arXiv:2305.01288v1 [math.AP] 2 May 2023

非紧致调和流形和 Damek-Ricci 空间上的尖锐 Hardy 型不等式

Florian Fischer[1] 和 Norbert Peyerimhoff[2]

[1]波茨坦大学数学研究所，德国，florifis@uni-potsdam.de[2]杜伦大学数学科学系，英国，norbert.peyerimhoff@durham.ac.uk

2023年5月3日

摘要

我们证明了非紧致调和流形上线性拉普拉斯算子和拟线性拉普拉斯算子的一系列尖锐 Hardy型不等式，并特别关注 Damek-Ricci 空间的情形。我们的方法运用了 Devyver/Fraas/Pinchover 和 Devyver/Pinchover 所发展的最优性理论，并受到 Berchio/Ganguly/Grillo 以及 Berchio/Ganguly/Grillo/Pinchover 关于双曲空间的相应结果的启发。

MSC 2020：26D10, 31C12, 58J60

关键词：调和流形、Damek-Ricci 空间、最优Hardy不等式、Poincar´e-Hardy 不等式、 p-拉普拉斯算子

目录

1 引言 **2**

2 Poincar´e-Hardy 型不等式及其应用 6

2.1 最优性理论的一些背景.6 2.2 Poincar´e-Hardy 型不等式的证明.8 2.3 Poincar´e-Hardy 型不等式的应用 . . . . . 13 2.3.1 Heisenberg-Pauli-Weyl不确定性原理 . . . . . 13 2.3.2 Poincar´e-Rellich 型不等式.14

3 主要结果的变体 15

3.1 一族 Hardy型不等式.15 3.2 加权 Hardy 型不等式.18 3.3 P-拉普拉斯算子的一个 Poincar´e-Hardy 型不等式 20

4 P-拉普拉斯算子的另一个 Poincar´e-Hardy 型不等式 23
4.1 非紧致调和流形上 P-Laplace 算子的格林函数.23 4.2 基于 P-格林函数的 P-Laplace 算子的 Poincar´e-Hardy 型不等式.25

A 非紧致调和流形和 Damek-Ricci 空间 29

1 引言

本文旨在为非紧致调和流形，尤其是 Damek-Ricci 空间上的 Laplace 算子推导 Hardy 型不等式，并以 Devyver/Fraas/Pinchover [18], Devyver/Pinchover [19], Berchio/Ganguly/Grillo [8] 以及 Berchio/Ganguly/Grillo/Pinchover [9]的研究为范例，探讨相关应用。后两篇论文主要关注实双曲空间$\mathbb{H}^n = \mathbb{H}^n(\mathbb{R})$，其中 $n \geq 3$。出发点是经典的欧几里得 Hardy 不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi(x)|^2 \, dx \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi^2(x)}{|x|^2} \, dx$$

对于所有光滑且紧支撑的函数 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $n \geq 3$ （例如，参见 [6, 推论 1.2.6] ，适用于 $p = 2$）。G. Carron 将这一不等式推广至任意 n 维 Cartan-Hadamard 流形 X （即曲率非正的完备单连通黎曼流形 (X, g)）[13, 命题 2.1] ，其中以 $d(o,x)^2$, 替代 $|x|^2$ ；这里 $o \in X$ 是任意一点（极点），而 d 是 X 上的黎曼距离函数。

[8] 中的一个主要结果是以下针对 n 维实双曲空间 $\mathbb{H}^n = \mathbb{H}^n(\mathbb{R})$ 的 Poincaré-Hardy 不等式 ´，它可视为 Carron 针对 Cartan-Hadamard 流形的 Hardy 不等式在这一特殊情形下增加一项后的变体（见 [8, 定理 2.1]）：给定 $n \geq 3$ 和任意一点 $o \in \mathbb{H}^n$，有

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla \phi(x)|^2 dx \geq \lambda_0(\mathbb{H}^n) \int_{\mathbb{H}^n} \phi^2(x) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\phi^2(x)}{d(o,x)^2} dx + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\phi^2(x)}{\sinh^2 d(o,x)} dx \quad (1.1)$$

对所有函数 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{H}^n)$。这里， $\lambda_0(\mathbb{H}^n)$ 表示（正）拉普拉斯算子 $-\Delta = -\mathrm{div} \circ \nabla$ 在 $\mathbb{H}^n$ 上的谱底，其已知为 $\frac{(n-1)^2}{4}$。若忽略附加项 $\frac{(n-1)(n-3)}{4} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\phi^2}{\sinh^2 d(o,x)} dx$, ~~则可以将这一变分理解为~~包含一个额外的 L^2-范数 $\|\phi\|_{\mathbb{H}^n}^2$ ，其系数为 $\lambda_0(\mathbb{H}^n)$，代价是“Hardy”项 $\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\phi^2}{d_o^2(x)} dx$ 前的常数有所降低。此外， [8] 证明了不等式 (1.1) 中的常数无法进~~一步~~改进。

实双曲空间 $\mathbb{H}^n = \mathbb{H}^n(\mathbb{R})$具有恒定的截面曲率 -1，是非紧致秩一对称空间的例子。除此之外，

还有（实 $2n$ 维的）复双曲空间 $\mathbb{H}^n(\mathbb{C})$、（实 $4n$ 维的）四元数双曲空间 $\mathbb{H}^n(\mathbb{H})$，以及基于八元数 $\mathbb{O}$ 的（实 16 维）凯莱平面 $\mathbb{H}^2(\mathbb{O})$。除“简单”的平坦空间 $\mathbb{R}$ 外，这些空间构成了所有非紧致秩一对称空间这一类；它们都是卡当–哈达玛流形，截面曲率均位于区间 $[-4,-1]$ 内。

所有这些空间也是非紧致调和流形。对调和流形的一种谱几何刻画是：它们是完备的黎曼流形，且其上所有调和函数 ϕ（也就是说 $\Delta\phi=0$）都满足平均值性质（也就是说 $\phi(x_0) = \frac{1}{\text{体积}(S_r(x_0))}\int_{S_r(x_0)}\phi(x)\,dx$ 对所有 $x_0\in X$以及以 x_0 为中心、半径为 $r>0$ 的球面 $S_r(x_0)$ 均成立）。人们普遍认为（这被称为所谓的“Lichnerowicz猜想”），所有单连通调和流形都应当是欧几里得空间或秩一对称空间。Z. I. Szab{o} [45] 在紧致情形下证明了这一点；然而，1992 年 E. Damek 和 F. Ricci 发现（见 [15, 16]），一整族非紧致、非欧几里得且通常非对称的齐性黎曼流形实际上也是调和流形，这一发现令人惊讶（因此推翻了该猜想在非紧致情形下的成立）。这些空间此前已有研究（参见 [3, 4, 5, 12, 16, 22, 34, 36, 43, 44]，其中选列了探讨其各种调和分析性质的论文），如今它们被称为 Damek-Ricci 空间。它们是 Heisenberg 型二步幂零群 N 的可解扩张 NA（由一个一维阿贝尔群 A扩张而成），并带有左不变度量。它们与一对参数（p，q）相关，这对参数分别是其底层幂零李代数中特定子空间的维数 N。虽然参数（p，q）并不总能唯一确定 Damek-Ricci 空间，但对于具有这些参数的任意 Damek-Ricci 空间，我们都将使用记号 $X^{p,q}$（由于这种不唯一性，这里稍微滥用了记号）。

Damek-Ricci 空间 X^{pq} 是维数为 $n=p+q+1$、截面曲率位于区间 $[-1,0]$ 内的齐性 Cartan-Hadamard 流形。除度量乘以常数因子 4 的缩放外，除法代数 $\mathbb{K}=\mathbb{C}\,\mathbb{H}\,\mathbb{O}$ 对应的秩一对称空间 $\mathbb{H}^n(\mathbb{K})$ 都是参数 (p,q) 取特殊值的 Damek-Ricci 空间。事实上，我们可以写成（度量缩放因子 4 除外）：$\mathbb{H}^n(\mathbb{C}) = X^{2(n-1),1}$，$\mathbb{H}^n(\mathbb{H}) = X^{4(n-1),3}$，以及 $\mathbb{H}^2(\mathbb{O}) = X^{8,7}$。虽然实双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 也可以视为带左不变度量的可解李群NA，但它们并非 Damek-Ricci 空间，因为 $\mathbb{H}^n$ 的群N 是阿贝尔群，而非 Damek-Ricci 空间所要求的二步幂零群。Damek-Ricci 空间的最小维数为 4，其可能的参数值 (p,q) X^{pq} 列于下表，其中 $a\ge 0$和 $b\ge 1$（例如参见 [43, 第 64] 页）。这些取值的推导可追溯至 [23, 第 150] 页，其依据是 Clifford 代数的表示理论。

q	$8a+1$	$8a+2$	$8a+3$	$8a+4$	$8a+5$	$8a+6$	$8a+7$	$8a+8$
p	$2^{4a+1}b$	$2^{4a+2}b$	$2^{4a+2}b$	$2^{4a+3}b$	$2^{4a+3}b$	$2^{4a+3}b$	$2^{4a+3}b$	$2^{4a+4}b$

最低维的非对称 Damek-Ricci 空间是 7 维空间 $X^{4,2}$。J. Heber [21] 证明，任何非紧致齐性调和流形必定是欧几里得空间、实双曲空间，或（对称或非对称的）

Damek-Ricci 空间。目前尚不清楚是否还存在其他非紧致调和流形（它们必然是非齐性的），这是一个具有挑战性的开放问题。

我们的主要结果是，针对 $\mathbb{H}^n$ 的 Poincar´e-Hardy 不等式 (1.1) 可推广到 Damek-Ricci 空间，且常数有明确的表达式：

主要定理 A. 设 $X^{p,q}$ 是带有极点 $o \in X^{p,q}$ 的 Damek-Ricci 空间，且 $r = d(o,\cdot)$。那么，对所有 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,q})$，有

$$\int_{X^{p,q}} |\nabla\phi|^2 dx \geq \lambda_0(X^{p,q}) \int_{X^{p,q}} \phi^2 dx + \frac{1}{4}\int_{X^{p,q}} \frac{\phi^2}{r^2} dx + \frac{p(p+2q-2)}{16}\int_{X^{p,q}} \frac{\phi^2}{\sinh^2(r/2)} dx + \frac{q(q-2)}{4}\int_{X^{p,q}} \frac{\phi^2}{\sinh^2(r)} dx. \quad (1.2)$$

此外，该不等式右侧的常数是最优的，若要改进其中某个常数，就只能以牺牲其他常数为代价。

本文还将讨论该不等式的两种应用，以及关于其中常数的若干变体。

我们简要讨论这一结果背后的论证。在带有极点 $o \in X$ 的单连通非紧致调和流形 (X, g) 的情形下，径向函数 $h(r)$ 的拉普拉斯算子 $\Delta = h(d(o,x))$ 仍然是径向函数，且其表达式为

$$\Delta h(r) = h''(r) + \frac{f'(r)}{f(r)} h'(r), \quad (1.3)$$

其中，$f(r)$ 是调和流形的体积密度。对于一般的黎曼流形 (X, g)，以 $o \in X$ 为中心的正规坐标中的体积密度 $f_o(x) = \sqrt{\det g_{ij}(p)}$ 既不是径向函数，也不依赖于中心 $o \in X$。在调和流形 (X, g) 中，体积密度是径向函数 $f(r)$，且所有半径相同的球面具有相同的体积。我们有

$$\mathsf{vol}(S_r(x)) = \omega_n f(r),$$

其中，ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的体积。但请注意，这并不意味着调和流形就是 [8, 第 4] 节所述的黎曼模型。事实上，非紧致调和流形只有在它是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 或双曲空间 $\mathbb{H}^n$时，才是这样的黎曼模型。

不等式 (1.2) 是以下适用于任意非紧致调和流形的一般 Hardy 型不等式的推论：

主定理 B. 设 (X, g) 是一个体积密度为 f 的非紧致调和流形。设 $o \in X$ 为一个极点，且 $r = d(o,\cdot)$。那么，对所有$\phi \in C_c^\infty(X)$，

$$\int_X |\nabla\phi|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_X \frac{\phi^2}{r^2} dx + \frac{1}{4}\int_X \frac{2f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{f^2(r)}\,\phi^2 dx. \quad (1.4)$$

不等式 (1.2) 随即由 (1.4) 得出，这可通过 Damek-Ricci 空间 $X^{p,q}$ 的体积密度的以下显式表达式看出（例如参见 [43,定理 10(ii)]）：

$$f(r) = 2^{p+q}(\sinh(r/2))^{p+q}(\cosh(r/2))^{q} = 2^{p}(\sinh(r/2))^{p}(\sinh r)^{q}. \tag{1.5}$$

这意味着

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = \frac{p}{2}\coth(r/2) + q\coth r = \frac{p+2q}{2}\coth(r/2) - \frac{q}{\sinh(r)}, \tag{1.6}$$

