arXiv:2305.01305v1 [math.CO] 2 May 2023

# ´均匀稠密 $k$-均匀超图中的最小正均匀图兰密度

HAO LIN、GUANGHUI WANG 和 WENLING ZHOU

Abstract. 若 $H$ 的超边分布相对于由（$k-2$）-元组的集合诱导的每个大规模 $k$顶点团都是均匀稠密的，则称 $k$-图（或 $k$-均匀超图） *uniformly dense* 。Reiher、R¨odl 和 Schacht [*Int. Math. Res. Not., 2018*] 提出了研究给定 $k$-图 $F$ 在均匀稠密 $k$-图中的均匀图兰密度 $\pi_{k-2}$（$F$）。与此同时，他们刻画了满足 $\pi_{k-2}$（$F$） $=0$的 $k$-图 $F$，并证明 $\pi_{k-2}$（·）会从 0 “跃升”至至少 $k^{-k}$。特别地，他们提出了这样的问题：是否存在 $F$ 个 3-图，使其 $\pi_1$（$F$）等于或任意接近 $1/27$。最近，Garbe、Kr´al’ 和 Lamaison[*arXiv:2105.09883*] 构造了一些满足 $=1/27$的 3-图，其 $\pi_1$（$F$） $=1/27$。

本文中，对于任意 $k$-图 $F$，我们基于概率框架给出 $\pi_{k-2}(F)$ 的下界，并提供一个一般性定理，将证明 $\pi_{k-2}(F)$ 的上界归结为：使用 $k$-图的正则性方法，将 $F$ 嵌入密度相同的约化 $k$-图中。利用这一结果以及多色超图的 Ramsey 定理，我们将 Garbe、Kr´al’ 和 Lamaison 的结果推广到 $k\geq 3$。换言之，我们给出一个关于满足 $\pi_{k-2}(F)=k^{-k}$ 的 $k$-图$F$ 的充分条件。此外，我们还构造了一个无限族的 $k$-图，其$\pi_{k-2}(F)=k^{-k}$。

## 1. Introduction

对于正整数 $\ell$，我们用 $[\ell]$ 表示集合 $\{1,\dots,\ell\}$。给定 $k\geq 2$，对于有限集合 $V$，我们用 $[V]^k$ 表示 $V$ 中所有大小为 $k$ 的子集构成的集合，并用 $V^{[k]}$ 表示笛卡尔幂 $V\times\cdots\times V$。我们可以省略一对括号，写作 $[\ell]^k$，而非 $[[\ell]]^k$。$k$ 均匀超图 $H$（简称 $k$-图）是一个对 $H=$（$V$（$H$） $E$（$H$））， 其中 $V$（$H$）是一个有限顶点集合，而 $E$（$H$） $\subseteq[V$（$H$）$]^k$ 是由（$k$-）边组成的集合。阶为 $\ell\geq k$ 的 $k$ 均匀团记作 $K_\ell^{(k)}$ ，它是一个含有 $\ell$ 个顶点、由所有 $\binom{\ell}{k}$ 个不同的 $k$-元组构成的 $k$-图。因此，2-图是简单图，而 2-均匀团是完全图。

1.1. 超图中的 Tur´án 问题。Tur´án 提出的 Tur´án 问题 [27] 旨在研究：给定一个 $k$-图 $F$，其 Tur´án 数 $ex(n,F)$，即在有 $n$ 个顶点且不含 $F$ 的 $k$-图中， $k$-边的最大数量。这是极值组合学中一个长期未解的问题：我们尚未能充分理解一般 $k$-图的这些数值。理想情况下，我们希望精确计算它们，但目前即使是渐近结果也只在某些情形下已知，参见一篇精彩的综述 [14]。众所周知且不难发现，序列 $ex(n,F)/\binom{n}{k}$是递减的。因此，人们常关注 $F$ 的 Tur´án 密度 $\pi(F)$，其定义如下：

$$\pi(F)=\lim_{n\to\infty}\frac{ex(n,F)}{\binom{n}{k}}.$$

图的 Tur´an 密度已得到充分研究。事实上，曼特尔定理 [16] 和 Tur´an 定理 [27] 精确给出了完全图的 Tur´an 数，而 Erd˝os 和 Stone [9] （另见 Erd˝os 和 Simonovits [7]）确定了任意图 $F$ 的 Tur´an 密度等于 $\frac{\chi F-2}{\chi F-1}()()$，

*Key words and phrases.* 均匀 Tur´án 密度、准随机超图、超图正则性方法。第二作者受到国家自然科学基金（12231018）和山东省青年泰山学者计划（201909001）的资助。

