arXiv:2305.01297v1 [math.AP] 2 May 2023

环面上非线性BGK方程的非平衡稳态性质

JOSEPHINE EVANS 和 ANGELIKI MENEGAKI

Abstract. 我们研究与空间变化的恒温器耦合的一维非线性 BGK 模型。当线性耦合项相较于非线性自相互作用项足够大时，我们证明稳态的存在性、局部唯一性和线性稳定性。该模型具有一个非显式且依赖于空间的非平衡稳态。在此情形下，我们成功运用次椭圆理论，证明该稳态附近的线性化算子具有谱隙。

Contents

1. 引言 2
1.1. 模型描述 3
1.1.1. 研究动机与现状 3
1.2. 记号 5
1.3. 论文结构 5
1.3.1. 技术与主要结果 5
1.3.2. 讨论与未解决问题 6
2. 存在性与唯一性 7
2.1. 线性方程稳态的存在性与唯一性的 Doeblin论证 7
2.2. 稳态的表示公式与矩界 9
2.3. 映射的压缩性 $\mathcal{F}$ 14
2.4. 定理的证明 1 20
3. 线性稳定性 21
3.1. 非平衡稳态的三阶与四阶矩界 21
3.2. 算子的线性化与分解 25
3.3. 微观强制性 29

关键词与短语：非平衡稳态、温度随空间变化的 BGK 模型、存在性、唯一性与 L^2 稳定性结果、热传递。1

3.4. 宏观强制性 343.5. 辅助算子的有界性 353.6. 定理的证明 2 37附录 A. 温度变化较小时的线性稳定性 38参考文献 39

1. Introduction

与热库（恒温器）接触的系统的非平衡稳态（NESS）的性质，例如其存在性、唯一性、结构以及趋近于稳态的收敛速度，仍然是统计力学中的重大未解问题。

为了理解并推导宏观的热传导傅里叶定律如何从微观哈密顿动力学中产生，人们引入并研究了一些微观层面的开放经典系统，并已取得部分进展。一个典型例子是具有最近邻相互作用、并在边界处与两个不同温度的热库耦合的振子原子模型。谐晶体是研究较为充分的一类情形，其非平衡稳态有明确表达，但对应的场景相当不符合物理实际，因为傅里叶定律在其中失效 [RLL67]。关于非谐晶体，尽管对于某些情形下形成的非平衡稳态已有部分结论——在某些情况下，甚至可以定量地保证其存在性、唯一性和指数弛豫随粒子数的变化——但对这类稳态的结构仍知之甚少。除微观振子链外，对于具有长程排斥相互作用势的牛顿粒子系统，也已证明其存在性与唯一性 [GKI85]。同样，对于该稳态的 规范描述，我们仍远未充分理解。

介观尺度上的系统也同样如此，即由单粒子分布函数 $f(t,x,v)$ 描述的动力学模型，其中 t、$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$、$v \in \mathbb{R}$ 分别为空间和速度变量及时间变量。特别是在更符合现实的非平衡情形下，平稳（与时间无关）玻尔兹曼方程没有显式解，而且在许多情况下，甚至尚不清楚这类状态是否存在。

本文研究玻尔兹曼方程的非线性 BGK 模型。这是一种动力学弛豫模型，由 Bhatnagar、Gross 和 Krook 于[BGK54] 中提出，作为玻尔兹曼流的玩具模型。我们继续开展[EM21], 中的研究；在那里，我们证明了区间 (0，1) 上一维模型的非平衡稳态存在性，其中扩散边界条件在边界处起到两个热库的作用。

这里我们将边界条件改为周期边界条件，即考虑一维环面 $\mathbb{T}$上的粒子气体；我们的目的是研究与温度随空间变化的线性 BGK 算子耦合的非线性 BGK 模型的存在性、唯一性和 $L^2_{x,\ v}$ 稳定性。此时，该算子相当于一个作用于整个空间的恒温器。

1.1. 模型描述。我们考虑一维环面 $\mathbb{T}$ 上的粒子气体，粒子间的碰撞由非线性 BGK 算子描述。

$$\partial_t f + v\partial_x f = \mathcal{L}f = \frac{1}{\kappa}\left(\rho_f\left(\alpha\mathcal{M}_{u_f,T_f} + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x)}\right) - f\right), \tag{1.1}$$

其中，$x \in \mathbb{T}, v \in \mathbb{R}$, $\tau(x)$ 是一个固定函数，它随 x 和 $\alpha \in [0,1]$变化。此外，我们用 κ 表示克努森数，即平均自由程与典型观测长度之比。

对于相空间 $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上的稳态（与时间无关）解 $f(x,v)$，我们分别定义流体力学矩：空间密度 $\rho_f(x)$、宏观速度 $u_f(x)$和压强 $P_f(x)$，如下：

$$\begin{aligned} \rho_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)\mathrm{d}v, \quad \rho_f(x)u_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} vf(x,v)\mathrm{d}v, \\ P_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(x,v)\mathrm{d}v = \rho_f(x)[T_f(x) + u_f(x)^2] \end{aligned} \tag{1.2}$$

那么，与 f 对应的局部温度分布为 T_f。我们用$\mathcal{M}_{u_f,T_f}(v)$表示温度为 T_f的麦克斯韦分布：

$$\mathcal{M}_{u_f,T_f}(v) = (2\pi T_f)^{-1/2}\exp\left(-\frac{|v-u_f|^2}{2T_f}\right).$$

我们的主要目标是：(i) 确定参数 $\alpha, \kappa,$ 和$\underline{\tau} \le \tau \le \bar{\tau}$ 的取值范围，使得存在一个非平衡稳态 $g(x,v)$，满足1.1；(ii) 证明当足够小时，该稳态唯一；(iii) 通过将次强制性方法调整应用于这一非平衡情形，证明 L^2 在 g 附近线性稳定。

1.1.1. 研究动机与现状。我们研究的主要目标是理解动力学理论中粒子系统非平衡稳态的基本性质，例如存在性、唯一性以及可能的稳定性。关于 BGK 方程和玻尔兹曼方程，这一方向已有许多研究。

关于 BGK 模型：对于具有玻尔兹曼型模型、且有多个热浴作用于边界或整个空间的情形，这一方向已有大量研究。特别是，在 [CEL+18，CEL+19]中，作者研究了环面上具有周期边界条件的非线性 BGK 模型，其中散射体处于

施加两种不同温度的情形。在这些研究所涵盖的情况下，可以找到一个显式的稳态，它在空间上是均匀的，而且也是唯一的。

然而，我们的线性恒温器在空间上并不均匀，这意味着我们的非平衡稳态没有显式表达，且具有空间非均匀性，流体力学量的行为也十分复杂。

在 [EM21] 中，我们也开始研究定义在区域 (0,1) 上的非线性BGK方程，其中边界条件为漫反射：粒子撞击任一边界时，都会被反射回区域内，其速度会根据边界温度进行“热化”。我们研究边界温度相差足够大的情形；对于固定的克努森数，这属于极端非平衡区域。我们证明了稳态的存在性。文献 [Uka92] 研究了具有较大边界数据的非线性二次 BGK模型中一个非常相似的情形，也证明了存在性，但边界数据的设定方式不同。

关于玻尔兹曼模型：对于有界区域上的玻尔兹曼方程，在远离平衡态的情形下，已有许多针对平衡态附近扰动情形的研究，也就是说，边界温度接近某一均匀温度下的平衡态。在 [EGKM13]中，作者在有限克努森数的动理学区域内构造了平衡态邻域中的唯一稳态，并证明了其动力学稳定性，从而推广并拓展了文献 [Gui72、Gui70] 在凸区域上的存在性与唯一性结果。关于小克努森数下玻尔兹曼方程非平衡稳态的存在性与稳定性结果，包括文献[Ark00、AEMN10、AEMN12]。此外，文献 [AN00]证明了在非扰动框架下，平板区域中具有漫反射边界条件的玻尔兹曼方程非平衡稳态的存在性。

关于存在散射体时空间齐次的玻尔兹曼方程以及 Kac 玩具模型中趋向非平衡稳态的存在性、唯一性和指数弛豫，可分别参见[CLM15] 和 [Eva16], 。

在推导傅里叶定律的背景下，也就是说，热传导定律指出，热流矢量与温度梯度成正比，而比例系数为材料的热导率，因此需要令克努森数趋于 0。这样便允许单位时间内发生大量碰撞，并建立起流体力学状态。历史上，Boltzmann 和 Maxwell [Max67, Bol03] 曾对此进行了形式推导，而严格证明则见于 [ELM94, ELM95] ，其研究的是接近平衡情形下的平板几何。如何从确定性粒子系统推导出傅里叶定律，仍是统计力学中的一个重大未解问题 [BLRB00, Lep16, Dha08, FB19] 。近期研究包括考察边界处与热库接触的谐振子和非谐振子[RLL67, EPRB99, RBT02, Car07, CEHRB18, Hai09, HM09, Men20, BM22, BMY23],

对于一大类相互作用势，研究者证明了非平衡稳态的存在性与唯一性，以及向其指数弛豫；在一些更具体的情形下，还得到了收敛速率关于粒子数的定量关系。研究还表明，在保守随机动力学扰动下的谐振原子链中，傅里叶定律同样成立，相关研究见[BO05]。

关于在有限克努森数及克努森数趋近于 0 时、在扰动性近平衡态区域内有界一般区域上的定常玻尔兹曼方程的近期研究综述，我们推荐近期的综述 [EM20]。

1.2. 记号。我们用 $A \lesssim B$ 表示存在某个有限常数 C，且该常数与 α 无关。我们还用 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ 表示存在一个常数 $C > 0$，使得 $|f(x)| \le C|g(x)|$，并且对于 $z \to z_0$，$f(z) = o(g(z))$；如果对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 U_ε 的一个邻域，使得 $|f(z)| \le \varepsilon|g(z)|$，则称.....。我们用 $L^2_{x,v}$ 表示由关于空间和速度变量 x, v 均属于 L^2 的函数构成的空间。最后，为简便起见，我们将 $\mathcal{M}_{0,T_f}(v)$ 简写为 $\mathcal{M}_{T_f}(v)$。

1.3. 论文结构。本节余下部分将陈述主要结果。在第2 节中，我们证明完整非线性问题的稳态解的存在性与唯一性。本节分为若干小节，介绍证明的基本步骤：在第2.1 小节中，我们证明模型线性版本的存在性与唯一性；在第2.2 小节中，我们给出非平衡稳态（NESS）各阶矩的上下界，并在第2.3小节中证明不动点定理所需的条件。在第3 节中，我们证明$L^2_{x,\,v}$非平衡稳态附近线性化算子的稳定性。为此，我们首先证明微观强制性，即关于 v 变量的微观强制性（第3.3小节）；然后证明宏观强制性，即关于 x 变量的宏观强制性（第3.4小节）；最后证明若干算子的有界性（第3.5小节）。引入这些算子是为了修正熵并开展次强制性论证。

1.3.1. 技术与主要结果。我们的第一个主要定理证明了稳态的存在性，并给出了一个有限定条件的唯一性结果。

定理1（存在性与局部唯一性）。假设存在常数$\underline{\tau}$ 和$\bar{\tau}$，使得 $\underline{\tau} \le \tau(x) \le \bar{\tau}$ 对所有 $x \in \mathbb{T}.$ 均成立。那么，如果 $\underline{\tau}$ 足够大且 α 足够小（取决于$\underline{\tau}$、$\bar{\tau}$），则存在一个稳态 $g = g(x,v)$，满足非线性方程（1.1）。此外，存在取决于α、$\underline{\tau}$、$\bar{\tau}$的常数 $\underline{T}$ 和 T，使得与该稳态对应的温度分布 $T_g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 g(x,v)\mathrm{d}v / \int_{-\infty}^{\infty} g(x,v)\mathrm{d}v$ 满足

$$\underline{T} \le T_g(x) \le \bar{T}.$$

最后，g 是满足此约束的函数类 g 中的唯一稳态。

该定理通过对温度应用压缩映射论证得以证明。我们首先证明，对于一组特定参数 α、$\underline{\tau}$、$\bar{\tau}$，其上下界

温度、压强和空间密度均保持不变。随后，我们证明在这组参数下，关于温度的映射实际上是压缩的。为构造该映射，我们将方程中的非线性项冻结，从而得到一个可与马尔可夫过程关联的线性方程。接着，我们利用这一点证明该线性方程存在唯一稳态，并据此定义其温度。这样便得到一个从一种温度到另一种温度的映射。为温度建立上下界所需的估计，依赖于通过杜哈梅尔公式得到的该线性方程稳态表示。这是对我们 [EM21] 中相关技术的改编；在那里，我们对一个类似方程应用了 Schauder 不动点论证。

定理 2 （稳态的线性稳定性）。 当 $\underline{\tau}$ 足够大，使得定理 *1* 的结论适用，且 α 足够小时，在 (1.1)附近线性化所得的线性方程 g 在 $L^2(g^{-1})$中具有谱隙。

该定理通过改进 L^2 Dolbeault-Mouhot-Schmeiser 的次强制性定理 [DMS15] 来证明。本文的新意在于将这些技术推广到非平衡系统，也就是说，我们处理的是一个非显式、空间非齐次的稳态。因此，我们在一个函数空间 $L^2(g^{-1})$ 上工作，其权重并非显式给定。次椭圆理论 L^2 依赖于对若干假设的验证。就我们的情形而言，最具挑战性的是 微观强制性 假设。验证这一假设之所以困难，是因为我们动力学的非平衡特性意味着宏观量的流动会呈现复杂行为，并在由 g、vg、v^2g张成的空间中表现为可能增长的模态。当 α 足够小时，我们能够控制这些项。为此，需要对我们得到的稳态 g的归一化三阶矩和四阶矩（偏度和峰度）进行界定。

注 1。 定理 *1* 和 *2* 都要求有限的克努森数 κ，其阶为 $\mathcal{O}(1)$，这意味着我们处于动力学—介观尺度，而未进入流体动力学状态。值得注意的是，我们在 [EM21] 中得到的稳态也是如此，当模型在两个彼此相距甚远且足够大的温度下采用扩散边界条件时。

注 2。 关于这里针对较小的 α所得到的稳态的稳定性和唯一性，需要指出的是，这归因于温度为 $\tau(x)$的恒温器作用于整个空间。这一项通过在整个空间施加约束，帮助系统实现稳定。相比之下，当热浴仅作用于边界时，情况则有所不同，例如 [EM21]。这意味着，当边界温度之差较大时，在 [EM21] 中研究的系统所找到的稳态可能不稳定。

1.3.2. 讨论与开放问题。这项工作自然引出了若干后续研究方向。对于本文研究的模型，两个自然的后续方向是：

- 首先利用 [GMM17] 中的工具箱证明线性化方程的加权 L^∞ 稳定性，进而研究该方程的非线性稳定性；
- 考察克努森数较小（κ）的情形，此时我们预计可以利用稳态接近麦克斯韦分布这一事实。

我们还可以考察 τ 变化不大的情形。也就是说，$|\bar{\tau} - \underline{\tau}|$ 较小，并且可以用固定温度下的麦克斯韦分布进行加权。事实上，我们预计这种情形相当直接。我们在附录 A 中，在稳态的温度接近均匀温度、接近 $\bar{\tau}$时，$\underline{\tau}$加入了线性稳定性的简短证明。在这种情况下，我们预计可以通过与压缩映射论证类似的论证，验证这一假设；在该论证中，我们证明稳态的温度是 $\tau(x)$ 的利普希茨函数，其中 τ 被视为 L^∞中的函数。这些论证将比线性稳定性更加复杂。