并且对于 $X^{p,q}$ 中的径向函数 $h(r)$，有，

$$\Delta h(r) = h''(r) + \left(\frac{p}{2}\coth(r/2) + q\coth r\right) h'(r).$$

由于 $\coth(x) \geq 1/x$ 且 $\sinh x \geq x$，由 (1.6) 可得，对于所有 $r > 0$，均有

$$\frac{f'(r)}{f(r)} \geq \frac{p+q}{r}. \tag{1.7}$$

此外，算子 $-\Delta$ 在 $X^{p,q}$ 上的 L^2 谱为 $\sigma(-\Delta) = [\rho^2, \infty)$，其中 $\rho = \frac{p+2q}{4}$（例如参见 [36, 备注 2.2(iii)]）。因此，我们有 $\lambda_0(X^{p,q}) = \left(\frac{p+2q}{4}\right)^2$。由于 $X^{p,q}$ 的 Cheeger常数 为 $h(X^{p,q}) = 2\rho = \frac{p+2q}{2}$（参见 [36, 备注 2.2(i)]），这意味着 Cheeger不等式 $\lambda_0(X^{p,q}) = h(X^{p,q})^2$ 在此情形下成立，且取等号。事实上，这对任意非紧致调和流形（X, g）均成立（参见 [37, 推论 5.2]），并且 Cheeger 常数与其他几何量一致，例如地平线的（常）平均曲率或指数体积增长（参见 [37,定理 5.1]）。

对于希望进一步了解调和流形和 Damek-Ricci 空间的读者，我们在附录中提供了相关信息，并介绍了作为带有左不变度量的可解李群的实双曲空间 $\mathbb{H}^n$。

此外，自一百多年前 Hardy 和 Landau 关于 Hardy型不等式的开创性研究以来，这些不等式也被推广到更一般的拟线性情形 $P > 1$。前面讨论的不等式对应于线性情形 $P = 2$。我们在第3.3小节中展示了与 $P \geq 2$相关的不等式。

本文结构如下：下一节中，我们将陈述并证明上述主要定理。随后，我们简要展示两个著名的应用：Heisenberg-Pauli-Weyl不确定性原理的一个版本，以及一个 Rellich型不等式。第 3 节中，我们对主要结果证明的部分内容作出变动，得到一系列紧密相关的尖锐 Poincaré-Hardy 型不等式。第一种变动展示了在不等式的 Poincaré 部分中，略微偏离谱底端所产生的影响；第二种变动着眼于加权版本，第三种则针对 P-拉普拉斯版本。第 4 节中，我们利用

P-格林函数，给出另一个关于 -拉普拉斯的 Poincare-Hardy 型不等式。这里重点讨论相应 Hardy 权的渐近行为。至此，本文主体部分结束。附录中，我们简要介绍有关调和流形和 Damek-Ricci 空间的补充信息。

2 Poincar´e-Hardy 型不等式及其应用

本节讨论适用于所有 Damek-Ricci 空间的 [8, 定理 2.1] 的一个类似结果。在陈述这一结果之前，我们先介绍一些背景知识。这里主要参考文献为 [18]。虽然这些概念在更一般的 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间中也成立，但我们只考虑光滑情形。

2.1 最优性理论的一些背景

从现在起，我们始终假设 (X, g) 是一个非紧黎曼流形。我们还将研究其关联的 Schr¨odinger 算子 $-\Delta + V$（势函数为 $V \in C^\infty(X)$）及其在$C_c^\infty(X)$上的对应能量泛函 E_V，它们是通过以下方式定义的二次型:

$$E_V(\phi) := \int_X |\nabla\phi|^2 + V|\phi|^2 dx.$$

若 E_V 在 X 中非负，则记作 $E_V \geq 0$ in X，即对所有 $\phi \in C_c^\infty(X)$，均有 $E_V(\phi) \geq 0$。

令 $\Omega \subset X$ 为一个区域（即非空连通开子集）。若函数 $u \in C^\infty(\Omega)$ 满足 $(-\Delta+V)u = 0$，则称其为关于算子 $-\Delta + V$ 的解；若满足 $(-\Delta+V)u \leq 0$，则称其为次解；若在 Ω 中满足 $(-\Delta+V)u \geq 0$，则称其为上解。此外，若存在紧集 $K \subset X$，使得函数 $u \in C^\infty(\Omega)$ 在 $\Omega \setminus K$ 中满足 $(-\Delta + V)u = 0$，则称其在无穷远处为（上）解（相应地，若在 $X \setminus K$ 中满足 $(-\Delta+V)u \geq 0$）。此外，若存在包含 o 的开集 $O \subseteq X$，使得 $u \in \Omega$ 在 $(\Omega \cap O) \setminus \{o\}$ 中满足 $(-\Delta + V)u = 0$，则称其为 $o \in X$ 附近的解。

令 $W \geq 0$ 属于 X。于是 Hardy 型不等式可写为

$$E_V(\phi) \geq \int_X W|\phi|^2 dx \qquad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(X).$$

最优性理论的一个目标是——粗略地说——使 W 尽可能大，同时具有较大的支撑集（参见 [1, 第 6] 页，此问题最初是在那里提出的）。基于这一思路，Devyver、Fraas 和 Pinchover 给出了最优 Hardy 权重的定义，见 [18, 定义 2.1、4.8 和 4.10]。

定义 2.1. 设 (X, g) 是一个非紧黎曼流形，并且 $o \in X$。设 $E_V \geq 0$ in X，且 $W \geq 0$ 是一个非平凡函数，使得下列■

Hardy 型不等式成立：

$$E_V(\phi) \geq \int_{X\setminus\{o\}} W|\phi|^2 dx \qquad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(X\setminus\{o\}).$$

则如果在 $X\setminus\{o\}$ 中，W 被称为 Schr¨odinger 算子 $-\Delta+V$ 的最优 Hardy 权重。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$1. $-\Delta+(V-W)$ 在 $X\setminus\{o\}$ 中是临界的，也就是说，对于任意满足 $W \neq W$ 的 $W \geq W$，Hardy 型不等式

$$E_V(\phi) \geq \int_{X\setminus\{o\}} \widetilde{W}|\phi|^2 dx \qquad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(X\setminus\{o\})$$

不成立。这等价于以下结论（例如参见 [30, 引理 2.11]）：存在一个唯一的（相差一个乘法常数）正超解，满足 $-\Delta u+(V-W)u=0$ 在 $X\setminus\{o\}$ 上成立。这样的函数也是一个解，被称为（Agmon）基态 u_{Agmon}。

2. $-\Delta+(V-W)$ 关于 W 是零临界的，即，我们有$u_{\text{Agmon}} \notin L^2(X\setminus\{o\}, W dx)$。

最优 Hardy 权重的原始定义还要求满足一个称为无穷远处的最优性的条件（即 [18], 中定义 2.1 的 (b) 部分，或参见 [30, 定义 2.14]）。近期，Kovaˇr´ık 和 Pinchover 在 [30, 推论 3.7] 中证明，在我们的设定下，零临界性蕴含无穷远处的最优性。因此，无须给出无穷远处的最优性的定义，因为条件 2 已涵盖这一点。

现在我们可以给出本节关于 Damek-Ricci 空间的主要结果。它类似于 [8, 定理 2.1]，后者讨论了实双曲空间的情形。请注意，Damek-Ricci 空间不包括实双曲空间，且其最小维数为 4。我们的证明受到 [8]第 4 节中证明的启发。

定理 2.2（Damek-Ricci 空间上的 Poincar´e-Hardy 型不等式）。设$X^{p,q}$ 为一个 Damek-Ricci 空间，$o \in X^{p,q}$ 为一个极点，且 $r = d(o,\cdot)$。对于所有 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,q})$，有

$$\begin{aligned}&\int_{X^{p,q}} |\nabla\phi|^2 dx - \lambda_0(X^{p,q}) \int_{X^{p,q}} |\phi|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{4}\int_{X^{p,q}} \frac{|\phi|^2}{r^2} dx + \frac{p(p+2q-2)}{16}\int_{X^{p,q}} \frac{|\phi|^2}{\sinh^2(r/2)} dx + \frac{q(q-2)}{4}\int_{X^{p,q}} \frac{|\phi|^2}{\sinh^2(r)} dx.\end{aligned}$$

此外，算子 $-\Delta+(V-W)$ 在 $X^{p,q}$ 上，满足

$$V(r) := -\lambda_0(X^{p,q}) \quad \textit{and} \quad W(r) := \frac{1}{4r^2} + \frac{p(p+2q-2)}{16\sinh^2(r/2)} + \frac{q(q-2)}{4\sinh^2(r)}$$

在 $X^{p,q}\setminus\{o\}$ 中是临界的。特别地，不存在 $\widetilde{W}(r) \geq \frac{1}{4r^2} + \frac{p}{16}(p+2q-2)\sinh^2(r/2) + q(q-2)4\sinh^2(r)$，$\widetilde{W} \neq W$，使得

$$\int_{X^{p,q}} |\nabla\phi|^2 dx - \lambda_0(X^{p,q}) \int_{X^{p,q}} |\phi|^2 dx \geq \int_{X^{p,q}} \widetilde{W}|\phi|^2 dx$$

对所有 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,q}\setminus\{o\})$ 均成立。

此外，若我们选择 $W_1(r) = \frac{1}{4r^2}$ 作为权，则该权相对于算子而言是最优的

$$-\Delta - \lambda_0(X^{p,q}) - \frac{p(p+2q-2)}{16\sinh^2(r/2)} - \frac{q(q-2)}{4\sinh^2(r)}.$$

定理 2.2 的证明将在下一小节给出，并基于一个称为 Khas'minskii 型判据的结果。在证明过程中，我们针对更一般的非紧致调和流形情形建立一个 Hardy 型不等式。第2.3小节介绍这一结果的应用：不确定性原理和 Poincaré-Rellich 型不等式。

2.2 Poincaré-Hardy 型不等式的证明

为证明定理 2.2，我们将使用以下结果——称为 Khas'minskii 型判据。这是命题 6.1 的一个变体 [18]，，另请参见[24, 引理 9.2。6]。事实上，这是一个等价命题（见 [2, 定理 1]），但这里我们只需要其中一个方向。

我们从一个非紧黎曼流形 X 及其上选定的一点$o \in X$出发。我们称 o 为 X的一个极点。

我们还需要一些定义，参见 [18, 定义 4。4]，以及 [18, 定义 11。2]: 设 K 是 $X\setminus\{o\}$的一个紧子集，且 u是定义在 $X\setminus(\{o\}\cup K)$上的正函数，并且是 $X\setminus(\{o\}\cup K)$中方程 $(-\Delta+V)u=0$的解。若对于每个边界光滑的紧子集 $K'\subseteq X\setminus\{o\}$（满足 $K\subseteq \mathrm{int}(K')$），以及每个在 $X\setminus(\{o\}\cup K')$中的正超解 $v\in C(X\setminus(\{o\}\cup K'\cup\partial K'))$（满足$u\leq v$在 $\partial K'$中），都有 $u\leq v$在 $X\setminus(\{o\}\cup K')$中，则称函数 u 在无穷远处具有最小增长。

设 u 是定义在极点 $o\in X$ 的去心邻域 Ω 中的正函数，并且是 $\Omega\setminus\{o\}$ 中方程 $(-\Delta+V)u=0$ 的解。若对于 o 的任意去心邻域中的正超解 v，都存在常数 $C>0$，使得 $u\leq Cv$ 在 o 的去心邻域 $\Omega'\subseteq\Omega$ 中成立，则函数 u 在 o 处具有最小增长。

全局极小解是在 $X\setminus\{o\}$ 上的正函数，它是 $X\setminus\{o\}$ 中方程 $(-\Delta+V)u=0$ 的解，并且同时具有无穷远处的最小增长和 o。

命题 2.3（Khas'minskii 型判据）。设 K 是 X 的一个紧子集。若 u 和 v_∞ 是 $X\setminus K$ 上满足方程 $(-\Delta+V)u=0$ 的两个正函数，且该方程在 $X\setminus K$ 中成立，并且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{u(x)}{v_\infty(x)}=0,$$

那么 u 在无穷远处具有最小增长。

若 u 和 v_0 是极点 o 的去心邻域 Ω 中的两个正函数，且它们是 $\Omega \setminus \{o\}$ 中 $(-\Delta + V)u = 0$ 的解，并且

$$\lim_{x \to o} \frac{u(x)}{v_0(x)} = 0,$$

那么 u 在 o 处具有最小增长。

证明。第一部分是 [18], 中的命题 6.1，本质上是将最大值原理应用于该空间的一个穷举。第二部分则由对所引命题证明中同一论证的略微改编得出。

□

定理 2.2 的证明用到了一些关于径向函数的一般性显式计算。我们将在下列引理中列出这些计算。我们主要在调和流形中进行讨论，并尽可能晚地使用 Damek-Ricci 空间上的体积密度的显式形式。

