arXiv:2305.01289v1 [math.NA] 2 May 2023

酉 Jacobi 系综的求积公式

J.F. VAN DIEJEN 和 E. EMSIZ

Abstract. 我们提出了切比雪夫型求积公式，用于精确积分极点位于指定坐标超平面上的有理对称函数。这里的积分是相对于酉 Jacobi 系综的密度函数进行的，这些系综源自正交群和紧辛李群的哈尔测度。

1. 引言 Introduction

众所周知，正交多项式在构造求积公式方面发挥着关键作用，可用于高效地对区间 [32] 上的函数进行数值积分。相关理论的一部分已推广至高维情形，由此产生了各种类似的求积公式，可高效地对多个变量 [7, 8, 14, 28, 29, 31] 的函数进行数值积分。本文主要关注由对称正交多项式理论导出的一类特定求积公式 [3, 5, 18, 19, 20, 24, 25]。这些公式旨在对超立方体上的对称函数进行积分。所讨论的求积公式为著名的切比雪夫型求积公式提供了多元类比，后者用于对积分区间之外具有指定极点的有理函数进行积分 [6, 9, 10, 12, 33]。

具体而言，我们将推导一种数值积分公式，用于计算关于 $\cos(\xi_1)$ ... 、$\cos(\xi_n)$ 的有理对称函数的积分，这些函数允许在积分域之外预先指定的坐标超平面上存在极点。积分测度源自正交群和紧辛李群的哈尔测度（参见例如 [26, 第 11 章10]和 [27, 第 IX 章 9]）。它们由酉雅可比系综的未归一化密度函数明确给出（参见例如 [15, 第 2.6、3.7] 节以及[22,第 19] 章）：

$$\rho_\epsilon(\boldsymbol{\xi}) := \prod_{1\leq j\leq n} 2^{\epsilon_+ + \epsilon_-}\big(1+\epsilon_+\cos(\xi_j)\big)\big(1-\epsilon_-\cos(\xi_j)\big) \times \prod_{1\leq j<k\leq n}\big(\cos(\xi_j)-\cos(\xi_k)\big)^2, \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in[0,\pi]^n$ 和 $\epsilon_+,\epsilon_-\in\{0,1\}$。这里，$\epsilon_+,\epsilon_-\in\{0,1\}$ 的不同取值分别对应于选取奇数维正交群上的 Haar 测度 $O(2n+1;\mathbb{R})$（类型 B_n：$\epsilon_+\neq\epsilon_-$）、紧辛群上的 Haar 测度 $Sp(n;\mathbb{H})$（类型 C_n：$\epsilon_\pm=1$），或偶数维正交群上的 Haar 测度

Date: 2020年6月。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：65D32；次要分类：15B52、28C10、43A75。*Key words and phrases.* 求积公式、随机矩阵、紧李群、哈尔测度。本研究部分得到了 *Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico(FONDECYT)* 资助项目（编号：1170179）的支持。

$O(2n;\mathbb{R})$（类型 D_n: $\epsilon_\pm = 0$）。在对称函数积分的语境下，应将这些测度视为著名的切比雪夫正交测度的自然类比。

为实现上述目标，我们在第 2 节提出一种简明的形式化方法，可将求积公式转换为针对对称函数的求积公式。该方法基于柯西-比内公式及其由 Andr´eief [1, 16] 提出的积分变体。为求完整起见，本文末尾的附录 A 回顾了这两个公式。对于（准）高斯求积，第 2 节的形式化方法可重新得到一个基本求积公式，该公式最初由 Berens、Schmid 和 Xu [3] 提出。本文所用的柯西-比内- Andr´eief 公式方法的一个关键特点是，它能非常直接地处理多种起始求积方法，包括例如 Radau 型和洛巴托型求积。接着，我们在第 3 节重点讨论源自 Bernstein-Szeg¨o 多项式 [12] 的求积。这些求积公式旨在针对切比雪夫权函数，对具有指定极点的有理函数进行积分。按照第 2 节的步骤提升这些求积后，便可得到所需的求积公式，用于针对酉 Jacobi 系综的密度函数，在坐标超平面上对具有指定极点的对称有理函数进行积分。对于与 Bernstein-Szeg¨o 多项式 [6, 9, 10, 33]，相关的高斯求积这一特殊情形，我们重新得到 [13] 中展示的 [3] 高斯求积公式的相应特例。最后，在不存在极点时，我们的求积公式可化为更基本的求积公式，用于对称多项式的积分。这些求积公式此前曾在 [5] 和 [18] 中通过其与离散正弦变换和余弦变换的关系而提出。

2. Cubature of symmetric polynomials by lifting quadrature rules

设 $\mathrm{w}(x)$, $a < x < b$ 为具有有限矩的权函数，即 $\int_a^b x^k \mathrm{w}(x)\mathrm{d}x (k = 0, 1, 2, \ldots)$。就我们的目的而言，只需假设 a、$b \in \mathbb{R}$，但下面的命题 1 及其证明实际上在考虑 $a = -\infty$和/或 $b = +\infty$时仍然成立，前提是所有矩积分都绝对收敛。对于m 非负积分，我们记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{w}(x)\mathrm{d}x = \sum_{0\leq l\leq m} f(x_l^{(m+1)})\mathrm{w}_l^{(m+1)} \tag{2.1a}$$

