arXiv:2305.01286v1 [math.AT] 2 May 2023

弦拓扑中的卡当演算

内藤孝仁

Abstract. 本文研究由 Kuribayashi、Wakatsuki、Yamaguchi 和作者引入的自由回路空间同调上的卡当演算。特别地，本文证明，卡当演算可以用弦拓扑中的环乘积和括号来描述。此外，借助这些描述，我们证明环乘积与自由回路空间同调的霍奇分解相容。

1. Introduction and Results

在本文中，我们假设 M 是一个维数为 m 的闭定向光滑流形，奇异（上）同调的系数域为 $\mathbb{K}$，其特征为 $\mathbb{K}=0$。令 $LM=\mathsf{Map}(S^1,M)$ 表示 M的自由回路空间，$\mathsf{aut}_1(M)$ 表示映射空间 $\mathsf{Map}(M,M)$ 中包含 M的恒等映射的连通分支。这里，我们始终将 S^1 与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$等同起来。

用于微分几何的经典卡当演算由作用于 $\Omega^*(M)$（ M的德拉姆复形）上的三类导子组成：李导数 L_X、与 X 在 M 上的向量场 i_X 相关的缩并（内积）以及外导子 d。李导数和缩并在德拉姆复形上诱导出向量场空间的作用。此外，对于任意向量场 X，这些导子满足卡当（魔法）公式 $L_X=[d,i_X]$，其中 $[\ ,\ ]$ 表示交换子括号。

Fiorenza 和 Kowalzig 在 [8] 中将这种结构表述为同伦卡当演算。在 [10], 中，Kuribayashi、Wakatsuki、Yamaguchi 和作者研究了与自由回路空间相关的同伦卡当演算。我们在 $\Omega^*(M)$ 的霍赫希尔德链复形上给出了一种同伦卡当演算结构。此外，作为该结构的几何描述，我们构造了从 $\pi_*(\mathsf{aut}_1(M))\otimes\mathbb{K}$ 到 $\mathsf{End}(H^*(LM))$ 的算子$L,\ e$。在本文中，我们聚焦于这种描述的一个同调定义版本。

$$L,e:\pi_*(\mathrm{aut}_1(M))\otimes\mathbb{K}\longrightarrow\mathrm{End}(H_*(LM)); \tag{1.1}$$

更多详情请参见第 4 节。

另一方面，LM 的同调在由 Chas和Sullivan开创的弦拓扑中具有丰富的代数结构。在 [4], 中，他们在移位同调 $\mathbb{H}_*(LM)$上定义了巴塔林–维尔科维斯基代数结构：$=H_{*+m}(LM)$，其中的乘法 $\bullet$ 称为环乘积，而巴塔林–维尔科维斯基（BV）算子Δ 则由环的旋转给出。特别地，$\mathbb{H}_*(LM)$是一个带有环括号 $\{\ ,\ \}$的 Gerstenhaber代数；有关这些代数结构的详情，请参见第 2 节。

本文旨在探讨环乘积（括号）与运算（1.1）之间的关系。特别地，我们证明运算（1.1）可以用环乘积和括号来描述。为了描述这一

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 55P50；次要分类号 55P62。
Key words and phrases. 卡当演算、弦拓扑、自由回路空间、有理同伦论。

结果，我们回顾 F´elix 和 Thomas [6] 所构造的态射 Γ_1: $\pi_*(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M))\otimes\mathbb{K}\to\mathbb{H}_*(LM)$；其定义另见第 5 节。他们证明，当 M 为单连通时，Γ_1 是单射。利用态射 Γ_1，我们证明以下定理，这是本文的主要结果之一。这里，记号 L_f 和 e_f分别表示 L 和 e 在 $f\in\pi_*(\mathrm{aut}_1(M))$ 处的取值。

定理 1.1. 设 $h\in\pi_n(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M))$ 对于 $n\geq 1$和 $a\in\mathbb{H}_*(LM)$。则，环乘积 $\Gamma_1(h)\bullet a$ 以及环括号 $\{\Gamma_1(h)\ a\}$ 满足以下恒等式

(1) $\Gamma_1(h)\bullet a=(-1)^n e_{\partial(h)}(a)\qquad and$
(2) $\{\Gamma_1(h),a\}=L_{\partial(h)}(a)-(-1)^n\Delta\Gamma_1(h)\bullet a$

在 $\mathbb{H}_*(LM)$ 中。其中，∂: $\pi_n(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M))\xrightarrow{\cong}\pi_{n+1}(\mathrm{aut}_1(M))$ 是伴随映射。此外，若 M 是单连通的，则以下恒等式成立；

(3) $\{\Gamma_1(h),a\}=L_{\partial(h)}(a).$

定理 1.1 的证明见第6节。定理 1.1 中的恒等式给出了环乘积方面的一些应用。以下推论可由定理 1.1(3)立即得到。

推论 1.2. 设 $f\in\pi_*(\mathrm{aut}_1(M))$。若 M 是单连通的，则算子L_f: $\mathbb{H}_*(LM)\to\mathbb{H}_*(LM)$ 关于环乘积是一个导子。

我们还讨论了环乘积在$H_*(LM)$的霍奇分解中的一种行为。当 M 为单连通时，LM 的同调具有直和分解 $H_*(LM)\cong\bigoplus_i H_*^{(i)}(LM)$，且每个直和项 $H_*^{(i)}(LM)$都表示为一个特征子空间；见 [12]。F´elix和Thomas [7] 证明了，环乘积 $\bullet$ 相对于霍奇分解具有良好性质，具体如下：

$$\bullet:\mathbb{H}_*^{(i)}(LM)\otimes\mathbb{H}_*^{(j)}(LM)\longrightarrow\mathbb{H}_*^{(\leq i+j)}(LM).$$

当流形 M 是有理椭圆时，Berest、Ramadoss 和 Zhang [2]给出了该结果的一个等变版本。注意，即使 M 不是单连通的，也可以定义特征子空间 $H_*^{(i)}(LM)$。我们展示霍奇分解中非单连通流形的环乘积具有如下行为。