其中 $\chi(F)$ 表示 色数，即 $F$，也就是用于给 $V(F)$ 着色的最少颜色数，使任意两个相邻顶点所获得的颜色均不相同。然而，超图中的类似问题极其困难，即使是在 3-图的情形下也是如此。尽管迄今已经进行了大量研究和尝试，我们的认识仍然十分有限。例如，Turan 密度为四个顶点上的三一致团 $K_4^{(3)}$ 这一问题由 Tur´an 于 1941 年提出，至今仍未解决 [6, 18]。该领域唯一的一般性定理由 Erd˝os [5] 提出，结论如下。

定理 1.1 ([5, 定理 1]) 。对于 $k \geq 2$， $k$-图 $F$ 满足 $\pi(F) = 0$ 当且仅当它是$k$-部图；也就是说，存在 $V(F)$的一个划分 $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$，使得对于 $i \in [k]$， $F$的每条超边都恰好包含来自每个 $V_i$ 的一个顶点。

超图 Tur´án 问题极难的一个重要原因，是存在某些准随机超图（一些由随机竞赛图或完全图的随机着色得到的正密度超图），它们避开了给定的子超图。更准确地说，若每个子集 $U \subseteq V$都满足以下条件，则 $k$-图 $H = (V, E)$称为密度为 $d > 0$ 的准随机图：

$$\left| \left| \binom{U}{k} \cap E \right| - d \binom{|U|}{k} \right| = o(|V|^k).$$

[3] 中的主要结果断言，正密度的拟随机图包含任意固定大小的图 $F$ 的正确数量的副本；具体而言， $F$ 的副本数与具有相同密度的随机图中的预期数量一致。如上所述， $k \geq 3$时拟随机$k$-图的 Tur´án 问题与 $k = 2$ 的情形截然不同，并且数十年来一直是一个重要课题。请注意，对于 Tur´án 型问题，只需要求 $k$-图 $H = (V, E)$满足形如以下的下界即可：

$$\left| \binom{U}{k} \cap E \right| \geq d \binom{|U|}{k} - \mu |V|^k, \tag{1.1}$$

对任意 $U \subseteq V$ 和 $\mu > 0$都成立。一般而言，满足条件（1.1）的 $k$-图 $H$ 称为（$d$， $\mu$，1-稠密（或均匀稠密）。将所谓的超图弱正则性引理（Szemerédi 图正则性引理的直接推广´）应用于超图，是一种相当标准的方法，它意味着这样的（$d$， $\mu$，1）-稠密 $k$图总是包含一个密度为 $d$的拟随机子超图。因此，这启发我们系统地研究均匀稠密超图中的 Turán 问题。´

1.2. 均匀稠密超图中的 Turán 问题。在 1982 年，Erdős 和 Sós [8] 首先提出了关于均匀稠密 3-图中 Turán 密度的问题。具体而言，可以通过引入以下量，精确定义均匀稠密 3-图中不包含给定 3-图 $F$（例如 $K_4^{(3)}$ ）的最优密度这一 Turán 问题：

$$\pi_1(F) = \sup\{d \in [0,1] : \text{for every } \mu > 0 \text{ and } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ there exists an } F\text{-free} \\ (d, \mu, 1)\text{-dense 3-graph } H \text{ with } |V(H)| \geq n_0\}.$$

有了这些记号，Erd˝os 和 S´os 提出要确定 $\pi_1(K_4^{(3)})$ 和 $\pi_1(K_4^{(3)-})$，其中$K_4^{(3)-}$ 是从 $K_4^{(3)}$ 中删去一条超边后得到的。不过，对于给定的 3-图 $F$ ，确定 $\pi_1(F)$ 也极具挑战性。自从 R¨odl [23] 于 1986年 给出一种拟随机构造以来， $\pi_1(K_4^{(3)}) = 1/2$ 的猜想一直是该领域亟待解决的问题。格列博夫、Kr´al' 和沃莱茨 [11], 最近解决了 $\pi_1(K_4^{(3)-}) = 1/4$ ， Reiher、R¨odl 和 Schacht [22]也独立地解决了这一问题。关于更全面的论述以及 3-图的更多结果，请参阅 Reiher [19] 撰写的综述。

近年来，由于 Reiher、R¨odl 和 Schacht [20, 21, 22] 的研究，均匀稠密 $k$-图中的 Tur´an 问题越来越受到关注。除了给出