一个具有克里斯托费尔权重 $\mathrm{w}_0^{(m+1)}, \ldots, \mathrm{w}_m^{(m+1)}$的求积公式，该公式由位于实轴上且处于积分域内的 $m+1$个节点支撑:

$$a \leq x_0^{(m+1)} < x_1^{(m+1)} < \cdots < x_m^{(m+1)} \leq b. \tag{2.1b}$$

下文始终假设，所考虑的求积公式对 x 中次数不超过某值的所有多项式 $f(x)$ 都是精确的

$$\mathtt{D} = 2m + 1 - \delta$$

其中某个固定的（与 m 无关的整数值）常数为 $\delta \geq 0$。该常数衡量精确度 D 与最优高斯值 $2m+1$ 之间的距离。换言之，只要节点数足够大，从而保证 $2m + 1 \geq \delta$（因此 $\mathtt{D} \geq 0$），我们的公式便开始生效。

令 $\mathbb{P}^{(\mathtt{D},n)}$ 表示关于 x 的 $\binom{\mathtt{D}+n}{n}$ 维对称多项式空间: $=(x_1, \ldots, x_n)$，其中每个变量 $x_j (j = 1, \ldots, n)$ 的次数至多为 D。

下面的命题将公式 (2.1a)、(2.1b) 中的求积公式提升为 $\mathbb{P}^{(\mathtt{D},n)}$ 中的精确数值积分公式。

命题 1（ $\mathbb{P}^{(\mathtt{D},n)}$中的精确数值积分公式）。对于 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}^{(\mathtt{D},n)}$，有】【。

$$\frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b f(\mathbf{x})\mathrm{W}^{(n)}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \sum_{\lambda\in\Lambda^{(m,n)}} f\big(\mathbf{x}_\lambda^{(m,n)}\big)\mathrm{W}_\lambda^{(m,n)}, \tag{2.2a}$$

其中

$$\mathrm{W}^{(n)}(\mathbf{x}) := \prod_{1\le j<k\le n}(x_j - x_k)^2 \prod_{1\le j\le n}\mathrm{w}(x_j), \tag{2.2b}$$

$$\mathbf{x}_\lambda^{(m,n)} := \left(x_{\lambda_1+n-1}^{(m+n)}, x_{\lambda_2+n-2}^{(m+n)}, \ldots, x_{\lambda_{n-1}+1}^{(m+n)}, x_{\lambda_n}^{(m+n)}\right), \tag{2.2c}$$

$$\mathrm{W}_\lambda^{(m,n)} := \prod_{1\le j<k\le n}\left(x_{\lambda_j+n-j}^{(m+n)} - x_{\lambda_k+n-k}^{(m+n)}\right)^2 \prod_{1\le j\le n}\mathrm{w}_{\lambda_j+n-j}^{(m+n)}, \tag{2.2d}$$

且求和范围为$\binom{m+n}{n}$ 个由$\lambda^{(m,n)}$ 标记的节点

$$\Lambda^{(m,n)} := \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid m \ge \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0\}. \tag{2.2e}$$

证明。由线性性，只需验证数值积分公式在 $\mathbb{P}^{(\mathtt{D},n)}$ 的 Schur 基 $s_\mu(\mathbf{x})$、 $\mu \in \Lambda^{(\mathtt{D},n)}$ 上成立，其中（例如参见 [21]）

$$s_\mu(\mathbf{x}) := \frac{\det\left[x_k^{\mu_j+n-j}\right]_{1\le j,k\le n}}{\det\left[x_k^{n-j}\right]_{1\le j,k\le n}}.$$

通过简单的推导即可验证，我们的数值积分公式在这种情况下成立:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b s_\mu(\mathbf{x})\mathrm{W}^{(n)}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&\overset{(i)}{=} \frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b \det\left[x_k^{\mu_j+n-j}\right]_{1\le j,k\le n} \det\left[x_k^{n-j}\right]_{1\le j,k\le n} \prod_{1\le j\le n}\mathrm{w}(x_j)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&\overset{(ii)}{=} \det\left[\int_a^b x^{\mu_j+2n-j-k}\mathrm{w}(x)\mathrm{d}x\right]_{1\le j,k\le n} \\
&\overset{(iii)}{=} \det\left[\sum_{0\le l<m+n}\big(x_l^{(m+n)}\big)^{\mu_j+2n-j-k}\mathrm{w}_l^{(m+n)}\right]_{1\le j,k\le n} \\
&\overset{(iv)}{=} \sum_{m+n>l_1>l_2>\cdots>l_n\ge 0}\Bigg(\det\left[\big(x_{l_k}^{(m+n)}\big)^{\mu_j+n-j}\right]_{1\le j,k\le n} \\
&\qquad\qquad \times \det\left[\big(x_{l_k}^{(m+n)}\big)^{n-j}\right]_{1\le j,k\le n} \prod_{1\le j\le n}\mathrm{w}_{l_j}^{(m+n)}\Bigg) \\
&\overset{(v)}{=} \sum_{\lambda\in\Lambda^{(m,n)}} s_\lambda\big(\mathbf{x}_\lambda^{(m,n)}\big)\mathrm{W}_\lambda^{(m,n)}.
\end{aligned}$$