我们希望能够针对 [EM21] 中研究的、带有扩散边界条件的方程，开展类似于本文的线性稳定性分析。对于该方程，当边界温度之差较大时，所找到的稳态是否稳定，并不清楚。Ukai [Uka92]的相关论文中也提出了这一评论。简言之，如果我们尝试运行类似于本文线性稳定性论证的证明，就无法验证 微观强制性假设；事实上，我们可以证明，对于某些初始数据，$L^2(g^{-1})$ 范数可能增长。这是由流体力学量的复杂行为造成的，而这些项无法由恒温器产生的项加以控制，因为恒温器只作用于边界。

2. Existence and uniqueness

我们考虑线性方程

$$\partial_t f + v\partial_x f = Lf = \frac{1}{\kappa}\left(\rho_f\left(\alpha\mathcal{M}_{T(x)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x)}(v)\right) - f\right) \tag{2.1}$$

并记 $g = g^T(x, v)$ 为与温度分布 $T \in C(\mathbb{T})$ 相对应的稳态。首先，我们通过Doeblin定理证明此类稳态的存在性与唯一性。

2.1. 关于线性方程稳态存在性与唯一性的 Doeblin 论证。 我们需要证明线性偏微分方程（2.1）存在唯一的稳态。首先，我们构造一个随机过程，其分布是偏微分方程（2.1）的弱解。然后，利用马尔可夫过程理论中的 Doeblin 定理证明稳态的存在性与唯一性。

为了构造该随机过程，首先令速率为$\frac{1}{\kappa}$的泊松过程，并将 J_1、 J_2、 J_3、.....称为该泊松过程的跳跃时刻。为构造随机过程 X_t、 V_t ，我们采用迭代方式：假设过程已构造至时刻 J_i，那么对于

$$J_i < t \leq J_{i+1}, \quad \text{we set } X_t = X_{J_i} + (t - J_i)V_{J_i}$$

and

$$J_i < t < J_{i+1}, \ V_t = V_{J_i},$$

而对于 $t = J_{i+1}$ 我们生成一个新的速度，它与除 $X_{J_{i+1}}$之外的一切都相互独立。容易验证，这给出了正确的方程：取一个测试函数ϕ 定义在 $C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}$上，对量 $s^{-1}\mathbb{E}(\phi(t+s, X_{t+s}, V_{t+s}) - \phi(t, X_t, V_t))$ 作泰勒展开，并令 $s \to 0$ 趋于极限，我们便可恢复出偏微分方程（2.1）的一个弱解。

Be在应用Doeblin定理之前，我们先给出它的一个一般性表述 .

定理3（Doeblin定理）。设 Z_t 是在状态空间 $\mathcal{Z}$上的一个连续时间马尔可夫过程。记 $f_t^{z_0}$为在给定 $Z_0 = z_0$的条件下 Z_t 的分布。假设存在一个时间 $t_* > 0$ 、一个常数 $\beta \in \in (0,1)$以及状态空间 $\mathcal{Z}$ 上的一个概率测度 ν ，使得对任意 $z_0 \in \mathcal{Z}$ ，都有

$$f_{t_*}^{z_0} \geq \beta\nu,$$

因此，该马尔可夫过程有唯一的稳态。

为了证明我们的特定马尔可夫过程满足Doeblin定理的条件，最方便的方法是考察该方程的偏微分方程形式。

命题 1. 对于满足 $f_0 = \delta_{x_0,v_0}$ 的线性方程，我们有 $\beta \in (0,1)$，且存在一个概率密度 ν ，使得

$$f_t \geq \beta\nu.$$

证明. 首先，由于 τ, T 有上界和下界，我们可以找到 $c > 0$ ，使得

$$\alpha\mathcal{M}_{T(x)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x)}(v) \geq c1_{|v|\leq 1}$$

在 x 上一致成立。然后，利用杜哈梅尔公式可得下界

$$f(t,x,v) \geq e^{-t/\kappa}f(0,x-vt,v) + \int_0^t e^{-(t-s)/\kappa}\int f(s,x-v(t-s),u)\mathrm{d}u \times \\ \times \left(\alpha\mathcal{M}_{T(x-v(t-s))}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x-v(t-s))}(v)\right)\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

于是，采用记号 $(S_t f)(x,v) = f(x-tv,v)$，即输运部分的半群，以及 $P_c f$: $= c1_{|v|\leq 1}\int_{\mathbb{R}} f(x,u)\mathrm{d}u$ ，我们写作

$$f(t,x,v) \geq e^{-t/\kappa}S_t f_0 + \int_0^t e^{-(t-s)/\kappa}S_{t-s}P_c f_s \mathrm{d}s.$$

这意味着 $f(t,x,v) \geq e^{-t/\kappa} S_t f_0$。现在将其代入方程的第二项，得到

$$f(t,x,v) \geq \int_0^t e^{-t/\kappa} S_{t-s} P_c S_s f_0 \mathrm{d}s,$$

再次代入新的下界，得到

$$f(t,x,v) \geq \int_0^t \int_0^s e^{-t/\kappa} S_{t-s} P_c S_{s-r} P_c S_r f_0 \mathrm{d}r\mathrm{d}s.$$

现在，根据我们的初始假设 $f_0 = \delta_{(x_0,v_0)}$，有

$$S_r \delta_{x_0,v_0} = \delta_{x_0+rv_0,v_0}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} P_c S_r \delta_{x_0,v_0} &= c\delta_{x_0+rv_0} 1_{|v|\leq 1}, \\ S_{s-r} P_c S_r \delta_{(x_0,v_0)} &= c\delta_{x_0+rv_0}(x-(s-r)v) 1_{|v|\leq 1}, \text{ and} \\ P_c S_{s-r} P_c S_r \delta_{(x_0,v_0)} &= \frac{c^2}{(s-r)^d} 1_{|v|\leq 1} 1_{|x_0+rv_0-x|\leq (s-r)1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

由于只要 $(s-r)1 \geq \sqrt{d} = 2$，x 就在环面上，其中 d 是维数，因此最后一个示性函数恒成立。所以

$$P_c S_{s-r} P_c S_r \delta_{(x_0,v_0)} \geq \frac{c^2}{(s-r)^d} 1_{|v|\leq 1}$$

从而

$$S_{t-s} P_c S_{s-r} P_c S_r \delta_{(x_0,v_0)} \geq \frac{c^2}{(s-r)^d} 1_{|v|\leq 1}$$

当 $(s-r)1 \geq \sqrt{d}$ 时。最后，在我们的一维情形中取 $t_* = 2\sqrt{d} = 2$，并对 $0 < r < s < t_*$ 积分，确实得到 $s - r \geq \sqrt{d}$，从而得到所需的下界。□

2.2. 稳态的表示公式与矩界。 在本小节中，我们将通过为线性 BGK2.1 应用杜哈梅尔公式，得到稳态的一个便捷表示。这将使我们能够对稳态中的密度和压强进行上下估计。

引理 1。 设 g^T 是方程 (2.1)的一个解。我们可以得到以下表示公式

$$g^T(x,v) = \int_0^1 \frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})} \rho_g(x+\mathrm{sgn}(v)y) \left(\alpha \mathcal{M}_{T(x+\mathrm{sgn}(v)y)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+\mathrm{sgn}(v)y)}(v)\right) \mathrm{d}y$$

证明。设 $v>0$，注意到杜哈梅尔公式给出

$$e^{t/\kappa}g(x+vt,v)-g(x,v)=\int_0^t\frac{e^{s/\kappa}}{\kappa}\rho_g(x+vs)\left(\alpha\mathcal{M}_{T(x+vs)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+vs)}(v)\right)\mathrm{d}s.$$

由于 $x\in\mathbb{T}$，代入 $t=\frac{1}{|v|}$ 和 $y=vs$，可得

$$(e^{1/\kappa|v|}-1)g(x,v)=\int_0^1\frac{e^{y/\kappa|v|}}{\kappa|v|}\rho_g(x+y)\left(\alpha\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v)\right)\mathrm{d}y,$$

或等价地

$$g(x,v)=\int_0^1\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\rho_g(x+y)\left(\alpha\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v)\right)\mathrm{d}y.$$

对 $v<0$进行相同的计算可得:

$$g(x,v)=\int_0^1\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\rho_g(x-y)\left(\alpha\mathcal{M}_{T(x-y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x-y)}(v)\right)\mathrm{d}y.$$

这便得到稳态的表示公式。 □

接下来，我们给出密度 ρ_g、压强 P_g 以及温度 T_g的显式上下界。最终，我们希望通过对 T_g的界，确定 α、$\bar{\tau}$、$\underline{\tau}$的取值，使得 (i) 线性模型的非平衡稳态 g 与非线性模型的一个稳态相同，从而证明其存在性；并且 (ii) 该稳态是唯一的。

引理 2. 假设 $\underline{T}\le\underline{\tau}$，对于 $\underline{\tau}\ge1$和 $\alpha\le\frac{1-\underline{\tau}^{-1/2}}{\underline{T}^{-1/2}-\underline{\tau}^{-1/2}}$，我们有关于 $x\in\mathbb{T}$的一致估计:

$$1-\frac{1}{\kappa}\Big[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\Big]\lesssim\rho_g(x)\lesssim4\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2.$$

证明。密度的上界：接着考察被积函数的渐近行为，我们首先注意到

$$\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\le\frac{1}{\kappa}\max\left\{1+\frac{e^{-1}}{1-y},\frac{1}{|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\right\}$$

其中第一项对应大速度，第二项对应小速度。

Then

$$\int_0^\infty g^T(x,v)\mathrm{d}v=\int_0^\infty\int_0^1\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\rho_g(x+y)\left(\alpha\mathcal{M}_{T(y+x)}+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(y+x)}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1[\alpha\mathcal{K}_1(T,y)+(1-\alpha)\mathcal{K}_1(\tau,y)]\rho_g(x+y)\mathrm{d}y.$$

其中

$$\mathcal{K}_1(T(y+x),y)=\int_0^\infty\frac{1}{\kappa|v|}e^{-(1-y)/\kappa|v|}(1-e^{-1/\kappa|v|})^{-1}\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\mathrm{d}v.\tag{2.4}$$

现在，为了估计 $\mathcal{K}_1$，我们用 v_* 表示满足以下条件的值：

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1(T,y) &\leq \int_{v_*}^{\infty} \frac{1}{v_*\kappa}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v + \int_0^{v_*} \frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|}(1+e^{-1/\kappa|v|})\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v \\ &\lesssim \mathcal{O}\left(\frac{1+\frac{e^{-1}}{1-y}}{\kappa v_*} + \frac{v_*}{\kappa T(x+y)^{1/2}}\right).\end{aligned}$$

对 v_* 进行优化后，我们得到：对于 $v_* = T(y+x)^{1/4}\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-1}}{2\,1-y()}\right)^{1/2}$，

$$\mathcal{K}_1(T,y+x) \lesssim \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-1}}{2(1-y)}\right)^{1/2} T(y+x)^{-1/4}. \tag{2.5}$$

由此可得，对于某个 $\delta \in (0,1)$，正 v 时密度的如下上界：

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} g^T(x,v)\mathrm{d}v &\lesssim \int_0^1 \left[\frac{\alpha}{\kappa}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)^{1/2} T(y+x)^{-1/4}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1-\alpha}{\kappa}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)^{1/2}\tau(y+x)^{-1/4}\right]\rho_g(x+y)\mathrm{d}y \\ &\lesssim \frac{\left(1+\frac{1}{e\delta}\right)^{1/2}}{\kappa}\int_0^{1-\delta}\rho_g(y+x)\left[\alpha T(x+y)^{1/4}+(1-\alpha)\tau(x+y)^{1/4}\right]\mathrm{d}y + \\ &\int_{1-\delta}^1 \left[\frac{\alpha}{\kappa}\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-1}}{2(1-y)}\right)^{1/2} T(y+x)^{-1/4} + \frac{1-\alpha}{\kappa}\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-1}}{2(1-y)}\right)^{1/2} T(y+x)^{-1/4}\right]\rho_g(x+y)\mathrm{d}y \\ &\lesssim \left[\frac{\alpha}{\kappa \inf_y T(x+y)^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa\inf_y \tau(x+y)^{1/4}}\right]\left[\left(1+\frac{1}{e\delta}\right)^{1/2}\int_0^{1-\delta}\rho_g(x+y)\mathrm{d}y\right. \\ &\qquad \left. + \|\rho_g\|_\infty \int_{1-\delta}^1 \left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-1}}{2(1-y)}\right)^{1/2}\mathrm{d}y\right].\end{aligned} \tag{2.6}$$

展开 δ 后，当 $\int_{1-\delta}^1 \left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-1}}{2\,1-y()}\right)^{1/2}\mathrm{d}y = \mathcal{O}\left(i\delta\cot(1)\csc(1)/2+\sqrt{\delta}(1+\delta)\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right)$ 取小值时，我们还注意到，2.6中最后一行的负速度部分，因此最终可将其估计为

$$\begin{aligned}\rho_g(x) &\lesssim \left[\frac{\alpha}{\kappa \underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa \underline{\tau}^{1/4}}\right]\left[C_1\left(1+\frac{1}{e\delta}\right)^{1/2} + C_2\|\rho_g\|_\infty\sqrt{\delta}\right] \\ &\lesssim \left[\frac{\alpha}{\kappa \underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa \underline{\tau}^{1/4}}\right]\left[\frac{C_1}{\sqrt{\delta}} + \|\rho_g\|_\infty C_2\sqrt{\delta}\right]\end{aligned} \tag{2.7}$$

对于某些有限常数 C_1, C_2。现在取 $\sqrt{\delta} = \frac{1}{2C_2\left[\frac{\alpha}{\kappa \underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa \underline{\tau}^{1/4}}\right]}$，可得对于所有$x \in \mathbb{T}$

$$\rho_g(x) \lesssim 4C_1C_2\left[\frac{\alpha}{\kappa \underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa \underline{\tau}^{1/4}}\right]^2. \tag{2.8}$$

密度下界：令 $\Lambda > 0$ 足够大，使得 $\frac{1}{(e^{1/\kappa|v|}-1)} \sim \kappa|v|$ 对于 $\cancel{|v| > \Lambda}$，并记

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty g^T(x,v)\mathrm{d}v = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\rho_g(x+y)\left[\alpha\mathcal{M}_{T(x+y)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}v \\
&\gtrsim \int_0^1 \int_\Lambda^\infty \frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\rho_g(x+y)\left[\alpha\mathcal{M}_{T(x+y)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v)\right]\mathrm{d}v\mathrm{d}y \\
&\gtrsim \int_0^1 \rho_g(x+y)\int_\Lambda^\infty \frac{1}{(e^{1/\kappa|v|}-1)}\frac{1}{\kappa|v|}\left[\alpha\mathcal{M}_{T(x+y)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v)\right]\mathrm{d}v\mathrm{d}y \\
&\gtrsim \int_0^1 \rho_g(x+y)\left[\int_{\frac{\Lambda}{\sqrt{T(x+y)}}}^\infty \frac{\alpha}{\kappa\sqrt{T(x+y)}}\mathcal{M}_1(v)\mathrm{d}v + \int_{\frac{\Lambda}{\sqrt{\tau(x+y)}}}^\infty \frac{1-\alpha}{\kappa\sqrt{\tau(x+y)}}\mathcal{M}_1(v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}y \\
&\gtrsim \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\alpha T(x+y)^{-1/2} + (1-\alpha)\tau(x+y)^{-1/2}\Big) \\
&\gtrsim 1 - \left[\alpha\underline{T}^{-1/2} + (1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right].
\end{aligned} \tag{2.9}$$