引理 2.4。设 (X, g) 是一个体积密度为 f, $o \in X^{p,\ q}$ 且具有极点 $r = d(o, \cdot)$ 的非紧致调和流形，并且 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。那么

$$\Phi(r) = r^{\alpha} f^{\beta}(r)$$

在 $X \setminus \{o\}$ 上满足

$$\Delta\Phi(r) = \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{r^2} + \alpha(2\beta+1)\frac{f'(r)}{rf(r)} + \beta\frac{f''(r)}{f(r)} + \beta^2\frac{(f'(r))^2}{f(r)^2} \right) \Phi(r).$$

特别地，若 $(\alpha, \beta) = (1/2, -1/2)$，则在 $X \setminus \{o\}$ 上有，

$$\Delta\Phi(r) = \left(\frac{(f'(r))^2 - 2f(r)f''(r)}{4f(r)^2} - \frac{1}{4r^2} \right) \Phi(r).$$

证明。为简便起见，在计算中省略自变量 r。求导可得

$$\Phi' = \alpha r^{\alpha-1} f^{\beta} + \beta r^{\alpha} f^{\beta-1} f'$$

and

$$\Phi'' = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} f^{\beta} + 2\alpha\beta r^{\alpha-1} f^{\beta-1} f' + \beta(\beta-1)r^{\alpha} f^{\beta-2}(f')^2 + \beta r^{\alpha} f^{\beta-1} f''.$$

利用 (1.3) 并将 Φ 代回拉普拉斯方程，得到

$$\Delta\Phi \;=\; \Phi'' + \frac{f'}{f}\Phi' \;=\; \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{r^2} + \frac{\alpha(2\beta+1)f'}{rf} + \frac{\beta f''}{f} + \frac{\beta^2(f')^2}{f^2} \right) \Phi. \quad \square$$

˘在主要结果的证明中，我们希望应用 Khas'minskii 型判据——命题 2.3。因此，我们需要找到另一个正解。下文将完成这一工作。

引理 2.5. 设 (X, g) 是一个体积密度为 f, $o \in X$ 以极点 $r = d(o, \cdot)$ 为中心，且 α, $\beta \in \mathbb{R}$ 的非紧致调和流形。此外，令

$$\Phi(r) = r^{\alpha} f^{\beta}(r).$$

设 h: $X \setminus \{o\} \to \mathbb{R}$ 为光滑径向函数，则在 $X \setminus \{o\}$ 上有

$$\begin{aligned}
&\Delta(\Phi h)(r) \\
&\quad - \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{r^2} + \frac{\alpha(2\beta+1)f'(r)}{rf(r)} + \frac{\beta f(r) f''(r) + \beta^2 (f'(r))^2}{f^2(r)} \right) (\Phi(r) h(r)) \\
&\qquad\qquad = \Phi(r) \left(h''(r) + \left(\frac{2\alpha}{r} + \frac{(2\beta+1)f'(r)}{f(r)} \right) h'(r) \right).
\end{aligned}$$

特别地，当 $(\alpha, \beta, h(r)) = (1/2, -1/2, \ln(r))$ 时，右端为零。

证明。在下文中，我们再次省略变量 r。根据乘积法则，有

$$\Delta(\Phi h) = \Phi \Delta h + h \Delta \Phi + 2\Phi' h'.$$

利用该法则和引理 2.4，可得

$$\Delta(\Phi h) - \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{r^2} + \frac{\alpha(2\beta+1)f'}{rf} + \frac{\beta f''}{f} + \frac{\beta^2 (f')^2}{f^2} \right) (\Phi h) = \Phi \Delta h + 2\Phi' h'.$$

再次利用 h 是径向函数，即 $\Delta h = h'' + \frac{f'}{f} h'$，以及

$$\Phi' = \alpha r^{\alpha-1} f^{\beta} + \beta r^{\alpha} f^{\beta-1} f' = \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta f'}{f} \right) \Phi,$$

可得

$$\Phi \Delta h + 2\Phi' h' = \Phi \left(h'' + \left(\frac{2\alpha}{r} + \frac{(2\beta+1)f'}{f} \right) h' \right).$$

这证明了陈述的第一部分。另一断言可通过简单计算得出。

□

最后，我们还需要以下引理，它是 Agmon-Allegretto-Piepenbrink 定理的一个特例，参见 [39, 定理 2.3]，另见引理 3.6。我们指出，下面引理中的蕴含实际上是一个等价关系，即能量泛函的非负性也意味着存在一个正的（超）解。

引理 2.6（参见 [17, 定理 1.5.12]）。设 $\Omega \subset X$ 是黎曼流形 (X, g) 中的一个区域，$H := -\Delta + V - W$，且 $\Phi \in C^{\infty}(\Omega)$ 是 Ω 上 $H\Phi = 0$ 的正解。那么，对于所有 $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \geq \int_{\Omega} (W - V) \phi^2 dx.$$

证明。设 $\phi = \Phi\psi$，其中 $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$。于是由格林公式可得，

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx \geq \int_\Omega \langle \nabla(\psi^2\Phi), \nabla\Phi\rangle dx = -\int_\Omega \psi^2\Phi(\Delta\Phi)dx = \int_\Omega (W-V)\phi^2 dx.$$

□

˘我们将前面的引理与 Khas'minskii 型判据联系起来，从而在一般调和流形上得到如下 Hardy 型不等式，这就是引言中的主定理 B。

定理 2.7（调和流形上的 Hardy 型不等式）。设 (X, g) 是一个体积密度为 $f = f(r)$ 的非紧致调和流形，$o \in X$ 为一个极点，且 $r = d(o, \cdot)$。则，在 X 上的薛定¨谔算子 $-\Delta + (V - W)$ 满足

$$V(r) := \frac{(f'(r))^2 - 2f(r)f''(r)}{4f^2(r)} \quad and \quad W(r) := \frac{1}{4r^2}$$

在 $X \setminus \{o\}$ 中是临界的，其基态为 $\sqrt{r/f(r)}$。此外，就算子 $-\Delta + V$ 而言，权 $W(r) = \frac{1}{4r^2}$ 在 $X \setminus \{o\}$ 中是最优的。

此外，对于所有 $\phi \in C_c^\infty(X)$，我们有

$$\int_X |\nabla\phi|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_X \frac{\phi^2}{r^2}dx + \frac{1}{4}\int_X \frac{2f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{f^2(r)} \cdot \phi^2 dx. \tag{2.1}$$

证明。证明的第一部分采用与 [18, 定理 6.2] 相同的思想，并作必要的修改。第二部分受到 [8] 的启发。细节如下：

记 $H := -\Delta + V - W$。将引理 2.4 和引理 2.5 应用于 $(\alpha, \beta) = (1/2, -1/2)$，可知 $\Phi(r) = r^{1/2}f^{-1/2}(r)$ 以及 $\Phi(r)\cdot\ln(r)$ 是关于 H 在 $X \setminus \{o\}$ 上的解。此外，显然有

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\Phi(r)}{\Phi(r)\ln(r)} = 0.$$

˘根据 Khas'minskii 型判据、命题 2.3，我们得到 Φ 是 X 中无穷远处具有最小增长的正解。

通过相同的论证，并用 $-\Phi(r)\ln(r)$ 代替 $\Phi(r)\ln(r)$，可知 Φ 在 $X \setminus \{o\}$ 中的 o 附近具有最小增长。

由于 Φ 是 $X \setminus \{o\}$ 中的解，并且在无穷远处以及o附近具有最小增长，因此它是 $X \setminus \{o\}$ 中的全局极小解。根据 [40, 定理 4.2 和 5.8]，它必定是 $X \setminus \{o\}$ 中的（Agmon）基态，即 $X \setminus \{o\}$ 中 H 的唯一正超解。因此，H 在 $X \setminus \{o\}$ 中是临界的。

现在令 $W(r) = 1/(2r)^2$。由于

$$\|\Phi\|^2_{L^2(X\setminus\{o\}, Wdx)} = \omega_n \int_0^\infty (r^{1/2}f(r)^{-1/2})^2 f(r)\frac{dr}{(2r)^2} = \infty,$$

我们得出，$-\Delta + V$相对于 W是零临界的，因此 W是 $X \setminus \{o\}$中 $-\Delta + V$的最优 Hardy 权重。

不等式（2.1）可如下理解：由于 Φ 是 $X\setminus\{o\}$上 $H\Phi=0$ 的严格正解，根据引理 2.6，我们在 $C_c^\infty(X\setminus\{o\})$ 上得到了所需的不等式。接下来，我们简要解释如何将不等式从$C_c^\infty(X\setminus\{o\})$ 推广到 $C_c^\infty(X)$（这是一个标准论证，但我们未能在薛定谔算子情形中找到合适的参考文献；对于 p-拉普拉斯算子，见 [14,附录 A]）：根据 [40, 定理 4.5]，，$\{o\}$ 的容量为零，即存在 $C_0^\infty(X)$ 中的一个序列 (ϕ_j)，使得 $0\le\phi_j\le 1$、$\phi_j=1$ 在 $\{o\}$ 的某个邻域内成立，并且 $\phi_j\to 0$ 在 $D_0(X)$ 中$=C_c^\infty(X)^{\|\cdot\|_0}$，其中 $|\cdot|_0$ 表示型范数。后者通过 $|\phi|_0^2$ 定义：$=E_V(\phi)+|\cdot|^2$。特别地，$E_V(\phi_j)\to 0$。令 $\psi_j:=(1-\phi_j)\psi$，其中 ψ 是 $C_c^\infty(X)$ 中的任意函数。现在，类似于 [14, 附录 A]中的论证，可以推出$\psi_j\to\psi$ 在 $D_0(X\setminus\{o\})$ 中成立：对势能部分使用控制收敛定理，然后进行适当调整即可（注意，其中最后一步只是再次应用 [40, 定理 4.5]）。 □

现在我们转而讨论 Damek-Ricci 空间，并明确计算项 $\frac{2ff''-(f')^2}{f^2}$。稍后我们还需要进行类似的计算，因此在此更一般地陈述。

引理 2.8. 设 $X^{p,q}$ 为一个 Damek-Ricci 空间，$o\in X^{p,q}$ 为一个极点，$r=d(o,\cdot)$。设 $f(r)$ 为 $X^{p,q}$的体积密度。那么，对于所有 a、$b\in\mathbb{R}$ 和 $r>0$，有

$$a\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2-b\frac{f''(r)}{f(r)}$$
$$=4(a-b)\lambda_0(X^{p,q})+\frac{q(q(a-b)+b)}{\sinh^2(r)}+\frac{p((a-b)(p+2q)+b)}{4\sinh^2(r/2)}.$$

证明。回顾

$$f(r)=2^{p+q}(\sinh(r/2))^{p+q}(\cosh(r/2))^q.$$

直接计算可得

$$f'(r)=\frac{f(r)}{2}\big((p+q)\coth(r/2)+q\tanh(r/2)\big).$$

and

$$f''(r)=\frac{f(r)}{4}\left(\big((p+q)\coth(r/2)+q\tanh(r/2)\big)^2-\frac{p+q}{\sinh^2(r/2)}+\frac{q}{\cosh^2(r/2)}\right).$$

此外，请注意，对于所有 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\frac{\alpha}{\sinh^2(r/2)}-\frac{\beta}{\cosh^2(r/2)}=\frac{\alpha-\beta}{\sinh^2(r/2)}+\frac{4\beta}{\sinh^2(r)}$$

and

$$\big(\alpha\coth(r/2)+\beta\tanh(r/2)\big)^2=(\alpha+\beta)^2+\frac{4\beta^2}{\sinh^2(r)}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sinh^2(r/2)}.$$

因此，

$$a\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2 - b\frac{f''(r)}{f(r)} = \frac{(a-b)(p+2q)^2}{4} + \frac{q(q(a-b)+b)}{\sinh^2(r)} + \frac{p((a-b)(p+2q)+b)}{4\sinh^2(r/2)}.$$

利用 $\lambda_0(X^{p,\,q}) = (p+2q)^2/16$ 这一事实，结论得证。 □

注意，对于 $(a,b) = (1/4, 1/2)$ 这一特殊取值，由该引理可得：

$$\frac{2f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{4(f(r))^2} = \lambda_0(X^{p,q}) + \frac{q(q-2)}{4\sinh^2(r)} + \frac{p(p+2q-2)}{16\sinh^2(r/2)}. \tag{2.2}$$

引理 2.9. 设 $X^{p,\,q}$ 是一个 Damek-Ricci 空间，$o \in X^{p,\,q}$ 是一个极点，且 $r = d(o,\cdot)$。设 $f(r)$ 是 $X^{p,\,q}$ 的体积密度，并且

$$\Phi(r) = r^{1/2} f^{-1/2}(r).$$

则在 $X^{p,\,q} \setminus \{o\}$ 上有

$$-\Delta\Phi(r) - \lambda_0(X^{p,q})\Phi(r) = \left(\frac{p(p+2q-2)}{16\sinh^2(r/2)} + \frac{q(q-2)}{4\sinh^2(r)} + \frac{1}{4r^2}\right)\Phi(r).$$