定理 1.3。令 $h\in\pi_n(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M))$ 对于 $n\geq 1$and $a\in\mathbb{H}_*^{(i)}(LM)$。那么，环乘积 $\Gamma_1(h)\bullet a$ 包含于 $\mathbb{H}_*^{(i+1)}(LM)$ 中，也就是说，环乘积 $\bullet$ 诱导

$$\bullet:\mathrm{Im}\,\Gamma_1\otimes\mathbb{H}_*^{(i)}(LM)\longrightarrow\mathbb{H}_*^{(i+1)}(LM).$$

本文的组织结构如下。第 2 节回顾环乘积和环括号的一种同伦论构造。第 3 节介绍 $H_*(LM)$ 的霍奇分解的几何定义和代数定义。第 4 节给出算子 (1.1) 的定义。第 5 节陈述 F´elix 和 Thomas 给出的态射 Γ_1 。此外，我们还讨论了 Γ_1 关于霍奇分解的一些性质。第6节用于证明定理 1.1、推论 1.2 和定理 1.3。第 7 节给出一些例子，展示当 M 是球面时 Γ_1 的像。

2. Loop product and loop bracket

本节首先在一般情形下介绍 shriek 映射的构造，以回顾 Cohen 和 Jones 对环乘积的同伦论描述

。考虑连通空间的拉回交换图 [3]

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xleftarrow{j} & E_2 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ N_1 & \xleftarrow{i} & N_2. \end{array}$$

这里， N_i 是一个维数为 n_i的紧致定向光滑流形， p 是一个纤维化， i 是一个嵌入。注意， j 是拓扑空间之间的嵌入。考虑法丛的关联圆盘丛 π： $D(\nu) \to N_2$，以及 i 的法丛和嵌入 $D(\nu) \hookrightarrow N_1$。我们将 $D(\nu)$与 N_1 中的嵌入像等同，并简写为 $\tilde{D}(\nu) := p^{-1}(D(\nu))$和 $\partial\tilde{D}(\nu) := p^{-1}(\partial D(\nu))$。由于 p 是一个纤维化，˜的同伦提升性质表明，存在一个映射 $\tilde{\pi}$： $D(\nu) \to E_2$，使得$q \circ \tilde{\pi} = \pi \circ p|_{\tilde{D}(\nu)}$。

令 $u \in H^{n_1-n_2}(D(\nu)\ \partial D(\nu))$为托姆类，并用 $\tilde{u}$ 表示上同调类 $p^*(u)$在 $H^{n_1-n_2}(D(\nu)\ \partial D(\nu))$中的拉回˜ ˜。那么， j的惊叹映射记作 $j_!$，定义为以下复合

$$\begin{array}{ccccc} j_! : H_*(E_2) & \xrightarrow{\text{proj}} & H_*(E_2, E_2 \setminus j(E_1)) & \xleftarrow[\cong]{\text{excision}} & H_*(\tilde{D}(\nu), \partial\tilde{D}(\nu)) \\ & & & \overset{\cap\tilde{u}}{\swarrow} & \\ & & H_*(\tilde{D}(\nu)) & \xrightarrow{\tilde{\pi}_*} & H_*(E_1), \end{array}$$

其中 $\cap\tilde{u}$ 表示与 $\tilde{u}$的帽积。

令 $LM \times_M LM$ 表示乘积 $LM \times LM$ 中由具有相同基点的环对组成的子空间，也就是说，存在如下拉回交换图

$$\begin{array}{ccc} LM \times LM & \xleftarrow{j} & LM \times_M LM \\ {\scriptstyle \text{ev}_0\times\text{ev}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{ev}_0} \\ M \times M & \xleftarrow{\text{Diag}} & M \end{array}$$

其中 j 是包含映射，ev_0 是 0 处的求值映射，而 Diag 是对角映射。令 comp : $LM \times_M LM \to LM$ 表示如下定义的环的拼接

$$\text{comp}(\gamma_1, \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right) \\ \gamma_2(2t-1) & \left(\frac{1}{2} \le t \le 1\right) \end{cases}$$

对于 $(\gamma_1, \gamma_2) \in LM \times_M LM$。于是，记作 Lp 的环乘积定义为

$$\text{Lp} : H_*(LM)^{\otimes 2} \xrightarrow{\times} H_*(LM \times LM) \xrightarrow{j_!} H_*(LM \times_M LM) \xrightarrow{\text{comp}_*} H_*(LM),$$

其中 $\times$ 表示交叉积。环乘积 Lp 在移位同调 $\mathbb{H}_*(LM)$ 上诱导出乘法 $= H_{*+m}(LM)$，其定义为

$$a \bullet b := (-1)^{m\|a\|}\text{Lp}(a \otimes b) = (-1)^{m(|a|+m)}\text{Lp}(a \otimes b)$$

对于 $a, b \in \mathbb{H}_*(LM)$，其中 $\|a\|$表示 a在 $\mathbb{H}_*(LM)$ 中的次数。 $\bullet$的定义意味着，次数为 m 的分次移位态射 s^m： $H_*(LM) \to \mathbb{H}_*(LM)$， $s^m(a) = a$符合交换图。

$$\begin{array}{ccc} H_*(LM) \otimes H_*(LM) & \xrightarrow{\text{Lp}} & H_*(LM) \\ {\scriptstyle s^m\otimes s^m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^m} \\ \mathbb{H}_*(LM) \otimes \mathbb{H}_*(LM) & \xrightarrow{\bullet} & \mathbb{H}_*(LM). \end{array}$$