在上述连续步骤中，我们使用了：(i) 范德蒙行列式

$$\det\left[x_k^{n-j}\right]_{1\leq j,k\leq n}=\prod_{1\leq j<k\leq n}(x_j-x_k),$$

(ii) Andréief 的柯西-比内公式积分对应式（参见附录 A 中的式（A.1），其中 $f_j(x)=x^{\mu_j+n-j}$ 和 $g_j(x)=x^{n-j}$），(iii) 由式（2.1a）、（2.1b）给出的 $m+n$ 节点求积公式，(iv) 柯西-比内公式（参见附录 A 中的式（A.2)），以及 (v) 范德蒙行列式。□

式 (2.1a)、(2.1b) 中的求积公式是插值型的，当且仅当它对节点上的（拉格朗日）插值多项式精确。这在 $m+1\geq\delta$ 时成立（因此 $\mathrm{D}\geq m$）。此外，当 $\mathrm{w}(x)>0$（对 $a<x<b$）且 $\mathrm{w}_l^{(m+1)}>0$（对 $0\leq l\leq m$）时，该公式为正。对于精确度为 $\mathrm{D}\geq 2m$（因此 $\delta=0$ 或 $\delta=1$）的正插值型求积公式，命题 1 中的公式可追溯至 [3], ；在那里，该公式借助与权函数 $W^{(n)}(x)$ (2.2b) 相关的多元正交多项式推导得出。在这种情况下，当 $\mathrm{D}=2m+1$（即 $\delta=0$）时，相关求积公式是高斯求积；而当 $\mathrm{D}=2m$（即 $\delta=1$）时，若所有节点均属于开区间 $]a,b[$（例如参见 [23, 34]），则该公式是准高斯求积；若其中一个节点达到该区间的边界，则该公式是高斯-拉道求积（例如参见 [17]）。在此还需回顾：当两个边界点均为节点时，相应的高斯-洛巴托求积公式在 $\mathrm{D}=2m-1$（即 $\delta=2$）时达到最优精确度，参见例如 [17]。

3. Cubature rule for unitary Jacobi ensembles

在 [12, 定理 5] 中，我们给出了如下形式的正求积公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi R(\xi)\rho_\epsilon(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{0\leq l\leq m}R\big(\xi_l^{(m+1)}\big)\rho_\epsilon\big(\xi_l^{(m+1)}\big)\Delta_l^{(m+1)},\tag{3.1a}$$

用于对关于 $\cos(\xi)$ 的有理函数 $R(\cdot)$ 按切比雪夫权函数进行积分

$$\rho_\epsilon(\xi):=2^{\epsilon_++\epsilon_-}(1+\epsilon_+\cos(\xi))(1-\epsilon_-\cos(\xi))\qquad(\epsilon_\pm\in\{0,1\}).\tag{3.1b}$$

在该公式中，节点的位置

$$0\leq\xi_0^{(m+1)}<\xi_1^{(m+1)}<\cdots<\xi_m^{(m+1)}\leq\pi\tag{3.1c}$$

由两组参数 $a_1,\ldots,a_d$ 和 $\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_{\tilde{d}}$ 控制，其中 $|a_r|<1$ 和 $|\tilde{a}_r|<1$。此处及下文中，这些参数允许为复数，并假设集合 $\{a_1,\ldots,a_d\}$ 和 $\{\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_{\tilde{d}}\}$ 均关于复共轭封闭。具体而言，节点 $\xi_l^{(m+1)}$ $(l\in\{0,\ldots,m\})$ 是以下超越方程的唯一实数解

$$2\big(m-d_\epsilon-\tilde{d}_{\tilde{\epsilon}}\big)\xi+\sum_{1\leq r\leq d}\int_0^\xi u_{a_r}(\theta)\mathrm{d}\theta+\sum_{1\leq r\leq\tilde{d}}\int_0^\xi u_{\tilde{a}_r}(\theta)\mathrm{d}\theta=\pi(2l+\epsilon_-+\tilde{\epsilon}_-),\tag{3.1d}$$

其中

$$u_a(\theta):=\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\theta)+a^2}\qquad(|a|<1,\,\theta\in\mathbb{R}),\tag{3.1e}$$

