arXiv:2305.01300v1 [math.DG] 2 May 2023

图上的 L^1-刘维尔性质

ANDREA ADRIANI 和 ALBERTO G. SETTI

摘要。本文研究 L^1-刘维尔性质，阐明其与随机完备性及图的其他结构特征之间的联系。我们根据图的格林函数刻画 L^1-刘维尔性质，并据此证明，在模型图上该性质等价于随机完备性。此外，我们证明存在不具随机完备性但满足 L^1-刘维尔性质的图，并基于内外曲率为一般图证明若干比较定理。我们还引入子图的狄利克雷 L^1-刘维尔性质，并证明若一个图含有满足狄利克雷 L^1-刘维尔性质的子图，则该图本身满足 L^1-刘维尔性质。因此，我们得出 L^1-刘维尔性质不受图的有限扰动影响；并且，与连续情形一样，只要图的至少一个端满足狄利克雷 L^1-刘维尔性质，该图就满足 L^1-刘维尔性质。

DiSTA, Universitá dell'Insubria, Via Valleggio 11, 22100Como, 意大利 (aadriani@uninsubria.it) DiSAT, Universitá dell'Insubria, Via Valleggio 11, 22100 Como, 意大利 (alberto.setti@uninsubria.it)

1. 引言

加权图随机性质的研究，例如抛物性、随机完备性和费勒性质等，这些性质最为重要，实质上涉及图的拉普拉斯算子所对应的经典方程（泊松方程和热方程）的解的性质。这项研究具有重要意义，因为它揭示了所研究图的解析性质与几何性质之间的相互作用。

过去几年，这一研究领域迅速发展，与度量空间上的分析也密切相关（[8, 12, 13, 14,15, 18, 19]）。特别是，对加权图的研究中，测度可能与离散拉普拉斯算子的系数无关，

2020年数学主题分类。 05C63, 31C12, 31C30, 53C21, 39A12。关键词和短语。无限加权图， L^1-Liouville 性质，随机完备性，曲率比较。

由此形成了一个极为丰富的理论，呈现出许多意想不到的特点；仅举几例，见 [19, 22, 23, 29, 31] ，以及 [20] 中全面且最新的综述。

因此，导致抛物性的条件、随机完备性的条件等，可能与黎曼流形情形中成立的条件存在显著差异；而图在许多方面代表了黎曼流形的一种自然离散化。

我们列举其中一些例子：随机完备性的尖锐对数曲率下界， [23, 定理 4；11], 曲率，尤其是 Ollivier 曲率，对体积的控制不如在流形上那样有效， [2], （不过在这方面，我们回顾一下：假设 Ollivier 曲率具有正的下界，可以得到 Bonnet-Meyers结果， [21, 23, 24]）；更一般地，距离函数的拉普拉斯算子与体积增长和随机性质之间的联系并不十分紧密，参见 [1, 例 6。1]

这源于这样一个事实：在图的情形下，度量、测度与拉普拉斯算子系数之间并不存在密切的关系（应当将加权图与加权流形进行比较）。在技术层面上，图的离散结构引入了意料之外的困难，这些困难通常源于非局部性以及缺乏链式法则。

此外，应注意的是，在连续情形下相同的几何对象，在图上却是不同的。然而，通过使用相容的度量，或考虑适当的结构，在许多情况下，人们已经能够找到流形上有效结果的精确对应物（参见有趣且详尽的综述 [17, 31]）。

由于函数的（超/次）调和性不依赖于测度，因此，对于给定的非常值（超/次）调和函数 f，总能找到一个充分小的测度 m ，使得$f \in L^p(V, m)$ 对每个 $p \in (0, \infty)$ 都成立（参见 [22]）。另一方面，在存在相容内在度量这一假设下， $p > 1$, [16, 定理 2.2], 中证明了Karp的Liouville定理的一个类似结果。在那里，作者扩展了 [11, 例 4.1 和 4.2], 中的一个构造，并给出了一个具有相容内在度量的图的例子（这可以理解为图上的度量完备性条件），该图支持一个非常值调和函数，使其对 L^p 中的每个$p \in (0, 1]$ 都成立。这表明，Yau的Liouville定理的一个版本，即由 K.-T. Sturm（[26, 定理 1]）推广到局部Dirichlet形式情形的$p < 1$, [32, 定理 3], ，在图上并不成立。然而，研究在图上适当的几何条件下，是否能够建立一个 L^p-Liouville结果（针对 $p \leq 1$），将会很有意义。

本文中，我们考虑极限情形 $p = 1$ ，并探讨非恒定、非负超调和函数的存在性问题。若图满足 L^1-刘维尔性质，或称其为 L^1-刘维尔图，则称之为 L^1 中的每个非负超调和函数都是

常数。当然，从一个非抛物图出发并适当地改变测度，总能找到一个非常数、非负的L^1 超调和函数。因此，只有像扩展 Karp 的结果那样对图施加适当限制，这个问题才有意义。

我们不假设存在相容的内在度量，而是考察 [4, 25] 所研究的黎曼流形情形中， L^1-刘维尔性质与其他随机性质之间的关系，其中最值得关注的是随机完备性。我们的研究沿着这一思路展开。主要问题源于拉普拉斯算子的非局部性——这一点前文已特别强调——而这又导致链式法则缺失。尽管存在这些显著差异，我们仍能得到黎曼流形结果的若干对应结论。特别地，在回顾随机完备性蕴含 L^1-刘维尔性质这一事实之后（见 [12]），我们首先证明这两种性质对于模型图是等价的；随后给出具有 L^1-刘维尔性质的非随机完备图的例子（例 3.6 和 3.9），并建立以内外曲率为依据的比较结果（定理 4.2 和 4.6）。在论文最后部分，我们引入子图的狄利克雷 L^1-刘维尔性质，并证明若一个图含有一个具有狄利克雷 L^1-刘维尔性质的子图，那么该图本身也具有 L^1-刘维尔性质。与黎曼情形一样，这与随机完备性的情况形成对比：随机完备性成立，当且仅当所有端都是随机完备的（见 [13] 和 [18, 定理 4]，其中给出了离散情形下的一般结果）。因此， L^1-刘维尔性质不受图的有限扰动影响；并且如同连续情形，只要一个图至少有一个端具有狄利克雷 L^1-刘维尔性质，该图便具有 L^1-刘维尔性质（定理5.6）。

本文的组织如下：第 2 节介绍图论的一些基本记号和定义。第 3 节定义L^1-刘维尔性质，描述它与随机完备性的关系；在证明这两个概念对模型图等价之后，给出两个具有 L^1-刘维尔性质的随机不完备图的例子。第 4 节证明两个与模型图的比较结果，分别通过将模型的格林函数和平均退出时间移植到图上来证明。第 5 节介绍子图的狄利克雷 L^1-刘维尔性质，并研究它与母图的 L^1-刘维尔性质之间的关系。