众所周知，乘法 $\bullet$ 是一种满足结合律、有单位元且可交换的乘法。此外，同调类 $c_*([M]) \in \mathbb{H}_0(LM)$ 是关于 $\bullet$ 的单位元，其中 $[M]$ 是 M 的基本类，而 $c: M \to LM$ 是一个将元素 $x \in M$ 映射为 x 处常值回路的映射。特别地，我们有

$$\mathrm{Lp}\,(c_*([M]) \otimes a) = (-1)^m a \tag{2.1}$$

在非移位同调 $H_*(LM)$ 中。

接下来，我们回顾同调$H_*(LM)$上的 Batalin-Vilkovisky (BV) 算子 Δ 。设 $r: S^1 \times LM \to LM$ 是由环的旋转诱导的 LM 的 S^1-作用。具体而言，对于 s、$t \in S^1$ 和 $\gamma \in LM$， r 定义为 $r(s,\gamma)(t) = \gamma(t+s)$。然后，我们将 Δ 定义为复合。

$$\Delta : H_*(LM) \xrightarrow{[S^1]\times} H_*(S^1 \times LM) \xrightarrow{r_*} H_*(LM),$$

其中 $[S^1]$ 是 S^1 的基本类。

Chas和Sullivan [4] 证明，环乘积 $\bullet$ 和 BV算子 Δ使 $\mathbb{H}_*(LM)$ 成为 BV 代数；另见 [11], [14]。一般而言，根据 Getzler [9], 的结果，任意 BV 代数都具有Gerstenhaber代数结构。具体来说，在 $\mathbb{H}_*(LM)$ 上定义的括号 $\{\ ,\ \}$ 为

$$\{a,b\} := (-1)^{\|a\|}\Delta(a \bullet b) - (-1)^{\|a\|}\Delta(a) \bullet b - a \bullet \Delta(b)$$

是一个满足Poisson恒等式的李括号

$$\{a, b_1 \bullet b_2\} = \{a, b_1\} \bullet b_2 + (-1)^{\|b_1\|(\|a\|+1)} b_1 \bullet \{a, b_2\}. \tag{2.2}$$

这个括号称为环括号。

3. Hodge decomposition of the homology of free loop space

本节回顾 $H_*(LM)$ 的 Hodge 分解的几何定义和代数定义，并对两者进行比较。设 $k \geq 2$ 为一个整数，且 $p_k: S^1 \to S^1$是由 $p_k(t) = kt$ for $t \in S^1$给出的 k 重覆盖。我们将 p_k诱导的映射记为 $\varphi_k: LM \to LM$，并将 φ_{k*} 在同调中诱导的映射对应于整数 $i \geq 0$的特征值 k^i的特征子空间记为 $H_*^{(i)}(LM) = \{a \in H_*(LM) \mid \varphi_{k*}(a) = k^i a\}$ 。注意， $H_*^{(i)}(LM)$ 的定义不依赖于 k 的选择，因为 char $\mathbb{K} = 0$。

引理3.1. $H_*^{(i)}(LM)$ 在 Δ下的像包含于 $H_*^{(i-1)}(LM)$ 中，即 $\Delta\left(H_*^{(i)}(LM)\right) \subset H_*^{(i-1)}(LM)$。

证明。令 $r: S^1 \times LM \to LM$ 为第 2 节中所述的 S^1-作用。根据定义，容易验证下图是交换图:

$$\begin{array}{ccccc} S^1 \times LM & \xrightarrow{p_k \times 1} & S^1 \times LM & \xrightarrow{r} & LM \\ {\scriptstyle 1\times\varphi_k}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_k} \\ S^1 \times LM & & \xrightarrow{\qquad r \qquad} & & LM. \end{array} \tag{3.1}$$

注意， $p_{k*}[S^1] = k[S^1]$ 属于 $H_1(S^1)$。对于任意 $a \in H_*^{(i)}(LM)$，根据 Δ 的定义以及交换图 (3.1) 的交换性可得

$$\begin{aligned} k \cdot \varphi_{k*}(\Delta a) &= \varphi_{k*} \circ r_*\left(p_{k*}[S^1] \times a\right) \\ &= r_* \circ (1 \times \varphi_k)_*\left([S^1] \times a\right) \\ &= r_*([S^1] \times k^i a) \\ &= k^i \cdot \Delta(a), \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

注3.2. 当 M 为单连通时， [7, 定理 2], F´elix和Thomas通过代数方法证明了引理3.1的同一断言。

接下来，我们回顾霍奇分解的一个代数定义。在有理同伦论中，该定义使用了Vigu´e-Poirrier和Sullivan提出的、关于 LM 的Sullivan模型 [13]。关于有理同伦论中的记号和术语的详细信息，请参阅著作 [5] 。

从现在起，在本节中我们假设 M 是单连通的。设 $\wedge V =(\wedge V, d)$是 M的极小Sullivan模型， $\mathcal{L} =(\wedge V \otimes \wedge \overline{V}, D)$是 LM 的Sullivan模型，如 [5, §15(c)]所述。这里，$\overline{V}^i = V^{i+1}$ 是 V的悬挂。我们将对应于 $v \in V$的元素记为$\bar{v} \in \overline{V}$。设 s 是 $\wedge V \otimes \wedge \overline{V}$上的一个次数为 -1 的导子，由 $s(v) = \bar{v}$ 和 $s(\bar{v}) = 0$定义。 $\mathcal{L}$的微分 D 是 d 的唯一延拓，并满足条件 $Ds + sd = 0$。

根据 D的定义，我们有复形的直和分解 $\mathcal{L} = \bigoplus_i \mathcal{L}_{(i)}$ ，其中 $\mathcal{L}_{(i)} =(\wedge V \otimes \wedge^i \overline{V}, D)$。对该分解应用同调函子，得到

$$H^*(\mathcal{L}) \cong \bigoplus_{i\geq 0} H^*(\mathcal{L}_{(i)}). \tag{3.2}$$

我们这里考虑 $H^*_{(i)}(LM) = \{\alpha \in H^*(LM) \mid \varphi_k^*(\alpha) = k^i\alpha\}$ $H_*^{(i)}(LM)$的上同调版本。以下命题断言， $H^*(\mathcal{L}_{(i)})$是 $H^*_{(i)}(LM)$的一种代数构造。这是一个众所周知的结果，不过，为求完整起见，我们仍给出证明。