这就得到了所述的密度下界；在假设中的约束条件下，该量非负。□

现在我们来求压强 $P_{g^T}(x)$ 的上界和下界。首先注意到 $u_{g^T}(x) = \frac{\int vg^T \frac{x\ v\ \ v}{(\int g^T\ x\ v\ \ ,)}}{\mathrm{d}(,)\mathrm{d}v} = 0$。这是因为根据质量守恒，$\partial_x(u_{g^T}(x)\rho_{g^T}(x)) = 0$，因此 $\int vg^T(x,v)\mathrm{d}v = \int vg^T(0,v)\mathrm{d}v = 0$。此外，$\partial_x P_{g^T}(x) = -\frac{1}{\kappa}u_{g^T}(x)\rho_{g^T}(x) = 0$，所以压强在 x 中为常数。

引理 3. 当 α 足够小时，以下结论成立

$$\alpha\left(\sqrt{\underline{\tau}} - \sqrt{\underline{T}} + \frac{4\pi}{\kappa^2\underline{T}^{1/4}\underline{\tau}^{1/4}}\left(\sqrt{\underline{\tau}} - \underline{T}^{1/4}\underline{\tau}^{1/4}\right) + \frac{2\pi}{\kappa^2}\alpha\left(\frac{1}{\underline{T}^{1/4}} - \frac{1}{\underline{\tau}^{1/4}}\right)^2\right) \le \sqrt{\underline{\tau}} - \frac{2\pi}{\kappa^2}\frac{1}{\sqrt{\underline{\tau}}}, \tag{2.10}$$

我们对 $x\in\mathbb{T}$ 一致地有，

$$\left[\alpha\frac{\underline{T}^{1/2}}{2\pi}+(1-\alpha)\frac{\underline{\tau}^{1/2}}{2\pi}\right]-\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\lesssim P_{g^T}(x)$$
$$\lesssim C_0\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left[\alpha\sqrt{\overline{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\overline{\tau}}\right]$$

其中常数 C_0有限且与温度无关。

证明。压强的上界P_{g^T}：利用稳态 g^T的表示公式，我们需要对正速度下的以下量进行控制

$$J_+(x):=\int_0^1\rho_{g^T}(x+y)\int_0^\infty|v|\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa(1-e^{-1/\kappa|v|})}\left(\alpha\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v)\right)\mathrm{d}v.$$

令 v_* 为正且有限，稍后确定。利用当速度较大时 $\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{1-e^{-1/\kappa|v|}}\leq 1+\frac{1}{e(1-y)}$，而当速度有界时，$\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{1-e^{-1/\kappa|v|}}$关于 y一致有界这一事实，我们估计

$$\int_0^\infty\frac{ve^{y/\kappa|v|}}{e^{1/\kappa|v|}-1}\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v=\int_{v_*}^\infty\frac{ve^{y/\kappa|v|}}{e^{1/\kappa|v|}-1}\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v+\int_0^{v_*}\frac{ve^{y/\kappa|v|}}{e^{1/\kappa|v|}-1}\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v$$
$$\lesssim\frac{1}{\kappa}\int_{v_*}^\infty\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)|v|\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v+\frac{1}{\kappa}\int_0^{v_*}v\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v$$
$$\lesssim\frac{\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)}{\kappa}\frac{\sqrt{T(x+y)}}{v_*}+\frac{v_*\sqrt{T(x+y)}}{\kappa}.$$

在 v_*上优化后，即取 $v_*=\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)^{1/2}$，我们得到

$$\int_0^\infty\frac{ve^{y/\kappa|v|}}{e^{1/\kappa|v|}-1}\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v\lesssim\frac{\sqrt{\overline{T}}}{\kappa}\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)^{1/2}.\tag{2.11}$$

最后

$$J_+(x)\lesssim\int_0^1\rho_{g^T}(x+y)\sqrt{\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)}\left[\frac{\alpha\sqrt{\overline{T}}}{\kappa}+\frac{(1-\alpha)\sqrt{\overline{\tau}}}{\kappa}\right]\mathrm{d}y$$

最后，利用密度的上界ρ_{g^T}，我们有

$$J_+(x)\lesssim 4\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left[\alpha\sqrt{\overline{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\overline{\tau}}\right]\int_0^1\sqrt{\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)}\mathrm{d}y.\tag{2.12}$$

我们对负速度应用同样的类似论证，得到

$$P_{g^T}(x)\lesssim C_0\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left[\alpha\sqrt{\overline{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\overline{\tau}}\right]\tag{2.13}$$

其中常数 C_0 有限。

压力下界 P_{g^T}：为此，我们对 $e^{-(1-y)/\kappa|v|} \geq 1 - \frac{1-y}{\kappa|v|}$ 进行估计，从而得到正速度

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |v| \frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{1-e^{-1/\kappa|v|}} \mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v &\gtrsim \int_0^\infty v\mathcal{M}_{T(x+y)}(v) - \int_0^\infty |v| \frac{1-y}{\kappa|v|} \mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v \\ &= \frac{\sqrt{T(x+y)}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1-y}{2\kappa} \gtrsim \frac{\sqrt{\underline{T}}}{2\pi} - \frac{1-y}{2\kappa}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

因此

$$\begin{aligned}J_+(x) &\gtrsim \int_0^1 \rho_{g^T}(x+y) \left[\alpha \frac{\underline{T}^{1/2}}{2\pi} + (1-\alpha)\frac{\underline{\tau}^{1/2}}{2\pi}\right] \mathrm{d}y - \int_0^1 \rho_{g^T}(x+y)\frac{1-y}{2\kappa}\mathrm{d}y \\ &\gtrsim \left[\alpha \frac{\underline{T}^{1/2}}{2\pi} + (1-\alpha)\frac{\underline{\tau}^{1/2}}{2\pi}\right] - \frac{1}{\kappa}\left[\frac{\alpha}{\kappa \underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa \underline{\tau}^{1/4}}\right]^2.\end{aligned}$$

汇总负 v 方向的相同估计，我们写作

$$P_{g^T}(x) \gtrsim \left[\alpha \frac{\underline{T}^{1/2}}{2\pi} + (1-\alpha)\frac{\underline{\tau}^{1/2}}{2\pi}\right] - \frac{1}{\kappa}\left[\frac{\alpha}{\kappa \underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa \underline{\tau}^{1/4}}\right]^2.$$

约束条件（2.10）是使该下界非负所必需的。 □

2.3. 映射 $\mathcal{F}$ 的压缩性。由于我们已确保方程（$g = g^T$ 2.1）的稳态 的唯一性，正如第 2.1 小节所证明的，因此可以定义映射

$$\mathcal{F} : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T}), \qquad (\mathcal{F}T)(x) = \frac{\int_{\mathbb{T}} |v|^2 g(x,v)\mathrm{d}v}{\int_{\mathbb{T}} g(x,v)\mathrm{d}v} = \frac{P_{g^T}}{\rho_{g^T}}(x).$$

我们的目标是证明该映射是压缩的，这意味着存在一个不动点。该不动点的存在性，即 $T \in C(\mathbb{T})$ 使得 $T(x) = T_g(x)$ 对所有$x \in \mathbb{T}$成立，这意味着线性模型（2.1）中求得的稳态对应于非线性 BGK 模型（1.1）中的一个稳态。

在陈述之前，我们先定义以下集合，该集合以 α 为参数，用于确定 $\mathcal{F}$ 的 Lipschitz 常数：

$$\mathcal{C}_{\underline{T},\underline{\tau},\kappa}=(0,1)\cap\Bigg\{\alpha:8C\alpha\left(1-\left[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right)^2\left[\frac{\alpha}{\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\underline{\tau}^{1/4}}\right]^4\times$$
$$\times\left[\frac{\left((1-\alpha)\sqrt{\overline{\tau}}+\alpha\sqrt{\overline{T}}\right)}{\sqrt{\kappa}\underline{T}^2\left(1-2[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}]\right)}\left(1+\frac{4}{\kappa}\right)+\frac{1}{\kappa\underline{T}^{1/8}}\right]\in[0,1)\Bigg\}.$$

命题 2. 设有两个温度分布 $T_1, T_2 \in C(\mathbb{T})$。假设

$$\inf_{x\in\mathbb{T}}\tau(x)=:\underline{\tau}>\inf_{x\in\mathbb{T}}T(x):=\underline{T},\ \underline{\tau}>2^4\ and\ \alpha\in\mathcal{C}_{\underline{T},\underline{\tau},\kappa},$$

该映射 $\mathcal{F}$ 具有压缩性质

$$\|\mathcal{F}(T_1)-\mathcal{F}(T_2)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\le C_{\alpha,\underline{T},\underline{\tau},\kappa}\|T_1-T_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

对于某个取决于 α、$\underline{T}$、$\underline{\tau}$、κ 的显式有限常数 $C_{\alpha,\underline{T},\underline{\tau},\kappa}\in[0,1)$.

证明。我们固定两个函数 T_1、$T_2\in C(\mathbb{T})$，利用密度的上下界和压强的上界，计算得:

$$|\mathcal{F}(T_1)(x)-\mathcal{F}(T_2)(x)|\le$$
$$\left(1-\left[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right)^{-2}\Bigg\{\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left[\alpha\sqrt{\overline{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\overline{\tau}}\right]|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}|(x)+$$
$$+4\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2|P_{g^{T_1}}-P_{g^{T_2}}|(x)\Bigg\}. \tag{2.15}$$

现在，我们利用稳态的表示来估计密度之差:

$$|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}|(x)=\Bigg|\int_0^1\int_0^\infty\frac{e^{y/\kappa|v|}}{\kappa|v|(e^{1/\kappa|v|}-1)}\Big[\rho_{g^{T_1}}(x+y)(\alpha\mathcal{M}_{T_1(x+y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v))-$$
$$-\rho_{g^{T_2}}(x+y)(\alpha\mathcal{M}_{T_2(x+y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v))\Big]\mathrm{d}v\mathrm{d}y\Bigg|+$$
$$\Bigg|\int_0^1\int_{-\infty}^0\frac{e^{y/\kappa|v|}}{\kappa|v|(e^{1/\kappa|v|}-1)}\Big[\rho_{g^{T_1}}(x-y)(\alpha\mathcal{M}_{T_1(x-y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x-y)}(v))-$$
$$-\rho_{g^{T_2}}(x-y)(\alpha\mathcal{M}_{T_2(x-y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x-y)}(v))\Big]\mathrm{d}v\mathrm{d}y\Bigg|. \tag{2.16}$$

我们考察正速度，并写出

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^\infty \frac{e^{y/\kappa|v|}}{\kappa|v|(e^{1/\kappa|v|}-1)}\Big[&\rho_{g^{T_1}}(x+y)(\alpha\mathcal{M}_{T_1(x+y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v))-\\&-\rho_{g^{T_2}}(x+y)(\alpha\mathcal{M}_{T_2(x+y)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v))\Big]\mathrm{d}v\mathrm{d}y=\\\int_0^1(\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}})(x+y)\big[&(1-\alpha)\mathcal{K}_1(\tau,y)+\alpha\mathcal{K}_1(T_2,y)\big]\mathrm{d}y+\\&+\alpha\int_0^1\rho_{g^{T_1}}(x+y)\big[\mathcal{K}_1(T_1,y)-\mathcal{K}_1(T_2,y)\big]\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{2.17}$$

其中 $\mathcal{K}_1$ 是在（2.4）中定义的积分核。结合负速度，得到

$$\begin{aligned}&|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}|(x)\lesssim 2\alpha\|\rho_{g^{T_1}}\|_\infty\int_0^1|\mathcal{K}_1(T_1(x+y),y)-\mathcal{K}_1(T_2(x+y),y)|+\\&+|\mathcal{K}_1(T_1(x-y),y)-\mathcal{K}_1(T_2(x-y),y)|\mathrm{d}y\\&+\int_0^1|(1-\alpha)\mathcal{K}_1(\tau(x+y),y)+\alpha\mathcal{K}_1(T_2(x+y),y)||\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}|(x+y)\mathrm{d}y\\&+\int_0^1|(1-\alpha)\mathcal{K}_1(\tau(x-y),y)+\alpha\mathcal{K}_1(T_2(x-y),y)||\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}|(x-y)\mathrm{d}y\\&\lesssim 8\alpha\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\times\\&\times\int_0^1|\mathcal{K}_1(T_1(x+y),y)-\mathcal{K}_1(T_2(x+y),y)|+|\mathcal{K}_1(T_1(x-y),y)-\mathcal{K}_1(T_2(x-y),y)|\,\mathrm{d}y\\&+2\|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}\|_\infty\big[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}\big]\end{aligned}\tag{2.18}$$

根据（ $\mathcal{K}_1$ 在（2.5）中的上界。现在注意到， $\mathcal{K}_1$ 满足

$$|\mathcal{K}_1(T_1(y),y)-\mathcal{K}_1(T_2(y),y)|\le C|T_1(y)-T_2(y)|$$

对于一个在 $y\in\mathbb{T}$ 上可积的常数 C 。事实上，如果我们计算

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{K}_1(t,y)&=\frac{d}{dt}\int_0^\infty\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v\\&=\int_0^\infty\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\left[-\frac{1}{2t^{3/2}}\frac{e^{-v^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}+\frac{v^2}{2t^2}\frac{e^{-v^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}\right]\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2t^2}\int_0^\infty\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\mathcal{M}_t(v)(-t+v^2)\mathrm{d}v\le\frac{1}{2t^2}\int_0^\infty\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\mathcal{M}_t(v)v^2\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

利用与上文类似的估计，即将积分拆分为 $\int_0^{v_*}\cdots \mathrm{d}v+\int_{v_*}^{\infty}\cdots \mathrm{d}v$，我们写出

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}_1(t,y)\lesssim \frac{1}{2t^2}\left\{v_*+\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)\frac{1}{\kappa v_*}\right\},$$

对 v_* 进行优化后，得到

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}_1(t,y)\lesssim \frac{1}{2t^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)\frac{1}{\kappa}}.$$

这确实意味着

$$|\mathcal{K}_1(T_1(y),y)-\mathcal{K}_1(T_2(y),y)|\leq \frac{1}{2t^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)\frac{1}{\kappa}}\,|T_1(y)-T_2(y)|. \tag{2.19}$$

将其代入式（2.18）可得

$$\begin{aligned}|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}|(x)\lesssim 8\alpha\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2 2\|T_1-T_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\int_0^1\frac{1}{2\underline{T}^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)\frac{1}{\kappa}}\mathrm{d}y\\ +2\|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\big[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}\big].\end{aligned} \tag{2.20}$$

因此存在一个有限常数 C，使得

$$\begin{aligned}|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}|(x)\lesssim \frac{8C\alpha}{\sqrt{\kappa}\underline{T}^2}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\|T_1-T_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\\ +2\|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\big[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}\big],\end{aligned} \tag{2.21}$$

这意味着，在左侧对 x 取上确界后，

$$\|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\Big(1-2[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}]\Big)\lesssim \frac{8C\alpha}{\sqrt{\kappa}\underline{T}^2}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\|T_1-T_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \tag{2.22}$$

或者，只要满足 $\Big(1-2[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}]\Big)>0$，即当 $\underline{\tau}>\underline{T}$、 $\underline{\tau}\geq 2^4$ 和 $\alpha<\frac{2^{-1}-\underline{\tau}^{-1/4}}{\underline{T}^{-1/4}-\underline{\tau}^{-1/4}}$ 时，我们就有

$$\|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\lesssim \frac{8C\alpha}{\sqrt{\kappa}\underline{T}^2}\frac{\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2}{\Big(1-2[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}]\Big)}\|T_1-T_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \tag{2.23}$$