相应的克里斯托费尔权重由下式给出

$$\Delta_l^{(m+1)} := \left(\tfrac{1}{2}\right)^{(1-\epsilon_-)(1-\tilde{\epsilon}_-)\delta_l+(1-\epsilon_+)(1-\tilde{\epsilon}_+)\delta_{m-l}} \times \left(2\big(m-d_\epsilon-\tilde{d}_{\tilde{\epsilon}}\big)+\sum_{1\le r\le d} u_{a_r}\big(\xi_l^{(m+1)}\big)+\sum_{1\le r\le \tilde{d}} u_{\tilde{a}_r}\big(\xi_l^{(m+1)}\big)\right)^{-1}. \tag{3.1f}$$

这里 $d_\epsilon := \frac{1}{2}(d-\epsilon_+-\epsilon_-)$，$\tilde{d}_{\tilde{\epsilon}} := \frac{1}{2}(\tilde{d}-\tilde{\epsilon}_+-\tilde{\epsilon}_-)$，以及

$$\delta_l := \begin{cases} 1 & \text{if } l=0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，假设 m 为正，使得

$$m > \lceil d_\epsilon \rceil + \lceil \tilde{d}_{\tilde{\epsilon}} \rceil. \tag{3.1g}$$

方程 (3.1a)–(3.1g) 中的求积对于具有如下形式指定极点的有理函数 $R(\cdot)$ 是精确的

$$R(\xi) = \frac{f\big(\cos(\xi)\big)}{\prod_{1\le r\le d}\big(1-2a_r\cos(\xi)+a_r^2\big)}, \tag{3.2a}$$

其中 $f\big(\cos(\xi)\big)$ 表示关于 $\cos(\xi)$ 的任意多项式，其次数至多为

$$\mathtt{D} = 2m+\tilde{\epsilon}_+ + \tilde{\epsilon}_- - \tilde{d} - 1. \tag{3.2b}$$

借助命题 1，我们现在将相关求积提升为相应的数值积分公式，用于对酉雅可比系综的密度函数进行积分，积分对象为在坐标超平面处具有指定极点的对称函数。

定理 2（酉 Jacobi 系综的数值积分公式）。设 $\epsilon_\pm, \tilde{\epsilon}_\pm \in \{0,1\}$，$|a_r|<1\,(r=1,\dots,d)$，$|\tilde{a}_r|<1\,(r=1,\dots,d)$，其中每种情况下的参数（可能）为成对出现的复共轭参数。则假设

$$m+n-1 > \lceil d_\epsilon \rceil + \lceil \tilde{d}_{\tilde{\epsilon}} \rceil, \tag{3.3a}$$

有

$$\frac{1}{(2\pi)^n\, n!}\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi R(\boldsymbol{\xi})\rho_\epsilon(\boldsymbol{\xi})\,d\xi_1\cdots d\xi_n = \sum_{\lambda\in\Lambda^{(m,n)}} R\big(\boldsymbol{\xi}_\lambda^{(m,n)}\big)\rho_\epsilon\big(\boldsymbol{\xi}_\lambda^{(m,n)}\big)\Delta_\lambda^{(m,n)}. \tag{3.3b}$$

这里，$\rho_\epsilon(\boldsymbol{\xi})$由式 (1.1) 中的酉雅可比分布给出，节点 $\boldsymbol{\xi}_\lambda^{(m,n)}$ 具有式 (2.2c) 中的形式（其中 x 替换为 ξ），克里斯托费尔权重为

$$\Delta_\lambda^{(m,n)} := \prod_{1\le j\le n} \Delta_{\lambda_j+n-j}^{(m+n)}, \tag{3.3c}$$

而 $R(\cdot)$具有如下形式

$$R(\boldsymbol{\xi}) = \frac{f\big(\cos(\xi_1),\dots,\cos(\xi_n)\big)}{\prod_{\substack{1\le r\le d\\ 1\le j\le n}}\big(1-2a_r\cos(\xi_j)+a_r^2\big)}, \tag{3.3d}$$

其中，$f(x_1,\dots,x_n) = f(\mathbf{x})$ 表示 $\mathbb{P}^{(\mathtt{D},n)}$中的任意对称多项式，D 取自式 (3.2b)。

证明。作形如 $x = -\cos(\xi)$ 的变量代换后，式 (3.1a)–(3.1g) 中的求积公式——对于式 (3.2a) 中的 $R(\cdot)$（其分子中多项式的最高次数 D 受条件 (3.2b) 约束）——变为式 (2.1a)、(2.1b) 中的标准形式，其中 $(a,b) = (-1,1)$、$x_l^{(m+1)} = -\cos\big(\xi_l^{(m+1)}\big)$，并且

$$\mathrm{w}(x) = \frac{(1-\epsilon_+ x)(1+\epsilon_- x)}{2\pi\sqrt{1-x^2}\prod_{1\leq r\leq d}(1+2a_r x+a_r^2)},$$
$$\mathrm{w}_l^{(m+1)} = \Delta_l^{(m+1)}\frac{(1-\epsilon_+ x_l^{(m+1)})(1+\epsilon_- x_l^{(m+1)})}{\prod_{1\leq r\leq d}(1+2a_r x_l^{(m+1)}+a_r^2)}.$$