证明。该引理的结论直接应用引理 2.4（取 $(\alpha,\beta) = (1/2, -1/2)$）以及 (2.2) 即可得到。 □

最后，我们可以证明定理 2.2。

定理 2.2 的证明。该结果可通过应用引理 2.9 和定理 2.7 得到。

□

2.3 Poincar´é-Hardy 型不等式的应用

本小节 посвящено Hardy 型不等式的两个著名应用，这些应用结合柯西-施瓦茨不等式可以很容易地得到：一个不确定性原理和一个 Rellich 型不等式。

2.3.1 海森堡-泡利-魏尔不确定性原理

这里，我们简要介绍著名海森堡-泡利-魏尔不确定性原理的一个移位版本。该原理的经典形式断言，粒子的位置和动量不可能同时被确定。有关更多信息，请参阅例如 [6, 第 1.6] 小节，其中详细讨论了欧几里得空间；[28, 29, 32]，其中讨论了黎曼流形；或 [9, 第 3] 节，其中介绍了双曲空间中的一个最新版本。

回顾一下，Damek-Ricci 空间的维数至少为 4，即 $p+q \geq 3$。

推论 2.10。设 $X^{p,\,q}$ 为一个 Damek-Ricci 空间，满足 $q \notin \{0,2\}$ 且 $p \neq 0$, $o \in X^{p,\,q}$ 为一个极点，且 $r = d(o,\cdot)$。那么，对于所有 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,\,q})$,

$$\left(\int_{X^{p,q}} |\nabla\phi|^2 dx - \lambda_0(X^{p,q}) \int_{X^{p,q}} \phi^2\right) \left(\int_{X^{p,q}} g(r) r^2 \phi^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}\left(\int_{X^{p,q}} \phi^2 dx\right)^2,$$

其中函数为 $0 < g < 1$。

事实上，推论中的函数 g 可显式写为

$$g(r) = \frac{1}{4r^2 W(r)} \tag{2.3}$$

with

$$W(r) := \frac{1}{4r^2} + \frac{p(p+2q-2)}{16} \frac{1}{\sinh^2(r/2)} + \frac{q(q-2)}{4} \frac{1}{\sinh^2(r)}.$$

注意，即使取最小的 $p \geq 2$ 和 $q = 1$，我们仍有 $W(r) > 1/(2r)^2$, 。

证明。由柯西-施瓦茨不等式和 Poincar´e-Hardy 型不等式（定理 2.2），可得

$$\begin{aligned}\left(\int_{X^{p,q}} \phi^2 dx\right)^2 &\leq \left(\int_{X^{p,q}} W\phi^2 dx\right)\left(\int_{X^{p,q}} \frac{\phi^2}{W} dx\right) \\ &\leq \left(\int_{X^{p,q}} |\nabla\phi|^2 dx - \lambda_0(X^{p,q}) \int_{X^{p,q}} \phi^2 dx\right)\left(\int_{X^{p,q}} \frac{\phi^2}{W} dx\right).\end{aligned}$$

由于 $1/W(r) = 4g(r)r^2$，我们得到所需的不等式。 □

2.3.2 一个 Poincar´e-Rellich 型不等式

接下来，我们证明一个平移的 Rellich型不等式。关于该不等式在不同情形下的发展历史和推广的更多细节，建议参阅论文[9, 25, 28, 29] 、专著 [6], 及其中的参考文献。

推论 2.11. 设 $X^{p,q}$ 为一个 Damek-Ricci 空间，满足 $q \notin \{0,2\}$ 和 $p \neq 0$, $o \in X^{p,q}$ 为一个极点，且 $r = d(o,\cdot)$。那么，对所有 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,q})$，均有

$$\int_{X^{p,q}} \frac{\phi^2}{16 g(r) r^2} dx \leq \int_{X^{p,q}} g(r) r^2 (-\Delta\phi - \lambda_0(X^{p,q})\phi)^2 dx,$$

其中函数 $0 < g < 1$ 来自 (2.3)。

证明。与前文一样，记

$$W(r) := \frac{1}{4r^2} + \frac{p(p+2q-2)}{16}\frac{1}{\sinh^2(r/2)} + \frac{q(q-2)}{4}\frac{1}{\sinh^2(r)}.$$

此外，令 $H := -\Delta - \lambda_0(X^{p,\,q})$。那么，再次根据 Poincar´e-Hardy 型不等式（定理 2.2）、格林公式和柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{X^{p,q}} W(r)\phi^2 dx &\le \int_{X^{p,q}} \phi H\phi dx \\ &\le \left(\int_{X^{p,q}} W(r)\phi^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{X^{p,q}} W^{-1}(r)(H\phi)^2 dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

由于 $1/W(r) = 4g(r)r^2$，我们得到所需的不等式。 □

3 主要结果的若干变体

本节旨在展示对某些参数进行扰动所产生的影响。在第一小节中，我们将考察把函数 Φ 从 $(r/f(r))^{1/2}$ 改为 $(r/f(r))^{1/2}\cdot(r/f^{1/(n-1)}(r))^{\gamma}$（其中$\gamma > 0$为某个数）所带来的结果。由此将得到一族新的临界 Schr¨odinger 算子，其中 γ 的影响仅体现在相应的常数上。

在第二小节中，我们将进一步考察 Hardy 不等式的加权版本，即考虑以下一族二次型

$$\int_{X^{p,q}} \frac{|\nabla\phi|^2}{r^{2\alpha}}dx, \qquad \alpha \ge 0, \phi \in C_c^\infty(X^{p,q}),$$

并展示 $\alpha > 0$ 的作用。从另一个角度来看，这个新的加权能量型是未加权能量型的一种特定的基态变换。

最后，在第三个小节中，我们改变算子，考察拟线性 P-拉普拉斯算子， $P \ge 2$。这里，经典的线性情形对应于 $P = 2$。

3.1 一族 Hardy型不等式

在上一节中，我们研究了调和流形上算子 $-\Delta - \frac{1}{4r^2}$ 的一个 Hardy 型定理。现在，我们将利用这一结果，为 $0 \le a \le 1$ 的算子 $-\Delta - \frac{a}{4r^2}$ 推导类似的不等式。本节的主要结果如下，它受到双曲空间上相应结果的启发，参见 [9, 定理 2.1]:

定理 3.1（调和流形上的一族 Hardy 型不等式）。设 (X, g) 是一个体积密度为 f, $o \in X$ 且具有极点 $r = d(o,\cdot)$ 的非紧致调和流形，其维数为 $n \ge 3$。设 $h\colon X\setminus\{o\} \to (0,\infty)$ 是一个满足 $h(r) \ge C_1 r$ 对所有 $r \ge 0$ 成立，且 $h(r) \sim C_2 r$ 的光滑径向函数。

对于某些正常数 C_1、$C_2 > 0$。那么，对于所有 $\phi \in C_c^\infty(X)$ 以及所有 $\gamma \in [0, 1/2]$,

$$\int_X |\nabla\phi|^2 dx \geq \frac{1-(2\gamma)^2}{4}\int_X \frac{\phi^2}{r^2}dx + \int_X \left(\left(\frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right) + \gamma\left(\frac{h''}{h} + (1+2\gamma)\frac{h'}{rh} - (1+\gamma)\left(\frac{h'}{h}\right)^2\right)\right)\phi^2 dx. \tag{3.1}$$

此外，带有 $-\Delta + V - W$ 的薛定谔算子 ¨

$$V(r) := -\left(\frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right) + \gamma\left(\frac{h''}{h} - (1+2\gamma)\frac{h'}{rh} - (1+\gamma)\left(\frac{h'}{h}\right)^2\right)$$

and

$$W(r) := \frac{1-(2\gamma)^2}{4r^2}$$

在 $X \setminus \{o\}$ 中是临界的，其基态为 $r^{1/2+\gamma} f^{-1/2} h^{-\gamma}$。此外，若选择 $W(r) = {}^{1-}_{4r^2}{}^{(2\gamma\ ^2)}$ 作为权， $0 \leq \gamma < 1/2$，则相对于 $-\Delta + V$， W 在 $X \setminus \{o\}$ 中是最优的。

注意，令 $\gamma = 0$，即可由定理 3.1 推出定理 2.2。

我们借助刘维尔比较定理推导出这一结果。为方便读者，现将其陈述如下（另见 [9, 定理 6.3]）。

命题 3.2（刘维尔比较原理， [38] 中的定理 1.7）。设 Ω 是非紧致 n 维黎曼流形中的一个区域。考虑 Ω 上由以下方式定义的两个薛定谔算子

$$H_i = -\Delta + V_i, \qquad i = 0, 1,$$

含有光滑势函数。此外，假设

1. H_0 在 Ω 中是临界的，其基态为 Φ;
2. H_1 在 Ω 中非负，且存在一个函数 $\Psi \in C^\infty(\Omega)$，满足 $H_1\Psi \leq 0$且 $\Psi_+ \neq 0$，其中 $\Psi_+(x) = \max\{\Psi(x)\ 0\}$。
3. 存在一个常数 $C > 0$ ，使得 $(\Psi_+)^2 \leq C(\Phi)^2$。

那么，算子 H_1 是临界的，其基态为 Ψ。

定理 3.1 的证明。令 h: $X \setminus \{o\} \to (0, \infty)$ 为一个光滑径向函数，满足 $h(r) \geq Cr$，其中 $C > 0$ 为某个正数。应用引理 2.5，取 $\tilde{\Phi} = r^\alpha f^\beta$ 和 $(\alpha, \beta) = (1/2 + \gamma, -1/2)$，得到

$$-\Delta(\tilde{\Phi}h^{-\gamma})(r) + \left(\frac{\gamma^2 - 1/4}{r^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)}\right)\tilde{\Phi}(r)h^{-\gamma}(r)$$
$$= -\left(\gamma(\gamma+1)\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2 - \gamma\frac{h''(r)}{h(r)} - \gamma(1+2\gamma)\frac{h'(r)}{rh(r)}\right)\tilde{\Phi}(r)h^{-\gamma}(r).$$

现在我们应用刘维尔比较原理，其中 $\Omega = X \setminus \{o\}$。

$$V_0 = -\frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)}$$

并且，对于 $\gamma \in [0, 1/2]$,

$$V_1 = \frac{\gamma^2 - 1/4}{r^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)} + \gamma(\gamma+1)\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2 - \gamma\frac{h''(r)}{h(r)} - \gamma(1+2\gamma)\frac{h'(r)}{rh(r)}.$$

令 $H_i = -\Delta + V_i$，其中 $i = 0, 1$。

我们已在定理 2.7 中证明，H_0 是临界的，其基态为 $\Phi = (r/f)^{1/2}$。在 Ω 上令 $\Psi = (r/f)^{1/2} \cdot (r/h)^\gamma > 0$，即 $\Psi_+ = \Psi$。根据构造，我们有 $H_1\Phi = 0$，并且由引理 2.6 可知，H_1 在 Ω 上非负。

由于 $\Psi/\Phi = (r/h)^\gamma \le 1/C_1$，刘维尔比较原理意味着 H_1 是临界的，其基态为 Ψ。随后，我们可以采用定理 2.2 证明中的相同逼近论证，从而对所有 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,q})$ 得到不等式 (3.1)，而不仅仅是对 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ 得到该不等式。

现在令 $W(r) = (1-(2\gamma)^2)/(2r)^2$ 和 $0 < \gamma < 1/2$。由于当 $r \to 0$ 时，$h(r) \sim C_2 r^{n-1}$，我们有 $\Psi \notin L^2(\Omega, W dx)$，因此 H_1 相对于 W 是零临界的。这意味着 W 是 $X \setminus \{o\}$ 中 H_1 的最优 Hardy 权重。 □

特殊地取 $h(r) = f^{1/(n-1)}(r)$ 可得以下结果；对于 Damek-Ricci 空间 $X^{p,q}$，该结果可视为算子 $-\Delta - \lambda$ 在 $\lambda \le \lambda_0(X^{p,q})$ 下的哈代型改进。

推论 3.3。设 (X, g) 是一个体积密度为 f，$o \in X$ 且有一个极点的非紧致调和流形，$r = d(o, \cdot)$，维数为 $n \ge 3$。那么，对所有 $\phi \in C_c^\infty(X)$ 以及所有 $\gamma \in [0, 1/2]$,

$$\int_X |\nabla\phi|^2 dx \ge \frac{1-(2\gamma)^2}{4}\int_X \frac{\phi^2}{r^2}dx + \frac{\gamma(1+2\gamma)}{n-1}\int_X \frac{f'}{f}\cdot\frac{\phi^2}{r}dx + \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{n-1}\right)\int_X \left(\frac{f''}{f} - \left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{n-1}\right)\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right)\phi^2 dx. \quad (3.2)$$