接下来，我们估计压力之差：

$$
\begin{aligned}
|P_{g^{T_1}} - P_{g^{T_2}}|(x) = \Bigg| \int_0^1 \int_0^\infty \frac{|v| e^{y/\kappa|v|}}{\kappa(e^{1/\kappa|v|}-1)} \Big[& \rho_{g^{T_1}}(x+y)(\alpha \mathcal{M}_{T_1(x+y)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v)) - \\
& - \rho_{g^{T_2}}(x+y)(\alpha \mathcal{M}_{T_2(x+y)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x+y)}(v)) \Big] \mathrm{d}v\mathrm{d}y \Bigg| + \\
\Bigg| \int_0^1 \int_{-\infty}^0 \frac{|v| e^{y/\kappa|v|}}{\kappa(e^{1/\kappa|v|}-1)} \Big[& \rho_{g^{T_1}}(x-y)(\alpha \mathcal{M}_{T_1(x-y)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x-y)}(v)) - \\
& - \rho_{g^{T_2}}(x-y)(\alpha \mathcal{M}_{T_2(x-y)}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x-y)}(v)) \Big] \mathrm{d}v\mathrm{d}y \Bigg|.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

考察正速度时，我们需要估计的项为

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \Bigg\{ \alpha \int_0^\infty \frac{|v| e^{y/\kappa|v|}}{\kappa(e^{1/\kappa|v|}-1)} \mathcal{M}_{T_1(x+y)}(v)(\rho_{g^{T_1}} - \rho_{g^{T_2}})(x+y)\mathrm{d}v + \\
& \qquad + \alpha \int_0^\infty \frac{|v| e^{y/\kappa|v|}}{\kappa(e^{1/\kappa|v|}-1)} \rho_{g^{T_2}}(x+y)(\mathcal{M}_{T_1(x+y)} - \mathcal{M}_{T_2(x+y)})(v)\mathrm{d}v + \\
& \qquad\qquad + (1-\alpha) \int_0^\infty \frac{|v| e^{y/\kappa|v|}}{\kappa(e^{1/\kappa|v|}-1)} \mathcal{M}_{\tau(x+y)}(\rho_{g^{T_1}} - \rho_{g^{T_2}})(x+y)\mathrm{d}v \Bigg\} \mathrm{d}y \\
= & \int_0^1 \Bigg\{ \big((1-\alpha)\mathcal{K}_2(\tau(x+y), y) + \alpha \mathcal{K}_2(T_1(x+y), y)\big)(\rho_{g^{T_1}} - \rho_{g^{T_2}})(x+y) \\
& \qquad + \alpha \rho_{g^{T_2}}(x+y)\big(\mathcal{K}_2(T_1(x+y), y) - \mathcal{K}_2(T_2(x+y), y)\big) \Bigg\} \mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

其中

$$
\mathcal{K}_2(T(x+y, y) := \int_0^\infty \frac{|v| e^{y/\kappa|v|}}{\kappa(e^{1/\kappa|v|}-1)} \mathcal{M}_{T(x+y)}(v)\mathrm{d}v. \tag{2.26}
$$

上文已在（2.11）中计算出该积分核的一个上界。然后，将负速度也纳入考虑，我们得到以下压力差的上界：

压力:

$$
\begin{aligned}
|P_{g^{T_1}}-P_{g^{T_2}}|(x)\lesssim \|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\int_0^1 \Big[&|(1-\alpha)\mathcal{K}_2(\tau(x+y),y)+\alpha\mathcal{K}_2(T_1(x+y),y)|\\
&+|(1-\alpha)\mathcal{K}_2(\tau(x-y),y)+\alpha\mathcal{K}_2(T_1(x-y),y)|\Big]\mathrm{d}y\\
+\alpha\|\rho_{g^{T_2}}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\int_0^1 \Big[&|\mathcal{K}_2(T_1(x+y),y)-\mathcal{K}_2(T_2(x+y),y)|\\
&+|\mathcal{K}_2(T_1(x-y),y)-\mathcal{K}_2(T_2(x-y),y)|\Big]\mathrm{d}y\\
\lesssim \frac{16C\alpha}{\sqrt{\kappa}\underline{T}^2}&\frac{\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2}{\left(1-2[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}]\right)}\left((1-\alpha)\frac{\sqrt{\overline{\tau}}}{\kappa}+\alpha\frac{\sqrt{\overline{T}}}{\kappa}\right)\|T_1-T_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\\
+4\alpha\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\int_0^1 \Big[&|\mathcal{K}_2(T_1(x+y),y)-\mathcal{K}_2(T_2(x+y),y)|\\
&+|\mathcal{K}_2(T_1(x-y),y)-\mathcal{K}_2(T_2(x-y),y)|\Big]\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

其中我们应用了 $\mathcal{K}_2$ 和 $\|\rho_{g^{T_1}}-\rho_{g^{T_2}}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ 的上界，而常数 C 包含了 $\sqrt{1+e^{-1}}/(1-y)$ 的可积性。

接下来我们注意到，与 $\mathcal{K}_1$ 的情形一样，核 $\mathcal{K}_2$ 也满足

$$
|\mathcal{K}_2(T_1(y),y)-\mathcal{K}_2(T_2(y),y)|\le C|T_1(y)-T_2(y)|
$$

对于常数 C，它关于 $y\in\mathbb{T}$ 可积：为此我们计算

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{K}_2(t,y)&=\frac{1}{t^2}\int_0^\infty\frac{|v|e^{y/\kappa|v|}}{2\kappa(e^{1/\kappa|v|}-1)}\mathcal{M}_t(v)(v^2-t)\mathrm{d}v=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^\infty\frac{v}{2\kappa}\frac{e^{y/\kappa|v|\sqrt{t}}}{e^{1/\kappa|v|\sqrt{t}}-1}\mathcal{M}_1(v)(v^2-1)\mathrm{d}v\\
&\lesssim\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^\infty\frac{v^3}{2\kappa}\frac{e^{y/\kappa|v|\sqrt{t}}}{e^{1/\kappa|v|\sqrt{t}}-1}\mathcal{M}_1(v)\mathrm{d}v\lesssim\frac{v_*^3}{\kappa\sqrt{t}}+\frac{1}{\kappa t}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)\int_{v_*}^\infty v^3\mathcal{M}_1(v)\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

当 v_* 足够大时，这小于

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{K}_2(t,y)\lesssim\frac{v_*^3}{\kappa\sqrt{t}}+\frac{1}{\kappa t}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)\frac{(2+v_*^2)}{\sqrt{2\pi}}e^{-v_*^2/2}\lesssim\frac{v_*^3}{\kappa\sqrt{t}}+\frac{1}{\kappa t}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)\left(\frac{2}{v_*^3}+\frac{1}{v_*}\right).
$$

于是取 $v_*=\left(\frac{1+\frac{e^{-1}}{1-y}}{\sqrt{t}}\right)^{1/4}$，我们得到

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{K}_2(t,y)\lesssim\frac{1}{t^{1/8}}\frac{\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)^{3/4}}{\kappa},
$$

这意味着

$$|\mathcal{K}_2(T_1(y),y)-\mathcal{K}_2(T_2(y),y)|\lesssim\frac{1}{\kappa\underline{T}^{1/8}}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)^{3/4}|T_1(y)-T_2(y)|.$$

将其代入（2.28）：

$$\begin{aligned}|P_{g^{T_1}}-P_{g^{T_2}}|(x)\lesssim\frac{16C\alpha}{\sqrt{\kappa}\underline{T}^2}\frac{\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2}{\left(1-2[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}]\right)}\left((1-\alpha)\frac{\sqrt{\overline{\tau}}}{\kappa}+\alpha\frac{\sqrt{\overline{T}}}{\kappa}\right)\|T_1-T_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\\+\frac{8\alpha}{\kappa}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\frac{1}{\underline{T}^{1/8}}\|T_1-T_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

最后，结合（2.15）、（2.23）和（2.28），可得 $\mathcal{F}$ 的压缩映射：

$$\sup_{x\in\mathbb{T}}|\mathcal{F}(T_1)(x)-\mathcal{F}(T_2)(x)|\leq C_{\alpha,\underline{T},\underline{\tau},\kappa}\|T_1-T_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\tag{2.29}$$

其中

$$\begin{aligned}C_{\alpha,\underline{T},\underline{\tau},\kappa}=8C\alpha\left(1-\left[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right)^2\left[\frac{\alpha}{\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\underline{\tau}^{1/4}}\right]^4\times\\\times\left\{\frac{\left((1-\alpha)\sqrt{\overline{\tau}}+\alpha\sqrt{\overline{T}}\right)}{\sqrt{\kappa}\underline{T}^2\left(1-2[(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/4}+\alpha\underline{T}^{-1/4}]\right)}\left(1+\frac{4}{\kappa}\right)+\frac{1}{\kappa\underline{T}^{1/8}}\right\}.\end{aligned}$$

□

2.4. 定理1的证明。定义集合 $S_{\underline{T},\bar{T}}:=\left\{\underline{T}\leq T(x)\leq\bar{T}\right\}$。为了应用巴拿赫不动点定理，我们希望确保映射 $\mathcal{F}$ 将集合 $S_{\underline{T},\bar{T}}$ 映射到其自身，即

$$\mathcal{F}(S_{\underline{T},\bar{T}})\subset S_{\underline{T},\bar{T}}.\tag{2.30}$$

利用引理2 和3中的估计，我们得到 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(T)(x)=\int_{\mathbb{T}}|v|^2g_{(}\int_{\mathbb{T}}g\ x\ v\quad v\quad v\quad,)\mathrm{d}()\mathrm{d}$像的上下界，如下引理所述。

引理 4. 在条件 (2.10) 成立时，关于 α 和 $\underline{\tau}$，我们对 $x\in\mathbb{T}$ 次 at

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\left[\left[\alpha\frac{\underline{T}^{1/2}}{2\pi}+(1-\alpha)\frac{\underline{\tau}^{1/2}}{2\pi}\right]-\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\right]\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^{-2}\lesssim\\&\mathcal{F}(T)(x)\lesssim\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left[\alpha\sqrt{\overline{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\overline{\tau}}\right]\frac{1}{\left(1-\left[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right)}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

因此，为了确保（2.30）成立，我们需要假设

$$\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left[\alpha\sqrt{\bar{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\bar{\tau}}\right]\left(1-\left[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right)^{-1}\leq\bar{T}$$

$$\text{and}\quad\frac{1}{4}\left[\left[\alpha\frac{\underline{T}^{1/2}}{2\pi}+(1-\alpha)\frac{\underline{\tau}^{1/2}}{2\pi}\right]-\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\right]\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^{-2}\geq\underline{T}. \tag{2.32}$$

在上述方程中令 $\alpha=0$，可知只要先选取

$$\bar{T}>\frac{\sqrt{\bar{\tau}}}{\kappa^2(\sqrt{\underline{\tau}}-1)}\quad\text{and}\quad\underline{T}<\frac{\sqrt{\underline{\tau}}}{8\pi}-\frac{1}{\kappa}. \tag{2.33}$$

$^-$，再选取足够小的 α，使其取值依赖于 $\bar{\tau}$、$\underline{\tau}$、T、$\underline{T}$ 和 κ。

定理 *1* 的证明。由于 $\mathcal{F}(S_{\underline{T},\,\bar{\tau}})\subset S_{\underline{T},\,\bar{\tau}}$，且只要 $\alpha\in\mathcal{C}_{\underline{T},\,\underline{\tau},\,\kappa}$，映射 $\mathcal{F}$ 就是压缩的，因此我们得出存在唯一的不动点，即存在唯一的 $T\in C(\mathbb{T})$，使得 $T\equiv T_{g^\circ}$ 不动点的唯一性意味着，满足条件 $\underline{T}\leq T_g(x)\leq T$ 的稳态 $^-$ 对所有 $x\in\mathbb{T}$ 以及满足条件 (2.33) 的 $\underline{T}$、T 都是唯一的，只要 α 足够小，使得 $\alpha\in\mathcal{C}_{\underline{T},\,\underline{\tau},\,\kappa}$ 属于 $(0,1)$。□

3. Linear stability

本节证明带权 L^2 空间中相对于权重 $g(x,v)^{-1}$ 的动力学扰动稳定性。

在围绕非平衡稳态 g 对算子进行线性化并研究其稳定性之前，我们先给出关于 g 的另外两个性质，它们将用于稳定性的基本估计。具体来说，我们要证明高阶矩的界。

3.1. 非平衡稳态的三阶矩和四阶矩的界。

我们来定义稳态 g^T的归一化三阶矩和四阶矩。

定义 1（归一化三阶矩和四阶矩）。我们来定义对应于温度 T 的稳态 g^T 的三阶矩：

$$d_3(x):=\frac{1}{\rho_{g^T}T^{3/2}}\int_{\mathbb{R}}v^3g^T(x,v)\mathrm{d}v$$

而第四阶矩为

$$d_4(x):=\frac{1}{\rho_{g^T}T^2}\int_{\mathbb{R}}v^4g^T(x,v)\mathrm{d}v-3.$$

命题 3. 当 α 足够小且 $\underline{\tau} > 1$ 时，对于非平衡稳态 g 的第三个归一化矩，我们有：对 $x \in \mathbb{T}$ 一致成立，

$$\frac{\bar{T}^{-3/2}}{\kappa}\left\{2\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2(\alpha\underline{T}+(1-\alpha)\underline{\tau})-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\alpha\sqrt{\bar{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\bar{\tau}}\right]\right\}$$
$$\lesssim d_3(x)\lesssim$$
$$2^{-1/4}C\left[\alpha\sqrt{\bar{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\bar{\tau}}\right]\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left[1-\left[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right]^{-1}\underline{T}^{-3/2},$$

而对于 g 的第四个归一化矩，

$$\frac{\bar{T}^{-2}}{4}\left[\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^{-2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\kappa}\left(\alpha\underline{T}^{3/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{3/2}\right)-\frac{1}{\kappa^2}\left(\alpha\bar{T}+(1-\alpha)\bar{\tau}\right)\right]-3$$
$$\lesssim d_4(x)\lesssim$$
$$\frac{4C}{\sqrt{2}}\underline{T}^{-2}\left[1-\left[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right]^{-1}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left[\alpha\bar{T}^{3/4}+(1-\alpha)\bar{\tau}^{3/4}\right]$$

对于某个有限常数 C。

证明。 d_3 的上界：我们先利用 g^T 的表示公式，求出 d_3 的上界。对于正速度，我们写作

$$\int_0^\infty v^3 g^T(x,v)\mathrm{d}v=\int_0^\infty\int_0^1 v^3\frac{e^{-(1-y)/\kappa|v|}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\rho_g(x+y)\left(\alpha\mathcal{M}_{T(y+x)}+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(y+x)}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}v.$$

我们对以下项作上估计

$$\alpha\int_0^1\rho_g(x+y)\left(\int_0^\infty\frac{|v|^2e^{-(1-y)/\kappa}}{\kappa(1-e^{-1/\kappa|v|})}\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}y$$

照常将速度分为小速度和大速度两部分，并进行优化。这对于小 δ 时的 $v_*>\delta$，给出上界

$$\alpha\int_0^1\rho_g(x+y)\left[v_*\sqrt{\frac{T}{2}}+\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)\frac{\sqrt{T}}{v_*}\right]\mathrm{d}y$$

当 $v_*=\sqrt{\sqrt{2}(1+\overline{1/(e(1-y))}}$ 时，该式变为

$$\alpha 2^{-1/4}\sqrt{\bar{T}}\int_0^1\rho_g(x+y)\sqrt{\left(1+\frac{1}{e(1-y)}\right)}\mathrm{d}y\lesssim 4\cdot 2^{-1/4}C\sqrt{\bar{T}}\alpha\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2.$$