命题3.3。 $H^*(\mathcal{L}_{(i)})$的同调与 $H^*_{(i)}(LM)$同构。

证明。首先考虑一个态射 $\mathcal{M}_{\varphi_k} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ ，由 $\mathcal{M}_{\varphi_k}(v) = v$ 和$\mathcal{M}_{\varphi_k}(\bar{v}) = k\bar{v}$ 定义，其中 $v \in V$。容易验证， $\alpha \in H^*(\mathcal{L})$属于直和项 $H^*(\mathcal{L}_{(i)})$当且仅当 $\mathcal{M}_{\varphi_k}(\alpha) = k^i\alpha$ 成立。此外，结果 [1,定理3.2] 断言， $\mathcal{M}_{\varphi_k}$ 是 φ_k的一个Sullivan代表。因此，

$$H^*_{(i)}(LM) \cong \{\alpha \in H^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{M}^*_{\varphi_k}(\alpha) = k^i\alpha\} = H^*(\mathcal{L}_{(i)}),$$

证明至此完成。 □

在本节余下部分，我们将与同调定义 $H_*^{(i)}(LM)$ 和上同调定义 $H^*_{(i)}(LM)$ 进行比较。令 $\langle , \rangle$: $H^n(LM)\otimes H_n(LM) \to \mathbb{K}$为克罗内克配对。由于 $\mathbb{K}$ 的特征为零，根据泛系数定理，该配对是非退化的；例如参见 [5, 命题 5.3] 。考虑由 $H_*^{(i)}$,LM 诱导的配对

$$\langle\ ,\ \rangle_{ij} : H^n_{(i)}(LM) \otimes H_n^{(j)}(LM) \longrightarrow \mathbb{K}$$

。于是有如下结论。

引理 3.4. 配对 $\langle\ ,\ \rangle_{ij}$ 非退化，当且仅当 $i = j$，即 $H^n_{(i)}(LM)$ ≅Hom($H_n^{(i)}(LM)$ $\mathbb{K}$)。

证明。对于任意 $\alpha \in H^n_{(i)}(LM)$ 和 $a \in H_n^{(j)}(LM)$，有

$$k^i\langle\alpha, a\rangle_{ij} = \langle k^i\alpha, a\rangle = \langle\varphi_k^*(\alpha), a\rangle = \langle\alpha, \varphi_{k*}(a)\rangle = \langle\alpha, k^j a\rangle = k^j\langle\alpha, a\rangle_{ij}.$$

因此 $\langle\ ,\ \rangle_{ij} = \delta_{ij}\langle\ ,\ \rangle$ 成立，其中 δ_{ij} 为克罗内克δ。由于 $\langle\ ,\ \rangle$ 非退化，由直和分解 (3.2) 即可证明此断言。□

推论 3.5. 如果 M 是单连通的，那么求值映射 $\mathrm{ev}_0 : LM \to M$ 诱导出同构 ev_{0*}: $H_*^{(0)}(LM) \to H_*(M)$。

证明。容易证明，典范包含 $\wedge V \hookrightarrow \mathcal{L}$ 诱导出一个同构 $H^*(\wedge V) \cong H^*(\mathcal{L}_{(0)})$。由于该包含映射是 ev_0,的 Sullivan代表，根据命题3.3和引理 3.4即可得到该断言。□

4. Geometric Cartan calculus on free loop spaces

本节中，我们给出第 1 节以算子 (1.1) 形式引入的 $H_*(LM)$ 上的卡当演算。请注意，这是 Kuribayashi、Wakatsuki、Yamaguchi 和作者在 [10] 中提出的卡当演算的一种同调定义形式。

首先，对于 $n \geq 2$，我们考虑 $H_*(LS^n)$ 中的两个同调类 $c_*([S^n])$ 和 η_n。第一个是 $H_n(LS^n)$ 中的同调类，它是通过常值环映射 $c\colon S^n \hookrightarrow LS^n$ 将 S^n 的基本类 $[S^n]$ 得到的。第二个定义为 $\eta_n = (\mathrm{ad}_1)_*([S^{n-1}])$，其中 $\mathrm{ad}_1\colon S^{n-1} \to \Omega S^n \hookrightarrow LS^n$ 是恒等映射 $1\colon S^{n-1} \wedge S^1 \cong S^n \to S^n$ 的伴随映射，由 $\mathrm{ad}_1(u)(t) = u \wedge t$ 给出，其中 $u \in S^{n-1}$ 且 $t \in S^1$。

引理4.1。同调类 η_n 具有以下性质。

(1) $\eta_n \in H^{(1)}_{n-1}(LS^n)$.
(2) $\Delta(\eta_n) = c_*([S^n])$.

证明。令 $\tilde{p}_k\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ 为复合映射

$$S^{n-1} \cong S^{n-2} \wedge S^1 \xrightarrow{1 \wedge p_k} S^{n-2} \wedge S^1 \cong S^{n-1}$$

并考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\mathrm{ad}_1} & \Omega S^n & \xrightarrow{\text{inclusion}} & LS^n \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}_k} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_k} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_k} \\ S^{n-1} & \xrightarrow{\mathrm{ad}_1} & \Omega S^n & \xrightarrow{\text{inclusion}} & LS^n, \end{array}$$

其中 p_k 和 φ_k 是第3节中给出的映射。显然，右侧的方形是交换的。我们可以证明，同伦集 $[S^n, S^n]$ 中分别对应于 $\varphi_k \circ \mathrm{ad}_1$ 和 $\mathrm{ad}_1 \circ \tilde{p}_k$、并通过伴随对应$[S^{n-1}, \Omega S^n] \cong [S^n, S^n]$ 得到的映射相同。因此，左侧的方形在同伦意义下交换。由于 $\tilde{p}_{k*}([S^{n-1}]) = k[S^{n-1}]$ 属于 $H_{n-1}(S^{n-1})$，断言（1）由该交换图在同伦意义下交换得出。

由引理3.1和断言（1），$\Delta(\eta_n)$包含于 $H^{(0)}_n(LS^n)$。交换图

$$\begin{array}{ccccc} S^1 \times S^{n-1} & \xrightarrow{1 \times \mathrm{ad}_1} & S^1 \times LS^n & \xrightarrow{r} & LS^n \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{proj}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_0} \\ S^1 \wedge S^{n-1} & & \xrightarrow{\cong} & & S^n \end{array}$$