2. 设定与基本事实

图是一个三元组 $G = (V, b, m)$，其中 V 是图的节点集， $b : V \times V \to [0, \infty)$ 是一个在对角线上取值为零的对称函数， $m : V \to (0, \infty)$ 是一个具有全支撑的测度。考虑两个节点 $x, y \in V$。当 $b(x, y) \neq 0$ 时，我们称 x 和

y 是邻居，我们记作 $x \sim y$。路径是由邻居构成的（可能无限的）序列。如果对于任意 x、$y \in V$，都存在一条连接 x 和 y的有限路径，即 $\exists\ x = x_0 \sim x_1 \sim ... \sim x_{n-1} \sim x_n = y$ 对于某个 x_1、.....、$x_{n-1} \in V$，则称图是连通的。在这种情况下，n 是路径的（组合）长度，我们将 $d(x,y)$定义为连接 x 和 y 的路径长度的下确界，即（组合）距离。

若对于每个 $x \in V$, $|\{y : b(x,y) \neq 0\}| < \infty$，其中 $|\cdot|$ 表示集合的基数，则称一个图是局部有限的。特别地，局部有限性意味着，对于每个 $x \in V$，

$$\frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V} b(x,y) < \infty.$$

上述方程中的量称为 x 处的度，记作 $\mathrm{Deg}(x)$。从现在起，我们总是假设图是连通且局部有限的。

我们用 $C(V)$ 表示所有函数 $f : V \to \mathbb{R}$ 的集合。在局部有限的假设下，很容易看出，图的拉普拉斯算子$\Delta : C(V) \to C(V)$ 由下式定义

$$\Delta f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in V} b(x,y) \left(f(x) - f(y) \right),$$

对每个 $f \in C(V)$ 都有良好定义。

$G = (V, b, m)$ 的子图 N 是一个三元组 $N = (W, b_{|W \times W}, m_{|W})$，其中 $W \subset V$。我们用 $\mathrm{int}\ N = \{y \in W : \nexists\, x \in V \setminus W \text{ such that } b(x, y) \neq 0\}$ 表示 N 的内部，用 $\partial N = N \setminus \mathrm{int}\ N$ 表示其（内部）边界。给定一个固定顶点 $x_0 \in V$ 和 $r \geq 0$，我们记作$B_r(x_0) = B_r = \{y \in V : d(x_0, y) \leq r\}$，以及 $S_r(x_0) = S_r = \{y \in V : d(x_0, y) = r\}$。

图在 $x \in S_r(x_0)$ 处的内曲率和外曲率 $k_\pm(x)$ 定义为

$$k_\pm(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in S_{r \pm 1}} b(x,y).$$

当 $k_\pm$ 为球对称函数时，即对于每个 x，$k_\pm(x) = k_\pm(x')$，对于每个 $r \geq 0$，$x' \in S_r(x_0)$，我们称该图为弱球对称，或称其为以 x_0为根的模型。按照[19]，我们设

$$\partial B(r) = \sum_{x \in S_r} \sum_{y \in S_{r+1}} b(x,y).$$

热核 $p_t(x,y)$ 是 G 上连续时间热方程的最小正基本解，即，

$$\begin{cases} (\partial_t + \Delta_y)\, p_t(x,y) = 0 \quad \forall x, y \in V \ \text{ and } \ t > 0 \\ p_0(x,y) = \frac{\delta_x(y)}{m(x)}, \end{cases}$$

且可通过图的穷竭获得（例如，见 [28]）。特别地，热核是 Dirichlet 热核的单调极限，我们将其记为 $p_t^r(x,y)$，定义在穷竭$\{B_r\}_{r\geq 0}$上；它们在 int B_r 中满足初值问题和 Dirichlet 边界条件，即，对于所有 $t>0$，若 x 或 y 属于 ∂B_r，则 $p_t^r(x,y)=0$。众所周知，

$$\sum_{y\in V} p_t(x,y)m(y)\leq 1$$

并且，我们称图（或者更准确地说，由拉普拉斯算子驱动的布朗运动）是随机完备的，如果对每个 $x\in V$ 和每个 $t>0$,

$$\sum_{y\in V} p_t(x,y)m(y)=1.$$

还要回顾一下，如果图存在格林核，即泊松方程的一个最小正基本解，则称该图为非抛物型（或暂态）。

$$\Delta_y g(x,y)=\frac{\delta_x(y)}{m(x)}.$$

格林核可以通过对 $p_t(x,y)$ 关于时间积分得到，如下所示:

$$g(x,y)=\int_0^\infty p_t(x,y)dt,$$

因此，暂态等价于右侧积分有限。类似地，狄利克雷格林核为

$$g_r(x,y)=\int_0^\infty p_t^r(x,y)dt,$$

G 的格林核于是为某个穷竭的狄利克雷格林核的单调极限。

3. L^1-刘维尔性质

本节首先定义 L^1-刘维尔性质，然后在一般图的背景下给出该性质的一些刻画和初步结果。

定义 3.1. 如果图 $G=(V,\ b,\ m)$ 满足 L^1-刘维尔性质，或者简称为 L^1-刘维尔图，当且仅当 $L^1(V,\ m)$ 中的每个非负超调和函数都是常数；也就是说，每个非负函数 $u\in L^1(V,\ m)$ 满足

$$\Delta u\geq 0$$

是常数。

回顾一下，抛物性等价于每个非负超调和函数都是常数这一事实，因此所有抛物型图显然都是 L^1-刘维尔图，所以我们可以将研究重点放在非抛物型图上。我们首先给出 L^1-刘维尔性质的一种刻画，它是通过图的格林函数 g 的（不可）积性来表述的。这是 [9] 中一个结果的类比，也是 [12]中定理 1.7 的内容。我们给出一个略有不同的证明，该证明基于强最小值原理；根据该原理，如果非恒定函数 u满足

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{on } \operatorname{int} D \\ u \geq 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

在有限子图 D 上，则 $u > 0$ 在 $\operatorname{int} D$ 上（例如参见 [6, 10,27]）。

定理 3.2。 图 $G = (V, b, m)$ 具有 L^1-刘维尔性质，当且仅当对于某个（任意） $x \in V$， $g(x, \cdot) \notin L^1(V, m)$，也就是说，

$$\sum_{y \in V} g(x, y)m(y) = \infty.$$

证明。 $\Rightarrow$ 这个蕴含显然成立： g 是一个非负的超调和函数。由于 g 非常数，且该图具有 L^1-刘维尔性质，因此对于每个 $x \in V$，都有 $g(x, \cdot) \notin L^1(V, m)$。