Erd˝os 和 S´os 提出的上述猜想的解答外，他们还确定了基于一族自然定义的均匀稠密条件的、大量 -图的统一 Turan 密度。这里我们陈述 Reiher、Rodl 和 Schacht 在 中考虑的一个 $(d,\mu,j)$-稠密 $k$-图的概念（见定义 1.2），它是 $(d,\mu,1)$-稠密 3-图的一种自然推广。

给定整数 $k>j\geq 0$ 和一个 $j$-图 $G^{(j)}$，我们用 $\mathcal{K}_k(G^{(j)})$ 表示 $V(G^{(j)})$ 的 $k$-集合的集合，其中这些集合在 $G^{(j)}$ 中张成一个以 $k$ 个顶点为顶点的 $j$-均匀团 $K_k^{(j)}$。注意，$|\mathcal{K}_k(G^{(j)})|$ 是 $G^{(j)}$ 中所有 $K_k^{(j)}$ 副本的数量。

定义 1.2（$(d,\mu,j)$-稠密性）。给定整数 $n\geq k>j\geq 0$，令实数 $d\in[0,1]$、$\mu>0$，且 $H=(V,E)$ 是一个具有 $n$ 个顶点的 $k$-图。若 $H$ 满足

$$\left|\mathcal{K}_k(G^{(j)})\cap E\right|\geq d\left|\mathcal{K}_k(G^{(j)})\right|-\mu n^k \tag{1.2}$$

则对所有顶点集为 $V$ 的 $j$-图 $G^{(j)}$ 均成立。

注 1. 注意，对于任意顶点集 $V$，只有两个 0-均匀超图（一个的边集为空，另一个的空集为一条超边）。因此，在退化情形下，$H$ 是 $(d,\mu,0)$-稠密的，当且仅当

$$|E|\geq d\binom{|V|}{k}-\mu n^k.$$

将范围限制在 $(d,\mu,j)$-稠密的 $k$-图上，对于给定的 $k$-图 $F$，相应的均匀图兰密度 $\pi_j(F)$ 可定义为

$$\begin{aligned}\text{对于每个 }\mu>0\text{ 和 }n_0\in\mathbb{N}\text{，都存在一个不含 }F\text{ 的 }\pi_j(F)=\sup\{d\in[0,1]\\ (d,\mu,j)\text{-稠密的 }k\text{-图 }H\text{，满足 }|V(H)|\geq n_0\}.\end{aligned}$$

特别是，Reiher、R¨odl 和 Schacht [21] 提出了以下问题。

问题1.3（[21, 问题1.7]）。求出所有 $k$-图 $F$ 及所有 $0\leq j\leq k-2$ 的 $\pi_j(F)$。

注2。对于 $j=k-1$，已知每个 $k$-图 $F$ 都满足 $\pi_{k-1}(F)=0$，这可由 [15] 中的工作推出。此外，对于每个 $k$-图 $F$，我们有

$$\pi(F)=\pi_0(F)\geq\pi_1(F)\geq\cdots\geq\pi_{k-2}(F)\geq\pi_{k-1}(F)=0, \tag{1.3}$$

因为 $\mathcal{K}_k(G^{(j)})=\mathcal{K}_k(G^{(j+1)})$ 对每个 $j$-均匀超图 $G^{(j)}$ 满足 $G^{(j+1)}=\mathcal{K}_{j+1}(G^{(j)})$，且 $\pi(F)=\pi_0(F)$ 由备注 1。

给定一个 $k$-均匀超图 $F$，这串不等式（1.3）中出现的各个量，越靠左可能越难确定。这表明，对于情形$j=k-2$，问题 1.3 是第一个有趣的情形，因此本文将重点研究 $\pi_{k-2}(F)$。

2018年，Reiher、R¨odl 和 Schacht [20] 提出，对于情形 $j=k-2$，可以建立一种在某种程度上类似于 Tur´án 本人开创、后由 Erd˝os、Stone、Simonovits 等众多学者进一步发展的经典图论的理论。具体而言，他们刻画了满足 $\pi_{k-2}(F)=0$（见定理 1.4）的 $k$-图 $F$。除了满足 $\pi_{k-2}(F)=0$ 的 $k$-图 $F$外，唯一已知满足 $\pi_{k-2}(\cdot)$ 的 $k$-图，是具有三个边、定义在 $(k+1)$ 个顶点上的 $F^{(k)}$，而 $\pi_{k-2}(F^{(k)})=2^{1-k}$ 由 [21] 得到。