应用命题 1 并变换回三角变量 $x_j = -\cos(\xi_j)$ $(j=1,\ldots,n)$ 后，即得所断言的数值积分公式。□

注 3. 由 Eqs. (3.1d)、(3.1e) 中的超越方程（通过中值定理）可立即得出，构成数值积分节点 $\boldsymbol{\xi}_\lambda^{(m,n)}$、$\lambda\in\Lambda^{(m,n)}$ 的解 $\xi_0^{(m+n)}$、…、$\xi_{m+n-1}^{(m+n)}$ 满足以下不等式（参见 [12, Section 4.2]）：

$$\frac{\pi\big(l+\frac{1}{2}(\epsilon_-+\tilde{\epsilon}_-)\big)}{m+n-1-d_\epsilon-\tilde{d}_{\tilde{\epsilon}}+\kappa_-}\leq\xi_l^{(m+n)}\leq\frac{\pi\big(l+\frac{1}{2}(\epsilon_-+\tilde{\epsilon}_-)\big)}{m+n-1-d_\epsilon-\tilde{d}_{\tilde{\epsilon}}+\kappa_+}$$

（对于 $0\leq l<m+n$），并且

$$\frac{\pi(k-l)}{m+n-1-d_\epsilon-\tilde{d}_{\tilde{\epsilon}}+\kappa_-}\leq\xi_k^{(m+n)}-\xi_l^{(m+n)}\leq\frac{\pi(k-l)}{m+n-1-d_\epsilon-\tilde{d}_{\tilde{\epsilon}}+\kappa_+}$$

（对于 $0\leq l<k<m+n$），其中

$$\kappa_\pm := \frac{1}{2}\sum_{1\leq r\leq d}\left(\frac{1-|a_r|}{1+|a_r|}\right)^{\pm 1}+\frac{1}{2}\sum_{1\leq r\leq\tilde{d}}\left(\frac{1-|\tilde{a}_r|}{1+|\tilde{a}_r|}\right)^{\pm 1}.$$

此外，由 Eqs. (3.1d)、(3.1e) 可清楚看出，边界值 $\xi_0^{(m+n)}=0$ 当且仅当 $\epsilon_-=\tilde{\epsilon}_-=0$ 时取得，而边界值 $\xi_{m+n-1}^{(m+n)}=\pi$ 当且仅当 $\epsilon_+=\tilde{\epsilon}_+=0$ 时取得（因为对于 $|a|<1$，$\int_0^\pi u_a(\theta)\mathrm{d}\theta=\pi$）。

注 4. 在上述积分公式中，当 D˜(3.2b) 达到高斯值 $2m+1$ 时，精确度达到最优，此时 $d=0$ and $\tilde{\epsilon}_\pm=1$。方程 (3.1a)–(3.1g) 中求积公式的这一特殊情形，可由 [9] 针对 $\epsilon_\pm=0$ 推导得出；对于一般的 $\epsilon_\pm\in\{0,1\}$，则可由 [6, 10, 33] 推导得出（另见 [13, 第 8] 节）。定理 2 中数值积分公式的相应特例随后在 [13, 第 9] 节中给出。

˜注 5. 当 $d=\tilde{d}=0$ 时，定理 2 化为如下形式的初等数值积分公式

$$\frac{1}{(2\pi)^n\,n!}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi f\big(\cos(\boldsymbol{\xi})\big)\rho_\epsilon(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n = \tag{3.4a}$$
$$\frac{1}{N_\epsilon^{(m,n)}}\sum_{\lambda\in\Lambda^{(m,n)}}\big(\tfrac{1}{2}\big)^{(1-\epsilon_+)(1-\tilde{\epsilon}_+)\delta_{m-\lambda_1}+(1-\epsilon_-)(1-\tilde{\epsilon}_-)\delta_{\lambda_n}}f\left(\cos\big(\boldsymbol{\xi}_\lambda^{(m,n)}\big)\right)\rho_\epsilon\big(\boldsymbol{\xi}_\lambda^{(m,n)}\big)$$

对于 $f\big(\cos(\boldsymbol{\xi})\big) := f\big(\cos(\xi_1)\ldots,\cos(\xi_n)\big)$，其中 $f(x_1,\ldots,x_n) = f(\mathrm{x}) \in \mathbb{P}^{(\mathrm{D},n)}$ 且 $\mathrm{D} = 2m+\tilde{\epsilon}_+ + \tilde{\epsilon}_- - 1$，以及

$$N_{\epsilon}^{(m,n)} := \big(2(m+n-1)+\epsilon_+ + \epsilon_- + \tilde{\epsilon}_+ + \tilde{\epsilon}_-\big)^n. \tag{3.4b}$$