由此可得，$\mathrm{ev}_{0*} \circ \Delta(\eta_n) = [S^n] = \mathrm{ev}_{0*} \circ c_*([S^n])$ 在 $H_n(S^n)$ 中成立。由于对于 $n \geq 2$，S^n 是单连通的，根据推论 3.5，$\mathrm{ev}_{0*}\colon H^{(0)}_*(LS^n) \xrightarrow{\cong} H_*(S^n)$ 是一个同构，从而完成证明。□

给定由 $f\colon S^n \to \mathrm{aut}_1(M)$ 表示的 $f \in \pi_n(\mathrm{aut}_1(M))$。令 $\mathrm{ad}f\colon S^n \times M \to M$ 为由 $\mathrm{ad}f(u,x) = f(u)(x)$ 对 $u \in S^n, x \in M$ 定义的 f 的伴随映射，并记 $L(\mathrm{ad}f)\colon LS^n \times LM \to LM$ 为自由回路空间之间的诱导映射。利用同调类 $c_*([S^n])$ 和 η_n，我们定义态射

$$L,\ e : \pi_*(\mathrm{aut}_1(M)) \otimes \mathbb{K} \longrightarrow \mathrm{End}(H_*(LM))$$

分别由 $L(f)(a) = L(\mathrm{ad}f)_*(c_*([S^n]) \times a)$、$e(f)(a) = L(\mathrm{ad}f)_*(\eta_n \times a)$ 表示，对应于 $a \in H_*(LM)$。这里的记号 $\times$ 表示交叉积。我们简记为$L_f := L(f)$ 和 $e_f := e(f)$。

引理 4.2。算子 L_f、e_f 和 Δ 满足 Cartan 公式，即，

$$L_f = \Delta \circ e_f - (-1)^{n-1} e_f \circ \Delta.$$

证明。首先，很容易看出下面的交换图是可交换的；

$$\begin{array}{ccccc} H_*(LS^n) \otimes H_*(LM) & \xrightarrow{\times} & H_*(LS^n \times LM) & \xrightarrow{L(\mathrm{ad}_f)_*} & H_*(LM) \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta\otimes 1 + 1\otimes\Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ H_*(LS^n) \otimes H_*(LM) & \xrightarrow{\times} & H_*(LS^n \times LM) & \xrightarrow{L(\mathrm{ad}_f)_*} & H_*(LM). \end{array} \tag{4.1}$$

(4.1)的交换性以及引理4.1 (2)表明，

$$\begin{aligned} \Delta \circ e_f(a) &= \Delta \circ L(\mathrm{ad}_f)_*(\eta_n \times a) \\ &= L(\mathrm{ad}_f)_* \left(\Delta(\eta_n) \times a + (-1)^{n-1} \eta_n \times \Delta(a)\right) \\ &= L_f(a) + (-1)^{n-1} e_f \circ \Delta(a) \end{aligned}$$

针对 $a \in H_*(LM)$。 □

命题 4.3。算子 L_f 和 e_f 诱导

$$L_f : H_*^{(i)}(LM) \longrightarrow H_*^{(i)}(LM) \quad and \quad e_f : H_*^{(i)}(LM) \longrightarrow H_*^{(i+1)}(LM).$$

证明。交叉积 $\times$ 的自然性断言，它诱导了

$$\times : H_*^{(i)}(LS^n) \otimes H_*^{(j)}(LM) \longrightarrow H_*^{(i+j)}(LS^n \times LM).$$

此外，$L(\mathrm{ad}f)_*$ 保持关于霍奇分解的次数。因此，根据 $c_*([S^n]) \in H_*^{(0)}(LS^n)$和引理4.1 (1)，该断言成立。 □

5. The morphism Γ_1 and the Hodge decomposition

本节中，我们首先回顾 F´elix 和 Thomas[6]提出的态射 Γ_1。令 $g : \Omega\,\mathrm{aut}_1(M) \times M \to LM$为由 $g(\gamma, x)(t) = \gamma(t)(x)$ 定义的映射，其中$\gamma \in \Omega\,\mathrm{aut}_1(M)$、$x \in M$和 $t \in S^1$。则映射 Γ_1定义为复合。

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_1 : \pi_n(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M)) \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{\mathrm{Hur}} & H_n(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M)) & \xrightarrow{\times[M]} & H_{n+m}(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M) \times M) \\ & & & \searrow^{g_*} & \\ & & & & H_{n+m}(LM) \xrightarrow[=]{s^m} \mathbb{H}_n(LM), \end{array}$$

其中 $[M] \in H_m(M)$ 是基本类，Hur 是 Hurewicz 映射，即对于 $h : S^n \to \Omega\,\mathrm{aut}_1(M)$, $\mathrm{Hur}(h) = h_*([S^n])$ 属于 $\pi_n(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M))$。

引理 5.1。Γ_1 的像包含于 $\mathbb{H}_*^{(1)}(LM)$。

证明。设 $\varphi_k' : \Omega\,\mathrm{aut}_1(M) \to \Omega\,\mathrm{aut}_1(M)$ 是由第 3 节中所述的 p_k 诱导的映射。于是 $\varphi_k \circ g = g \circ (1 \times \varphi_k')$，因此交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_*(LM) & \xrightarrow{\varphi_{k*}} & \mathbb{H}_*(LM) \\ \uparrow{\scriptstyle \Gamma_1} & & \uparrow{\scriptstyle \Gamma_1} \\ \pi_*(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M)) \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{\varphi_{k*}'} & \pi_*(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M)) \otimes \mathbb{K} \end{array}$$

可交换。由于 φ'_k 与复合映射

$$\varphi'_k : \Omega \operatorname{aut}_1(M) \xrightarrow{\text{diagonal}} (\Omega \operatorname{aut}_1(M))^{\times k} \xrightarrow{\text{concatenation}} \Omega \operatorname{aut}_1(M),$$