最终，我们确实得到了结果，其中也汇总了负速度以及含有 τ 的项，

$$d_3(x)\lesssim 2^{-1/4}C\left[\alpha\sqrt{\bar{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\bar{\tau}}\right]\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left[1-\left[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right]^{-1}\underline{T}^{-3/2}$$

在最后一行，我们对 $\rho_g(x)$ 应用了下界，从而得到 $d_3(x)$ 的上界。

d_3的下界：关于 d_3的下界，我们利用不等式 $e^{-(1-y)/\kappa|v|} \geq 1-\frac{1-y}{\kappa|v|}$，得到

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_0^1 \rho_g(x+y)\left(\int_0^\infty \frac{|v|^2 e^{-(1-y)/\kappa}}{\kappa(1-e^{-1/\kappa|v|})}\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}y \gtrsim \\
&\qquad \alpha\int_0^1 \rho_g(x+y)\left(\int_0^\infty \frac{|v|^2}{\kappa}\left(1-\frac{1-y}{\kappa|v|}\right)\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\mathrm{d}v\right)dy \\
&\qquad = \alpha\int_0^1 \rho_g(x+y)\left[\frac{T(x+y)}{2\kappa}-\frac{1-y}{\kappa}\frac{\sqrt{T(x+y)}}{\sqrt{2\pi}}\right]\mathrm{d}y \\
&\qquad \gtrsim \alpha\frac{\underline{T}}{2\kappa}-\frac{\alpha}{2}\frac{\sqrt{\bar{T}}}{\sqrt{2\pi}\kappa}4\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2.
\end{aligned}$$

综上可得

$$\begin{aligned}
d_3(x) &\gtrsim \frac{1}{\|\rho_g\|_{L^\infty}\bar{T}^{3/2}}\Bigg\{\alpha\left(\frac{\underline{T}}{2\kappa}-\frac{\sqrt{\bar{T}}}{2\sqrt{2\pi}\kappa}4\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\right) \\
&\qquad\qquad +(1-\alpha)\left(\frac{\underline{\tau}}{2\kappa}-\frac{\sqrt{\bar{\tau}}}{2\sqrt{2\pi}\kappa}4\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\right)\Bigg\} \\
&= \frac{\bar{T}^{-3/2}}{\kappa}\left\{2\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2(\alpha\underline{T}+(1-\alpha)\underline{\tau})-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\alpha\sqrt{\bar{T}}+(1-\alpha)\sqrt{\bar{\tau}}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

参数 α 足够小时，可确保下界的非负性。 d_4的上界：现在继续讨论 d_4的上界。根据 g^T 在正速度下的表示公式，我们得到

$$\int_0^\infty v^4 g^T(x,v)\mathrm{d}v = \int_0^\infty\int_0^1 v^3\frac{e^{-(1-y)/\kappa}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\rho_g(x+y)\left(\alpha\mathcal{M}_{T(y+x)}+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(y+x)}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}v.$$

那么该项

$$\alpha\int_0^1 \rho_g(x+y)\left(\int_0^\infty \frac{|v|^3 e^{-(1-y)/\kappa}}{\kappa(1-e^{-1/\kappa|v|})}\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}y$$

出于与之前相同的原因， d_3 有如下上界

$$
\begin{aligned}
&\alpha\int_0^1\rho_g(x+y)\left[\int_0^{v_*}|v|^3\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\frac{e^{-(1-y)/\kappa}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\mathrm{d}v+\int_{v_*}^{\infty}|v|^3\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\frac{e^{-(1-y)/\kappa}}{\kappa|v|(1-e^{-1/\kappa|v|})}\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}y\\
&\lesssim\alpha\int_0^1\rho_g(x+y)\left[v_*\int_0^{v_*}|v|^2\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\mathrm{d}v+\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)\int_{v_*}^{\infty}|v|^3\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}y\\
&\lesssim\alpha\int_0^1\rho_g(x+y)\left[v_*\frac{T(x+y)}{\sqrt{2}}+\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)\sqrt{\frac{T(x+y)}{2\pi}}e^{-v_*^2/(2T(x+y))}(v_*+2T(x+y))\right]\mathrm{d}y\\
&\lesssim\alpha\int_0^1\rho_g(x+y)\left[v_*\frac{T(x+y)}{\sqrt{2}}+\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)\left(\frac{2^3\sqrt{T(x+y)}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{v_*}+\frac{2T(x+y)^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{v_*^3}\right)\right]\mathrm{d}y.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

现在我们对 v_*进行优化，即需要求解 $v_*^4\frac{T}{\sqrt{2}}=\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)\left(\frac{2^3\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}v_*^2+\frac{2T^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)$，该多项式的零点阶数为 $T^{-1/4}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)^{1/2}$。因此我们取 $v_*=T^{-1/4}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)^{1/2}$，于是回到（3.1）可得上界

$$
\begin{aligned}
&\alpha\int_0^1\rho_g(x+y)T(x+y)^{-1/4}\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)^{1/2}\frac{T(x+y)}{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\\
&\qquad\le\frac{4\alpha}{\sqrt{2}}\bar{T}^{3/4}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\int_0^1\left(1+\frac{e^{-1}}{1-y}\right)^{1/2}\mathrm{d}y\\
&\qquad\lesssim C\frac{4\alpha}{\sqrt{2}}\bar{T}^{3/4}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

对某个有限常数 C，这里我们还应用了引理 2给出的密度 ρ_g上界。因此，综合负速度项和（$1-\alpha$）项，我们得到上界

$$
\int_{\mathbb{R}}|v|^4g(x,v)\mathrm{d}v\lesssim\frac{4C}{\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left\{\alpha\bar{T}^{3/4}+(1-\alpha)\bar{\tau}^{3/4}\right\}
$$

结合密度的下界可得

$$
d_4(x)\lesssim\underline{T}^{-2}\left[1-\left[\alpha\underline{T}^{-1/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right]^{-1}\frac{4C}{\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\left\{\alpha\bar{T}^{3/4}+(1-\alpha)\bar{\tau}^{3/4}\right\}.
$$

d_4 的下界：最后，对于下界，我们写出

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_0^1 \rho_g(x+y)\left(\int_0^\infty \frac{|v|^3 e^{-(1-y)/\kappa}}{\kappa(1-e^{-1/\kappa|v|})}\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}y\\
&\qquad\gtrsim \alpha\int_0^1 \rho_g(x+y)\left(\int_0^\infty \frac{|v|^3}{\kappa}\left(1-\frac{1-y}{\kappa|v|}\right)\mathcal{M}_{T(y+x)}(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}y\\
&\qquad\gtrsim \alpha\int_0^1 \rho_g(x+y)\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\kappa}T(x+y)^{3/2}-\frac{(1-y)}{\kappa^2}\frac{T(x+y)}{2}\right]\mathrm{d}y\\
&\qquad\gtrsim \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\kappa}\underline{T}^{3/2}-\alpha\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\frac{\bar{T}}{\kappa^2}.
\end{aligned}$$

最后，再结合负速度、$(1-\alpha)$ 项以及密度的上界，我们写出

$$\begin{aligned}
d_4(x)\gtrsim&\frac{\bar{T}^{-2}}{4}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^{-2}\left[\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\underline{T}^{3/2}}{\kappa}-\alpha\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\frac{\bar{T}}{\kappa^2}\right.\\
&\left.+(1-\alpha)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\underline{T}^{3/2}}{\kappa}-(1-\alpha)\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\frac{\bar{T}}{\kappa^2}\right]-3\\
=&\frac{\bar{T}^{-2}}{4}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^{-2}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\kappa}\left(\alpha\underline{T}^{3/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{3/2}\right)\right.\\
&\left.-\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\frac{1}{\kappa^2}\left(\alpha\bar{T}+(1-\alpha)\bar{\tau}\right)\right]-3\\
=&\frac{\bar{T}^{-2}}{4}\left[\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}}+\frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^{-2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\kappa}\left(\alpha\underline{T}^{3/2}+(1-\alpha)\underline{\tau}^{3/2}\right)-\frac{1}{\kappa^2}\left(\alpha\bar{T}+(1-\alpha)\bar{\tau}\right)\right]-3.
\end{aligned}$$

□

3.2. 算子的线性化与分解。本小节中，我们围绕非平衡解 g 对算子 $\mathcal{L}$ 进行线性化：$f(t,x,v)=g(x,v)+\varepsilon h(t,x,v)$。在下面的引理中，我们给出新未知量$h$ 所满足的线性化演化方程。

引理 5. 围绕稳态 g 的线性化方程为

$$\begin{aligned}
\partial_t h=\mathfrak{L}h=-v\partial_x h+\frac{1}{\kappa}\Bigg(&\alpha\mathcal{M}_{T_g(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{uv}{T_g}+\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{T_g}-1\right)\left(\frac{v^2}{T_g}-1\right)\right)h(x,u)\mathrm{d}u\\
&+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x)}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,u)\mathrm{d}u-h\Bigg)
\end{aligned}\tag{3.3}$$

证明. 记 $f=g+\varepsilon h$，则有

$$\rho_f=\rho_g+\varepsilon\rho_h \quad \text{and} \quad \rho_f u_f=\int_{-\infty}^{\infty} vf(x,v)\mathrm{d}v=\rho_g u_g+\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} h(x,v)v\mathrm{d}v.$$

我们提醒 $u_g=0$，参见引理 3 上方的相关讨论，因此记$m_h:=\int_{-\infty}^{\infty} uh(x,\ u)\mathrm{d}u$,

$$u_f=\frac{\varepsilon m_h}{\rho_g(1+\varepsilon\rho_h/\rho_g)}=\frac{\varepsilon m_h}{\rho_g}+\mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

对于温度，我们将其写成关于 ε 的一阶展开

$$\rho_f\left(T_f+u_f^2\right)=\rho_g T_g+\varepsilon P_h,$$

因此

$$\begin{aligned}
T_f&=\frac{T_g+\varepsilon P_h/\rho_g}{1+\varepsilon\rho_h/\rho_g}-u_f^2=T_g+\varepsilon\left(\frac{P_h}{\rho_g}-\frac{\rho_h}{\rho_g}T_g\right)-\left(u_g+\varepsilon\left(\frac{m_h}{\rho_g}-\frac{\rho_h u_g}{\rho_g}\right)\right)^2+o(\varepsilon)\\
&=T_g+\varepsilon\left(\frac{P_h}{\rho_g}-\frac{\rho_h}{\rho_g}T_g\right)+o(\varepsilon)=T_g\left(1+\varepsilon\left(\frac{P_h}{P_g}-\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)\right)+o(\varepsilon)\\
&=T_g\left(1+\frac{\varepsilon}{\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{v^2}{T_g}-1\right)h(x,v)\mathrm{d}v\right)+o(\varepsilon)
\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中我们再次使用了 $u_g=0$。接下来我们对麦克斯韦分布进行线性化。关于 ε 的一阶展开可写为

$$\begin{aligned}
|v-u_f|^2/2T_f&=\left|v-\varepsilon\left(\frac{m_h}{\rho_g}\right)\right|^2\frac{1}{2T_g}\left[1-\frac{\varepsilon}{\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]h(x,u)\mathrm{d}u\right]+o(\varepsilon)\\
&=\left[\frac{v^2}{2T_g}-\varepsilon v\left(\frac{m_h}{T_g\rho_g}\right)\right]\left[1-\frac{\varepsilon}{\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]h(x,u)\mathrm{d}u\right]+o(\varepsilon)\\
&=\frac{v^2}{2T_g}-\frac{\varepsilon v^2}{2T_g\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]h(x,u)\mathrm{d}u-\frac{\varepsilon v m_h}{T_g\rho_g}+o(\varepsilon)
\end{aligned}\tag{3.5}$$

因此，将指数函数在 0 附近展开可得，

$$\exp\left(-\frac{|v-u_f|^2}{2T_f}\right)=\exp\left(-\frac{v^2}{2T_g}\right)\left(1+\frac{\varepsilon v^2}{2T_g\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]h(x,u)\mathrm{d}u+\frac{\varepsilon v m_h}{T_g\rho_g}\right).\tag{3.6}$$

对其进行归一化，再次在 0 附近展开可得

$$\begin{aligned}
(2\pi T_f)^{-1/2}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi T_g}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{P_h}{P_g}-\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)\right)+o(\varepsilon)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi T_g}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]h(x,u)\mathrm{d}u\right)+o(\varepsilon).
\end{aligned}\tag{3.7}$$

因此，综上所述，无穷小麦克斯韦分布为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{u_f,T_f}(v) = \mathcal{M}_{0,T_g}(v)\Bigg(1 + \frac{\varepsilon v^2}{2T_g\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]h(x,u)\mathrm{d}u + \frac{\varepsilon v}{T_g\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}uh(x,u)\mathrm{d}u \\ - \frac{\varepsilon}{2\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]h(x,u)\mathrm{d}u\Bigg) + o(\varepsilon) \\ = \mathcal{M}_{0,T_g}(v)\Bigg(1 + \frac{\varepsilon}{2\rho_g}\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]h(x,u)\mathrm{d}u + \frac{\varepsilon v}{T_g\rho_g}\int_{-\infty}^{\infty}uh(x,u)\mathrm{d}u\Bigg) + o(\varepsilon),\end{aligned} \tag{3.8}$$

因此，整个非线性项为

$$\rho_f\mathcal{M}_{u_f,T_f}(v) = \rho_g\mathcal{M}_{0,T_g}(v)\left[1+\frac{\varepsilon}{\rho_g}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]+\frac{uv}{T_g}\right)h(x,u)\mathrm{d}u\right\}\right].$$

利用 $-v\partial_x g + \mathcal{L}g = 0$，我们最终得到所述算子 $\mathfrak{L}$。 □

接下来我们强调，线性化算子在加权空间中是一个非自伴算子 $L^2(g^{-1})$。尽管如此，我们仍将算子 $\mathfrak{L} = \mathcal{T} + \mathcal{C}$ 分解为对称部分和反对称部分。这一做法受到次强制性技术的启发，例如参见 [Vil09、Hó6、DMS15]，以及较新的舒尔补方法 [EBS]。

引理 6. 线性化方程 (3.3) 具有如下形式

$$\partial_t f + \mathcal{T}f = \mathcal{C}f$$

其中，$\mathcal{C}$ 在 $L^2(g^{-1})$ 中是对称的，而 $\mathcal{T}$ 是反对称的。显式公式如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}f = \frac{\alpha}{2\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{M}_{T_g}(v) + \frac{\mathcal{M}_{T_g}(u)}{g(x,u)}g(x,v)\right)\left(1+\frac{uv}{T_g}+\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\right)f(x,u)\mathrm{d}u \\ + \frac{1-\alpha}{2\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{M}_{\tau}(v) + \frac{\mathcal{M}_{\tau}(u)}{g(x,u)}g(x,v)\right)f(x,u)\mathrm{d}u - \frac{1}{2\kappa}\left(1+\rho_g\frac{\alpha\mathcal{M}_{T_g}+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau}}{g(x,v)}\right)f(x,v),\end{aligned} \tag{3.9}$$

而

$$\begin{aligned}\mathcal{T}f = -v\partial_x f + \frac{\alpha}{2\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{M}_{T_g}(v) - \frac{\mathcal{M}_{T_g}(u)g(x,v)}{g(x,u)}\right)\left(1+\frac{uv}{T_g}+\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\right)f(x,u)\mathrm{d}u \\ + \frac{1-\alpha}{2\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{M}_{\tau(x)}(v) - \frac{\mathcal{M}_{\tau(x)}(u)g(x,v)}{g(x,u)}\right)f(x,u)\mathrm{d}u \\ - \frac{1}{2\kappa}f(x,v)\left(1-\frac{\rho_g(x)}{g(x,v)}\left(\alpha\mathcal{M}_{T_g(x)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x)}(v)\right)\right).\end{aligned} \tag{3.10}$$