在这种情况下，相应的数值积分节点 $\boldsymbol{\xi}_{\lambda}^{(m,n)}$，$\lambda \in \Lambda^{(m,n)}$ 可以用闭式显式表示：

$$\xi_l^{(m+n)} = \frac{\pi\big(l+\frac{1}{2}(\epsilon_- + \tilde{\epsilon}_-)\big)}{m+n-1+\frac{1}{2}(\epsilon_+ + \epsilon_- + \tilde{\epsilon}_+ + \tilde{\epsilon}_-)} \qquad (0 \le l < m+n). \tag{3.4c}$$

情况 $\epsilon_- = 0$ 恢复了（经过变量变换后）八个源自离散余弦变换 DCT-1，...，DCT-8 的求积公式，详见 [18,第 5] 节（另见上文所引文献中的公式 (5.9)、(5.10) 以及第 5.3.2、5.3.4 小节）。情况 $\epsilon_- = 1$ 则相应地恢复了源自离散正弦变换 DST-1，...，DST-8 [5] 的求积公式（另见下文注 6）。当 $\tilde{\epsilon}_{\pm} = 1$数值积分公式 (3.4a)–(3.4c) 具有最优次数 $\mathrm{D} = 2m+1$的精确性时；这一情形在 [13, 公式 (9.2a)、(9.2b)] 中被强调为上文注 4 所提及的高斯求积公式的一个特殊初等实例。

注 6。公式 (3.1a)–(3.1g) 中的求积源自 Bernstein-Szeg¨o 多项式 [12, 第 2 节3]所满足的一组有限离散正交关系。当所有参数 a_1、.....、a_d 以及 $\tilde{a}_1$、.....、$\tilde{a}_{\tilde{d}}$均为零时，所讨论的正交关系将得到简化，并表示一个矩阵的正交性；该矩阵表示离散三角变换的核：

$$\Psi^{(m+1)} := \Big[\psi_{l,k}^{(m+1)}\Big]_{0\le l,k\le m},$$

其中

$$\psi_{l,k}^{(m+1)} := \sqrt{\frac{2}{m+\frac{1}{2}(\epsilon_+ + \epsilon_- + \tilde{\epsilon}_+ + \tilde{\epsilon}_-)}}\,\mathrm{cs}_{\epsilon}\left(\frac{\pi\big(l+\frac{1}{2}(\epsilon_- + \tilde{\epsilon}_-)\big)\big(k+\frac{1}{2}(\epsilon_- + \epsilon_+)\big)}{m+\frac{1}{2}(\epsilon_+ + \epsilon_- + \tilde{\epsilon}_+ + \tilde{\epsilon}_-)}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(1-\epsilon_-)(1-\tilde{\epsilon}_-)\delta_l + (1-\epsilon_+)(1-\tilde{\epsilon}_+)\delta_{m-l} + (1-\epsilon_-)(1-\epsilon_+)\delta_k + (1-\tilde{\epsilon}_-)(1-\tilde{\epsilon}_+)\delta_{m-k}},$$

with

$$\mathrm{cs}_{\epsilon}(\xi) := \begin{cases}\cos(\xi) & \text{if } \epsilon_- = 0,\\ \sin(\xi) & \text{if } \epsilon_- = 1.\end{cases}$$

众所周知，这类离散三角变换的核可由对如下形式的 Jacobi 矩阵进行对角化得到

$$\mathrm{J}^{(m+1)} = \begin{bmatrix} b & \sqrt{a} & & & & \\ \sqrt{a} & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \sqrt{\tilde{a}} \\ & & & & \sqrt{\tilde{a}} & \tilde{b} \end{bmatrix},$$

其中 $a := 2^{(1-\epsilon_-)(1-\epsilon_+)}$、$b := \epsilon_+ - \epsilon_-$ 以及 $\tilde{a} := 2^{(1-\tilde{\epsilon}_-)(1-\tilde{\epsilon}_+)}$、$\tilde{b} := \tilde{\epsilon}_+ - \tilde{\epsilon}_-$。事实上，有（例如参见 [4, 11, 12, 30]）

$$\Psi^{(m+1)}\mathrm{J}^{(m+1)} = \mathrm{E}^{(m+1)}\Psi^{(m+1)},$$

其中

$$\mathrm{E}^{(m+1)} := \mathrm{diag}\left[2\cos\left(\xi_0^{(m+1)}\right),\ldots,2\cos\left(\xi_m^{(m+1)}\right)\right],$$

其中 $\xi_0^{(m+1)},\ldots,\xi_m^{(m+1)}$取自式 (3.4c)（因此 $n=1$）。下表说明如何在上述公式中识别对应于十六种标准离散三角变换的核（及雅可比矩阵）；在对边界参数 $\epsilon_\pm,\tilde{\epsilon}_\pm\in\{0,1\}$ 进行特化后，分别得到离散余弦变换 DCT-1,. ..,DCT-8 和离散正弦变换 DST-1,. . .,DST-8。

$(\tilde{\epsilon}_-,\tilde{\epsilon}_+)\backslash(\epsilon_-,\epsilon_+)$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	DCT-1	DCT-6	DST-8	DST-3
(0,1)	DCT-5	DCT-2	DST-4	DST-7
(1,0)	DCT-7	DCT-4	DST-2	DST-5
(1,1)	DCT-3	DCT-8	DST-6	DST-1