为简便起见，我们用 $[\![i_1,i_2,\ldots,i_\ell]\!]$ 表示一个包含 $\{i_1,i_2,\ldots,i_\ell\}\subset\mathbb{Z}$ 且满足 $i_1<i_2<\cdots<i_\ell$ 的集合，用 $[\![v_{i(1)},v_{i(2)},\ldots,v_{i(\ell)}]\!]$ 表示一个包含 $\{v_{i(1)},v_{i(2)},\ldots,v_{i(\ell)}\}$ 且满足 $i$ 的集合 $(1)<i(2)\cdots<i(\ell)$。给定一个具有 $f$ 个顶点的 $k$-图 $F$，令 $\partial F:=\{S\in[V(F)]^{k-1}\colon\exists\, e\in E(F)\ S\subset e\}$ 为 $F$ 的影子。我们称 $V(F)$ 的一个排序 $(v_1,v_2,\ldots,v_f)$ 为消失的，若 $\partial F$ 可划分为 $\ell\in[k]$ 个两两不交的集合 $\mathcal{C}_\ell$，使得 $F$ 的每个 $k$-超边 $e=[\![v_{i(1)},\ldots,v_{i(k)}]\!]$ 都满足

$$e\setminus\{v_{i(\ell)}\}\in\mathcal{C}_\ell,\ \text{for every }\ell\in[k].$$

属于 $\mathcal{C}_\ell$ 的这些 $(k-1)$-集合被称为相对于 $F$（即，在消失序下）的 $\ell$-型。特别地，给定 $V$ 的一个消失序 $\tau$（$F$）以及一个 $(k-1)$-集合$S \subset V$（$F$），如果存在一个顶点 $v \in V$（$F$），使得 $S \cup \{v\}$ 是 $F$ 的一个$k$-超边，且 $S \cup \{v\}$ 在 $\tau$ 下的排序满足 $v$ 位于第 $\ell^{\text{th}}$ 个位置，则称 $S$ 相对于 $F$ 是 $\ell$-型。

定理 1.4 ([20, 定理 6。1])。一个 $k$-图 $F$ 满足 $\pi_{k-2}(F) = 0$ 当且仅当它存在一个长度为 $V(F)$的消失序。

事实上，定理 1.4 推出了以下加强结果。对于 $n \in \mathbb{N}$，考虑将 $[n]^{k-1}$ 均匀随机划分为集合 $\mathcal{C}'_\ell$（$\ell \in [k]$）。我们在阶为 $n$的 $k$-图上定义概率分布 $H(n)$，如下所示。令 $V(H(n)) = [n]$，并将一个 $k$-集合 $e = [\![i_1, \ldots, i_k]\!]$ 纳入 $E(H(n))$，如果$e$ 满足对每个 $\ell \in [k]$都有 $e \setminus \{i_\ell\} \in \mathcal{C}'_\ell$。利用概率论方法，我们可以证明，对于任意固定的 $\mu > 0$，当 $n$ 足够大时，存在 $H \in H(n)$，使得 $H$ 是（$k^{-k}, \mu$, $k-2$）-稠密的。显然， $H$ 的每个子超图都存在一个由其顶点构成的消失序。因此，定理 1.4 推出以下结果。

推论 1.5. 如果一个 $k$-图 $F$ 满足 $\pi_{k-2}(F) > 0$，那么 $\pi_{k-2}(F) \geq k^{-k}$。

因此，Reiher、R¨odl 和 Schacht [20] 为 $k = 3$提出了以下问题。

问题1.6. 是否存在一个 $k$-图 $F$，使得 $\pi_{k-2}(F)$ 等于或任意接近 $k^{-k}$?

对于 $k = 2$，问题1.6 的答案是否定的，因为 $\pi_0(F) = \pi(F)$，并且根据 [9] 中的结果，任何满足 $F$ $\pi(F) > 0$ 的图都满足 $\pi(F) \geq 1/2$。然而，最近 Garbe 、 Kr´al' 和 Lamaison [10] 通过为满足 $\pi_1(F) = 1/27$ 的 3-图 $F$ 给出一个充分条件，并构造出满足该条件的 3-图，从而对 $k = 3$ 的 问题1.6 给出了肯定的答案。

1.3. 我们的结果。本文中，对于任意 $k \geq 3$，我们首先在一个全局框架下研究任意给定图$\pi_{k-2}(F$ 的上下界 $F$。通过回顾关于 $\pi_{k-2}(\cdot$的所有已知结果，我们注意到， $\pi_{k-2}(\cdot$的下界均由概率构造得到。特别地，当 $k = 3$时， $\pi_1(\cdot$的下界基于 [19, 第 2], 节中引入的概率框架，该框架受到早期概率构造的启发并将其统一起来，尤其是 [23]中的构造。我们在下述定理中总结这一框架。

