \int_{\mathbb{R}}\int_I \left(1+|v|^k\right)\left(|\partial_x f|^2+|\partial_v f|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$，则

$$F'(t) \le C\left(1+\|u(t,x)\|_{W^{1,\infty}(I)}\right)F(t)$$

这意味着

$$F(t) \le CF(0)e^{\|u\|_{L^1(0,T;W^{1,\infty}(I))}}.$$

至此，我们的证明完成。 □

定理 A.4。（强解的存在唯一性）设初始数据 (f_0, u_0) 满足

$$f_0 \in L^1(I\times\mathbb{R})\cap L^\infty(I\times\mathbb{R})\cap H^1(I\times\mathbb{R}),\quad f_0 \ge 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^p\left\{f_0+|\partial_x f_0|^2+|\partial_v f_0|^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \le C,$$

对于 $0 \leq p \leq 4$ 和 $u_0 \in H^1(I)$，则存在唯一的全局时间强解 (f, u) 满足 *Vlasov*-黏性 *Burgers* 系统 (1.1)-(1.2)。

证明。令 $0 < T < \infty$ 并设 $X = L^\infty(0, T; H^1(I))$，其范数为

$$\|u\|_X^2 = \sup_{t \in [0,T]} \left(\int_I \left(u^2 + |\partial_x u|^2 \right) \, \mathrm{d}x \right).$$

现在考虑映射

$$\begin{aligned} &\mathcal{T} : X \to X \\ &u^* \longmapsto u = \mathcal{T}(u^*) \end{aligned} \tag{A.4}$$

由以下格式定义。

- 求解 Vlasov 方程

$$\partial_t f + v \, \partial_x f + \partial_v \left((u^* - v) \, f \right) = 0, \tag{A.5}$$

  初始数据为 f_0。
- 求解黏性 Burgers 方程

$$(u_t, \phi) + (u u_x, \phi) + \epsilon \, (u_x, \phi_x) = (\rho V - \rho u, \phi), \quad \forall \, \phi \in H^1(I) \tag{A.6}$$

  初始数据为 u_0。这里 ρ 和 ρV 分别是与解相关的局部密度和动量 f，对应于方程 (A.5)。

首先，我们证明上述映射 T 是良定义的。给定 $u^* \in X$ 和初始数据 f_0，Vlasov 方程 (A.5) 有唯一解（详见下文引理 A.5）。求出 $f(u^*)$后，可知相应的局部密度 $\rho \in L^\infty$（见引理 2.5）和相应的动量 $\rho V \in L^2$（见引理 2.3）。因此，黏性 Burgers 问题 [Hop50] 的经典理论给出了问题 (A.6) 的唯一解 $u \in X$。由此，映射 $\mathsf{T} : X \to X$，它将 u^* 映射到 $\mathsf{T}(u^*) = u$，是良定义的。证明的下一步是证明 T 是压缩映射，这一点已在下文引理 A.6 中证明。因此，应用巴拿赫不动点定理可知，在短时间区间 $(0, T^0)$ 上存在唯一解 (f, u)。由于先验估计保证解 (f, u) 在 $t = T^0$处有界，我们可以通过延拓论证将存在区间延伸至 $(0, T]$。由于 T是任意的，我们得到系统的全局适定性。□

接下来我们处理引理 A.5 和 A.6 它们在上述证明中发挥了关键作用。

引理 A.5. 设 $u^* \in X$ 且设 $f_0 \in L^1(I \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(I \times \mathbb{R})$。那么，存在唯一的解$f \in L^\infty(0, T; L^1(I \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(I \times \mathbb{R}))$ 满足 (A.5)。

证明。注意到（A.5）可以改写为

$$\partial_t f + b \cdot \nabla_{x,v} f - f = 0,$$

其中 $b = (v, u^*(t, x) - v)$，其属于

$$L^1(0, T; H^1(I \times (-K, K))), \quad 0 < K < \infty.$$

注意 $\mathrm{div}_{x,\, v} b = -1 \in L^\infty((0,\ T) \times \Omega)$。此外，$|b|/(1 + |v|)$ 是有界的。这一设置适用于 [DL89]中的一般结果。特别地，我们可以应用 [DL89，第 II-1 和 II-2 号推论，第518] 页，从而得到唯一解的存在性。□

引理 A.6。 由 (A.5) 和 (A.6) 定义的映射是压缩映射。

证明。设给定 u_i^*存在唯一解 f_i 满足方程（A.5）。定义 $\bar{u} = u_1 - u_2$，$\bar{u}^* = u_1^* - u_2^*$以及 $f = f_1 - f_2$，则由（A.5）-（A.6）可得

$$\bar{f}_t + v \bar{f}_x + \partial_v \left(\bar{u}^* f_1 + u_2^* \bar{f} - v \bar{f} \right) = 0, \quad \text{with} \quad \bar{f}(0, x, v) = 0, \tag{A.7}$$

and

$$(\bar{u}_t,\phi)_I-\epsilon\,(\bar{u}_{xx},\phi)_I=\left(\int_{\mathbb{R}}\left(v\bar{f}+u_2\bar{f}-\bar{u}f_1\right)\,\mathrm{d}v,\phi\right)_I-\left((\bar{u}\partial_x u_1+u_2\bar{u}_x),\phi\right)_I, \tag{A.8}$$

其中 $\bar{u}(0,\ x)\ =0$.