$\Leftarrow$ 设 $u : V \to \mathbb{R}$ 是一个非负、非常数的超调和函数，并设 $x_0 \in V$ 为一个固定顶点。我们需要证明，$g(x_0, \cdot) \notin L^1(V, m)$ 蕴含 $u \notin L^1(V, m)$。存在 $C > 1$ 使得 $g(x_0, x_0) \leq Cu(x_0)$。注意，函数 $v(x) := Cu(x) - g_r(x_0, x)$（其中 g_r 如上所定义）满足以下方程组：

$$\begin{cases} \Delta v(x) \geq 0 & \text{for all } x \in \operatorname{int} B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \\ v(x) \geq 0 & \text{for all } x \in \partial B_r(x_0) \cup \{x_0\}. \end{cases}$$

由最大值原理可知，对于每个$r \geq 1$， $v \geq 0$ on $B_r(x_0)$。令 $r \to \infty$ 趋于极限，并利用$C > 1$这一事实，可得 $Cu \geq g(x_0, \cdot)$，因此根据 $g(x_0, \cdot)$的非可积性假设，有 $u \notin L^1(V, m)$。□

回顾图的格林函数 g 与其热核之间的联系，我们立即得到以下推论（见[12,定理 1。7]）。

推论 3.3。 每个随机完备图 $G = (V, b, m)$ 都满足 L^1-刘维尔性质。

证明。 事实上，通过应用托内利定理，

$$\begin{aligned}\sum_{y\in V} g(x_0,y)m(y) &= \sum_{y\in V}\int_0^\infty p_t(x_0,y)dt\, m(y)\\ &= \int_0^\infty \sum_{y\in V} p_t(x_0,y)m(y)\, dt\\ &= \int_0^\infty 1dt = \infty\end{aligned}$$

并且根据定理 3.2，该图是 L^1-Liouville 的。 □

3.1. -刘维尔性质与模型图的随机完备性。在本小节中，我们要证明，对于模型图，随机完备性与 L^1-刘维尔这两个性质实际上等价，这对应于 [4] 中的一项结果。众所周知，见 [19, 定理 1], , 如果一个图是模型图，那么热核就是球对称函数，即对于任意 $x \in S_r(x_0)$ 和任意 $r \in \mathbb{N}_0$，都有 $p_t(x_0, x) = p_t(r)$。这意味着，在模型图上，函数 $g(x_0, \cdot)$ 是球对称函数。

事实上，直接计算可得，以根 x_0 为中心的模型图的格林函数为

$$g(x_0,x) = g(r) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{1}{\partial B(k)}, \tag{1}$$

对任意 $x \in S_r(x_0)$ 和 $r \geq 0$。此外，当 $g \equiv \infty$，即图是抛物型或常返时，它显然是随机完备的，因此满足 L^1-刘维尔性质。接下来我们关注 G 是模型图且 $g \neq \infty$ 的情形，即 $\sum_k {\partial B}^{-1}(k) < \infty$。

我们还回顾以下结果（无权情形见 [13, 定理 5。10], 一般情形见 [19, 定理 5] 和 [29, 定理 4。8] ）：

定理 3.4。 模型图 G 是随机完备的，当且仅当级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(B_k)}{\partial B(k)}$$

发散。

在完成上述准备后，我们得到以下定理。

定理 3.5。 设 $G = (V, b, m)$ 为一个模型图。那么它是 G L^1-*Liouville* 的，当且仅当它是随机完备的。

证明。我们可以假设 G 不是抛物型，因此 $\sum_k {\partial B}^{-1}(k) < \infty$。

交换求和顺序并使用方程（1），我们看到

$$\sum_{r=0}^{\infty} g(r)m(S_r) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty} \frac{m(S_r)}{\partial B(k)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} \frac{m(S_r)}{\partial B(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(B_k)}{\partial B(k)},$$

因此， L^1-刘维尔性质成立的条件与随机完备性的条件一致。证毕。

□

此时，人们可能会想知道，是否存在满足 L^1-刘维尔性质的随机不完备图，或者推论 3.3 的逆命题是否成立。我们给出两个例子，以说明事实上确实存在一些随机不完备但满足 L^1-刘维尔性质的图。第一个例子是对 [4] 中提出的一个例子的类比，并且与 [12, 13], 中的其他例子相似；第二个例子则基于反树这一概念，我们将在介绍第一个例子之后对其进行简要介绍。

例 3.6. 我们首先考虑两个图 $M_1 = (V_1, b_1, m_1)$和 $M_2 = (V_2, b_2, m_2)$。

我们对 M_1 和 M_2 作出如下假设：
(1) $m_1(M_1) = \sum_{x\in V_1} m_1(x) = \infty$，也就是说， M_1 具有无限体积。
(2) M_2 是随机不完备的，例如， M_2 是一个模型图，且满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_2(B_k)}{\partial B(k)} < \infty$。

我们通过将图 M_1和 M_2 在一个顶点处粘合，定义一个新图 $M = (V, b, m)$，即 $V := V_1 \cup V_2$, $b_{|(V_i\times V_i)} := b_i$, $m_{|V_i} := m_i$，并且存在且仅存在两个顶点 $x_1 \in V_1$ 和 $x_2 \in V_2$，使得$b(x_1, x_2) > 0$。由于 M_2 是随机不完备的，因此M 也随机不完备（见 [13, 18]），所以它不是抛物型的。我们希望证明，可以定义一种测度的共形变换，使随机不完备性得以保持，并使 M 成为 L^1-*Liouville*。

令所有 $y \in V$ 均满足 $\tilde{m}(y) = \lambda^2(y)m(y)$，其中若 $y \in V_2$，则 $\lambda(y) = 1$，且对于 $y \in V_1$，有 $\lambda^2(y)g(x, y) \geq 1$，其中 g 是图 $M = (V, b, m)$ 的格林函数。我们声称，这种测度的共形变换保持格林函数不变，即 $\tilde{g} = g$，其中 $\tilde{g}$ 是图 $M = (V, b, \tilde{m})$ 的 $\tilde{}$ 格林函数。事实上，利用一个显然的事实： $\tilde{M}$ 上的拉普拉斯算子是 $\tilde{\Delta} = \frac{1}{\lambda^2}\Delta$，以及格林函数的性质

,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{y\in V} \Delta_y g(x,y) f(y) m(y) \\ &= \sum_{y\in V} \frac{\Delta_y g(x,y)}{\lambda^2(y)} f(y)\lambda^2(y) m(y) \\ &= \sum_{y\in V} \tilde{\Delta}_y g(x,y) f(y) \tilde{m}(y), \end{aligned}$$

从而证明了我们的论断。注意，由于 $\lambda^2 = 1$ *on* V_2, $\tilde{\Delta} = \Delta^{M_2}$ *on* $V_2 \setminus \{x_2\}$, 因此根据弱 *Omori–Yau* 极大值原理，很容易得出 M 是随机不完备的， [13,定理 2。2]。