定理 1.7. 设 $F$是一个 3-图。假设存在 $r \in \mathbb{N}$ 以及一个集合 $\mathscr{P} \subseteq [r] \times [r] \times [r]$，满足以下性质：对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和每个 $\psi\colon [n]^2 \to [r]$，顶点集为 $[n]$、边集为 的 3-图 $H$

$$E(H) = \{\{x, y, x\} \in [n]^3 : x < y < z \text{ and } (\psi(y, z), \psi(x, z), \psi(x, y)) \in \mathscr{P}\}$$

是 $F$-自由的。因此， $\pi_1(F) \geq |\mathscr{P}|/r^3$。

利用 Azuma-Hoeffding 不等式，我们扩展了上述框架，并基于一个适用于所有 $k \geq 3$的更一般框架，得到$\pi_{k-2}(\cdot)$的下界。

定理 1.8。设 $F$ 是一个 $k$-图。假设存在 $r \in \mathbb{N}$ 以及一个集合 $\mathscr{P} \subseteq [r]^{[k]}$，满足以下性质：对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个 $\psi\colon [n]^{k-1} \to [r]$，具有顶点集 $[n]$和边集的 $k$-图 $H$

$$E(H) = \{e = [\![i_1, i_2, \ldots, i_\ell]\!] \in [n]^k : (\psi(e \setminus \{i_1\}), \psi(e \setminus \{i_2\}), \ldots, \psi(e \setminus \{i_k\})) \in \mathscr{P}\}$$

是 $F$-自由的。因此， $\pi_{k-2}(F) \geq |\mathscr{P}|/r^k$。

显然，定理 1.8 在 1.7 时等价于定理 $k = 3$。接下来我们将给出一个一般性陈述：对于给定的 $\pi_{k-2}$（$F$）- 图，将证明其 $k$- 图的上界 $F$ 归约为在具有相同密度的 $F$ 约化 $k$- 图中进行嵌入（见定义 1.9），其中使用针对$k$-图的正则性方法。我们从 [21, 第 4]节中引入的记号开始。

定义 1.9（约化 $k$-图）。给定一个有限指标集 $I \in \mathbb{N}$，其中有 $|I| = m$，对于每个 $\mathcal{X} \in [I]^{k-1}$，令 $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 表示一个有限的非空顶点集，使得对于任意两个不同的 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}' \in [I]^{k-1}$，集合 $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 与 $\mathcal{P}_{\mathcal{X}'}$ 不相交。对于任意 $\mathcal{Y} \in [I]^k$，令 $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}$ 表示一个具有顶点划分 $\{\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \in [\mathcal{Y}]^{k-1}\}$ 的 $k$-部 $k$-图。于是，具有 $\mathcal{A}$ 的 $\binom{|I|}{k-1}$-部 $k$-图

$$V(\mathcal{A}) = \bigcup_{\mathcal{X} \in [I]^{k-1}} \mathcal{P}_{\mathcal{X}}, \text{ and } E(\mathcal{A}) = \bigcup_{\mathcal{Y} \in [I]^k} E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})$$

称为 一个以指标集 $I$、顶点类 $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 和组成部分 $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}$ 为特征的 $m$-约化 $k$-图 .

为简洁起见，我们常常直接写“令 $\mathcal{A}$ 为一个 $m$-约化 $k$-图”，而不写“令 $\mathcal{A}$ 为一个以指标集 $[m]$、顶点类 $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 和组成部分 $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}$ 为特征的 $m$-约化 $k$-图”。给定一个 $m$-约化 $k$-图 $\mathcal{A}$ 和 $d \in [0,1]$，若 $\mathcal{A}$ 是 $d$-稠密的，则称之为

$$|E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})| \geq d \cdot \prod_{\mathcal{X} \in [\mathcal{Y}]^{k-1}} |\mathcal{P}_{\mathcal{X}}|$$

对所有 $\mathcal{Y} \in [m]^k$ 都成立。

一个 $m$-约化 $k$-图 $\mathcal{A}$ 是否能够“嵌入”给定的 $k$-图 $F$，可以用所谓“约化映射”的存在性来表述，接下来将介绍约化映射。

定义 1.10（约化映射）。从一个 $k$-图 $F$ 到一个约化 $k$-图 $\mathcal{A} =$（$I$、$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$、$\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}$）的约化映射是一个对（$\phi$、$\psi$），满足