在 Damek-Ricci 空间 $X^{p,q}$ 这一特殊情形下，我们有

$$\begin{aligned}\int_{X^{p,q}} |\nabla\phi|^2 dx &- \left(1 - \frac{(2\gamma)^2}{(p+q)^2}\right)\lambda_0(X^{p,q})\int_{X^{p,q}}\phi^2 dx \\ &\ge \frac{1-(2\gamma)^2}{4}\int_{X^{p,q}}\frac{\phi^2}{r^2}dx + \frac{\gamma(1+2\gamma)}{p+q}\int_{X^{p,q}}\left(\coth(r/2) - \frac{1}{\sinh(r)}\right)\frac{\phi^2}{r}dx \\ &\quad + q\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{p+q} + q\left(\frac{\gamma^2}{(p+q)^2} - \frac{1}{4}\right)\right)\int_{X^{p,q}}\frac{\phi^2}{\sinh^2(r)}dx \\ &\quad + p\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{p+q} + (p+2q)\left(\frac{\gamma^2}{(p+q)^2} - \frac{1}{4}\right)\right)\int_{X^{p,q}}\frac{\phi^2}{4\sinh^2(r/2)}dx. \quad (3.3)\end{aligned}$$

推论 3.3 的证明。令 $h = f^{1/(n-1)}$。我们先验证 h 满足定理 3.1 所要求的条件。设 (X, g) 是一个维数为 $n \geq 3$ 的非紧致调和流形，$H \geq 0$ 是其地平线的（常）平均曲率。由 [41] 和 [35] 可知，曲率为 $H = 0$ 的非紧致调和流形是平坦的（另见 [27, 第 6] 节）。此时我们有 f（r）$= r^{n-1}$，因此 h（r）$= r$，定理的条件在 $C_1 = C_2 = 1$ 下得以满足。若 $H > 0$，则有（见 [26, 推论 2.6]）$\lim_{r\to\infty} {}^{f}\!\left(\frac{r}{e^{hr}} \geq \left(\frac{n-1}{2H}\right)^{n-1} > 0\right)$，因此

$$\lim_{r\to\infty} \frac{h(r)}{r} > 0.$$

另一方面，对于任意 n 维黎曼流形，我们有 $\lim_{r\to 0} {}^{f}\!(r)\,\frac{}{r^{n-1}} = 1$，即 $h(r) \sim r$ 当 $r \to 0$ 时。此外，这意味着

$$C_1 = \inf_{r>0} \frac{h(r)}{r} > 0.$$

容易看出

$$h' = \frac{h}{n-1} \cdot \frac{f'}{f} \quad \text{and} \quad h'' = \frac{h}{n-1}\left(\left(\frac{2-n}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{f''}{f}\right).$$

将其代入 (3.1)，得到 (3.2)。

现在，我们推导具有 $n - 1 = p + 2q$ 的 Damek-Ricci 空间上的不等式。利用引理 2.8 和 $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{(p+q)}\right)$ 以及 $b = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{p+q}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{(p+q)}\right)^2 \left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{p+q}\right)\frac{f''(r)}{f(r)} \\
&= \left(\frac{(2\gamma)^2}{(p+q)^2} - 1\right)\lambda_0(X^{p,q}) + \left(q\left(\frac{\gamma^2}{(p+q)^2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{p+q}\right)\frac{q}{\sinh^2(r)} \\
&\qquad + \left((p+2q)\left(\frac{\gamma^2}{(p+q)^2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{p+q}\right)\frac{p}{4\sinh^2(r/2)}.
\end{aligned}$$

将其代入 (3.2)，得到 (3.3)，从而完成推论的证明。 □

我们还想指出，h 的其他取法也会导出密切相关的不等式。在 [9] 中，h 的取法为 $h(r)$ =sinh(r)，这对于双曲空间而言是自然的选择；我们的目标是推广这一结果。

3.2 加权Hardy型不等式

这里，我们采用关于双曲空间的 [9, 定理 5.1]，中的方法，为任意调和流形X得到类似的结果。再次注意，通过在以下定理中选取$\alpha = 0$，我们便可得到引言中的主要结果。

定理 3.4（加权 Hardy 型不等式）。设 (X, g) 是体积密度为 $f = f(r)$ 的非紧致调和流形，$o \in X$ 是一个极点，$r = d(o, \cdot)$，且维数为 $n \geq 3$。假设对于某个 $\alpha \geq 0$，有 $n \geq 2(1+\alpha)$，则以下加权 Hardy 型不等式对所有 $\phi \in C_c^\infty(X)$ 均成立：

$$\int_X \frac{|\nabla \phi|^2}{r^{2\alpha}} dx \geq \int_X \left(\frac{2f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{4f(r)^2} - \alpha \frac{f'(r)}{rf(r)} + \frac{4\alpha+1}{4r^2} \right) \frac{\phi^2}{r^{2\alpha}} dx.$$

特别地，对于这样的 Damek-Ricci 空间 $X^{p,\,q}$，对所有 $\phi \in C_c^\infty(X)$ 以及 $p+q-1 \geq 2\alpha$，我们有

$$\begin{aligned}\int_X \frac{|\nabla \phi|^2 - \lambda_0(X^{p,q})\phi^2}{r^{2\alpha}} dx \geq & \int_X \left(\frac{p(p+2q-2)}{16\sinh^2(r/2)} + \frac{q(q-2)}{4\sinh^2(r)} \right) \frac{\phi^2}{r^{2\alpha}} dx \\ & + \int_X \left(\frac{\alpha}{r} \left(\frac{q}{\sinh(r)} - \frac{p+2q}{2} \coth(r/2) \right) + \frac{4\alpha+1}{4r^2} \right) \frac{\phi^2}{r^{2\alpha}} dx.\end{aligned}$$

证明。给定 $\phi \in C_c^\infty(X \setminus \{o\})$ 和 Φ（我们稍后将具体说明），我们选择 $\psi \in C_c^\infty(X \setminus \{o\})$ 使得 $\phi = r^\alpha \Phi \psi$。然后，我们计算

$$\frac{|\nabla \phi|^2}{r^{2\alpha}} = |\nabla \Phi|^2 \psi^2 + |\nabla \psi|^2 \Phi^2 + 2\psi\Phi\langle \nabla\Phi, \nabla\psi \rangle + 2\alpha \frac{\Phi\psi}{r}(\psi\Phi_r + \Phi\psi_r).$$

注意到

$$\frac{\Phi\psi}{r}(\psi\Phi_r + \Phi\psi_r) = \frac{\phi_r \phi}{r^{2\alpha+1}} - \alpha \frac{\phi^2}{r^{2\alpha+2}}.$$

对其进行积分，并利用 $\Phi\psi^2 \in C_c^\infty(X \setminus \{o\})$ 和格林公式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_X \frac{|\nabla \phi|^2}{r^{2\alpha}} dx = & \int_X (-\Delta\Phi)\Phi\psi^2 dx + \int_X |\nabla\psi|^2 \Phi^2 dx \\ & - 2\alpha^2 \int_X \frac{\phi^2}{r^{2\alpha+2}} dx + 2\alpha \int_X \frac{\phi_r \phi}{r^{2\alpha+1}} dx.\end{aligned}$$

在后一个积分中换用极坐标，利用分部积分，$f \sim r^{n-1}$ 当 $r \to 0$ 且 $n-1 \geq 2\alpha+1$ 时，然后代回，我们得到

$$\begin{aligned}2\int_X \frac{\phi_r \phi}{r^{2\alpha+1}} dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{(\phi^2)_r f(r)}{r^{2\alpha+1}} d\omega dr = & -\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \left(\frac{f(r)}{r^{2\alpha+1}} \right)_r \phi^2 d\omega dr \\ = & (2\alpha+1) \int_X \frac{\phi^2}{r^{2\alpha+2}} dx - \int_X \frac{f'(r)}{f(r) r^{2\alpha+1}} \phi^2 dx.\end{aligned}$$

因此，我们总共得到

$$\int_X \frac{|\nabla \phi|^2}{r^{2\alpha}} dx \geq \int_X (-\Delta\Phi)\Phi\psi^2 dx + \alpha \int_X \frac{\phi^2}{r^{2\alpha+2}} dx - \alpha \int_X \frac{f'(r)\phi^2}{f(r) r^{2\alpha+1}} dx.$$

现在，照例令 $\Phi = (r/f(r))^{1/2}$，并回顾引理 2.4，我们有

$$-\Delta\Phi(r) = \left(\frac{2f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{4f(r)^2} + \frac{1}{4r^2}\right)\Phi(r).$$

因此，我们得到

$$\int_X \frac{|\nabla\phi|^2}{r^{2\alpha}}dx \geq \int_X \left(\frac{2f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{4f(r)^2} - \alpha\frac{f'(r)}{rf(r)} + \frac{4\alpha+1}{4r^2}\right)\frac{\phi^2}{r^{2\alpha}}dx.$$

此外，我们可以采用定理 2.2 证明中的同一逼近论证，得到 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,q})$，而不仅仅是 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,q} \setminus \{o\})$。这就完成了调和流形上的证明。

对于 Damek-Ricci 空间 $X^{p,q}$，我们知道 f 的显式表达式，并且利用 (1.6) 和 (2.2) 即可得出结论。 □

3.3 Poincar´e-Hardy 型不等式与 P-拉普拉斯算子

在本小节中，我们希望将 Poincar´e-Hardy 型不等式推广到 $P \in (1,\infty)$ 的拟线性 P-拉普拉斯算子。

我们先介绍黎曼流形 (X, g) 上的 P-拉普拉斯算子。其定义为

$$\Delta_P\phi := \mathrm{div}(|\nabla\phi|^{P-2}\nabla\phi).$$

当 $P = 2$ 时，这个拟线性二阶算子退化为经典线性 Laplace 算子 Δ。对于非紧致调和流形（X, g）以及极点 $o \in X$ 附近的光滑径向函数 $\phi \in C^\infty(X)$，P-Laplace 算子仍然是径向的，其表达式为

$$\Delta_P\phi(r) = |\phi'(r)|^{P-2}L_P\phi(r), \tag{3.4}$$

其中

$$L_P\phi(r) = (P-1)\phi''(r) + \frac{f'(r)}{f(r)}\phi'(r). \tag{3.5}$$

此外，在下文第 4 节中，我们将用到如下结论：导数处处不为零的径向函数 $\phi \in C^\infty(X\setminus\{o\})$ 的调和性等价于 $f|\phi'|^{P-2}\phi'$ 为常数。这直接由恒等式

$$(f|\phi'|^{P-2}\phi')' = f|\phi'|^{P-2}L_P\phi = f\Delta_P\phi.$$

本小节的目的是仿照定理 2.2，证明适用于 Damek-Ricci 空间的 Poincar´e-Hardy不等式的拟线性版本。这可以看作是将 [7] 中关于双曲空间的定理 2.5 推广到 Damek-Ricci 空间。证明基本上采用了线性情形中相关思想的拟线性版本。显然，第 2.1 节中最优性理论的术语需要推广到拟线性情形。不过，大多数推广显而易见，故此处不再讨论。关于更多细节和参考文献，我们推荐参阅 [19]。此外，我们想指出，下述定理对 P 和维数的限制，与 [7] 中的限制相同。

定理 3.5. 设 $P \geq 2$，且 $X^{p,q}$ 为一个维数为$n = p+q+1 \geq 1+P(P-1)$的 Damek-Ricci 空间。设 $o \in X^{p,q}$为一个极点， $r = d(o,\cdot)$， $h := h(X^{p,q}) = (p+2q)/2$ 为其 Cheeger常数，并且

$$\Lambda_P(X^{p,q}) := \left(\frac{h}{P}\right)^P$$

此外，我们设

$$g(r) := \coth(r/2) - \frac{2}{p+2q}\left(\frac{q}{\sinh(r)} + \frac{1}{r}\right).$$

那么，当 $r \to \infty$ 时， $g(r) \geq \frac{p+q-1}{h\cdot r}$ 和 $g(r) \to 1$，且对所有 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,q})$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{X^{p,q}} |\nabla\phi|^P dx - \Lambda_P(X^{p,q}) \int_{X^{p,q}} g(r)^{P-2}|\phi|^P dx \\ \geq \frac{h^{P-2}(P-1)^2}{P^P}\int_{X^{p,q}} \frac{g(r)^{P-2}}{r^2}|\phi|^P dx \\ + \frac{h^{P-1}(P-2)}{P^P}\int_{X^{p,q}} \frac{g(r)^{P-2}(g(r)+\frac{1}{hr})}{r}|\phi|^P dx \\ + \frac{h^{P-2}}{P^P}\int_{X^{p,q}} g(r)^{P-2}\left(\frac{q^2 - qP(P-1)}{\sinh^2(r)} + \frac{p(2h-P(P-1))}{4\sinh^2(r/2)}\right)|\phi|^P dx. \quad (3.6)\end{aligned}$$

此外，该不等式右侧的所有被积函数均为非负函数。

再次注意，上述定理中特别选取 $P = 2$，便可得到引言中的主定理 A。

借助 Agmon-Allegretto-Piepenbrink 定理即可得到该定理。为方便起见，我们在此针对光滑情形和强解陈述该定理。注意，它是引理 2.6 的推广。此外，该陈述实际上是一个等价命题，但我们这里只陈述所需的方向。