取 $\phi=\bar{u}-\bar{u}_{xx}$ 代入（A.8）可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|\bar{u}\|^2_{L^2(I)}+\frac{1}{2}\partial_t\|\bar{u}_x\|^2_{L^2(I)}+\epsilon\|\bar{u}_x\|^2_{L^2(I)}+\epsilon\,\|\bar{u}_{xx}\|^2_{L^2(I)}=&\left(\int_{\mathbb{R}}\left(v\bar{f}+u_2\bar{f}-\bar{u}f_1\right)\,\mathrm{d}v,\bar{u}-\bar{u}_{xx}\right)_I\\&-\left((\bar{u}\partial_x u_1+u_2\bar{u}_x),\bar{u}-\bar{u}_{xx}\right)_I\end{aligned}$$

结合 H¨older 不等式与杨氏不等式，采用回代论证并进行时间积分，可得

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\|^2_X+\epsilon\|\bar{u}_x\|^2_{L^2([0,T]\times I)}+\epsilon\,\|\bar{u}_{xx}\|^2_{L^2([0,T]\times I)}\le\ & 4\epsilon^{-1}\left\|\int_{\mathbb{R}}\left(v\bar{f}+u_2\bar{f}-\bar{u}f_1\right)\,\mathrm{d}v\right\|^2_{L^2([0,T]\times I)}\\&+4\epsilon^{-1}\,\|\bar{u}\partial_x u_1+u_2\bar{u}_x\|^2_{L^2([0,T]\times I)}+\epsilon T\|\bar{u}\|^2_X.\end{aligned} \tag{A.9}$$

现在，先应用 H¨older 不等式，再利用 Sobolev嵌入，可得

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}}\left(v\bar{f}+u_2\bar{f}-\bar{u}f_1\right)\,\mathrm{d}v\right\|_{L^2([0,T]\times I)}\le&\left\|\int_{\mathbb{R}}v\bar{f}\,\mathrm{d}v\right\|_{L^2([0,T]\times I)}\\&+T\|\bar{u}\|_X\|m_0f_1\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}+\|u_2\|_X\|m_0\bar{f}\|_{L^2([0,T]\times I)},\end{aligned} \tag{A.10}$$

and

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\partial_x u_1+u_2\bar{u}_x\|_{L^2([0,T]\times I)}\le&\|\bar{u}\|_{L^\infty([0,T]\times I)}\|\partial_x u_1\|_{L^2([0,T]\times I)}\\&+\|u_2\|_{L^2([0,T];L^\infty(I))}\|\bar{u}\|_{L^\infty([0,T];H^1(I))}\\\le&\,T^{\frac{1}{2}}\left(\|u_1\|_X+\|u_2\|_X\right)\|\bar{u}\|_X.\end{aligned} \tag{A.11}$$

当 $T>0$ 足够小时

$$4\epsilon^{-1}\,T\left(\|m_0f_1\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(I))}+\|u_1\|^2_X+\|u_2\|^2_X+\frac{\epsilon^2}{4}\right)\le\frac{1}{2}. \tag{A.12}$$

利用方程（A.9）-（A.12），可得

$$\|\bar{u}\|^2_X\le C\left\|\int_{\mathbb{R}}v\bar{f}\,\mathrm{d}v\right\|^2_{L^2([0,T]\times I)}+C\|u_2\|^2_X\|m_0\bar{f}\,\mathrm{d}v\|^2_{L^2([0,T]\times I)}. \tag{A.13}$$

现在，类似于引理2.3 证明中的计算表明

$$\left\|\int_{\mathbb{R}}v\bar{f}\,\mathrm{d}v\right\|_{L^2([0,T]\times I)}\le C\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_I|v|^3|\bar{f}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t, \tag{A.14}$$

and

$$\left\|\int_{\mathbb{R}}\bar{f}\,\mathrm{d}v\right\|_{L^2([0,T]\times I)}\le C\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_I|v||\bar{f}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t. \tag{A.15}$$

将方程（A.7）乘以 $|v|^k\frac{\bar{f}}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}$; $k\ge1$，得到

$$\begin{aligned}&|v|^k\partial_t\left(\sqrt{\bar{f}^2+\delta}\right)+|v|^k\,v\,\partial_x\left(\sqrt{\bar{f}^2+\delta}\right)+\bar{u}^*|v|^k\frac{\bar{f}}{\sqrt{f^2+\delta}}\,\partial_v f_1\\&\qquad+u_2^*|v|^k\,\partial_v\left(\sqrt{\bar{f}^2+\delta}\right)-|v|^k\,\frac{\bar{f}}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}\,\partial_v\left(v\bar{f}\right)=0.\end{aligned}$$