(1) $\phi : V(F) \to I$ 和 $\psi : \partial F \to V(\mathcal{A})$；(2) 如果 $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\} \in \partial F$，那么 $\mathcal{X} = \{\phi(i_1)\ \phi(i_2)\ldots, \phi(i_{k-1})\} \in [I]^{k-1}$ 和 $\psi(S) \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$；(3) 如果 $e = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in E(F)$，那么 $\mathcal{Y} = \{\phi(i_1)\ \phi(i_2)\ldots, \phi(i_k)\} \in [I]^k$ 和

$$\{\psi(e \setminus \{i_1\}), \psi(e \setminus \{i_2\}), \ldots, \psi(e \setminus \{i_k\})\} \in E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}).$$

如果存在一个从 $F$ 到 $\mathcal{A}$ 的约化映射，我们就称 $\mathcal{A}$ 嵌入 $F$。现在，关于在约化 $k$-图中证明给定 $k$-图 $F$ 的 $\pi_{k-2}(F)$ 上界的一般结果如下。

定理 1.11. 设 $F$ 是一个具有 $k \geq 3$ 和 $d \in [0,1]$ 的 $k$-图。如果对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $m \in \mathbb{N}$，使得每个 $(d+\varepsilon)$-稠密的 $m$-约化 $k$-图 $\mathcal{A}$ 都嵌入 $F$，那么 $\pi_{k-2}(F) \leq d$。

我们还指出，这一结果证明中的部分内容隐含在 [21]之中。不过，我们认为完整整理这套论证仍有裨益。定理 1.8 和定理 1.11 为（′, $d, \mu, k-2$）-稠密 $k$-图中的 Tur $k = 3$an 问题提供了一种通用工具。特别是当 [2, 10, 20, 22]时，这一工具得到了广泛应用。

接下来，受 Garbe、Kr´al' 和 Lamaison [10], 的研究启发，我们通过给出一项非平凡的充分条件来回答问题 1.6，该条件适用于满足 $k$-图 $F$ 且满足 $\pi_{k-2}(F) = k^{-k}$的情形；并构造了一个具有 $k$-图的无限族，其满足 $\pi_{k-2}(F) = k^{-k}$。

定理 1.12. 给定 $k \geq 3$，设 $F$ 为满足以下条件的 $k$-图：

(♣) $F$ 没有 $V(F)$ 的消失序；(♠) 对于每一对 $\{i,j\} \in [k]^2$，若 $i < j$，则 $F$ 总能划分为两个生成子超图 $F^1_{i,j}$ 和 $F^2_{i,j}$，使得存在 $V(F)$ 的一种排序，它对 $F^1_{i,j}$ 和 $F^2_{i,j}$ 均为消失序；并且对于任意两条边 $e_1 \in E(F^1_{i,j})$ 和 $e_2 \in E(F^2_{i,j})$，若 $|e_1 \cap e_2| = k-1$，则 $e_1 \cap e_2$ 关于 $F^1_{i,j}$ 为 $i$-型，且关于 $F^2_{i,j}$ 为 $j$-型。