同伦群之间的诱导映射 φ'_{k*} 满足 $\varphi'_{k*}(h) = kh$ 对于任意 $h \in \pi_*(\Omega \operatorname{aut}_1(M))$，从而完成证明。□

命题 5.2. 若 M 是单连通的，则复合映射

$$\Delta \circ \Gamma_1 : \pi_n(\Omega \operatorname{aut}_1(M)) \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{H}_{n+1}(LM)$$

对 $n \geq 0$为零。

证明. 由引理3.1和命题 5.1， $\Delta \circ \Gamma_1$ 的像包含于$\mathbb{H}^{(0)}_{n+1}(LM)$中。此外，根据推论 3.5， $\mathbb{H}^{(0)}_{n+1}(LM) \cong H_{n+1+m}(M) = \{0\}$。□

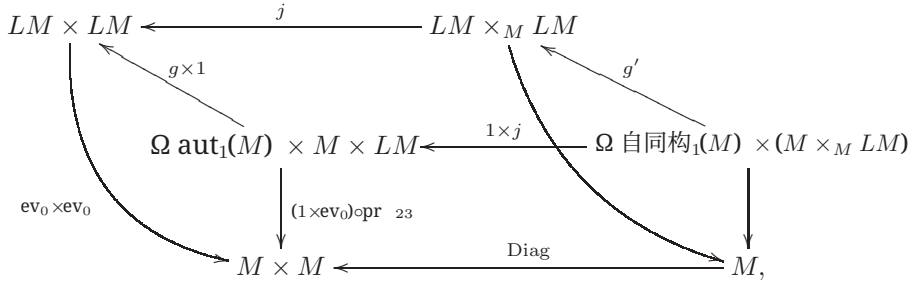
6. Proofs of Theorem 1.1, Corollary 1.2 and Theorem 1.3

我们首先考察第 5 节中所述的环乘积与由 g 在同调中诱导的态射之间的关系。在本节中，我们常通过常值环映射 $c\colon M \hookrightarrow LM$ 在同调中诱导的态射，将 $H_*(M)$ 视为 $H_*(LM)$ 的向量子空间。令 $g'\colon \Omega \operatorname{aut}_1(M) \times LM \to LM \times_M LM$ 为由 $g'(\gamma_1, \gamma_2) = (g(\gamma_1, \gamma_2(0)), \gamma_2)$ 定义的映射，其中 $\gamma_1 \in \Omega \operatorname{aut}_1(M)$，且 $\gamma_2 \in LM$，并令 $\operatorname{comp}' := \operatorname{comp} \circ g'$。

引理 6.1。下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
H_*(LM) \otimes H_*(LM) & \xrightarrow{\mathrm{Lp}} & H_*(LM) \\
{\scriptstyle (g_* \circ \times) \otimes 1} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \operatorname{comp}'_* \circ \times} \\
H_*(\Omega \operatorname{aut}_1(M)) \otimes H_*(M) \otimes H_*(LM) & \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{Lp}} & H_*(\Omega \operatorname{aut}_1(M)) \otimes H_*(LM).
\end{array}$$

证明。容易验证下图的交换性：



其中 pr_{23} 是到第二和第三个因子的投影。注意，纤维积 $M \times_M LM$ 可通过由以下复合映射给出的同胚与 LM 识别：

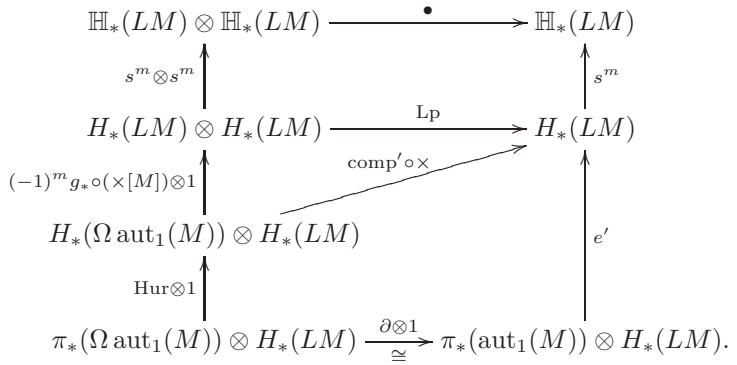
$$M \times_M LM \xrightarrow{c \times 1} LM \times_M LM \xrightarrow{\mathrm{comp}} LM.$$

因此，以下交换图是交换的：

$$\begin{array}{ccccc}
H_*(LM \times LM) & \xrightarrow{j_!} & H_*(LM \times_M LM) & \xrightarrow{\mathrm{comp}_*} & H_*(LM) \\
{\scriptstyle (g \times 1)_*} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle g'_*} & \nearrow {\scriptstyle \operatorname{comp}'_*} & \\
H_*(\Omega \operatorname{aut}_1(M) \times M \times LM) & \xrightarrow{(1 \times j)_!} & H_*(\Omega \operatorname{aut}_1(M) \times LM) & & \\
\times \uparrow & & \uparrow \times & & \\
H_*(\Omega \operatorname{aut}_1(M)) \otimes H_*(M \times LM) & \xrightarrow{1 \otimes j_!} & H_*(\Omega \operatorname{aut}_1(M)) \otimes H_*(LM). & &
\end{array}$$

因此，交换图和环乘积的定义证明了该引理。□

定理 1.1 的证明。为了证明断言中的恒等式 (1)，只需证明下图是交换的；

(6.1)


这里， e' 是第 4 节中算子 e 的伴随映射。注意，左侧竖直箭头的复合与 $\Gamma_1\otimes s^m$ 一致。根据定义可知，顶部方块是交换的。由引理 6.1 和公式 (2.1)，可得 (6.1) 中间三角形的交换性。给定 $a\in H_*(LM)$和$h\in\pi_{n-1}(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M))$，后者由映射 $h\colon S^{n-1}\to\Omega\,\mathrm{aut}_1(M)$表示。于是我们有

$$\mathrm{comp}'_*\circ\times\circ(\mathrm{Hur}\otimes 1)(h\otimes a)=(\mathrm{comp}'\circ(h\times 1))_*([S^{n-1}]\times a). \tag{6.2}$$