证明。这里强调，我们用 $\mathfrak{L}$ 表示整个算子，包括输运部分，因此

$$\mathfrak{L}h = -v\partial_x h + \frac{1}{\kappa}\left(\alpha\mathcal{M}_{T_g(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{uv}{T_g}+\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\right)h(x,u)\mathrm{d}u \right.$$
$$\left. + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x)}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,u)\mathrm{d}u - h\right).$$

计算该算子 $\mathfrak{L}^*$ 在 $L^2(g^{-1})$ 中的伴随算子，我们得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^*h &= v\partial_x h \\ &+\frac{1}{\kappa}\left[\alpha g(x,v)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{M}_{T_g}(u)}{g(x,u)}\left(1+\frac{uv}{T_g}+\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\right)h(x,u)\mathrm{d}u\right. \\ &\left.+(1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{M}_{\tau(x)}(u)}{g(x,u)}h(x,u)\mathrm{d}u g(x,v)\right] \\ &-\frac{\rho_g(x)}{g(x,v)}\left(\frac{\alpha}{\kappa}\mathcal{M}_{T_g(x)}(v)+\frac{(1-\alpha)}{\kappa}\mathcal{M}_{\tau(x)}(v)\right)h(x,v).\end{aligned} \tag{3.11}$$

事实上，利用 g 是非平衡稳态，输运部分的伴随算子给出：

$$\begin{aligned}(-v\partial_x)^*h(x,v) &= v\partial_x h(x,v) - v\frac{\partial_x g(x,v)}{g(x,v)}h(x,v) \\ &= v\partial_x h(x,v) - g(x,v)^{-1}\rho_g(x)(\alpha\mathcal{M}_{T_g(x)}(v)+(1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau(x)}(v))h(x,v) - h(x,v),\end{aligned}$$

这解释了式（3.11）中的第一项和最后一项。接着，我们利用这一点得到对称部分和反对称部分，因为 $\mathcal{C} = \frac{\mathfrak{L}+\mathfrak{L}^*}{2}$ 且 $\mathcal{T} = \frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{L}^*}{2}$。□

通常，在 L^2-次强制性框架下，参见 [DMS15], ，策略是证明，碰撞对称算子在 L^2（g^{-1}）中满足微观强制性性质，即在其零空间的正交补上成立；并证明输运反对称算子满足宏观强制性性质，且该性质恰好在碰撞算子的零空间上成立。然后，引入一个修正熵泛函，它与 L^2 范数等价。在对分解算子作出额外的一般性假设后，便可控制其耗散，并得出半群指数弛豫至稳态的结论。

这种用于 L^2 估计一大类动力学方程弛豫速率的通用框架并不适用于我们的情形，因为我们的稳态没有显式公式。在[DMS15] 中，要求全局平衡态属于两个分解算子（即输运算子和碰撞算子）的零空间交集。这与我们的非平衡情形并不相符。

据我们所知，目前有两篇文章讨论了这种情形，[BHM17] 中作者采用微扰方法处理该问题，而 [CRS15] 则重新定义了输运算子和碰撞算子。

我们的方法主要受到后者的启发：具体而言，我们采用了不同的算子分解方式，而非像 [DMS15]，中那样，将其分解为对称部分和斜对称部分，如引理 6 所示。随后，我们证明了对称部分满足微观强制性不等式，反对称部分满足宏观强制性。

在继续证明这些性质之前，我们强调，现在可以通过显式计算验证

$$\mathcal{C}g = \mathcal{T}g = 0,$$

其中 $\mathcal{C}$，$\mathcal{T}$ 的具体计算见引理 6。因此，在这种分解下，稳态属于算子各分解部分的核的交集。

我们用 Π 表示到 $\mathrm{Ker}(\mathcal{C})$ 的正交投影，其定义如下：

$$\Pi f = \rho_f \frac{g}{\rho_g}, \text{ where } \rho_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)\mathrm{d}v.$$

我们所研究的空间为

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in L^2\left(\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}v}{g}\right) : \iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} f(x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v = 0 \right\}$$

由内积诱导

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_1, f_2\rangle_{L^2_{x,v}(g^{-1})} = \iint f_1(x,u) f_2(x,u)/g(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

3.3. 微观强制性。本小节讨论对称算子在 $\mathcal{C}$的核的正交补上的强制性性质。

命题 4（微观强制性）。采用上述记号，我们有算子 $\mathcal{C}$ 满足

$$-\langle \mathcal{C}h, h\rangle \geq \lambda_m \|(I-\Pi)h\|^2$$

其中 λ_m为某个正常数。

证明。在本证明中，我们将记

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_1, f_2\rangle_{L^2(g^{-1})} = \int f_1(u) f_2(u)/g(x,u)\mathrm{d}u$$

注意到这是 x 的函数。

我们首先计算 $\langle \mathcal{C}h,h\rangle_{L^2(g^{-1})}$。为此，我们改写

$$\begin{aligned}\mathcal{C}h = &\frac{\alpha}{2\kappa}\mathcal{M}_{T_g}\left(\langle h,g\rangle + \frac{v}{\sqrt{T_g}}\left\langle h,\frac{u}{\sqrt{T_g}}g\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\left\langle h,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]g\right\rangle\right)\\ &+\frac{\alpha}{2\kappa}g(x,v)\left(\langle h,\mathcal{M}_{T_g}\rangle + \frac{v}{\sqrt{T_g}}\left\langle h,\frac{u}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\left\langle h,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\right)\\ &+\frac{1-\alpha}{2\kappa}\left(g(x,v)\langle h,\mathcal{M}_\tau\rangle + \mathcal{M}_\tau\langle h,g\rangle\right)\\ &-\frac{1}{2\kappa}\left(1+\rho_g\frac{\alpha\mathcal{M}_{T_g}+(1-\alpha)\mathcal{M}_\tau}{g(x,v)}\right)h(x,v).\end{aligned}$$

利用这一点，我们写出

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{C}h,h\rangle = \frac{\alpha}{\kappa}\Bigg(&\left\langle h,\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\langle h,g\rangle + \left\langle h,\frac{u}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\left\langle h,\frac{u}{\sqrt{T_g}}g\right\rangle\\ &+\left\langle h,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\left\langle h,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]g\right\rangle\Bigg) + \frac{1-\alpha}{\kappa}\langle h,\mathcal{M}_\tau\rangle\langle h,g\rangle\\ &-\frac{1}{2\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\rho_g\frac{\alpha\mathcal{M}_{T_g}+(1-\alpha)\mathcal{M}_\tau}{g(x,v)}\right)\frac{h(x,v)^2}{g(x,v)}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

我们将其分解为

$$\langle \mathcal{C}h,h\rangle = \frac{1}{\kappa}\left[\alpha\mathcal{I}+(1-\alpha)\mathcal{J}\right]$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = &\left\langle h,\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\langle h,g\rangle + \left\langle h,\frac{u}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\left\langle h,\frac{u}{\sqrt{T_g}}g\right\rangle + \left\langle h,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\left\langle h,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]g\right\rangle\\ &-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\rho_g(x)\frac{\mathcal{M}_{T_g}}{g}\right)\frac{h(x,u)^2}{g(x,u)}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

而

$$\mathcal{J} = \langle h,\mathcal{M}_\tau\rangle\langle h,g\rangle - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\rho_g(x)\frac{\mathcal{M}_{\tau(x)}}{g}\right)\frac{h(x,u)^2}{g(x,u)}\mathrm{d}u$$

并且我们将分别对它们进行估计。

动机　据此，我们将函数视为关于 v （固定 $x\in\mathbb{T}$）的函数　　s:

$$p_1(v)g := \frac{g}{\sqrt{\rho_g}},\ p_2(v)g := \frac{vg}{\sqrt{\rho_g T_g}},\ p_3(v)g := \frac{\left(\frac{v^2}{T_g}-\frac{d_3(x)v}{\sqrt{T_g}}-1\right)g}{\sqrt{\rho_g(2+d_4-d_3^2)}}.$$

我们注意到，这些函数在 $L^2_v(g^{-1})$ 中彼此正交。

于是，我们将 h 分解为 $h = \hat{h} + \tilde{h}$ 之和，其中 $\tilde{h}$ 在 $L^2_v(g^{-1})\hat{}$ 中与由 $p_1(v)g$、$p_2(v)g$、$p_3(v)g$ 张成的空间正交，而 h 属于这些量张成的空间。我们将上述观察总结为以下引理。

引理 7. 对于固定的 $x \in \mathbb{T}$，我们考虑映射 $v \mapsto p_i(v)g(x,v)$，其中 $i = 1$、2、3

$$p_1(v)g := \frac{g}{\sqrt{\rho_g}},\ p_2(v)g := \frac{vg}{\sqrt{\rho_g T_g}},\ p_3(v)g := \frac{\left(\frac{v^2}{T_g} - \frac{d_3(x)v}{\sqrt{T_g}} - 1\right)g}{\sqrt{\rho_g(2 + d_4 - d_3^2)}}.$$

这些是 $L^2_v(g^{-1})$ 中范数为 1 的正交函数。

证明。这里只需进行计算。

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{v^2}{T_g} - \frac{d_3 v}{\sqrt{T_g}} - 1\right)^2 g\mathrm{d}v &= \frac{\rho_g T_g^2(3 + d_4)}{T_g} - \frac{2\rho_g d_3^2 T_g^{3/2}}{T_g^{3/2}} + \frac{\rho_g d_3^2 T_g}{T_g} - 2\frac{\rho_g T_g}{T_g} + \rho_g \\ &= \rho_g\left(2 + d_4 - d_3^2\right).\end{aligned}$$

□

接下来我们写成 $h = \left[ap_1 g + \beta p_2 g + \gamma p_3 g\right] + \tilde{h}$，其中 a、β、γ 是一些常数，且 $\tilde{}$，其中 h 与 $L^2_v(g^{-1})$ 中由 $p_1 g$、$p_2 g$、$p_3 g$ 张成的空间正交。在下面的引理中，我们汇总出现在 $\mathcal{I}$、$\mathcal{J}$ 中各项的明确取值。通过直接计算即可验证。

$\tilde{}$引理 8. 将 (3.3) 的解分解为 $h = ap_1 g + \beta p_2 g + \gamma p_3 g + h$，其中常数 a、β、γ。那么

$$\langle h, g\rangle = a\sqrt{\rho_g},\quad \left\langle h, \frac{u}{\sqrt{T_g}} g\right\rangle = \beta\sqrt{\rho_g},\quad \left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u^2}{T_g} - 1\right] g\right\rangle = \gamma\sqrt{\frac{\rho_g(2 + d_4 - d_3^2)}{2}} + \beta d_3\sqrt{\rho_g}$$

and

$$\left\langle h, \mathcal{M}_{T_g}\right\rangle = \frac{a}{\sqrt{\rho_g}} + \left\langle \tilde{h}, \mathcal{M}_{T_g}\right\rangle,\quad \left\langle h, \frac{u}{\sqrt{T_g}}\right\rangle = \frac{\beta}{\sqrt{\rho_g}} - \frac{\gamma d_3}{\sqrt{\rho_g(2 + d_4 - d_3^2)}} + \left\langle \tilde{h}, \frac{u}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle$$

从现在起，我们将记 $Z = Z(x) := 2 + d_4(x) - d_3(x)^2$ 并注意到，借助命题 3，我们能够对其在 x 上下统一地给出下界和上界，其中常数取决于 α，$\underline{\tau}$，$\bar{\tau}$。将这些值代入 $\mathcal{I}$，对于

它的前三项，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\langle h, \mathcal{M}_{T_g}\right\rangle \langle h, g\rangle + \left\langle h, \frac{u}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle \left\langle h, \frac{u}{\sqrt{T_g}} g\right\rangle + \left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle \left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{u^2}{T_g}-1\right] g\right\rangle \\
&= a^2+\beta^2+\gamma^2+ \\
&\qquad + \sqrt{\rho_g}\left[a\left\langle \tilde{h}, \mathcal{M}_{T_g}\right\rangle + \beta\left\langle \tilde{h}, \frac{v}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle + \frac{\gamma\sqrt{Z}+\beta d_3}{\sqrt{2}}\left\langle \tilde{h}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\right].
\end{aligned}$$

转到 $\mathcal{I}$ 中的第四项，我们首先注意到

$$\int \frac{h^2}{g} = a^2+\beta^2+\gamma^2+\int \frac{\tilde{h}^2}{g} \tag{3.13}$$

因此

$$\begin{aligned}
\int \frac{h^2}{g^2}\rho_g \mathcal{M}_{T_g} &= \int \frac{\hat{h}^2}{g^2}\rho_g \mathcal{M}_{T_g} + \int \frac{\tilde{h}^2}{g^2}\rho_g \mathcal{M}_{T_g} = a^2+\beta^2+\frac{\gamma^2(2+d_3^2)}{Z} - \frac{2\beta\gamma}{\sqrt{Z}}d_3 \\
&\quad + \sqrt{\rho_g}\left[2a\langle \tilde{h}, \mathcal{M}_{T_g}\rangle + 2\left(\beta - \frac{\gamma d_3}{\sqrt{Z}}\right)\left\langle \tilde{h}, \frac{v}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle + 2\gamma\sqrt{\frac{2}{Z}}\left\langle \tilde{h}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\right] \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(x,v)^2}{g(x,v)^2}\rho_g(x)\mathcal{M}_{T_g}(v)\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &\le a^2+\beta^2+\gamma^2 + a\sqrt{\rho_g}\left\langle \tilde{h}, \mathcal{M}_{T_g}\right\rangle + 2\beta\sqrt{\rho_g}\left\langle \tilde{h}, \frac{v}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \tilde{h}, \left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle \sqrt{\frac{\rho_g}{2}}\left(\gamma\sqrt{\frac{Z}{2}} + \frac{\beta d_3}{\sqrt{2}}\right) - \frac{a^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{\gamma^2(2+d_3^2)}{2Z} \\
&\quad - \frac{\beta\gamma}{\sqrt{Z}}d_3 - \sqrt{\rho_g}\left(a\left\langle \tilde{h}, \mathcal{M}_{T_g}\right\rangle + \left(\beta - \frac{\gamma d_3}{\sqrt{Z}}\right)\left\langle \tilde{h}, \frac{v}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle + \gamma\sqrt{\frac{2}{Z}}\left\langle \tilde{h}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{h}(x,v)^2}{g(x,v)^2}\rho_g(x)\mathcal{M}_{T_g}(v)\mathrm{d}v - \frac{a^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{h}(x,v)^2}{g(x,v)}\mathrm{d}v \\
&\le \frac{\gamma^2}{2}\left(1 - \frac{2+d_3^2}{2+d_4-d_3^2}\right) + \frac{\beta\gamma}{\sqrt{Z}}|d_3| \\
&\quad + \sqrt{\rho_g}\left[\frac{\gamma d_3}{\sqrt{Z}}\left\langle \tilde{h}, \frac{v}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{Z}{2}} - \sqrt{\frac{2}{Z}}\right) + \frac{\beta d_3}{\sqrt{2}}\right)\left\langle \tilde{h}, \left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\int \frac{\tilde{h}^2}{g}\left(1 + \rho_g\frac{\mathcal{M}_{T_g}}{g}\right).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