然后，对 x， v 积分，得到

$$\begin{aligned}
&\partial_t \int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k \left(\sqrt{\bar{f}^2+\delta}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v - k\int_{\mathbb{R}}\int_I \bar{u}^*\,|v|^{k-2}v\,\frac{\bar{f}}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}\,f_1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\,\bar{u}^*\,f_1\,\partial_v\left(\frac{\bar{f}}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v - k\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^{k-2}v\,u_2^*\left(\sqrt{\bar{f}^2+\delta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\
&\quad + k\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\,\frac{\bar{f}^2}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\partial_v\left(\frac{\bar{f}}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}\right)v\bar{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0.
\end{aligned}$$

利用索伯列夫不等式并对时间积分可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\left(\sqrt{\bar{f}^2+\delta}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + k\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\,\frac{\bar{f}^2}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\\
&\qquad\le \int_0^T k\|\bar{u}^*\|_{H^1(I)}\|m_{k-1}f_1\|_{L^1(I)}\,\mathrm{d}t + |T_k^1| + |T_k^2|\\
&\qquad\quad + \int_0^T k\|u_2^*\|_{H^1(I)}\left\|\int_{\mathbb{R}}|v|^{k-1}\left(\sqrt{\bar{f}^2+\delta}\right)\mathrm{d}v\right\|_{L^1(I)}\mathrm{d}t\\
&\qquad\le T\|\bar{u}^*\|_X\|m_{k-1}f_1\|_{L^\infty(0,T;L^1(I))} + |T_k^1| + |T_k^2|\\
&\qquad\quad + T\|u_2^*\|_X\left\|\int_{\mathbb{R}}|v|^{k-1}\left(\sqrt{\bar{f}^2+\delta}\right)\mathrm{d}v\right\|_{L^\infty(0,T;L^1(I))}.
\end{aligned}\tag{A.16}$$

这里，

$$T_k^1 = \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\,\bar{u}^*\,f_1\,\partial_v\left(\frac{\bar{f}}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\,\bar{u}^*\,f_1\,\frac{\delta\,\bar{f}_v}{\left(\bar{f}^2+\delta\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$

and

$$T_k^2 = \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k\partial_v\left(\frac{\bar{f}}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}\right)v\bar{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_I |v|^k v\bar{f}\frac{\delta\,\bar{f}_v}{\left(\bar{f}^2+\delta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.$$

由于 $\bar{f}\in L^1(0,\ T;\ L^\infty(I\times\mathbb{R}))$，且 $|\partial_v f|^2$和 $\bar{f}$的四阶速度矩有界（见引理 A.3），$|T_k^1|\to 0$和 $|T_k^2|\to 0$当 $\delta\to 0$时，对于 $k=1,\ 2,\ 3$。接下来，我们将方程（A.7）乘以$\frac{\bar{f}}{\sqrt{\bar{f}^2+\delta}}$，并对 x、v和 t变量积分，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_I \sqrt{\bar{f}^2+\delta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v - \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_I \frac{\delta\,\bar{f}_v}{\left(\bar{f}^2+\delta\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\bar{u}^*f_1 + u_2^*\bar{f} - v\bar{f}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}}\int_I \sqrt{\bar{f}^2(0,x,v)+\delta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v,
\end{aligned}$$

其中 $\bar{f}(0,\ x,\ v)=0$。按照处理 T_k^1和 T_k^2项的方法，在上述方程中取 $\delta\to 0$极限，可得

$$\int_{\mathbb{R}}\int_I |\bar{f}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0.\tag{A.17}$$

将方程（A.16）用于 $k=1$ 在方程（A.15）中，以及 $\delta\to 0$ 可得

$$\left\|\int_{\mathbb{R}}\bar{f}\,\mathrm{d}v\right\|_{L^2([0,T]\times I)} \le T\|\bar{u}^*\|_X\|f_0\|_{L^1(\Omega)}.\tag{A.18}$$

利用方程（A.14），并根据方程（A.16）进行归纳，可推出

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} v\bar{f}\,\mathrm{d}v \right\|_{L^2([0,T]\times I)} \lesssim T\|\bar{u}^*\|_X \left(\|m_2 f_1\|_{L^\infty(0,T;L^1(I))} + \|u_2^*\|_X \|m_1 f_1\|_{L^\infty(0,T;L^1(I))} + \|u_2^*\|_X^2 \|m_0 f_1\|_{L^\infty(0,T;L^1(I))} \right). \tag{A.19}$$

使用（A.18）-（A.19）可得：对于充分小的 $T>0$，由（A.13），我们得到

$$\|\bar{u}\|_X \le \alpha_0 \|\bar{u}^*\|_X, \quad \alpha_0 < 1.$$

这表明 T 是一个压缩映射。 □

H.H.：数学系，孟买印度理工学院，Powai，孟买 400076，印度。
电子邮箱地址： hutri@math.iitb.ac.in

K.K.：数学系，孟买印度理工学院，Powai，孟买 400076，印度。电子邮箱地址： krishankumar@math.iitb.ac.in

A.K.P.：数学系，比尔拉科技与科学学院，Pilani，KK Birla果阿校区，NH 17 B，Zuarinagar，果阿 403726，印度。

电子邮箱地址： amiyap@goa.bits-pilani.ac.in