我们通过证明.....来结束这个例子。 $\tilde{M}$ 是 L^1-刘维尔。事实上，

$$\sum_{y\in V} \tilde{g}(x,y)\tilde{m}(y) = \sum_{y\in V} g(x,y)\lambda^2(y)m(y) \geq \sum_{y\in V_1} m(y) = \infty$$

且根据定理 *3.2*， $\tilde{M}$ 是 L^1-刘维尔的。

反树已被用于构造 [5, 7, 19,27, 29] 中的各种例子。我们利用这一概念构造一个随机不完备、具有 L^1-Liouville 性质且只有单端的图，即任意有限子集的补集都只有一个无界连通分支。注意，前一个例子中构造的图至少有两个端，分别对应粘合在一起的两个不同图。

定义 3.7。 若图 $G = (V, b, m)$ 满足 $m \equiv 1$,$b(x, y) \in \{0, 1\}$ 且 $k_+(r) = |S_{r+1}|$ 对所有 $r \in \mathbb{N}_0$均成立，则称其为反树。最后这一条件等价于： S_r 中的每个顶点都与 S_{r+1}中的每个顶点相连。

注 3.8。 出于本文的目的，我们还要求每个球层上都没有内部连接。这种球层内连接在计算某些曲率概念（例如 *Ollivier* 曲率）时会起关键作用；例如，参见 [5], ，其中作者要求同一球层中的每个顶点都与其他所有顶点相连。

例 3.9。 设 $A = (V, b, m)$ 是一个以 x_0 为根且没有球层内连接的反树。我们假设 A 是随机不完备的。由于 A 是一个模型，根据反树的定义，这相当于

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(B_k)}{\partial B(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|B_k|}{|S_k||S_{k+1}|} < \infty.$$

令 γ 为 A 中的一条无限路径 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$，其中对所有 i 都有 $x_i \in S_i$ 。现在我们对测度进行共形变换，以保证 L^1-刘维尔性质，同时保持随机不完备性。令 $\lambda : V \to \mathbb{R}$

使得对所有 $x \notin \gamma$ 和 $\lambda(x) \geq g(x_0, x)^{-\frac{1}{2}}$，都有 $\lambda \geq 1$, $\lambda(x) = 1$，且对所有 $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{\gamma}$都有 $\geq g$。现在考虑图 $A = (V, b, \tilde{m})$，其中 $V = V$、 $b = b$ 和 $\tilde{m} = \lambda^2 m$。

如上例所示 $\tilde{g}(x_0, x) = g(x_0, x)$，很容易验证 $\tilde{A}$ 具有 L^1-刘维尔性质。事实上，

$$\sum_{y \in \tilde{V}} \tilde{g}(x_0, y)\tilde{m}(y) \geq \sum_{y \in \gamma} g(x_0, y)\lambda^2(y)m(y) \geq \sum_{y \in \gamma} m(y) = \infty$$

且该图是 L^1-刘维尔的。

最后，我们需要证明该图在随机意义下是不完备的，或者等价地说，它不满足弱 *Omori-Yau* 最大值原理（参见 [13,定理 2。2]）。

令 $r(x) = d(x_0, x)$ 以及 $a_l = \frac{|B_l|}{|S_l||S_{l+1}|}$, 定义 $f^* = \sum_{l=0}^{\infty} a_l < +\infty$ 和

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{r(x)-1} a_l & x \notin \gamma \\ f^* - \epsilon & for\ x = x_i,\ for\ all\ i \geq n-1 \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

其中 ϵ 和 n 待定。则 f 有上界，且 上确界 $f = f^*$; 如果 $x \in S_r \setminus \gamma$, 则有:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} f(x) &= \sum_{y \in S_{r-1}} (f(x) - f(y)) + \sum_{y \in S_{r+1}} (f(x) - f(y)) \\ &= (|S_{r-1}| - 1)\, a_{r-1} + f(x) - f(x_{r-1}) + (1 - |S_{r+1}|)\, a_r + f(x) - f(x_{r+1}). \end{aligned}$$

注意,

$$\begin{aligned} (|S_{r-1}| - 1)\, a_{r-1} + (1 - |S_{r+1}|)\, a_r &= \frac{|B_{r-1}|}{|S_r|} - a_{r-1} + a_r - \frac{|B_r|}{|S_r|} \\ &= -1 + a_r - a_{r-1}, \end{aligned}$$

因此，将其代入上述表达式，我们得到

$$\tilde{\Delta} f(x) = -1 + a_r - a_{r-1} + 2\sum_{l=0}^{r-1} a_l - 2f^* + 2\epsilon.$$

现在我们选择 $\epsilon > 0$ 和 $n > 1$，使得

(1) $-1 + 3\epsilon < 0$,
(2) $a_r - a_{r-1} < \epsilon\ for\ all\ r \geq n-1$,
(3) $f^* - \sum_{l=0}^{n-2} a_l < \epsilon$,

并令 $\alpha = \sum_{l=0}^{n-1} a_l$, 使得

$$\Omega_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\} = B_{n-2}^c(x_0) \setminus \gamma.$$

因此，如果 $x \in \Omega_\alpha$，那么 $r(x) \geq n-1$ 并且

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} f(x) &\leq -1 + a_r - a_{r-1} + 2\epsilon \\ &< -1 + 3\epsilon < 0, \end{aligned}$$

这表明 f 违反了无穷远处弱最大值原理，因此~ A 是随机不完备的，正如所声称的那样。

4. 比较定理

本节基于更强/更弱曲率增长的概念，陈述并证明两个与模型图有关的比较结果（见[1, 2, 19, 30], ，其中利用这些结果证明了关于体积增长、随机完备性和费勒性质的比较定理）。第一个定理通过移植比较模型的格林函数得到。第二个定理则利用平均退出时间对 L^1-刘维尔性质的刻画，并再次采用移植技术。

~ ~ ~**定义 4.1.** 设 $G = (V, b, \tilde{m})$ 是一个模型。若存在一个顶点 $x_0 \in V$ 和 $R \geq 0$，使得图$G = (V, b, m)$ 在一个有限集之外的曲率增长强于 G，则称该图在一个有限集之外具有更强的曲率增长。

$$k_+(x) \geq \tilde{k}_+(r) \ and \ k_-(x) \leq \tilde{k}_-(r)$$

对于所有 $x \in S_r(x_0)$ 属于 G 且满足 $r \geq R$ 的情形。

~我们称 G 在有限集合之外的曲率增长弱于 G，如果存在 $x_0 \in V$ 使得相反的不等式成立。

在 $R = 0$ 的情形下，我们简单地说 G 的曲率增长比 G更强/更弱~。

~定理 *4.2.* 设 $G = (V, b, m)$ 是一个加权图，且 $G = ~ ~(V, b, \tilde{m})$ 是一个以 o 为根的模型图。假设 G 在有限集之外的曲率增长强于 G，并且对于某个 $C > 0$ 以及所有充分大的 r， $m(S_r(x_0)) \leq C\tilde{m}(S_r(o))$。若 $\tilde{G}$ 不是 L^1-刘维尔的，则 G 不是 L^1-刘维尔的。