˜现在，对于涉及 h 的项，我们先利用柯西-施瓦茨不等式进行估计，然后利用 $\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \mathcal{M}_{T_g}(v)\mathrm{d}v = T_g$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho_g(x)}\left\langle \tilde{h}, \frac{v}{\sqrt{T_g}}\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle &= \sqrt{\rho_g(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}(x,v)\frac{v}{\sqrt{T_g}}\frac{\mathcal{M}_{T_g}(v)}{g(x,v)}\mathrm{d}v \\ &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{h}(x,v)^2}{g(x,v)^2}\rho_g(x)\mathcal{M}_{T_g}(v)\mathrm{d}v\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v^2}{T_g}\mathcal{M}_{T_g}(v)\mathrm{d}v\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{h}^2}{g^2}\rho_g(x)\mathcal{M}_{T_g}(v)\mathrm{d}v\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{3.15}$$

类似地

$$\sqrt{\rho_g(x)}\left\langle \tilde{h}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{v^2}{T_g}-1\right]\mathcal{M}_{T_g}\right\rangle \le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{h}^2}{g^2}\rho_g(x)\mathcal{M}_{T_g}(v)\mathrm{d}v\right)^{1/2}. \tag{3.16}$$

等式右端的第一行（3.14）变为 $\frac{\gamma^2}{2}\frac{d_4-2d_3^2}{2+d_4-d_3^2}+\frac{\beta\gamma d_3}{\sqrt{Z}}$。我们还将其余各项合并，并结合（3.15）、（3.16）中的估计，应用杨氏不等式，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\le \gamma^2\frac{d_4-2d_3^2}{2+d_4-d_3^2}+\frac{\beta\gamma d_3}{\sqrt{Z}}+\frac{1}{4}\left(\frac{d_3|\gamma|}{\sqrt{Z}}+\left|\gamma\left(\sqrt{\frac{Z}{2}}-\sqrt{\frac{2}{Z}}\right)+\frac{\beta d_3}{\sqrt{2}}\right|\right)^2 \\ &\le \varphi(d_3,d_4)(\beta^2+\gamma^2) \le \varphi(d_3,d_4)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^\perp(x,v)^2}{g(x,v)}\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

其中 $h^\perp := (I-\Pi)h = h - \left\langle h, \frac{g}{\sqrt{\rho_g}}\right\rangle\frac{g}{\sqrt{\rho_g}} = h - \langle h, p_1 g\rangle\frac{g}{\sqrt{\rho_g}}$。并且 $\varphi(d_3,d_4)$ 是 d_3, d_4 的连续函数，当 $d_3, d_4 \to 0$ 时趋于 0。上面的最后一个不等式由方程（3.13）得出，因为我们可以写成 $h = h^\perp + ap_1 g$，这意味着 $a^2+\beta^2+\gamma^2+\int\frac{\tilde{h}^2}{g} = \int\frac{h^2}{g} = \int\frac{(h^\perp)^2}{g}+a^2$，参见引理 7。于是 $\beta^2+\gamma^2 = \int\frac{(h^\perp)^2}{g} - \int\frac{h^2}{g}$，因此结论成立。

现在我们转到 $\mathcal{J}$，这里更简单，因为我们只需要将 h 分解为平行于和垂直于 g的部分。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= a^2 + a\sqrt{\rho_g}\langle h^\perp, \mathcal{M}_\tau\rangle - a^2 - a\frac{1}{\sqrt{\rho_g}}\int\left(1+\rho_g\frac{\mathcal{M}_\tau}{g}\right)h^\perp - \frac{1}{2}\int\left(1+\rho_g\frac{\mathcal{M}_\tau}{g}\right)\frac{(h^\perp)^2}{g} \\ &= -\frac{1}{2}\int\left(1+\rho_g\frac{\mathcal{M}_\tau}{g}\right)\frac{(h^\perp)^2}{g}.\end{aligned}$$

因此

$$\langle Ch, h\rangle \le \frac{1}{\kappa}\left(\alpha\varphi(d_3,d_4)-\frac{1-\alpha}{2}\right)\int\frac{(h^\perp)^2}{g}.$$

现在， d_3, d_4 随 α变化，不过由命题 3可知， α 在 d_3, d_4的上下界中不会出现奇异性。因此，我们可以对所有 $\alpha \in [0,1]$一致地限制矩。这意味着存在有限常数 M^-，使得对于 M， $\varphi(d_3, d_4) \leq M(\kappa, T, \underline{T}, \bar{\tau}, \underline{\tau}) < \infty$，且该常数与 α无关。于是

$$\langle \mathcal{C}h, h\rangle \leq \frac{1}{\kappa}\left(\alpha M(\kappa, \bar{T}, \underline{T}, \bar{\tau}, \underline{\tau}) - \frac{1-\alpha}{2}\right)\int \frac{(h^{\perp})^2}{g},$$

由此可知，只要 $\alpha > {}_{2M\ \kappa\ \bar{T}}{}^{1}{}_{(,,T,\bar{\tau},\underline{\tau})-1}$，微观强制性~~便成立。由于~~我们可以使~~-~~这个界 $M(\kappa, T, \underline{T}, \bar{\tau}, \underline{\tau})$足够大，因此可以保证存在一个正常数 λ_m，使命题成立。□

3.4. 宏观强制性。我们提醒，若 Π 是到 $\mathcal{C}$ 的核上的投影，则有 $\Pi h = \frac{\rho_h}{\rho_g} g$。接下来，我们将给出线性化算子的反对称部分在 $\mathcal{C}$的零空间上的宏观强制性不等式。

命题 5. 使用上述记号，并且当条件 (2.10) 关于 α 成立时，对于反对称算子，存在一个正常数 λ_M 使得

$$\|\mathcal{T}\Pi h\| \geq \lambda_M \|\Pi h\|$$

对所有 $h \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}(\mathcal{T}\Pi)$ 均成立。

证明。 首先提醒，参见引理 6，反对称部分 $\mathcal{T}$由下式给出

$$\begin{aligned}\mathcal{T}h = v\partial_x h &+ \frac{\alpha}{2\kappa}\int\left(\mathcal{M}_{T_g}(v) - \frac{\mathcal{M}_{T_g}(u)g(x,v)}{g(x,u)}\right)\left(1 + \frac{uv}{T_g} + \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{T_g} - 1\right)\left(\frac{v^2}{T_g} - 1\right)\right)h(x,u)\mathrm{d}u \\ &+ \frac{1-\alpha}{2\kappa}\int\left(\mathcal{M}_{\tau}(v) - \frac{\mathcal{M}_{\tau}(u)g(x,v)}{g(x,u)}\right)h(x,u)\mathrm{d}u \\ &- \frac{1}{2\kappa}\left(h - \frac{\rho_g}{g}\left(\alpha\mathcal{M}_{T_g}(v) + (1-\alpha)\mathcal{M}_{\tau}(v)\right)h\right).\end{aligned}$$

由此我们可以明确计算出，因为 $\mathcal{T}g = 0$ 所以

$$\mathcal{T}\Pi h = v\partial_x\left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)g.$$

因此，关于式（3.12）中定义的内积，

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}\Pi h\|^2 &= \iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} v^2 g(x,v)\left(\partial_x\left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)\right)^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{T}} \rho_g(x)T_g(x)\left(\partial_x\left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)\right)^2\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{4}\left[\left[\alpha\frac{\underline{T}^{1/2}}{2\pi} + (1-\alpha)\frac{\underline{\tau}^{1/2}}{2\pi}\right] - \frac{1}{\kappa}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\right]\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^{-2} \times \\ &\qquad \times \int_{\mathbb{T}} \rho_g(x)\left(\partial_x\left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中我们应用了引理 4 给出的温度下界。因此，只要 $\rho_g(x)\mathrm{d}x$ satisfies a Poincar´einequality: Indeedthen

$$\|\mathcal{T}\Pi h\|^2 \geq \lambda_M \int_{\mathbb{T}} \rho_g(x) \left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)^2 (x)\mathrm{d}x = \lambda_M \iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} g(x,v)^{-1}|\Pi h|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}v = \lambda_M \|\Pi h\|^2$$

¯其中 $\lambda_M = \lambda_M(\alpha, \kappa, T, \underline{T}, \bar{\tau}, \underline{\tau})$。现在，由于我们的空间是环面，且 ρ_g 在 $x \in \mathbb{T}$中一致有上界和下界，因此庞加莱不等式成立：对于 $h \in \mathcal{H}$，即$\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)(x)\mathrm{d}x = 0$（这与利用密度的上界和下界得到的 $\int_{\mathbb{T}} \rho_h \mathrm{d}x = 0$等价），有

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\partial_x \left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)\right)^2 \mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

因此，宏观强制性成立，其显式常数为

$$\begin{aligned}\lambda_M =& \frac{1}{4}\left[\left[\alpha\frac{\underline{T}^{1/2}}{2\pi} + (1-\alpha)\frac{\underline{\tau}^{1/2}}{2\pi}\right] - \frac{1}{\kappa}\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^2\right]\left[\frac{\alpha}{\kappa\underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa\underline{\tau}^{1/4}}\right]^{-2} \times \\ & \times \left[1 - \left[\alpha\underline{T}^{-1/2} + (1-\alpha)\underline{\tau}^{-1/2}\right]\right].\end{aligned}$$

□

3.5。辅助算子的有界性。由上文可知

$$\Pi\mathcal{T}\Pi h = 0 \tag{3.18}$$

因为 $\int ug(x,u)\mathrm{d}u = 0$。事实上，

$$\Pi\mathcal{T}\Pi h = \int u\partial_x \left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)(x) g(x,u)\mathrm{d}u \frac{g(x,v)}{\rho_g(x)} = \partial_x \left(\frac{\rho_h}{\rho_g}\right)(x) u_g(x) \frac{g(x,v)}{\rho_g(x)} = 0.$$

按照 [DMS15],中的方法，我们定义算子

$$A := (1 + (\mathcal{T}\Pi)^*\mathcal{T}\Pi)^{-1}(\mathcal{T}\Pi)^*. \tag{3.19}$$

我们将使用这个算子来定义次强制性所需的修正熵。我们还需要的最后一个要素是某些算子的有界性。本小节将介绍这些算子的一些性质。首先要注意的是$A = \Pi A$, 这一点很容易看出，例如由以下关系可知

$$Af = -\Pi\mathcal{T}f + \Pi\mathcal{T}^2\Pi Af, \text{ for all } f \in \mathcal{H} \tag{3.20}$$

这直接由 A的定义得出。然后对（3.20）与 Af 取内积，可得

$$\|Af\|^2 = \langle f, \mathcal{T}\Pi Af\rangle - \|\mathcal{T}\Pi Af\|^2 \le \|(1-\Pi)f\|\|\mathcal{T}\Pi Af\| - \|\mathcal{T}\Pi Af\|^2 \text{ or}$$
$$\|Af\|^2 + \|\mathcal{T}\Pi Af\|^2 \lesssim \frac{\|(1-\Pi)f\|^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\|\mathcal{T}\Pi Af\|^2$$

对 $\varepsilon > 0$，其中我们使用了 (3.18)。由此可得 A 和 $\mathcal{T}A$ 对所有 $f \in \mathcal{H}$均有界。

在 [DMS15] 中，他们对辅助算子的有界性提出了更强的假设，即

$$\|A\mathcal{T}(I-\Pi)f\| + \|A\mathcal{C}f\| \lesssim \|(I-\Pi)f\|.$$

研读本文的证明后可立即看出，只需证明

$$\|A\mathfrak{L}(I-\Pi)f\| \lesssim \|(I-\Pi)f\|.$$

引理 9。采用上述记号，算子

$$A,\ \mathcal{T}A \ and\ A\mathfrak{L}$$

有界，且

$$\|A\mathfrak{L}(I-\Pi)f\| \le C\|(I-\Pi)f\|$$

¯存在某个常数 C，其取决于 α、κ、T、$\underline{T}$、$\bar{\tau}$、$\underline{\tau}$。

证明。 算子 $A\mathfrak{L}$ 有界当且仅当 $\mathfrak{L}^*A^*$ 有界。我们通过改造 [DMS15] 中的椭圆正则性类型结果来证明其有界性，不过这里还多出了一些项。记

$$\tilde{f} := (I + (\mathcal{T}\Pi)^*(\mathcal{T}\Pi))^{-1} f$$

并定义 $m(x) = \frac{\rho_{\tilde{f}}}{\rho_g}(x)$，则

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}^*A^*f = \mathfrak{L}^*\mathcal{T}\Pi\tilde{f} = \mathfrak{L}^*(v(\partial_x m)g(x,v)) = v\partial_x(v(\partial_x m)g(x,v)) \\
&+ \frac{\partial_x m}{\kappa}\left(\alpha g(x,v)\int u\mathcal{M}_{T_g}(u)\left(1 + \frac{uv}{T_g} + \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{T_g} - 1\right]\left[\frac{v^2}{T_g} - 1\right]\right)\mathrm{d}u\right. \\
&\qquad\qquad \left. + (1-\alpha)\int \frac{\mathcal{M}_{\tau(x)}(u)}{g(x,u)} u g(x,u)\mathrm{d}u g(x,v)\right) \qquad (3.21) \\
&- \frac{\rho_g(x)}{g(x,v)}\left(\frac{\alpha}{\kappa}\mathcal{M}_{T_g(x)}(v) + \frac{(1-\alpha)}{\kappa}\mathcal{M}_{\tau(x)}(v)\right) v g(x,v)(\partial_x m) \\
&= v^2(\partial_x^2 m(x))g(x,v) - \frac{1-\alpha}{\kappa}(\partial_x m(x))v g(x,v),
\end{aligned}$$

其中在最后一行，我们用到了 g 是一个非平衡稳态以及奇数阶麦克斯韦矩的抵消。因此，取 $L^2_{x,\ v}(g^{-1})$ 范数可得

$$\|\mathfrak{L}^* A^* f\| \leq \left\| T_g \sqrt{\rho_g} [\partial_x^2 m] \int v^4 g \mathrm{d}v \right\|_{L^2(\mathbb{T})} + \frac{(1-\alpha)}{\kappa} \left\| \sqrt{\rho_g T_g} (\partial_x m(x)) \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \|m\|_{H^2(\mathbb{T})}, \tag{3.22}$$

其中 $C = C(\alpha,\ \kappa,\ T,\ \underline{T},\ \bar{\tau},\ \underline{\tau})$，对于这些界，我们用到了引理 3和命题 3中的结果。此外，我们还知道

$$(I + (\mathcal{T}\Pi)^*(\mathcal{T}\Pi))\tilde{f} = \tilde{f} + T_g(\partial_x^2 m)g = f.$$

对其积分并除以 ρ_g，得到

$$\frac{1}{T_g(x)} m(x) - (\partial_x^2 m(x)) = \frac{1}{T_g(x)} n_g(x),$$

其中 $n_g(x) = \frac{\rho_f}{\rho_g}(x)$。又由于 T_g 有上下界，参见引理 4，$L^2 \to H^2$ 椭圆正则性给出

$$\|m\|_{H^2(\mathbb{T})} \leq C \left\| \frac{n_g}{T_g} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

$$\leq C \left(\frac{1}{4} \left[\left[\alpha \frac{\underline{T}^{1/2}}{2\pi} + (1-\alpha) \frac{\underline{\tau}^{1/2}}{2\pi} \right] - \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\alpha}{\kappa \underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa \underline{\tau}^{1/4}} \right]^2 \right] \left[\frac{\alpha}{\kappa \underline{T}^{1/4}} + \frac{1-\alpha}{\kappa \underline{\tau}^{1/4}} \right]^{-2} \right)^{-1} \|n_g\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

由此又可从式（3.22）推出

$$\|\mathfrak{L}^* A^* f\| \leq C(\alpha, \kappa, \bar{T}, \underline{T}, \bar{\tau}, \underline{\tau}) \|n_g\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C(\alpha, \kappa, \bar{T}, \underline{T}, \bar{\tau}, \underline{\tau}) \|f\|_{L^2(g^{-1})}$$