那么 $\pi_{k-2}(F) = k^{-k}$。

此外，基于定理 1.12，我们构造了一个无限族 $k$-图 $F$，它们满足定理 1.12中给出的条件。

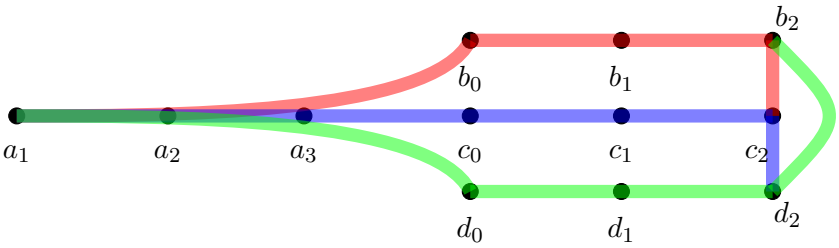


FIGURE 1. $k$-图 $F_t^{(k)}$ 在 $k=4$ 和 $t=2$ 的情况下的最小示意图。

定理 1.13. 给定整数 $t \geq k-2 \geq 1$，令 $F_t^{(k)}$ 为由 $(3t+k+2)$ 个顶点 $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b_0, b_1, \ldots, b_t, c_0, c_1, \ldots, c_t, d_0, d_1, \ldots, d_t$ 以及以下 $3(t+2)$ 条边组成的 $k$- 图：$a_1 \ldots a_{k-1}b_0$，$a_2 \ldots a_{k-1}b_0b_1, \ldots$，$a_{k-1}b_0 \ldots b_{k-2}$，$b_0b_1 \ldots b_{k-1}, \ldots$，$b_{t-k+1} \ldots b_t$，$b_{t-k+2} \ldots b_tc_t, a_1 \ldots a_{k-1}c_0$，$a_2 \ldots a_{k-1}c_0c_1, \ldots$，$a_{k-1}c_0 \ldots c_{k-2}$，$c_0c_1 \ldots c_{k-1}, \ldots$，$c_{t-k+1} \ldots c_t$，$c_{t-k+2} \ldots c_td_t, a_1 \ldots a_{k-1}d_0$，$a_2 \ldots a_{k-1}d_0d_1, \ldots$，$a_{k-1}d_0 \ldots d_{k-2}$，$d_0d_1 \ldots d_{k-1}, \ldots$，$d_{t-k+1} \ldots d_t$，$d_{t-k+2} \ldots d_tb_t$。我们有 $\pi_{k-2}(F_t^{(k)}) = k^{-k}$。

注3。一个紧 $k$-均匀路径，长度为 $\ell \geq k$，是由$v_1$、$v_2 \ldots$、$v_\ell$)个互不相同的顶点组成的序列，满足对于每个 $\{v_i, \ldots, v_{i+k-1}\}$，$i \in [\ell-k+1]$ 都是一条超边。显然，定理 $k$-图 $F_t^{(k)}$ 1.13 的陈述中的 1.13 可视为由以下三条长度为 ( $k$的紧 $t+k+1$)-均匀路径构成：

$$(a_1, \ldots, a_{k-1}, b_0, b_1, \ldots, b_t, c_t), (a_1, \ldots, a_{k-1}, c_0, c_1, \ldots, c_t, d_t) \text{ and } (a_1, \ldots, a_{k-1}, d_0, d_1, \ldots, d_t, b_t).$$

特别是，当 $k=3$ 时，3-图 $F_t^{(3)}$ 恰好是 Garbe、Kr´al' 和 Lamaison 给出的 3-图族 [10]。此外，最小的 $k$-图 $F_t^{(k)}$ 有 $(4k-4)$ 个顶点和 $3k$ 条边（见图 1）。

章节安排。本文其余部分组织如下。下一节中，我们给出一个概率构造，以证明定理 1.8。证明定理 1.11 的一个关键工具是超图正则性方法。因此，在第3节中，我们将回顾$k$-图的正则性方法。该方法是 Szemer´edi 的图正则性引理的推广，已成为超图中嵌入问题的一项著名工具。我们采用 R¨odl 和 Schacht [25] 提出的$k$-图正则性引理的一个常用版本（Gowers [12] 早先也证明了类似结果），并据此推导出 $k$-图正则性引理的一个"整洁"版本（见推论 3.6）。第4节中，我们将利用推论 3.6 和 [4]中的一个嵌入引理，给出定理 1.11 的证明。第5节中，我们证明若干辅助结果，并利用它们证明一个关于约化 $k$-图的嵌入引理（见引理 5.1），这是证明定理 1.12 的关键。最后，在第6节中，我们给出消失序的一个等价变换，并结合定理 1.12 证明定理 1.13。最后一节将给出一些评述和开放问题。

## 2. PROOF OF THEOREM 1.8

本节将证明定理 1.8。为此，我们需要以下引理，它也称为 [13, 推论 2。27] 中的 Azuma-Hoeffding 不等式。

引理 2.1. 设 $Z_1, \ldots, Z_n$ 是相互独立的随机变量，其中 $Z_i$ 对每个 $i \in [n]$ 都取值于集合 $C_i$。假设函数 $f$：$C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n \to \mathbb{R}$ 对某个数 $c_i$ 满足以下 Lipschitz 条件：

(L) 若两个向量 z 和 z′ $\in \prod_1^n C_i$ 仅在第 $i$ 个坐标上不同，则 $|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}')| \leq c_i$。

那么，随机变量 $Y = f(Z_1, \ldots, Z_n)$ 对任意 $\eta \geq 0$ 都满足

$$\mathbb{P}(Y \leq \mathbb{E}(Y) - \eta) \leq \exp(-\frac{\eta^2}{2\sum_1^n c_i^2}).$$