注 4.3. [2] 中的一个结果表明，如果在一个有限集合之外， G 的曲率~强于一个比较模型图 G ，那么存在一个常数 $c > 0$ ，使得 $m(S_r(x_0)) \geq c\tilde{m}(S_r(o))$。假设$m(S_r(x_0)) \leq C\tilde{m}(S_r(o))$ 相当于要求G 的体积增长从下方和上方都受到比较模型图的体积增长的控制。这是因为，正如上一节已经强调的， L^1-刘维尔性质取决于无穷远处体积的行为。

证明。 假设 $\tilde{G}$ 不是 L^1-Liouville 的，因此根据定理 3.2

$$\sum_r \tilde{g}(r)\tilde{m}\left(S_r(o)\right) < \infty.$$

为了否定 L^1-刘维尔性质，我们需要找到一个可积、非负、超调和且非常数的函数。对于 $x \in S_r(x_0)$，定义

$$v(x) := \tilde{g}(r),$$

并注意到，根据 $\tilde{g}$ 的显式表达式 (1)， v 是一个递减的˜径向函数。假设当r $(x) \geq R$ 对某个 $R > 0$ 成立时， G 的曲率强于 G ，则对于所有这样的 x ，我们有

$$\begin{aligned}\Delta v(x) &= k_+(x)(v(r) - v(r+1)) + k_-(x)(v(r) - v(r-1)) \\ &\geq \tilde{k}_+(r)\left(\tilde{g}(r) - \tilde{g}(r+1)\right) + \tilde{k}_-(r)\left(\tilde{g}(r) - \tilde{g}(r-1)\right) = \Delta\tilde{g}(r) \geq 0,\end{aligned}$$

表明 v 在 $B_R(x_0)^c$中是非负且超调和的。由此可知，函数 $u = \min\{v(x)\ \tilde{g}(R+1)\}$ 在 G上是非恒定、非负且超调和的。

此外，通过增大 C，我们可以假设对每个 $r \geq R$ 都有 $m(S_r(x_0)) \leq C\tilde{m}(S_r(o))$，因此

$$\sum_{x\in V} u(x)m(x) \leq C + \sum_{r\geq R} \tilde{g}(r)m\left(S_r(x_0)\right) \leq C\sum_r \tilde{g}(r)\tilde{m}\left(S_r(o)\right) < \infty,$$

由此可按要求得出， G 不是 L^1-李乌维尔的。 □

下面是前述定理结合 $C = 1$ 的一个非平凡应用。

˜ ˜**例 4.4**。 我们定义 $G = (\mathbb{N}_0,\ b,\ \tilde{m})$ 和 $G = (\mathbb{N}_0,\ b,\ m)$ 为

$$\tilde{m}(r) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ e^{-r} + 2 & r \geq 1, \end{cases} \quad \tilde{b}(r, r+1) = (r+1)^3 \text{ for all } r \geq 0 \text{ and}$$

$$m(r) = 2\frac{e^r}{e^r+1}, \quad b(r, r+1) = \frac{2e^{r+1}}{e^{r+1}+1} \cdot \frac{(r+1)^3}{e^{-(r+1)}+2} \text{ for all } r \geq 0.$$

直接计算可得

$$\tilde{k}_+(r) = \frac{(r+1)^3}{e^{-r}+2} \text{ for all } r \geq 1$$

and

$$k_+(r) = \frac{(r+1)^3}{e^{-(r+1)}+2}\frac{e(e^r+1)}{e^{r+1}+1} \text{ for all } r \geq 0,$$

˜因此 $k_+(r) \leq k_+(r)$ 对所有 $r \geq 1$均成立。此外，

$$\tilde{k}_-(r) = k_-(r) = \frac{r^3}{e^{-r}+2},$$

˜因此 G 在一个有限集之外的曲率增长比 G 更弱。注意，由于

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^r e^{-i}}{(r+1)^3} < \infty$$

and

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{2(r+1)}{(r+1)^3} < \infty,$$

$\tilde{G}$ 是随机不完备的，因此不具备 L^1-*Liouville* 性质。

最后，利用对于所有 $r \geq 1$ 均有 $\tilde{m}(r) \geq m(r)$ 这一事实以及定理 *4.2*，我们得出 G 不是 L^1-刘维尔的。

4.1. 平均退出时间与 L^1-刘维尔性质。 令 E_r 为以下问题的解：

$$\begin{cases} \Delta E_r = 1 & \text{in int } B_r(x_0) \\ E_r = 0 & \text{on } \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

注意，E_r 要么在每一点都发散，要么收敛到一个满足 $\Delta E \equiv 1$ 的函 E。事实上，根据最大值原理，E_r 为正且严格递增，因此 $\lim_r E_r(x) = E(x)$ 存在，且可能为有限值或无穷大。假设对于某个 x_0，$E(x_0) < \infty$。由于 $\Delta E_r(x_0) = 1$，重新整理可得

$$m(x_0) + \sum_y b(x_0, y) E_r(y) = E_r(x_0) \sum_y b(x_0, y)$$

因此，令 $r \to \infty$，并利用单调收敛定理，我们可推出左侧的极限是有限的，因此特别有$E(y) < \infty$ 对所有 $y \sim x_0$ 以及 $\Delta E(x_0) = 1$。随后由连通性可知，对于每个 y 和 $\Delta E = 1$，均有 $E(y) < \infty$。

我们还注意到，我们有一个 E_r 关于 $B_r(x_0)$的狄利克雷格林核 $g_r(x_0, x)$ 的显式表示，

$$E_r(x) = \sum_{y \in B_r(x_0)} g_r(x, y) m(y).$$

特别是

$$E_r(x) \nearrow E(x) = \sum_{y \in V} g(x, y) m(y),$$

其中 g 是 G 的格林核，因此图 G 不是 L^1-刘维尔的，当且仅当对于某个/任意 $x \in G$，$E(x) < \infty$。

在陈述并证明本小节的主要定理之前，我们回顾以下结果，该结果已在 [19] 中证明。

定理 4.5 ([19]中的定理 6)。 如果加权图 $G = (V, b, m)$的曲率增长强于（分别地，弱于）一个弱球对称图 $G = (V, b, \tilde{m})$，且该图是随机不完备的（分别地，完备的），那么 G 是随机不完备的（分别地，完备的）。

定理 4.6. 设 G 是一个模型图，G 是一个图。

1) 如果 G 的曲率增长弱于 $\tilde{G}$，且 $\tilde{G}$ 具有 L^1-刘维尔性质，那么 G 具有 L^1-刘维尔性质。2)如果 G 的曲率增长强于 $\tilde{G}$，且 $\tilde{G}$ 不具有 L^1- 刘维尔性质，那么 G 不具有 L^1- 刘维尔性质。