另一方面，设 $f:=\partial(h)\colon S^n\cong S^{n-1}\wedge S^1\to\mathrm{aut}_1(M)$是由 $f(u\wedge t)(x):=h(u)(t)(x)$给出的$h$的伴随映射，其中 $u\in S^{n-1}$、 $t\in S^1$和 $x\in M$。根据 e'的定义，我们有

$$e'\circ(\partial\otimes 1)(h\otimes a)=L(\mathrm{ad}_f)_*(\eta_n\times a)=(L(\mathrm{ad}_f)\circ(\mathrm{ad}_1\times 1))_*([S^{n-1}]\times a), \tag{6.3}$$

其中 $\mathrm{ad}_f\colon M\times S^n\to M$是 f的伴随映射。注意，对于 $\gamma\in LM$，

$$L(\mathrm{ad}_f)\circ(\mathrm{ad}_1\times 1)(u,\gamma)(t)=h(u)(t)(\gamma(t))$$

and

$$\mathrm{comp}'\circ(h\times 1)(u,\gamma)(t)=\begin{cases}\gamma(2t) & \left(0\le t\le\frac{1}{2}\right)\\ h(u)(2t-1)(\gamma(0)) & \left(\frac{1}{2}\le t\le 1\right).\end{cases}$$

现在定义三个同伦 $H_i\colon S^{n-1}\times LM\times I\to LM$，对应于 $i=1$、2、3，定义如下

$$H_1(u,\gamma,s)(t)=\begin{cases}\gamma(0) & \left(0\le t\le\frac{2}{3}s\right)\\ h(u)\left(\frac{3t-2s}{3-2s}\right)\left(\gamma\left(\frac{3t-2s}{3-2s}\right)\right) & \left(\frac{2}{3}s\le t\le 1\right),\end{cases}$$

$$H_2(u,\gamma,s)(t)=\begin{cases}\gamma(3st) & \left(0\le t\le\frac{1}{3}\right)\\ h(u)\left(3st-s\right)\left(\gamma\left(s\right)\right) & \left(\frac{1}{3}\le t\le\frac{2}{3}\right)\\ h(u)\left(3t+3s-3st-2\right)\left(\gamma\left(3t+3s-3st-2\right)\right) & \left(\frac{2}{3}\le t\le 1\right)\end{cases}$$

and

$$H_3(u,\gamma,s)(t)=\begin{cases}\gamma\left(\frac{6t}{s+2}\right) & \left(0\le t\le\frac{s+2}{6}\right)\\ h(u)\left(\frac{6t-s-2}{s+2}\right)\left(\gamma\left(0\right)\right) & \left(\frac{s+2}{6}\le t\le\frac{s+2}{3}\right)\\ \gamma(0) & \left(\frac{s+2}{3}\le t\le 1\right).\end{cases}$$

容易验证， $L(\mathrm{ad}_f)\circ(\mathrm{ad}_1\times 1)=H_1|_{s=0}$, $H_1|_{s=1}=H_2|_{s=0}$, $H_2|_{s=1}=H_3|_{s=0}$ 以及 $H_3|_{s=1}=\mathrm{comp}'\circ(h\times 1)$，由此可得 $L(\mathrm{ad}_f)\circ(\mathrm{ad}_1\times 1)$ 与 $\mathrm{comp}'\circ(h\times 1)$ 同伦。因此，由 (6.2) 和 (6.3) 可知，交换图 (6.1) 是交换的。

恒等式 (2) 由 (1) 和引理 4.2 得出。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\{\Gamma_1(h), a\} &= (-1)^{\|\Gamma_1(h)\|}\Delta(\Gamma_1(h)\bullet a) - (-1)^{\|\Gamma_1(h)\|}\Delta(\Gamma_1(h))\bullet a - \Gamma_1(h)\bullet\Delta(a)\\ &= \left(\Delta e_{\partial(h)} + (-1)^{|\partial(h)|}e_{\partial(h)}\Delta\right)(a) - (-1)^{|h|}\Delta(\Gamma_1(h))\bullet a\\ &= L_{\partial(h)}(a) - (-1)^{|h|}\Delta(\Gamma_1(h))\bullet a.\end{aligned}$$

若 M 是单连通的，则由命题 5.2 得 $\Delta\circ\Gamma_1 = 0$。因此，我们从 (2) 得知恒等式 (3) 成立。□

推论 1.2 的证明。回想一下，环括号满足 Poisson恒等式 (2.2)。根据定理 1.1(3)，我们有

$$\begin{aligned}L_f(a\bullet b) &= \{\Gamma_1\circ\partial^{-1}(f), a\bullet b\}\\ &= \{\Gamma_1\circ\partial^{-1}(f), a\}\bullet b + (-1)^{\|a\|(\|\Gamma_1\circ\partial^{-1}(f)\|+1)}a\bullet\{\Gamma_1\circ\partial^{-1}(f), b\}\\ &= L_f(a)\bullet b + (-1)^{\|L_f\|\|a\|}a\bullet L_f(b).\end{aligned}$$

这表明 L_f 关于环乘积是一个导子。 □

定理 1.3 的证明。由定理 1.1(1) 和命题 4.3，我们有

$$\Gamma_1(h)\bullet a = (-1)^n e_{\partial(h)}(a)\in\mathbb{H}_*^{(i+1)}(LM)$$

对于 $h\in\pi_n(\Omega\,\mathrm{aut}_1(M))$ 和 $a\in\mathbb{H}_*^{(i)}(LM)$，这证明了该定理。 □

7. Examples of the image of Γ_1

本节讨论 Γ_1 态射的像，其中 M 是 $n=2$、3 时的单连通球面 S^n。由于 Γ_1 是来自 [6], 的单射，只需考虑同伦群 $\pi_*(\mathrm{aut}_1(S^n))$ 中的非平凡元素。