作为 Bernstein-Szeg¨o 多项式参数特化而得到的底层正交族，分别为第一类切比雪夫多项式（$\epsilon_\pm=0$）、第二类切比雪夫多项式（$\epsilon_\pm=1$）、第三类切比雪夫多项式（$\epsilon_+=0,\epsilon_-=1$）和第四类切比雪夫多项式（$\epsilon_+=1,\epsilon_-=0$）（参见 [13, 注 6.1]）。

Appendix A. The Cauchy-Binet-Andréief formulas

设 f_1、 $\ldots f_n$和 g_1， ....., g_n是希尔伯特空间 $L^2(]a,b[,|\mathrm{w}(x)|\mathrm{d}x)$中的函数。那么 Andre´ief 积分公式表明 [1]:

$$\frac{1}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b \det\left[f_j(x_k)\right]_{1\le j,k\le n}\det\left[g_j(x_k)\right]_{1\le j,k\le n}\prod_{1\le j\le n}\mathrm{w}(x_j)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\det\left[\int_a^b f_j(x)g_k(x)\mathrm{w}(x)\mathrm{d}x\right]_{1\le j,k\le n}. \tag{A.1}$$

例如， [2, 引理 3.1]中给出了对此恒等式的简短初等验证。 [16] 中也有类似的证明，并附有该公式的历史介绍。若将定义在区间上的函数改为支撑在节点 $x_0^{(m+n)}<\cdots<x_{m+n-1}^{(m+n)}$上的函数，并将积分测度 $\mathrm{w}(x)\mathrm{d}x$ 替换为这些节点上权重为 $\mathrm{w}_0^{(m+n)}$， ....., $\mathrm{w}_{m+n-1}^{(m+n)}$的离散点测度，则 Andre´ief 积分公式可导出恒等式

$$\frac{1}{n!}\sum_{\substack{0\le l_k<m+n\\ k=1,\ldots,n}}\left(\det\left[f_j\left(x_{l_k}^{(m+n)}\right)\right]_{1\le j,k\le n}\det\left[g_j\left(x_{l_k}^{(m+n)}\right)\right]_{1\le j,k\le n}\prod_{1\le j\le n}\mathrm{w}_{l_j}^{(m+n)}\right)$$
$$=\det\left[\sum_{0\le l<m+n}f_j\left(x_l^{(m+n)}\right)g_k\left(x_l^{(m+n)}\right)\mathrm{w}_l^{(m+n)}\right]_{1\le j,k\le n}.$$

利用行列式关于指标 $l_1,\ldots,l_n$ 的排列的反对称性，等式左边可以改写为

$$\sum_{m+n>l_1>l_2>\cdots>l_n\ge 0}\left(\det\left[f_j\left(x_{l_k}^{(m+n)}\right)\right]_{1\le j,k\le n}\det\left[g_j\left(x_{l_k}^{(m+n)}\right)\right]_{1\le j,k\le n}\prod_{1\le j\le n}\mathrm{w}_{l_j}^{(m+n)}\right).$$

这表明，我们所关注的恒等式归结为著名的柯西-比内公式

$$\sum_{\substack{L\subset\{0,\dots,m+n-1\}\\|L|=n}} \det F_L \det G_L = \det\left(FG^T\right), \tag{A.2}$$

其中 $F = F_{\{0,\dots,m+n-1\}}$、$G = G_{\{0,\dots,m+n-1\}}$ 和

$$F_L = \left[f_j\big(x_l^{(m+n)}\big)\right]_{\substack{1\le j\le n\\ l\in L}}, \qquad G_L = \left[g_j\big(x_l^{(m+n)}\big)\mathrm{w}_l^{(m+n)}\right]_{\substack{1\le j\le n\\ l\in L}}.$$