证明。 第一条结论可由定理 4.5 和推论 3.3 中所述的模型图上 L^1-刘维尔性质与随机完备性之间的等价性立即推出。

为证明第二个结论，注意到根据上述讨论，我们只需证明对于某个 $x \in G$， $E(x) = \sum_{y\in G} g(x,y)m(y) < \infty$。为此，我们首先注意到，曲率假设意味着，对于每个 R，$\operatorname{int} B_R(x_0) = B_{R-1}(x_0)$ 且 $\partial B_R(x_0) = S_R(x_0)$。接下来，考虑定义在 G 上的球对称函数

$$F_R(r) = \sum_{k=r}^{R-1} \frac{\tilde{m}(B_k)}{\partial \tilde{B}(k)},$$

其中，按照惯例，对每个 $k \geq 0$，令 $\partial B(k) = k_+(k)\tilde{m}(S_k)$。根据随机不完备性的假设和定理 3.4，我们有函数

$$F(r) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\tilde{m}(B_k)}{\partial \tilde{B}(k)}$$

对每个 r 都是有限的，由单调性可得 $F_R \nearrow F$。现在考虑定义在 G 上的移植函数 $F_R(r(\cdot))$，并注意到曲率条件给出

$$\begin{aligned}\Delta F_R(r(x_0)) &= \frac{1}{m(x_0)} \sum_{y\in S_1(x_0)} \left(F_R(r(x_0)) - F_R(r(y))\right) b(x_0,y) \\ &= k_+(x_0)\frac{\tilde{m}(o)}{\tilde{k}_+(o)\tilde{m}(o)} \geq 1\end{aligned}$$

并且，对于 $x \in S_r(x_0)$， $0 < r \leq R-1$,

$$\begin{aligned}\Delta F_R(r(x)) &= \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in S_{r+1}(x_0)} \left(F_R(r) - F_R(r+1)\right) b(x,y) \\ &\quad + \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in S_{r-1}(x_0)} \left(F_R(r) - F_R(r-1)\right) b(x,y) \\ &= k_+(x)\frac{\tilde{m}(B_r)}{\tilde{k}_+(r)\tilde{m}(S_r)} - k_-(x)\frac{\tilde{m}(B_{r-1})}{\tilde{k}_+(r-1)\tilde{m}(S_{r-1})}.\end{aligned}$$

写出 $\tilde{m}(B_r) = \tilde{m}(B_{r-1}) + \tilde{m}(S_r)$，利用这一事实（例如参见 [19]）

$$\tilde{k}_+(r-1)\tilde{m}(S_{r-1}) = \tilde{k}_-(r)\tilde{m}(S_r) = \frac{\tilde{k}_-(r)\partial\tilde{B}(r)}{\tilde{k}_+(r)}$$

结合曲率增长更快这一假设，我们得出，对于每个 $x \in S_r(x_0)$, $0 < r \leq R-1$,

$$\begin{aligned}\Delta F_R(r(x)) &= \frac{\tilde{m}(B_{r-1})}{\partial \tilde{B}(r)}\left[k_+(x) - k_-(x)\frac{\tilde{k}_+(r)}{\tilde{k}_-(r)}\right] + k_+(x)\frac{\tilde{m}(S_r)}{\partial \tilde{B}(r)} \\ &\geq \frac{\tilde{k}_+(r)\tilde{m}(S_r)}{\partial \tilde{B}(r)} = 1.\end{aligned}$$

综上可得，函数 $F_R(r(\cdot)) - E_R(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases}\Delta\left(F_R(r(\cdot)) - E_R(\cdot)\right) \geq 0 & \text{in int}\, B_R(x_0) \\ F_R(r(\cdot)) - E_R(\cdot) = 0 & \text{on}\ \partial B_R(x_0).\end{cases}$$

由最大值原理可知，$F_R(r(\cdot)) \geq E_R(\cdot)$ 在 $B_R(x_0)$ 上成立。因此，当 $R \to \infty$ 时取极限可得，$\infty > F(r(\cdot)) \geq E(\cdot)$，且 G 不具有 L^1- 刘维尔性质。□

注 4.7. 注意，由于有限集扰动不会影响（模型）图的随机完备性/不完备性（见，[13,18]），定理 *4.6* 的结论在曲率假设仅在有限集之外成立时仍然成立。

还要注意，上述定理的陈述 *2* 在曲率增长更强的假设下也成立，如 [1, 定义 3。1] 所示。

5. Dirichlet L^1-刘维尔性质

本节借鉴黎曼流形情形下 [25, 第 3] 节中的构造，引入无限子图的 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔性质（狄利克雷刘维尔性质）的概念。在给出一个有用的刻画后，我们证明了 L^1-刘维尔性质成立的判据，并由此推得：一个图是 L^1-刘维尔的，当且仅当它至少有一个端是 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔的。这与随机完备的情形形成对比：图只要每个端都是随机完备的，就具有随机完备性（参见 [18, 13], ，其中在加权图的背景下发展了与 [3] 中类似的思想）。

设 $N \subset G$ 是 G 的一个无限连通子图。考虑由 int N 的有限集 $\{\Omega_r\}$ 构成的一个穷竭。给定 $x_0 \in$ int N，我们用 ${}^{\mathcal{D}}g_r$ 表示以下方程组的正解：

$$\begin{cases}\Delta {}^{\mathcal{D}}g_r(x_0, y) = \frac{\delta_{x_0}(y)}{m(x_0)} & \text{in int}\,\Omega_r \\ {}^{\mathcal{D}}g_r(x_0, y) = 0 & \text{on}\ \partial\Omega_r.\end{cases}$$

与之前所见完全相同，序列 ${}^{\mathcal{D}}g_r$ 递增并收敛到函数 ${}^{\mathcal{D}}g$ ，该函数是 N上的狄利克雷格林函数。

现在我们可以给出如下定义。

定义 5.1。 如果子图 $N \subset G$ 中每个满足下述条件的非负函数在 $L^1(N)$ 中都是 $\mathcal{D}$-L^1-*Liouville* 的，我们就称该子图为 $\mathcal{D}$-L^1-*Liouville* 子图。

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & in\ int N \\ u = 0 & on\ \partial N \end{cases}$$

恒等于零。

为了刻画子图的 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔性质，我们引入狄利克雷平均退出时间的概念，这对于我们的推导至关重要。

定义 5.2. 我们用 ${}^{\mathcal{D}}E$ 表示该系统的最小正解

$$\begin{cases} \Delta {}^{\mathcal{D}}E = 1 & in\ int N \\ {}^{\mathcal{D}}E = 0 & on\ \partial N. \end{cases} \tag{2}$$