由此引理得证。 □

3.6. 定理 2 的证明。 由于我们已验证了抽象 L^2 稳定性定理所需的主要假设——$\mathcal{C}$ 的微观强制性、 $\mathcal{T}$ 的宏观强制性以及某些算子的有界性——因此，只需考虑在（ A 式（3.20）中定义的量，其修正熵为

$$H(f) := \frac{1}{2}\|f\|^2 + \varepsilon \langle Af, f \rangle \tag{3.23}$$

其中 $\varepsilon > 0$。接下来计算熵耗散

$$\begin{aligned} D(f) &= -\langle \mathcal{C}f, f \rangle + \varepsilon \langle A\mathcal{T}\Pi f, f \rangle + \varepsilon \langle A\mathcal{C}(I-\Pi)f, f \rangle - \varepsilon \langle \mathcal{T}Af, f \rangle \\ &= -\langle \mathcal{C}f, f \rangle + \varepsilon \langle A\mathcal{T}\Pi f, f \rangle + \varepsilon \langle A\mathfrak{L}(I-\Pi)f, f \rangle - \varepsilon \langle \mathcal{T}Af, f \rangle \end{aligned}$$

狄利克雷型的强制性得益于命题 4 和 5 ，借助这两个命题，我们处理前两项：

$$-\langle \mathcal{C}f, f \rangle + \varepsilon \langle A\mathcal{T}\Pi f, f \rangle \geq \lambda_m \vee \left[\frac{\varepsilon \lambda_M}{1+\lambda_M} \right] \|f\|^2$$

¯对于 $\lambda_M = \lambda_M(\alpha, \kappa, T, \underline{T}, \bar{\tau}, \underline{\tau})$， λ_m也同理。因此，当$\varepsilon \in (0, 1)$充分小时，(i) 新的扰动熵与 L^2 范数等价，即 $\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\|f\|^2 \le H(f) \le \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\|f\|^2$；并且 (ii) 再利用 $A\mathfrak{L}$的有界性，参见引理¯9，可得存在正常数 $\lambda = \lambda(\alpha, \kappa, T, \underline{T}, \bar{\tau}, \underline{\tau})$，使得$D(f) \ge \lambda\|f\|^2$。由此，利用等价性，通过格隆沃尔不等式可得半群 $e^{t\mathfrak{L}}$ 在 $H(f)$ 中指数弛豫，因此在 L^2 中也指数弛豫（至多相差一些前置因子）。

致谢。作者感谢 Cl´ement Mouhot 和 Laure Saint-Raymond 进行的精彩讨论。JE 感谢 Leverhulme Trust、ECF-2021-134 号资助提供的部分支持，AM 感谢高等科学研究所华为奖学金的支持。

Appendix A. Linear stability when the temperature variation is small

定理 4. 假设存在一个 τ_* 和一个 $\epsilon > 0$，使得 $|\tau(x) - \tau| < \epsilon$，并且存在一个稳态 g，使得对某个 C 有 $|T_g(x) - \tau_*| \le C\epsilon$，其中该量可以依赖于 τ_*，但不依赖于 ϵ。那么，只要 ϵ 相对于 τ_*足够小，稳态 g 便是线性稳定的。

证明。定义

$$\mathfrak{L}_{\tau_*} f = -v\partial_x f + \frac{1}{\kappa}\left(\mathcal{M}_{\tau_*}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \alpha\frac{uv}{\tau_*} + \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\tau_*} - 1\right)\left(\frac{v^2}{\tau_*} - 1\right)\right) f(x,u)\mathrm{d}u - f\right).$$

接下来注意到，利用标准的 L^2-次强制性论证，我们可以找到一个范数 $\|\cdot\|_*$，它等价于 $L^2(\mathcal{M}_{\tau_*}^{-1})$-范数，且在该范数下 $\mathfrak{L}_{\tau_*}$ 具有谱隙。记

$$\langle \mathfrak{L}_{\tau_*} f, f\rangle_* \le -\lambda_*\|f\|_*^2$$

其中， λ_* 取决于 τ_*、 κ 以及范数的选取。我们还注意到。

$$|\mathfrak{L}f - \mathfrak{L}_{\tau_*} f| \le \frac{1}{\kappa}\Bigg(C(\mathcal{M}_{T_g} - \mathcal{M}_{\tau_*})\Big(\rho_f + \frac{v}{\tau_* - \epsilon}m_f + \frac{1+v^2}{(\tau_*-\epsilon)^2}P_f\Big) + C\mathcal{M}_{\tau_*}\left(1 + \frac{1}{\tau_*-\epsilon}\right)(1+v^2)\epsilon + (\mathcal{M}_\tau - \mathcal{M}_{\tau_*})\rho_f\Bigg).$$

因此$\|\mathfrak{L}f - \mathfrak{L}_{\tau_*} f\|_{L^2(\mathcal{M}_{\tau_*}^{-1})} \le C(\tau_*)\left(\epsilon^2 + \|(1+v^2)(\mathcal{M}_{T_g} - \mathcal{M}_{\tau_*})\|_{L^2_v(\mathcal{M}_{\tau_*}^{-1})} + \|\mathcal{M}_\tau - \mathcal{M}_{\tau_*}\|_{L^2_v(\mathcal{M}_{\tau_*}^{-1})}\right)\|f\|$·我们可以证明

$$\int_v (1+v^2)[M_T(v) - M_{T(x)}(v)]^2 M_T^{-1} dv = \int_v (1+v^2)\left[1 - \frac{M_{T(x)}(v)}{M_T(v)}\right]^2 M_T(v)\mathrm{d}v$$

$$\sim \int_v (1+v^2) M_T(v)\left[1 - \sqrt{\frac{T}{T(x)}}e^{-\frac{|v|^2}{2}(T(x)^{-1} - T^{-1})}\right]^2 \mathrm{d}v.$$

如果我们将 $T(x) = T + \theta(x)$ 写作 $\sup_x |\theta(x)| \le \varepsilon$,

$$\int_v (1+v^2) M_T(v) \left[1 - \sqrt{\frac{T}{T(x)}} e^{-\frac{|v|^2}{2T}\left(\frac{1}{1-\theta(x)/T}-1\right)}\right]^2 \mathrm{d}v \sim \int_v (1+v^2) M_T(v) \left[1 - \sqrt{\frac{T}{T(x)}} e^{\frac{|v|^2\theta(x)}{2} + \frac{|v|^2}{2T}}\right]^2 \mathrm{d}v$$
$$\lesssim \frac{\varepsilon^2}{4T^2} \int_v (1+v^2) M_T(v) e^{|v|^2 \varepsilon} \mathrm{d}v.$$

将上述结果应用于我们的温度 $\tau(x)$ τ_*, T_g，可得

$$\|\mathfrak{L} f - \mathfrak{L}_{\tau_*} f\|_{L^2(\mathcal{M}_{\tau_*}^{-1})} \le C(\tau_*)\epsilon^2 \|f\|.$$

因此，由于我们的另一种范数与之等价，可得

$$\|\mathfrak{L} f - \mathfrak{L}_{\tau_*} f\|_* \le C'(\tau_*)\epsilon^2 \|f\|.$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f\|_*^2 \le -(\lambda_* - C'(\tau_*)\epsilon^2)\|f\|_*^2.$$

所以，Gr¨onwall 确实意味着，如果 ϵ 足够小，那么算子 $\mathfrak{L}$ 在 $*$-范数下将具有正的谱隙。□

References

[AEMN10] L. Arkeryd, R. Esposito, R. Marra, and A. Nouri. 玻尔兹曼方程的瑞利–贝纳德对流解的稳定性。《数学分析与应用档案》，198(1):125–187, 2010.[AEMN12] L. Arkeryd, R. Esposito, R. Marra, and A. Nouri. 贝纳德问题中玻尔兹曼方程解的指数稳定性。Kinet. Relat. Models, 5(4):673–695, 2012.[AN00] Leif Arkeryd and Anne Nouri. L^1 平板区域内定常玻尔兹曼方程解的存在性。Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 9(3):375–413, 2000.[Ark00] L. Arkeryd. R^n中的定常玻尔兹曼方程。Internat. Math. Res. Notices, pages 625–641, 2000.[BGK54] P. Bhatnagar, E. Gross, and M. Krook. 一种气体碰撞过程模型。I. 带电和中性单组分系统中的小振幅过程。Phys. Rev., 94:511–525, 1954年5月。[BHM17] Emeric Bouin, Franca Hoffmann, and Cl´ement Mouhot. 移动传送带上纤维铺放过程的指数衰减至平衡。SIAM Journal on Mathematical Analysis, 49(4):3233–3251, 2017.[BLRB00] F. Bonetto, J. L. Lebowitz, and L. Rey-Bellet. 傅里叶定律：对理论家的挑战。载于《数理物理2000》，第128–150页。Imp. Coll. Press, London, 2000.[BM22] Simon Becker and Angeliki Menegaki. 规则与无序谐振子网络的最优谱隙。Journal of Functional Analysis, 282(2):109286, 2022.[BMY23] S. Becker, A. Menegaki, and J. Yu. 谐振子链中长程相互作用的谱分析与相变。即将在 arXiv 上发表，2023年。[BO05] C. Bernardin and S. Olla. 微观热传导模型的傅里叶定律。J. Stat. Phys., 121(3-4):271–289, 2005.

[Bol03] L. Boltzmann. 《气体分子的热平衡》的进一步研究，第1卷，第262–349页。原题为“ Weitere Studien ¨uber das W¨ormegleichgewicht unter Gasmolek¨ulen”，发表于 Sitzungsberichte Akad. Wiss., Vienna, part II, 66, 275–370 (1872)；后收入Boltzmann’s Wissenschaftliche Abhandlungen, Vol. I, Leipzig, J. A. Barth, 1909, pp. 316–402, 2003年7月。[Car07] P. Carmona. 与两个热浴接触的振子链的不变测度的存在性与唯一性。Stochastic Process. Appl., 117(8):1076–1092, 2007.[CEHRB18] N. Cuneo, J.-P. Eckmann, M. Hairer, and L. Rey-Bellet. 振子网络的非平衡稳态。Electron. J. Probab., 23:28 pp., 2018.[CEL+18] E. Carlen, R. Esposito, J. Lebowitz, R. Marra, and C. Mouhot. 与不同温度热库相连的动力学模型如何趋近稳态。J. Stat. Phys., 172(2):522–543, 2018.[CEL+19] E. Carlen, R. Esposito, J. Lebowitz, R. Marra, a nd C. Mouhot. 动力学理论中一维BGK模型非平衡稳态的唯一性。Acta Appl Math, 2019.[CLM15] E. Carlen, J. Lebowitz, and C. Mouhot. 稀薄气体中非平衡稳态的指数趋近及其性质。Braz. J. Probab. Stat., 29(2):372–386, 2015.[CRS15] Vincent Calvez, Ga¨el Raoul, and Christian Schmeiser. 偏置速度跳跃实现的约束：大肠杆菌的聚集。Kinet. Relat. Models, 8(4):651–666, 2015.[Dha08] A. Dhar. 低维系统中的热输运。Advances in Physics, 57, 2008年8月。[DMS15] J. Dolbeault, C. Mouhot, and C. Schmeiser. 保持质量守恒的线性动力学方程的次强制性。Trans. Amer. Math. Soc., 367(6):3807–3828, 2015.[EBS] A. Levitt E. Bernard, M. Fathi and G. Stoltz. 利用舒尔补实现次强制性。https://arxiv.org/pdf/2003.00726.pdf. 2020.[EGKM13] R. Esposito, Y. Guo, C. Kim, and R. Marra. 玻尔兹曼理论中的非等温边界与傅里叶定律。Comm. Math. Phys., 323(1):177–239, 2013.[ELM94] R. Esposito, J. Lebowitz, and R. Marra. 平板区域内定常玻尔兹曼方程的流体力学极限。Comm. Math. Phys., 160(1):49–80, 1994.[ELM95] R. Esposito, J. Lebowitz, and R. Marra. 非线性玻尔兹曼方程定常解的纳维–斯托克斯极限。第78卷，第389–412页。Springer, 柏林, 1995。献给Lars Onsager以纪念他。[EM20] R. Esposito and R. Marra. 动力学理论中的定常非平衡态。Journal of Statistical Physics, 180(1):773–809, 2020.[EM21] J. Evans and A. Menegaki. 区间上非线性BGK方程的非平衡稳态存在性。Pure Appl. Anal., 3(1):223–252, 2021.[EPRB99] J.-P. Eckmann, C.-A. Pillet, and L. Rey-Bellet. 与两个不同温度的热浴耦合的非谐链的非平衡统计力学。Comm. Math. Phys., 201(3):657–697, 1999.[Eva16] J. Evans. 与恒温器耦合的Kac模型中的非平衡稳态。J. Stat. Phys., 164(5):1103–1121, 2016.[FB19] P. Flandrin and C. Bernardin, editors. 《傅里叶与今日科学》，第20卷，第5期。Comptes Rendus Physique, 2019.[GKI85] S. Goldsterin, C. Kipnis, and N. Ianiro. 具有随机边界条件的力学系统的稳态。Journal of Statistical Physics, 41(5-6):915–939, 1985年12月。[GMM17] M. P. Gualdani, S. Mischler, and C. Mouhot. 非对称算子的因子分解与指数 H-定理。M ´em. Soc. Math. Fr. (N.S.), (153):137, 2017.

[Gui70] J. P. Guiraud。《玻尔兹曼线性方程的内边界值问题》。《Journal de M ´ecanique》, 9:443–490, 1970。[Gui72] Jean-Pierre Guiraud。《玻尔兹曼方程在稳态下的内边界值问题：弱非线性情形》。《J. M ´ec.》, Paris, (11):183–231, 1972。[HÓ6] F. H ´erau。《非均匀线性松弛玻尔兹曼方程的次强制性与指数时间衰减》。《渐近分析》, 46(3-4):349–359, 2006。[Hai09] M. Hairer。《热浴能有多热？》。《Comm. Math. Phys.》, 292(1):131–177, 2009。[HM09] M. Hairer and J. C. Mattingly。《非谐振子链中的缓慢能量耗散》。《纯粹与应用数学通讯》, 62(8):999–1032, 2009。[Lep16] S. Lepri。《低维热传输：从统计物理到纳米尺度热传递》, 第921卷。2016年1月。[Max67] J. Maxwell。《气体动力学理论》。《伦敦皇家学会哲学汇刊》, 157:49–88, 1867。[Men20] A. Menegaki。《弱非谐振子链收敛到非平衡稳态的定量速率》。《J. Stat. Phys.》, 181(1):53–94, 2020。[RBT02] L. Rey-Bellet and L. E. Thomas。《经典统计力学中向非平衡稳态指数收敛》。《Comm. Math. Phys.》, 225(2):305–329, 2002。[RLL67] Z. Rieder, J. L. Lebowitz, and E. Lieb。《稳态非平衡态下谐晶体的性质》。《数学物理学杂志》, 8(5):1073–1078, 1967。[Uka92] S. Ukai。《有限区间上具有较大边界数据的BGK模型方程稳态解》。《第四届流体与等离子体动力学数学问题国际研讨会论文集》（京都，1991），第487–500页，1992。[Vil09] C. Villani。《次强制性》。《美国数学会回忆录》, 202(950):iv+141, 2009。

Warwick Mathematics Institute, Zeeman Building, University of Warwick, CV4 7AL
电子邮箱地址：Josephine.Evans@warwick.ac.uk

Institut des hautes études Scientifiques, 35 Rte de Chartres, 91440, Bures-sur-Yvette, France
电子邮箱地址：menegaki@ihes.fr