例 7.1。令 S^3 为三维球面。我们可以将 S^3 视为四元数 $\mathbb{H}$ 中的单位球面。考虑一个乘法 $\mu:\ S^3\times S^3\to S^3$，它由 $\mathbb{H}$ 的乘法诱导。μ 的伴随映射诱导出一个映射 $\mathrm{ad}_\mu:\ S^3\to\mathrm{aut}_1(S^3)$，并且它是 $\pi_3(\mathrm{aut}_1(S^3))\otimes\mathbb{K}$ 中一个非零元素的代表元。由于 Γ_1 从 [6, 定理 2] 是单射的，$\Gamma_1(\partial^{-1}(\mathrm{ad}_\mu))$ 是 $H_5(LS^3)$ 中的一个非零同调类。明确地，根据 Γ_1 的定义，该同调类由复合所诱导的态射的值获得

$$S^2\times S^3\xrightarrow{\partial^{-1}(\mathrm{ad}_\mu)\times 1}\Omega\,\mathrm{aut}_1(S^3)\times S^3\xrightarrow{\quad g\quad}LS^3 \tag{7.1}$$

在 $S^2\times S^3$ 的基本类处的同调中。

另一方面，由于 S^3 是李群，众所周知，LS^3 可分解为 $\Omega S^3\times S^3$ 的乘积，其同胚为 $\psi:\Omega S^3\times S^3\to LS^3$，定义为$\psi(\gamma,u)(t) = \mu(\gamma(t)\ x)$，其中 $\gamma\in\Omega S^3$、$u\in S^3$ 和 $t\in S^1$。这里我们回顾第 4 节中所述的伴随映射 $\mathrm{ad}_1:S^2\to\Omega S^3$ 和同调类 $\eta_3\in H_2(\Omega S^3)$。接着，容易验证复合 (7.1) 与...一致

$$S^2\times S^3\xrightarrow{\mathrm{ad}_1\times 1}\Omega S^3\times S^3\xrightarrow{\quad\psi\quad}LS^3$$

因此，$\Gamma_1(\partial^{-1}(\mathrm{ad}_\mu)) = \psi_*(\eta_3\times[S^3])$ 在 $H_5(LS^3)$ 中。

例 7.2. 设 S^2 为二维球面，将其视为 $\mathbb{R}^3$中的单位球面。考虑由共轭作用 $\mathbb{H}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$诱导的 S^3-作用 $\mu':\ S^3\times S^2\to S^2$。这里，$\mathbb{R}^3$ 被视为 $\mathbb{H}$ 中由纯四元数组成的子空间，也就是说，标量部分为 0 的四元数。众所周知，限制映射 $\mu'|_{S^3}:\ S^3\cong S^3\times\{*\}\to S^2$ 是霍普夫纤维化。因此，μ' 的伴随映射记作 $\mathrm{ad}_{\mu'}:\ S^3\to\mathrm{aut}_1(S^2)$，它是以下非零元素的一个代表元

$\pi_3(\mathrm{aut}_1(S^2))\otimes\mathbb{K}$。因此，由于 Γ_1的单射性，我们得到一个非零同调类 $\Gamma_1(\partial^{-1}(\mathrm{ad}_{\mu'}))$，它由以下复合所诱导的态射的取值获得

$$S^2\times S^2 \xrightarrow{\partial^{-1}(\mathrm{ad}_{\mu'})\times 1} \Omega\,\mathrm{aut}_1(S^2)\times S^2 \xrightarrow{\quad g\quad} LS^2$$

在 $S^2\times S^2$ 的基本类处的同调中。

Acknowledgement

我们谨向 Katsuhiko Kuribayashi、Shun Wakatsuki 和 Toshihiro Yamaguchi 致谢，感谢他们提供宝贵的讨论和建议。

References

[1] D. Burghelea, Z. Fiedorowicz, W. Gajda, de Rham 代数和自由回路空间的 Hochschild 同调与循环同调中的 Adams 运算。K 理论 4, No.3, 269–287 (1991). [2] Y. Berest, A. C. Ramadoss, Y. Zhang, 弦拓扑的霍奇分解。Forum Math. Sigma, 9:Paper No. e33, 31, 2021.[3] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, 弦拓扑的一个同伦论实现。Math. Ann. 324 (2002), no. 4, 773–798. [4] M. Chas and D. Sullivan, 弦拓扑。arXiv preprint math/9911159 (1999). [5] Y. F´elix, S. Halperin and J.-C. Thomas, 有理同伦论。Vol. 205. Springer Science & Business Media, 2012.[6] Y. F´elix and J. C. Thomas, 自等价单群与自由回路空间。Proc. Amer. Math. Soc. 132 2004 1, 305 312 ( ), no. - Y. Felix [7] and J.-C. Thomas, 弦拓扑中的有理 BV 代数。Bulletin de la Soci´et´e Math´ematique de France 136. No.2 (2008): 311–327. [8] D. Fiorenza and N. Kowalzig, 循环同调与负循环同调上的高阶括号。Int. Math. Res. Not., 2020 (23): 9148–9209, 2020. [9] E. Getzler. 巴塔林–维尔科维斯基代数与二维拓扑场论。Communications in Mathematical Physics, 159(2):265—285, 1994. [10] K. Kuribayashi, T. Naito, S. Whakatsuki, T. Yamaguchi. 自由回路空间上的卡当演算系，预印本，arXiv:2207.05941. [11] H. Tamanoi. 环同调中 BV 恒等式的一个同伦论证明，预印本，arXiv:0706.1277v1.[12] M. Vigu´e-Poirrier, 交换微分分次代数的循环同调分解，K-Theory 4 (1991), p.399-410. [13] M. Vigu´e-Poirrier and D.Sullivan, 闭测地线问题的同调理论，J. Differential Geometry, 11(4) (1976), 633–644. [14] A. Voronov. 泛代数札记，《数学与理论物理中的图和模式》，81—103，Proc. Sympos. Pure Math., 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

Nippon Institute of Technology, 4-1 Gakuendai, Miyashiro-machi, Minamisaitama-gun, Saitama, 345-8501 Japan*Email address*: naito.takahito@nit.ac.jp