注 5.3. 注意， ${}^{\mathcal{D}}E$ 可以通过对 N 作穷竭得到。事实上，设 ${}^{\mathcal{D}}E_r$ 表示以下方程的解

$$\begin{cases} \Delta {}^{\mathcal{D}}E_r = 1 & in\ int \Omega_r \\ {}^{\mathcal{D}}E_r = 0 & on\ \partial \Omega_r \end{cases} \tag{3}$$

对于 N 的一个穷竭 $\{\Omega_r\}$ 。上一节中使用的同一论证表明， ${}^{\mathcal{D}}E_r$ 要么在每一点都发散，要么收敛到函数 ${}^{\mathcal{D}}E$ ，该函数是(2)的最小解。此外，在Ω_r 上对函数 $E - {}^{\mathcal{D}}E_r$ 应用最大值原理可得 $E \geq {}^{\mathcal{D}}E_r$，因此 $E \geq {}^{\mathcal{D}}E$。

现在，我们可以给出 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔性质的一种刻画，类似于上文对 L^1-刘维尔性质给出的刻画；后者将前者与狄利克雷格林函数的非可积性联系起来。

定理 5.4。 以下各项等价：

1) N 不是 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔性质；2) ${}^{\mathcal{D}}g(x, \cdot)$对每个 $x \in N$都属于 $L^1(N)$；3) 对每个 $x \in N$，${}^{\mathcal{D}}E$ 都是有限的，并且

$$ {}^{\mathcal{D}}E(x) = \sum_{y \in N} {}^{\mathcal{D}}g(x, y) m(y). $$

证明。**1)** $\Leftrightarrow$ **2)**：设 $0 \leq u \in L^1$ 是一个违反 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔性质的函数。那么

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{in int } N \\ u \geq 0 & \text{on } \partial N. \end{cases}$$

由于存在 $x_0 \in N$ 使得 $u(x_0) > 0$ ，根据最小值原理，我们得到 $u > 0$ 在 N上成立。

令 $C>1$ 为一个足够大的常数，使得

$$^{\mathcal{D}}g(x_0,x_0)\le Cu(x_0).$$

现在将最大值原理应用于穷竭 $\{\Omega_r\}$ 上的函数 $u-{}^{\mathcal{D}}g_r$，其中 ${}^{\mathcal{D}}g_r$ 为调和函数，我们得到 ${}^{\mathcal{D}}g(x_0,y)\le Cu(y)$ 对每个 $y\in N$ 都成立。由此可得

$$\sum_{y\in N}{}^{\mathcal{D}}g(x_0,y)m(y)\le C\sum_{y\in N}u(y)m(y)<\infty.$$

另一方面，如果 ${}^{\mathcal{D}}g(x,\cdot)\in L^1(N)$，那么 ${}^{\mathcal{D}}g(x,\cdot)$ 是一个可求和的、非负的、非常值的超调和函数，违反了 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔性质。

2) $\Leftrightarrow$ 3) 考虑穷竭 $\{\Omega_r\}$，并令 ${}^{\mathcal{D}}g_r$ 表示相应的狄利克雷格林函数。根据构造，显然函数 $\sum_{y\in\Omega_r}{}^{\mathcal{D}}g_r(x,y)m(y)$ 是问题 (3) 的唯一解，因此它与 ${}^{\mathcal{D}}E_r$ 重合。令 $r\to\infty$ 趋于极限，我们得到

$${}^{\mathcal{D}}E(x)=\lim_{r\to\infty}{}^{\mathcal{D}}E_r(x)=\lim_{r\to\infty}\sum_{y\in N}{}^{\mathcal{D}}g_r(x,y)\chi_{\Omega_r}(y)m(y)=\sum_{y\in N}{}^{\mathcal{D}}g(x,y)m(y),$$

其中我们用到了 ${}^{\mathcal{D}}g_r(x,y)\nearrow{}^{\mathcal{D}}g(x,y)$ 这一事实，以及 $r\to\infty$ 和单调收敛性。□

由此立即得到以下推论，它建立了（无限）子图的全局 L^1-Liouville性质与 $\mathcal{D}$-L^1-Liouville性质之间的联系。这是黎曼流形上 [4, 推论30] 的一个类比。

推论5.5. 设 G 是一个图，$N\subset G$ 是 G的一个（无限）子图。若 N 具有 $\mathcal{D}$-L^1-*Liouville*性质，则 G 具有 L^1-*Liouville*性质。此外，若存在一个子图序列 $\{N_k\}_k$，使得 ${}^{\mathcal{D}}E_{N_k}(x_0)\to\infty$当 $k\to\infty$ 时趋于某个 $x_0\in D$，则 G 具有 L^1-*Liouville*性质。

证明。 两个结论均可由前述定理与注记5.3结合得到。□

现在我们可以陈述并证明本节的主要结果： L^1-刘维尔性质是否成立，取决于其至少一个端上的 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔性质是否成立。

定理5.6。 令 $G=(V,b,m)$ 为一个图。

1) 令 $N=(W,b_{|W\times W},m_{|W})$ 为 G 的一个子图，且 $V\setminus W$ 是有限的。那么 G 是 L^1-刘维尔的，当且仅当 N 是 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔的。2) G 是 L^1-刘维尔的，当且仅当其至少有一个端是 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔的。

证明。 1）鉴于前面的推论，我们只需证明：若 G 是 L^1-李维尔的，则 N 是 $\mathcal{D}$-L^1-李维尔的。

令 g 为 G的格林核。根据假设和定理 3.2

$$\sum_{x\in V} g(x,y)m(x) = \infty$$

对每个 $y \in V$。根据构造， g 是穷竭 $\{\Omega_r\}$ （ G的一个穷竭）对应的狄利克雷格林核 g_r 的单调极限，并且我们可以假设 $V \setminus W \subset \text{int}\,\Omega_1$。设 u 是一个非负且非常数的函数，满足 $\Delta u \geq 0$ 属于 $\text{int}N$ ，且 $u = 0$ 属于 ∂N。我们需要证明 u 不可积。由最小值原理， $u > 0$ 属于 $\text{int}\,N$ ，因此存在常数 $c_1 > 0$ ，使得

$$\min_{\partial\Omega_1} u = c_1 > 0.$$

另一方面，固定 $y_0 \in\Omega_1$, 后，我们有

$$\max_{x\in\partial\Omega_1} g(x,y_0) = c_2 < \infty,$$

因此存在正数 $\lambda > 0$ ，使得对每个 $x \in \partial\Omega_1$， $u(x) \geq \lambda g(x, y_0)$。由于 $g \geq g_r$ ，可知 $u \geq \lambda g_r$ 在 $\partial\Omega_r \cup \partial\Omega_1$上成立；再由最大值原理，得出 $u \geq \lambda g_r$ 属于 $\Omega_r \setminus\Omega_1$，因此 $u \geq \lambda g$ 属于 $V \setminus\Omega_1$。最后，

$$\sum_{x\in W} u(x)m(x) \geq \lambda \sum_{x\in W\setminus\Omega_1} g(x,y_0)m(x) = \infty$$