引理 3.6（见 [39, 定理 2.3]）。设 $\Omega \subset X$ 是黎曼流形 (X, g) 中的一个区域，其中 $P \in (1,\infty)$。设 $\Phi \in C^\infty(\Omega)$ 是 Ω 上 $-\Delta_P\Phi + (V-W)|\Phi|^{P-2}\Phi = 0$ 的一个正超解。那么，对所有 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$，我们有

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^P dx \geq \int_\Omega (W-V)|\phi|^P dx.$$

定理 3.5 的证明。令 $\Phi(r) = (r/f(r))^{1/P}$，并令 L_P 为式 (3.5) 中引入的算子。不难看出（省略论证 r），

$$\begin{aligned}L_P\Phi &= \left(-\left(\frac{P-1}{P}\right)^2\frac{1}{r^2} - \frac{P-2}{P^2}\frac{f'}{rf} + \frac{P^2-P-1}{P^2}\frac{(f')^2}{f^2} - \frac{P-1}{P}\frac{f''}{f}\right)\Phi \\ &= -\frac{1}{P^2}\left(\frac{(P-1)^2}{r^2} + \frac{(P-2)f'}{rf} + \frac{(f')^2}{f^2} + P(P-1)\left(\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2}\right)\right)\Phi.\end{aligned}$$

基本思路是使用引理 3.6，即我们需要证明 Φ 是相应 P-薛定谔算子的超解，也就是说，后一个括号内的值应为非负。由于 $f'/f > 0$ （见 [41, 命题 2.2]），只需证明 $(f')^2/f^2 + P(P-1)(f''/f - (f')^2/f^2) \geq 0$。一旦证明了这一点，该引理便给出一个特定的 Hardy不等式。然而，要证明这一项非负，似乎还需要更多关于 f 的信息。由于我们的黎曼流形是 Damek-Ricci 空间 $X^{p,\,q}$，且体积密度 f 有显式表达式 (1.5)，因此由引理 2.8，令 $a = 1 - P(P-1)$ 和 $b = -P(P-1)$，并利用关系式 $4\lambda_0(X^{p,\,q}) = h^2$，可得

$$\frac{(f')^2}{f^2} + P(P-1)\left(\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) = h^2 + \frac{q(q-P(P-1))}{\sinh^2(r)} + \frac{p(p+2q-P(P-1))}{4\sinh^2(r/2)}. \quad (3.7)$$

利用假设 $n - 1 = p + q \geq P(P-1)$，我们估计

$$\frac{q(q-P(P-1))}{\sinh^2(r)} + \frac{p(p+2q-P(P-1))}{4\sinh^2(r/2)} \geq pq\left(\frac{1}{4\sinh^2(r/2)} - \frac{1}{\sinh^2(r)}\right) \geq 0,$$

在最后一个不等式中，我们对所有 $r \in \mathbb{R}$ 都用到了 $\sinh(r) = 2\sinh(r/2)\cosh(r/2)$ 和 $\cosh(r/2) \geq 1$。这表明，一方面，(3.6) 右侧的最后一个被积函数非负，另一方面，

$$\frac{(f')^2}{f^2} + P(P-1)\left(\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) \geq h^2 > 0.$$

因此，对于 $P(P-1) \leq n-1$ 和 $P \geq 2$，Φ 是一个正超解。由引理 3.6 可知，相应的能量泛函非负。

为了完成定理的证明，我们只需分析 $\Delta_P\Phi(r) = |\Phi'(r)|^{P-2}L_P\Phi(r)$。注意，

$$|\Phi'(r)|^{P-2} = \left(\frac{\Phi}{P}\right)^{P-2}\left|\frac{1}{r} - \frac{f'}{f}\right|^{P-2}.$$

可以利用 (1.7) 并估计 $|\frac{1}{r} - \frac{f'}{f}| = \frac{f'}{f} - \frac{1}{r} \geq \frac{p+q-1}{r}$，以简化推导。但我们想保留精确项，并借助 (1.6) 写成：

$$\frac{f'}{f} - \frac{1}{r} = \frac{p+2q}{2}\coth(r/2) - \frac{q}{\sinh(r)} - \frac{1}{r} = \frac{p+2q}{2}g(r) = h \cdot g(r),$$

其中 g 和 $h = h(X^{p,q})$ 的定义与定理中相同。由此得到定理中的估计 $g(r) \geq \frac{p+q-1}{h\cdot r}$，以及当 $r \to \infty$ 时的渐近行为 $g(r) \to 1$。

将（3.7）代入

$$(-\Delta_P)\Phi = \frac{h^{P-2}}{P^P} g^{P-2} \cdot \left(\frac{(P-1)^2}{r^2} + \frac{(P-2)f'}{rf} + \frac{(f')^2}{f^2} + P(P-1)\left(\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2} \right) \right) \Phi^{P-1}$$

并利用 $\frac{f'}{f} = h(g + \frac{1}{hr})$，定理中的不等式由引理 3.6 得出，再通过通常的逼近论证将其推广到所有函数 $\phi \in C_c^\infty(X^{p,q}$). □

注：由证明可知，定理中的不等式（3.6）可通过将 $g(r)$替换为较易处理的下界 $\frac{p+q-1}{hr} > 0$来简化；但我们预计，定理中的相应 P-Schr¨odinger 算子在 $X^{p,q} \setminus \{o\}$上是临界的，而这种性质会因上述简化而丧失。

4 另一种针对 P-拉普拉斯算子的 Poincar´e-Hardy 型不等式

本节推导 P-拉普拉斯算子的格林函数，并沿用 [11, 第 5 节1]（关于实双曲空间的情形，另见 [7] ）中的一般论证，得到非紧致调和流形上 P-拉普拉斯算子的 Hardy 权；在满足维数的某个条件时，该权是最优的。与 [11], 类似，我们还研究了该 Hardy 权在极点处的渐近行为。

4.1 非紧致调和流形上的 P-Laplace 算子的格林函数

P-格林函数 $G = G_P$： $X \times X \setminus \{(x,x) \mid x \in X\} \to \mathbb{R}$ 由以下条件刻画（例如参见 [33]）：

(a) $\Delta_{P,\,x} G(x,y) = 0$ 对所有 $x \neq y$,

(b) $G(x,y) \geq 0$ 对所有 $x \neq y$,

(c) 对所有 $y \in X$，有 $\lim_{x\to\infty} G(x,y) = 0$,

(d) 若 $1 < P \leq n$：对所有 $y \in X$，有 $\lim_{x\to y} G(x,y) = \infty$,

(e) 对所有 $\phi \in C_c^\infty(X)$ 及所有 $y \in X$，我们有

$$\int_X \left\langle |\nabla_x G(x,y)|^{p-2} \nabla_x G(x,y), \nabla\phi(x) \right\rangle dx = \phi(y),$$

也就是说，$-\Delta_{P,y} G(x,\cdot) = \delta_y$ 在分布的意义下。

对于调和流形，我们可以固定一点 $o \in X$，并将格林函数视为半径的函数，也就是说，可以写成 $G(d(x,o)) = G(x,o)$。欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 P-拉普拉斯算子的格林函数在$1 < P < n$ 时为

$$G(r) = \frac{P-1}{(n-P)}\omega_n^{-1/(P-1)} r^{-\frac{n-P}{P-1}},$$

其中，ω_n 是 $\mathbb{R}^n$中单位球面 S^{n-1} 的体积。现在我们来计算维数为 n 、密度函数为 f的非紧非欧几里得调和流形 X 上的 P-拉普拉斯算子的格林函数。回顾第3.3小节，当 $f|G'|^{P-2}G'$为常数时，导数处处不为零的径向函数 $G \in C^\infty(X \setminus \{o\})$满足 P-调和性。假设 $G' < 0$且 $\lim_{r\to\infty} G(r) = 0$，并令

$$f|G'|^{P-2}G' = -f|G'|^{P-1} \cong -\beta^{P-1},$$

对于某个常数 $\beta > 0$，积分可得

$$G(r) = \beta \int_r^\infty \frac{dt}{(f(t))^{1/(P-1)}}. \tag{4.1}$$

由于 X 是非平坦的，其地平线的平均曲率 h 必定严格为正（例如参见 [27, 推论 2.8]）。这一结果源于以下事实：根据 [41, 定理 4.2]， X 不可能具有多项式体积增长；并且根据 [35], X 的密度函数 f 是一个指数多项式。因此， X必定具有指数体积增长，且对于所有 $r > 0$，(4.1)右侧的积分均有限。下面研究由(4.1)定义的 $G(r)$在 $\lim_{r\to 0} G(r)$ 时的情形。由 [46, 第 82] 页可知，对于任意黎曼流形，

$$f(t) = t^{n-1}\left(1 - \frac{s(o)}{6n}t^2 + O(t^4)\right) \qquad \text{for } t \to 0, \tag{4.2}$$

其中， $s(o)$ 是 X 在 $o \in X$处的数量曲率。因此，我们可以找到$r' > 0$ 和 $0 < c_1 < c_2$，使得对于 $0 < r < r'$,

$$c_1 \int_r^{r'} \frac{dt}{t^{(n-1)/(P-1)}} \le \int_r^{r'} \frac{dt}{(f(t))^{1/(P-1)}} \le c_2 \int_r^{r'} \frac{dt}{t^{(n-1)/(P-1)}}, \tag{4.3}$$

这意味着在 $1 < P \le n$的情形下，$\lim_{r\to 0} G(r) = \infty$。试探形式意味着 (4.1)

$$G'(r) = -\frac{\beta}{(f(r))^{1/(P-1)}},$$

这表明假设 $G' < 0$ 是合理的。到目前为止的论证以及 G 的显式表达式表明，G 满足条件 (a)、(b)、(c) 和 (d)。

还需验证条件 (e)。众所周知，非紧致调和流形没有共轭点，因为根据 Allamigeon 定理，具有共轭点的单连通调和流形是布拉施克流形。

（见 [10, 第 6F 章] 或 [31, 第 5 节1]）。因此，我们可以在极点 $y \in X$周围使用全局测地极坐标 $(r,\theta) \in (0,\infty) \times S^{n-1} \to X \setminus \{y\}$。为简化记号，我们交替使用 X 中的点及其在极坐标下的表示。我们有 $\nabla_x G(x,y) = G'(r)\xi(r,\theta)$，其中 $r = d(x,y)$，而ξ 定义在 $X \setminus \{y\}$ 上，是以 y为中心的同心球面的外向单位法向量场。因此，我们有

$$\begin{aligned}\left\langle |\nabla_x G(x,y)|^{P-2}\nabla_x G(x,y), \nabla\phi(x)\right\rangle &= |G'(r)|^{P-2}G'(r)\frac{\partial}{\partial r}\phi(r,\theta)\\ &= -\frac{\beta^{P-1}}{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\phi(r,\theta).\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\int_X \left\langle |\nabla_x G(x,y)|^{P-2}\nabla_x G(x,y), \nabla\phi(x)\right\rangle dx\\ &\qquad = -\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty \frac{\beta^{P-1}}{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\phi(r,\theta)f(r)drd\theta = \beta^{P-1}\mathrm{vol}(S^{n-1})\phi(y).\end{aligned}$$

这表明，若取 $\beta = 1/\omega_n^{1/(P-1)}$，则满足条件 (e)。因此， n 维非紧致调和流形上的 P-拉普拉斯算子的格林函数为

$$G(d(x,y)) = \int_{d(x,y)}^\infty \frac{dt}{(\omega_n f(t))^{1/(P-1)}}.$$

此外，由估计式 (4.3) 可知，在 $n < P < \infty$ 的情形下，极限$\gamma := \lim_{r\to 0} G(r)$ 是一个有限的正实数。注意，这个表达式与 [27, 第 51] 页中标准拉普拉斯算子（即 $P = 2$ 的情形）对应的方框公式一致。

4.2 基于 P-格林函数的 P-拉普拉斯算子的 Poincar´e-Hardy 型不等式

以下定理将命题 [7, 1.1] 从实双曲空间推广到任意非平坦调和流形。证明与 [7] 中给出的证明非常相近，而后者又基于 [11, 第 5 节 1] 中的论证。

定理 4.1. 设 X 是一个维数为 n 的非紧非欧几里得调和流形， $o \in X$ 是一个极点，且 $r = d(o,\cdot)$。设 $1 < P < \infty$ 和 $G(r)$ 是相应的 P-格林函数。则有

$$W := \left(\frac{P-1}{P}\right)^P \left|\frac{\nabla G}{G}\right|^P \geq \Lambda_P := \left(\frac{h}{P}\right)^P.$$

在 $1 < P \leq n$ 的情况下， W 是 $X \setminus \{o\}$ 中 $-\Delta_P$ 的最优 Hardy 权重。

对于所有 $1<P<\infty$ 和所有 $\phi\in C_c^\infty$（X），我们有

$$\int_X|\nabla\phi|^P dx-\Lambda_P\int_X|\phi|^P dx\geq\int_X\widetilde{W}|\phi|^P dx \tag{4.4}$$