在公式 (A.2) 中，求和遍及所有基数为 $|L| = n$ 的指标子集 L，而 G^T 指转置矩阵。

References

1. Andr´eief，M.C.：关于函数乘积定积分之间一种关系的注记。Mém. Soc. Sci. Phys. Nat. Bordeaux (3) 2，1–14（1886年） 2. Baik，J.，Deift，P.，Strahov，E.：随机厄米矩阵特征多项式的乘积与比值。J. Math. Phys. 44，3657–3670（2003年） 3. Berens，H.，Schmid，H.J.，Xu，Y.：多元高斯求积公式。Arch. Math. 64，26–32（1995年） 4. Britanak，V.，Yip，P.C.，Rao，K.R.：离散余弦和正弦变换。一般性质、快速算法与整数近似。爱思唯尔／学术出版社，阿姆斯特丹（2007年） 5. Brus，A.，Hrivn´ak，J.，Motlochov´a，L.：(反)对称多元正弦函数的离散变换与正交多项式。Entropy 20(12)，论文编号 938（2018年） 6. Bultheel，A.，Cruz-Barroso，R.，Deckers，K.，Gonz´alez-Vera，P.：与切比雪夫权函数相关的有理 Szeg¨o 求积。Math. Comp. 78，1031–1059（2009年） 7. Cools，R.：构造求积公式：艺术背后的科学。Acta Numerica 6，1 54 1997– ( ) 8. Cools，R.，Mysovskikh，I.P.，Schmid，H.J.：求积公式与正交多项式。J. Comput. Appl. Math. 127，121–152（2001年） 9. Daruis，L.，Gonz´alez-Vera，P.，Jim´enez Paiz，M.：与切比雪夫权函数有理修正相关的求积公式。Comput. Math. Appl. 51，419–430（2006年） 10. Deckers，K.，Van Deun，J.，Bultheel，A.：适用于 $[-1,1]$ 外复极点的有理高斯–切比雪夫求积公式。Math. Comp. 77，967–983（2008年） 11. van Diejen，J.F.，Emsiz，E.：与广义 Schur 多项式相关的离散傅里叶变换。Proc. Amer. Math. Soc. 146，3459–3472（2018年） 12. van Diejen，J.F.，Emsiz，E.：由 Bernstein-Szeg¨o 多项式的有限正交关系导出的求积公式。Proc. Amer. Math. Soc. 146，5333–5347（2018年） 13. van Diejen，J.F.，Emsiz，E.：对称函数的精确求积公式。Math. Comp. 88，1229 1249 2019– ( ) 14. Dunkl，C.F.，Xu，Y.：多变量正交多项式，第二版。《数学及其应用百科全书》第155卷，剑桥大学出版社，剑桥（2014年） 15. Forrester，P.J.：对数气体与随机矩阵。《伦敦数学学会专著丛书》第34卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿（2010年） 16. Forrester，P.J.：认识 Andr´eief（波尔多，1886年）与 Andreev（哈尔科夫，1882–1883年）。Random Matrices Theory Appl. 8(2)，1930001（2019年） 17. Gautschi，W.：高斯–克里斯托费尔求积公式综述。载于：Butzer，P.L.，Feh´er，F.（编），E.B. Christoffel：其工作对数学与物理科学的影响，第72–147页。Birkh¨auser，巴塞尔（1981年） 18. Hrivn´ak，J.，Motlochov´a，L.：(反)对称多元余弦函数的离散变换与正交多项式。SIAM J. Numer. Anal. 52，3021–3055（2014年） 19. Hrivn´ak，J.，Motlochov´a，L.，Patera，J.：由对称轨道函数产生的多元多项式求积公式。Symmetry 8(7)，文章编号 63（2016年） 20. Li，H.，Xu，Y.：d 个变量中 A_d 格点的基本域与单纯形上的离散傅里叶分析。J. Fourier Anal. Appl. 16，383–433 （ 2010 年）

21. Macdonald, I.G.: 《对称函数与霍尔多项式》，第二版。克拉伦登出版社，牛津（1995年） 22. Mehta, M.L.: 《随机矩阵》，第三版。爱思唯尔／学术出版社，阿姆斯特丹（2004年） 23. Micchelli, C.A., Rivlin, T.J.: 高斯求积附近的数值积分公式。《以色列数学杂志》16，287–299（1973年） 24. Moody, R.V., Motlochov´a, L., Patera, J.: 由单李群的混合特征产生的高斯求积公式。《傅里叶分析与应用杂志》20，1257–1290（2014年） 25. Moody, R., Patera, J.: 关于紧单李群有限阶元素的正交多项式求积公式。《应用数学进展》47，509–535（2011年） 26. Procesi, C.: 《李群：通过不变量与表示的方法》。Universitext，施普林格，纽约（2007年） 27. Simon, B.: 《有限群与紧群的表示》。数学研究生丛书，第10卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯（1996年） 28. Sobolev, S.L.: 《求积公式与现代分析：导论》。戈登与布里奇科学出版社，蒙特勒（1992年） 29. Sobolev, S.L., Vaskevich, V.L.: 《求积公式理论》。数学及其应用，第415卷，克鲁维尔学术出版社集团，多德雷赫特（1997年） 30. Strang, G.: 离散余弦变换。《SIAM评论》41，135–147（1999年） 31. Stroud, A.H.: 《多重积分的近似计算》。普伦蒂斯 - 霍尔自动计算丛书，普伦蒂斯 - 霍尔公司，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯（1971年） 32. Szeg¨o, G.: 《正交多项式》，第四版。美国数学学会丛书，第XXIII卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯（1975年） 33. Van Deun, J., Bultheel, A., Gonz´alez Vera, P.: 关于有理高斯–切比雪夫求积公式的计算。《数学计算》75，307–326（2006年） 34. Xu, Y.: 正求积公式的一个刻画。《数学计算》 62，703–718 （ 1994 年）

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile
Email address: diejen@inst-mat.utalca.cl

Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, Van Mourik Broekmanweg 6, 2628 XE, Delft, The Netherlands*Email address*: e.emsiz@tudelft.nl