正如证明 N 是 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔性质所需的那样。

2）我们已经知道，如果至少有一个端是 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔的，那么 G 就是 L^1-刘维尔的。接下来，用反证法假设 G 的所有端都不是 $\mathcal{D}$-L^1-刘维尔的。于是存在一个有限集 K ，使得 $G \setminus K = \bigcup_{i=1}^m F_i$，其中 F_i 是 G 的端，而对于每个 $i = 1$，...， m， ${}^{\mathcal{D}}E_{F_i}$ 都是有限函数。由于当 $i \neq j$ 时 $\partial F_i \cap \partial F_j = \emptyset$ ，将 ${}^{\mathcal{D}}E_{F_i} = 0$ 置于其外部，便可得出 ${}^{\mathcal{D}}E_{G\setminus K} = {}^{\mathcal{D}}E_{F_1} + \ldots + {}^{\mathcal{D}}E_{F_m}$，这是有限的，矛盾由第 i）部分得出。□

参考文献

[1] A. Adriani，关于图的比较定理的一则注记，《数学分析及其应用杂志》**503** （2021年）。[2] A. Adriani 和 A.G. Setti，图的内外曲率、里奇-奥利维耶曲率与体积增长，《美国数学会会刊》**149**（2021年），第11期，4609–4621页。[3] C. Bär 和 G.P. Bessa，随机完备性与体积增长，《美国数学会会刊》**138**（2010年），第7期，2629–2640页。[4] G.P. Bessa、S. Pigola 和 A.G. Setti，关于 L^1随机不完备流形的 -刘维尔性质，《势分析》**39** （2013年），313–324页。[5] D. Cushing、S. Liu、F. Münch 和 N. Peyerimhoff，反树的曲率计算，《图与流形上的分析与几何》，21–54页，伦敦数学会讲义系列，**461**。剑桥大学出版社，剑桥，2020年。

[6] J. Dodziuk, 《差分方程、等周不等式与某些随机游走的暂留性》, 美国数学会汇刊 284 (1984), 第 2 期, 787–794。[7] J. Dodziuk 和 L. Karp, 《组合拉普拉斯算子的谱理论与函数论》, 《随机运动几何》（纽约州伊萨卡, 1987）, 25–40, 当代数学, 73, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1988。[8] M. Folz, 《图的体积增长与随机完备性》, 美国数学会汇刊 366 (2014), 第 4 期, 2089–2119。[9]A. Grigor'yan, 《随机完备流形与可求和调和函数》, 苏联科学院数学辑报 52 (1988), 1102–1108; 译文发表于《苏联数学辑报》33 (1989), 425–432。[10] A. Grigor'yan, 《图上的分析导论》, 大学讲座丛书, 71, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2018。[11] B. Hua, J. Jost, L^q 《图上的调和函数》, 以色列数学杂志 202 (2014), 475–490。[12] B. Hua 和 M. Keller, 《一般图拉普拉斯算子的调和函数》, 变分法与偏微分方程 51 (2014), 343–362。[13] X. Huang, 《图的随机不完备性与弱 Omori-Yau 极大值原理》, 《数学分析及其应用杂志》379 (2011), 第 2 期, 764–782。[14] X. Huang, 《关于加权图随机完备性的体积增长判据的注记》, 位势分析 40 (2014), 117–142。[15] X. Huang、M. Keller 和 M. Schmidt, 《关于图的唯一性类、随机完备性与体积增长》, 美国数学会汇刊 373 (2020), 第 12 期, 8861–8884。[16] L. Karp, 《实流形与复流形上的次调和函数》, 数学杂志 179 (1982), 第 4 期, 535–554。[17] M. Keller, 《图上的内在度量: 综述》, 《网络数学技术》, 81–119, 施普林格数学与统计学会议录, 128, 施普林格, 楚格, 2015。[18] M. Keller, D. Lenz, 《图及其子图的 Dirichlet形式与随机完备性》, 纯粹与应用数学杂志 666 (2012), 189–223。[19] M. Keller、D. Lenz 和 R.K. Wojciechowski, 《无限图的体积增长、谱与随机完备性》, 数学杂志 274 (2013), 第 3–4 期, 905–932。[20] M. Keller、D. Lenz 和 R.K. Wojciechowski, 《图与离散狄利克雷空间》, 数学科学基础丛书, 358, 施普林格, 2021。[21] Y. Lin、L. Lu 和 S.-T. Yau, 《图的里奇曲率》, 东北数学杂志 63 (2011), 第 4 期, 605–627。[22] J. Masamune, 《刘维尔性质及其在无限图拉普拉斯算子中的应用》, 《几何与数论中的谱分析》, 103–115, 当代数学, 484, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2009。[23] F. Münch 和 R.K. Wojciechowski, 《一般图拉普拉斯算子的奥利维耶-里奇曲率: 热方程、拉普拉斯比较、非爆炸性与直径估计》, 数学进展 356 (2019)。[24] Y. Ollivier, 《度量空间的里奇曲率》, 巴黎科学院数学报告 345 (2007), 第 11 期, 643–646。[25] L.F. Pessoa、S. Pigola 和 A.G. Setti, 《狄利克雷抛物性与 L^1局部几何条件下的刘维尔性质》, 泛函分析杂志 273 (2017), 第 2 期, 652–693。[26] K.-T. Sturm, 《局部狄利克雷空间上的分析 I: 常返性、守恒性与 L^p刘维尔性质》, 纯粹与应用数学杂志 456 (1994), 173–196。[27] A. Weber, 《局部有限图上物理拉普拉斯算子与热流的分析》, 《数学分析及其应用杂志》370 (2010), 第 1 期, 146–158。

[28] R.K. Wojciechowski, 《图的随机完备性》, ProQuest LLC, 美国密歇根州安娜堡（2008）。博士论文（哲学博士）——纽约市立大学。[29] R.K. Wojciechowski, 《随机不完备流形和图》, 《随机游走、边界与谱》, 《概率论进展》**64**, Springer, 巴塞尔, 2011。[30] R.K. Wojciechowski, 《图的费勒性质》, 《美国数学会汇刊》**369**（2017）, 第6期, 4415–4431。[31] R.K. Wojciechowski, 《图的随机完备性：有界拉普拉斯算子、内在度量、体积增长与曲率》, 《傅里叶分析与应用杂志》**27**（2021）, 第2期。[32] S.-T. Yau, 《完备黎曼流形的某些函数论性质及其在几何学中的应用》, 《印第安纳大学数学杂志》**25**（1976）, 第7期, 659–670。