$\widetilde{\ }$与 $W=W-\Lambda_P\geq 0$。此外，我们有以下渐近行为，

$$\widetilde{W}(r)\sim\begin{cases}\left(\frac{n-P}{P}\right)^P r^{-P} & for\ 1<P<n\\ \left(\frac{P-1}{P}\right)^P|r\log(r)|^{-P} & for\ P=n\\ C_{P,f}\ r^{-\frac{P(n-1)}{P-1}} & for\ n<P<\infty\end{cases}\qquad as\ r\to 0, \tag{4.5}$$

其中 $C_{P,\ f}=\left(\frac{P-1}{P}\right)^P\left(\int_0^\infty{}_{f\ t}{}^{dt}{}_{((\cdot))^{1/(P-1)}}\right)^{-P}$。我们还有 $\lim_{r\to\infty}\widetilde{W}(r)\ =0$。

证明。首先证明不等式 $W(r)\ \geq\ \Lambda_P$。令 f为 X的密度函数。由 [42,第 2] 节可知，商 $f'(r)/f(r)$ 随着 h =单调递减，且 $_{r\to\infty}f'(r)/f(r)$ 的极限为 $\lim_{r\to\infty}f'$。由于 X非平坦，我们有 $h>0$。利用 $f'/f\geq h$，得到

$$\int_r^\infty\frac{dt}{(f(t))^{1/(P-1)}}\leq\frac{1}{h}\int_r^\infty\frac{f'(t)dt}{(f(t))^{1+1/(P-1)}}=\frac{P-1}{h}\left(f(r)\right)^{-1/(P-1)}.$$

这意味着

$$\left|\frac{G'(r)}{G(r)}\right|=\left((f(r))^{1/(P-1)}\int_r^\infty\frac{dt}{(f(t))^{1/(P-1)}}\right)^{-1}\geq\frac{h}{P-1},$$

因此

$$W(r)=\left(\frac{P-1}{P}\right)^P\left|\frac{G'(r)}{G(r)}\right|^P\geq\left(\frac{P-1}{P}\right)^P\left(\frac{h}{P-1}\right)^P=\Lambda_P.$$

应用 [19, 定理 1.5(1)], ，我们得出，在 $1<P\leq n$的情况下， W是 $X\backslash\{o\}$ 中 $-\Delta_P$ 的一个最优 Hardy 权重。

在定理 2.1], 中取 $\rho=G$ ，我们便可得出，对所有 $\phi\in C_c^\infty(X_0)$,

$$\int_{X_0}|\nabla\phi|^P dx\geq\int_{X_0}W|\phi|^P dx$$

当 $1<P\leq n$ 时， $X_0=X\setminus\{o\}$ ；当 $P>n$时， $X_0=X$ 。由于 $\{o\}\subset X$ 是一个零 p-容量紧集，在 $1<P\leq n$ 的情况下，我们可以应用推论 2.3] ，将该不等式推广到整个流形 X 。这就证明了不等式 (4.4)。

接下来需要证明渐近行为。我们先从 $\widetilde{\ }$当 $r\to 0$时的渐近行为开始。注意，在 $\lim_{r\to 0}a(r)\ =\infty$ 的情况下， $W(r)\ \sim\ a(r)$ 等价于 $W(r)\ \sim\ a(r)$，因此只需证明 (4.5) 中 W 而非 $\widetilde{\ }$的 W 的渐近行为。

我们先考虑 $P > n$ 的情形。利用估计 (4.3)，可得

$$\int_0^r \frac{dt}{(f(t))^{1/(P-1)}} = O(r^{\frac{P-n}{P-1}}) \quad \text{as } r \to 0,$$

因此，利用（4.2），

$$\begin{aligned}\left|\frac{G'(r)}{G(r)}\right| &= \left[\left(\int_0^\infty \frac{dt}{(f(t))^{1/(P-1)}}\right)^{-1} + O(r^{(P-n)/(P-1)})\right](f(r))^{-1/(P-1)} \\ &\sim \left(\int_0^\infty \frac{dt}{(f(t))^{1/(P-1)}}\right)^{-1} r^{-(n-1)/(P-1)} \quad \text{as } r \to 0.\end{aligned}$$

这表明，在 $P > n$ 的情况下，

$$W(r) = \left(\frac{P-1}{P}\right)^P \left|\frac{G'(r)}{G(r)}\right|^P \sim C_{P,f} r^{-P(n-1)/(P-1)} \quad \text{as } r \to 0.$$

现在，我们转而考虑 $1 < P < n$ 的情形。根据 P-格林函数的性质（d），我们有 $\lim_{r\to 0} G(r) = \infty$，并利用（4.2）得到，

$$\lim_{r\to 0} rG'(r) = -\frac{1}{\omega^{1/(P-1)}} \lim_{r\to 0} \frac{r}{r^{(n-1)/(P-1)}} = -\infty.$$

我们可以应用洛必达法则，得到

$$\lim_{r\to 0} \frac{rG'(r)}{G(r)} = 1 + \lim_{r\to 0} \frac{rG''(r)}{G'(r)} = 1 - \frac{1}{P-1} \lim_{r\to 0} \frac{rf'(r)}{f(r)}.$$

注意到 $f'(r)/f(r)$ 是半径为 r 的度量球面的平均曲率；众所周知，对于任意黎曼流形，有 $f'(r)/f(r) \sim (n-1)/r$as $r \to 0$（在调和流形的情况下，我们有 $rf'(r)/f(r) =$trace(C)，其中 C in $[10, 6。33]$，该结论由 $[10, 6$ 得出。$36])$。因此，我们有

$$\frac{G'(r)}{G(r)} \sim \frac{P-n}{P-1} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{as } r \to 0.$$

由此我们得出，在 $1 < P < n$ 的情况下，

$$W(r) = \left(\frac{P-1}{P}\right)^P \left|\frac{G'(r)}{G(r)}\right|^P \sim \left(\frac{n-P}{P}\right)^P r^{-P} \quad \text{as } r \to 0.$$

现在考虑剩下的情形 $P = n$。与前面类似，我们有 $\lim_{r\to 0} r \log rG'(r) = -\infty$，由洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \frac{r \log rG'(r)}{G(r)} &= 1 + \lim_{r\to 0} \log r \frac{G'(r) + rG''(r)}{G'(r)} \\ &= 1 + \lim_{r\to 0} \log r \left(1 - \frac{1}{P-1}\frac{rf'(r)}{f(r)}\right) = 1 + \lim_{r\to 0} \log r \left(\frac{P-n}{P-1} + O(r^2)\right).\end{aligned}$$

这里我们用到了一个稍强的事实，即 $rf'(r)/f(r) = (n-1) + O(r^2)$，当 $r \to 0$ 时成立（例如，这可由 [20, 引理 12.2], 推出，其中给出了直到第六项的显式泰勒展开）。由于我们假设 $P = n$，因此得到

$$\frac{G'(r)}{G(r)} \sim \frac{1}{r \log r} \quad \text{as } r \to 0,$$

因此，在 $P = n$ 的情况下，

$$W(r) = \left(\frac{P-1}{P}\right)^P \left|\frac{G'(r)}{G(r)}\right|^P \sim \left(\frac{P-1}{P}\right)^P |r \log r|^{-P} \quad \text{as } r \to 0.$$

最后，$\lim_{r\to\infty} W(r) = 0$ 的证明可直接应用洛必达法则得到。我们有

$$\lim_{r\to\infty} \frac{G'(r)}{G(r)} = -\lim_{r\to\infty} \frac{1/(f(r))^{1/(P-1)}}{\int_r^\infty \frac{dt}{(f(t))^{1/(P-1)}}} = -\frac{1}{P-1} \lim_{r\to\infty} \frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{h}{P-1},$$

因此

$$\lim_{r\to\infty} W(r) = \left(\frac{P-1}{P}\right)^P \lim_{r\to\infty} \left|\frac{G'(r)}{G(r)}\right|^P = \left(\frac{P-1}{P}\right)^P \left(\frac{h}{P-1}\right)^P = \Lambda_P.$$

□

注释。由 [19, 定理 1.5(2)] 可知，在 $n < P < \infty$ 的情况下，$X \setminus \{o\}$ 中的 $-\Delta_P$ 的一个最优 Hardy 权重为

$$W := \left(\frac{P-1}{P}\right)^P \left|\frac{\nabla G}{G}\right|^P \cdot \frac{|\gamma - 2G|^{P-2}}{|\gamma - G|^P} \left(\gamma^2 + 2(P-2)G(\gamma - G)\right)$$

其中 $\gamma := G(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{t \quad (\omega_n f())^{1/(P-1)}}$。

注释。在 Damek-Ricci 空间 $X = X^{p,q}$ 的特殊情况下，通过调整 [7, 第 153] 页中的计算，可以更精确地求出 W 在 $r \to \infty$ 时的渐近行为：$X^{p,q}$ 的密度函数为

$$f(r) = 2^{p+q} (\sinh(r/2))^{p+q} (\cosh(r/2))^q,$$

等距面平均曲率由 $h = \frac{p+2q}{2}$ 给出，并且利用 $s = \sinh(t/2)$ 与 $\alpha = {}_2{}^{q}{}_{(P-1)} + \frac{1}{2}$，

$$(2^{p+q}\omega_n)^{\frac{1}{P-1}} G(r) = \int_r^\infty (\sinh(t/2))^{-\frac{p+q}{(P-1)}} (\cosh(t/2))^{-\frac{q}{2(P-1)}} dt$$

$$= 2\int_{\sinh\frac{r}{2}}^\infty s^{-\frac{p+q}{P-1}} \left(1+s^2\right)^{-\alpha} ds = 2\int_{\sinh\frac{r}{2}}^\infty s^{-\frac{p+q}{P-1}-2\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{s^2} + o\left(\frac{1}{s^3}\right)\right) ds$$

$$= \frac{P-1}{h}\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{-\frac{2h}{P-1}} - 2\alpha\left(\frac{2h}{P-1}+2\right)^{-1}\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{-\frac{2h}{P-1}-2} + o\left(\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{-\frac{2h}{P-1}-3}\right),$$

对于 $r \to \infty$。这意味着

$$\begin{aligned}&\left|\frac{G'(r)}{G(r)}\right|^P\\&= \left(\coth\frac{r}{2}\right)^{-\frac{P}{P-1}\cdot q}\left|\frac{P-1}{h} - 2\alpha\left(\frac{2h}{P-1}+2\right)^{-1}\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{-2} + o\left(\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{-3}\right)\right|^{-P},\end{aligned}$$

因此得到 W 在无穷远处的以下渐近行为：

$$\begin{aligned}&W(r)\\&= \left(\frac{h}{P}\right)^P\left(\coth\frac{r}{2}\right)^{-\frac{P}{P-1}\cdot q}\left(1 + 2\alpha P\frac{h}{2h+2P-2}\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{-2} + o\left(\sinh\frac{r}{2}\right)^{-3}\right).\end{aligned}$$

相应的 P-Rellich 不等式见 [19, 定理 7。3],适当运用 H¨older 不等式（参见第2.3小节），即可得到不确定性原理的一个拟线性版本。

非紧调和流形与 Damek-Ricci 空间

我们先从调和流形的原始定义说起：完备黎曼流形 (X, g) 称为调和的，若对所有 $o \in X$，都存在一个局部非常值径向调和函数，即一个函数 $g(x) = g(d(o, x))$，它仅依赖于到 $o \in X$ 的距离，并且在 o 的某个较小去心邻域上满足 $\Delta g = 0$ 。调和性还有其他多种等价定义，例如可见 [46, 第 224], [10, 页, 命题 6。21] 或 [43,Th´eor`eme 4]。刻画调和流形（这一思路可追溯至 Willmore）的一种非常自然的方法，是要求所有调和函数都满足平均值性质。引言中已经给出了这一刻画。

已知对于任意非紧致调和流形，其体积密度$f(r)$， $r = d(o, \cdot)$，是严格正的指数多项式，即有限和 $\sum_{i=1}^{k}(p_i(r)\sin(\beta_i r) + q_i(r)\cos(\beta_i r))e^{\alpha_i r}$（见 [35, 定理 2]）。此外，如果一个维数为 n 且具有次指数体积增长的非紧致调和流形，那么它必与平坦欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 等距（由 [41]可得）。

现在我们将重点讨论一类具体的非紧致调和流形，即 Damek-Ricci 空间。它们是带有左不变度量的特殊李群。其定义需要一些准备工作。

一个具有中心 $\mathfrak{z}$ 和内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$:$\mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ 的二步幂零李代数 $\mathfrak{n}$，若其具有正交分解 $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$，且对每个 $Z \in \mathfrak{z}$，由下式定义的线性映射 J_Z : $\mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ 满足

$$\langle J_Z V, V'\rangle = \langle Z, [V, V']\rangle$$

满足

$$J_Z^2(V) = -\|Z\|^2 V. \tag{A.1}$$

海森堡型李代数 $\mathfrak{n}$ 带有两个参数 p、$q \geq 1$，它们分别是维数 $p = \dim(\mathfrak{v})$ 和 $q = \dim(\mathfrak{z})$。上述条件限制了可能的数对 (p, q)，例如，由 (A.1) 可知，p 必须是一个偶数。设 $\mathfrak{a}$ 为由 $H \in \mathfrak{a}$ 生成的一维李代数，即 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H$。我们将海森堡型李代数 $\mathfrak{n}$ 扩展为一个可解李代数。

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}, \tag{A.2}$$

维数为 $n = p + q + 1$，通过设定

$$[H, V] = \frac{1}{2}V \quad \text{and} \quad [H, Z] = Z$$

对于所有的 $V \in \mathfrak{v}$ 和 $Z \in \mathfrak{z}$。我们还将 $\mathfrak{n}$ 上的内积扩展为一个内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} \to \mathbb{R}$，方法是令 $\|H\| = 1$，并要求分解式 (A.2) 是正交的。现在我们可以给出 Damek-Ricci 空间的定义。

定义 A.1。Damek-Ricci 空间 $X^{p,\,q}$ 是与上述所描述的、由参数为 p、q 的 Heisenberg 型李代数 $\mathfrak{n}$ 通过 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H$ 构成的可解扩张 $\mathfrak{s}$ 相关联的唯一连通且单连通李群 $S = NA$，并赋予左不变度量，使得 T_eS 的黎曼度量在规范同一化 $T_eS \cong \mathfrak{s}$ 下与 $\mathfrak{s}$ 上的内积一致，其中 $e \in S$ 表示 S 的单位元。空间 $X^{p,\,q}$ 因此具有 $n = p + q + 1$ 维。

最后，我们简要说明实双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 如何描述为带有左不变度量的可解李群，尽管该空间对应的李代数 $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ 中，$\mathfrak{n}$ 并非二步幂零，而是阿贝尔的。因此，实双曲空间不属于 Damek-Ricci 空间这一类。

例 A.2. 实双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 的上半空间模型由 $\mathbb{H}^n = \{(\mathbf{x}\ y) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, y > 0\}$ 给出，其黎曼度量为

$$g_{\mathbb{H}^n}(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle_0}{y^2} \quad \text{for } v, w \in T_{(\mathbf{x},y)} \cong \mathbb{R}^n,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ 表示 $\mathbb{R}^n$的欧几里得内积。对于该空间，我们有$\lambda_0(\mathbb{H}^n) = \frac{(n-1)^2}{4}$。

为了将 $\mathbb{H}^n$ 描述为可解李群 $S = NA$，我们从李代数开始：

$$\mathfrak{n} = \left\{ n(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} \quad \text{and} \quad \mathfrak{a} = \left\{ \operatorname{diag}(0, 0, \ldots, 0, t, -t) : t \in \mathbb{R} \right\},$$

其中

$$n(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 & -\mathbf{x}^\top \\ \mathbf{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $H = \mathrm{diag}(0, 0, \ldots, 0, 1, -1)$。容易看出，对于所有 $X, Y \in \mathfrak{n}$，$[H, X] = HX - XH = X$ 和 $[X, Y] = XY - YX = 0$。可解李代数 $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$ （其李括号为 $[Z_1, Z_2] = Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1$ ）上的一个内积由以下条件给出： $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{a}$ 互相垂直，$\|H\| = 1$，并且

$$\langle n(\mathbf{x}), n(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_0,$$

其中，$\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ 表示 $\mathbb{R}^{n-1}$上的欧几里得内积。映射

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \quad &\to \quad S = NA, \\ (n(\mathbf{x}), tH) \quad &\mapsto \quad \exp(n(\mathbf{x})) \exp(tH) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{n-1} & 0 & -e^{-t}\mathbf{x}^\top \\ \mathbf{x} & e^t & -\frac{1}{2}e^{-t}\|\mathbf{x}\|_0^2 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

是一个双射。若通过 $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ 将 $S = NA$ 与之等同

$$\exp(n(\mathbf{x})) \exp(tH) \mapsto (\mathbf{x}, e^t),$$

S 中的李群乘法可写为

$$(\mathbf{y}, e^s) \cdot (\mathbf{x}, e^t) = (\mathbf{y} + e^s \mathbf{x}, e^{s+t}).$$

换言之， $S = NA$可与半直积 $\mathbb{R}^{n-1} \rtimes \mathbb{R}^+$等同，其中 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的群运算是加法，而 $\mathbb{R}^+$中的群运算是乘法。

我们通过等同关系$Z \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tZ)$将 $\mathfrak{s}$ 上的内积转移为 $T_e S$ 上的内积，并将其左不变地延拓为 S上的黎曼度量 g_S 。于是映射

$$\exp(n(\mathbf{x})) \exp(sH) \mapsto (\mathbf{x}, e^s) \in \mathbb{H}^n$$

是(S, g_S)与$(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$之间的等距映射，这意味着$(S, g_S)$是 n维实双曲空间的一个模型。

致谢：F. F. 感谢达勒姆大学在其逗留期间给予的热情款待，论文的主要构想正是在此期间形成的。此外，F. F. 感谢 Noema Nicolussi 指出了论文 [9], ，并感谢海因里希·伯尔基金会（Heinrich-B¨oll-Stiftung）提供支持。

参考文献

[1] S. Agmon. 关于二阶椭圆方程解的指数衰减的讲义： N体薛定谔算子特征函数的界。数学札记第 29 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿；东京大学出版社，东京，1982 年。

[2] A. Ancona. 关于二阶椭圆算子下调和函数与格林函数行为的一些结果和例子。Nagoya Math. J. 165:123–158,2002.

[3] J.-P. Anker, E. Damek, and Ch. Yacoub. 调和群上的球面分析。Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 23(4):643–679, 1996.[4] J.-P. Anker, P. Martinot, E. Pedon, and A.G. Setti. Damek-Ricci 空间和齐性树上的移位波动方程。In: Trends in harmonic analysis, Springer INdAM Ser. 3, 1–25, Springer, Milan, 2013.[5] F. Astengo and B. Di Blasio. Damek-Ricci 空间上的惠更斯原理与 Paley-Wiener 型定理。Ann. Math. Blaise Pascal 17(2):327–340, 2010.[6] A. A. Balinsky, W. D. Evans, and R. T. Lewis. Hardy 不等式的分析与几何。Universitext, Springer, Cham, 2015.[7]E. Berchio, L. D'Ambrosio, D. Ganguly, and G. Grillo. 双曲空间上的改进 Poincar ´e 不等式。Nonlinear Anal. 157:146–166, 2017.[8] E. Berchio, D. Ganguly, and G. Grillo. 双曲空间上的尖锐 Poincar ´e-Hardy 和 Poincar ´e-Rellich 不等式。J. Funct. Anal. 272(4):1661-1703, 2017.[9] E. Berchio, D. Ganguly, G. Grillo, and Y. Pinchover. 双曲空间及相关流形上 Hardy 不等式的最优改进。Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 150(4):1699-1736, 2020.[10] A. L. Besse. 所有测地线均为闭合曲线的流形。Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 93, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.[11] B. Bianchini, L. Mari, and M. Rigoli. 带变号非线性的 Yamabe 型方程与指定曲率问题。J. Differential Equations 260(10):7416–7497, 2016.[12] R. Camporesi. Damek-Ricci 空间上 Helgason 傅里叶变换的径向 Paley-Wiener 定理。Colloq. Math. 144(1):87–113, 2016.[13]G. Carron. 非紧致黎曼流形上的 Hardy 不等式。J. Math. Pures Appl. (9) 76(10):883-891, 1997.[14] L. D'Ambrosio and S. Dipierro. 黎曼流形上的 Hardy 不等式及其应用。Ann. Inst. H. Poincar ´e C Anal. Non Lin ´eaire 31(3):449–475, 2014.[15] E. Damek and F. Ricci. 一类非对称调和黎曼空间。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27(1):139–142, 1992.[16] E. Damek and F. Ricci. H-型群可解扩张上的调和分析。J. Geom. Anal. 2(3):213–248, 1992.

[17] E. B. Davies。《热核与谱理论》。第 92 卷，剑桥大学出版社，1989 年。[18] B. Devyver、M. Fraas 和 Y. Pinchover。《二阶椭圆算子的最优 Hardy 权：对 Agmon 问题的回答》。J. Funct. Anal. 266(7):4422–4489，2014 年。[19] B. Devyver 和 Y. Pinchover。《最优 L^p Hardy型不等式》。Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire 33(1):93–118，2016 年。[20] A. Gray 和 L. Vanhecke。《由小测地球体积确定的黎曼几何》。Acta Math. 142:157-198，1979 年。[21] J. Heber。《调和齐性空间与渐近调和齐性空间》。Geom. Funct. Anal. 16(4):869–890，2006 年。[22] M. Itoh 和 H. Satoh。《Damek-Ricci 空间上泊松核的信息几何》。Tokyo J. Math. 33(1):129–144，2010 年。[23] A. Kaplan。《由二次型复合生成的一类亚椭圆偏微分方程的基本解》。Trans. Amer. Math. Soc. 258(1):147–153，1980 年。[24] M. Keller、Y. Pinchover 和 F. Pogorzelski。《流形与图上的临界 Hardy 不等式》。载于：图与流形上的分析和几何，第 172–202 页，伦敦数学会讲义丛书，剑桥大学出版社，2020 年。[25] M. Keller、Y. Pinchover 和 F. Pogorzelski。《从图上的 Hardy 不等式到 Rellich 不等式》。Proc. Lond. Math. Soc. (3) 122(3):458–477，2021 年。[26] G. Knieper。《非紧致调和流形的新结果》。Comment. Math. Helv. 87(3):669–703，2012 年。[27] G. Knieper 和 N. Peyerimhoff。《非紧致调和流形》。arXiv:1302.3841。.. [28] I. Kombe 和 M. Ozaydin。《黎曼流形上改进的 Hardy 与 Rellich 不等式》。Trans. Amer. Math. Soc. 361(12):6191–6203，2009 年。.[29]I. Kombe 和 M. Ozaydin。《黎曼流形上的 Hardy-Poincar ´e、Rellich 与不确定性原理不等式》。Trans. Amer. Math. Soc. 365(10):5035–5050，2013 年。[30] H. Kovaˇr´ık 和 Y. Pinchover。《关于 Hardy 权在无穷远处的最小衰减》。Commun. Contemp. Math. 22(5):18，2020 年。编号 1950046。[31] P. Kreyssig。《调和流形与 Lichnerowicz猜想导论》。arXiv:1007.0477。

[32] A. Krist´aly。《黎曼流形上的尖锐不确定性原理：曲率的影响》。J. Math. Pures Appl. (9) 119:326–346，2018 年。[33] T. Kura。《黎曼流形上的 p-拉普拉斯方程的格林函数》。Proc. Japan Acad. 75(A):37-38，1999 年。[34] D. M¨uller 和 M. Vallarino。《Damek-Ricci 空间上的波动方程与乘子估计》。J. Fourier Anal. Appl. 16(2):204-232，2010 年。[35] Y. Nikolayevsky。《关于调和流形的两个定理》。Comment. Math. Helv. 80(1):29–50，2005 年。[36] N. Peyerimhoff 和 E. Samiou。《Damek-Ricci 空间上的球面谱合成与双半径定理》。Ark. Mat. 48(1):131–147，2010 年。[37]N. Peyerimhoff 和 E. Samiou。《非紧致调和空间的积分几何性质》。J. Geom. Anal. 25:122–148，2015 年。[38] Y. Pinchover。《Schr ¨odinger 算子的刘维尔型定理》。Commun. Math. Phys. 272(1):75–84，2007 年。[39] Y. Pinchover 和 K. Tintarev。《带势项的 p-拉普拉斯算子的基态二择一原理》。Calc. Var. Partial Differ. Equ. 28(2):179–201，2007 年。[40] Y. Pinchover 和 K. Tintarev。《带势项的奇异 p-拉普拉斯算子的最小增长正解》。Adv. Nonlinear Stud. 8(2):213–234，2008 年。[41] A. Ranjan 和 H. Shah。《具有最小地平线的调和流形》。J. Geom. Anal. 12(4):683-694，2002 年。[42] A. Ranjan 和 H. Shah。《调和流形中的 Busemann函数》。Geom. Dedicata 101:167-183，2003 年。[43] F. Rouvi`ere。《Damek-Ricci 空间、几何与分析》。载于：李群上的分析与表示论（K´enitra，1999），S´emin. Congr. 7（2003），法国数学会，巴黎，第 45–100 页。[44] F. Rouvi`ere。《Damek-Ricci 空间上的 X射线变换》。Inverse Probl. Imaging 4(4):713–720，2010 年。[45] Z. I. Szab´o。《调和流形上的 Lichnerowicz猜想》。J. Differential Geom. 31(1):1–28，1990 年。[46] T. J. Willmore。《黎曼几何》。牛津科学出版物，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1993 年。