现在我们用以下构造来证明定理 1.8 。

定理 1.8 的证明。设 $F$ 是满足定理 1.8 所述结论的 $k$-图。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们考虑 $\psi$：将 $[n]^{k-1} \to [r]$ 视为随机 $r$-着色，其中每种颜色以概率 $1/r$ 独立且均匀地与一个 $(k-1)$-集合相关联。现在我们按如下方式定义 $H(n)$ 在阶为 $n$ 的 $k$-图上的概率分布。令 $V(H(n)) = [n]$，并将一个 $k$-集合 $e = [\![x_1, \ldots, x_k]\!] \in [n]^k$ 纳入 $E(H(n))$，若 $e$ 满足

$$(\psi(e \setminus \{x_1\}), \psi(e \setminus \{x_2\}), \ldots, \psi(e \setminus \{x_k\})) \in \mathscr{P}.$$

令 $E = E(H(n))$ 为 $H(n)$ 的随机 $k$-超边集合。注意，对于每个 $k$-集合 $e \in [n]^k$，事件“$e \in E$”发生的概率为 $|\mathscr{P}|/r^k$。此外，对于每个满足 $1 \leq t \leq \binom{n}{k-1}$ 的 $(k-1)$-集合 $X_t \in [n]^{k-1}$，我们可以将 $\psi(X_t)$ 视为一个独立随机变量，其 $\phi(X_t)$ 取值于集合 $[r]$。对于顶点集为 $[n]$ 的每个 $(k-2)$-图 $G^{(k-2)}$，令 $Y$ 表示随机变量 $|\mathcal{K}_k(G^{(k-2)}) \cap E(H(n))|$。那么，$Y$ 可视为 $\psi(X_1) \times \psi(X_2) \times \cdots \times \psi(X_{\binom{n}{k-1}})$ 的函数。特别地，只需改变一个 $\phi(X_t)$ 的取值，就能使 $Y$ 至多改变 $n$。因此，根据引理 2.1，坏事件发生的概率为

$$\mathbb{P}(Y \leq \mathbb{E}(Y) - \mu n^k) = \mathbb{P}(Y \leq \frac{|\mathscr{P}|}{r^k}|\mathcal{K}_k(G^{(k-2)})| - \mu n^k) \leq \exp(-\frac{(\mu n^k)^2}{2\binom{n}{k-1}n^2}) = \exp(-\Omega(n^{k-1})).$$

此外，$G^{(k-2)}$的可能选择至多有 $2^{n^{k-2}}$ <exp$(n^{k-2})$ 种。由并集界可知，事件“$H(n)$ 不是 $(|\mathscr{P}|/r^k, \mu, k-2)$-稠密的”的概率至多为 exp$(n^{k-2} - \Omega(n^{k-1}))$ =$o(1)$。因此，对于每个 $\mu > 0$，当 $n$ 足够大时，存在 $H \in H(n)$ 是 $(|\mathscr{P}|/r^k, \mu, k-2)$-稠密的。回顾定理 1.8 中给出的条件，$H$ 也是 $F$-自由的。因此，$\pi_{k-2}(F) \geq |\mathscr{P}|/r^k$。□

## 3. The hypergraph regularity method

本节中，我们陈述超图正则性引理及其配套的嵌入引理。这里我们采用 R¨odl 和 Schacht [25], 的方法，并结合 [15,21]中的结果。同时，我们推导出适用于 $k$-图的一个“干净”版本的正则性引理（见推论 3.6）。超图正则性引理的核心概念是正则复形和均匀划分。在陈述超图正则性引理之前，我们先介绍一些必要的记号。对于实数 $x$，$y$，$z$，我们记 $x = y \pm z$ 表示 $y - z \leq x \leq y + z$。

3.1. 正则复形。混合超图 $\mathcal{H}$ 由顶点集 $V(\mathcal{H})$ 和边集$E(\mathcal{H})$组成，其中每条边 $e \in E(\mathcal{H})$ 都是 $V(\mathcal{H})$ 的非空子集。因此，前文定义的 $k$- 图是一个 $k$- 均匀超图，其中每条边的大小均为 $k$。如果混合超图 $\mathcal{H}$ 满足：其中每条边的每个非空子集也都是 $\mathcal{H}$ 中的一条边，我们就称其为复形。注意，本文考虑的所有复形都具有这样的性质：每个顶点都包含在某条边中。若一个复形的所有边都至多包含 $k$ 个顶点，则称其为 $k$-复形。给定一个 $k$-复形 $\mathcal{H}$，对于每个 $i \in [k]$，大小为 $i$ 的边称为 $\mathcal{H}$ 的 $i$- 边；我们用 $H^{(i)}$ 表示 $\mathcal{H}$ 的底层 $i$- 图：$H^{(i)}$ 的顶点与 $\mathcal{H}$ 相同，而 $H^{(i)}$ 的边就是 $\mathcal{H}$ 的 $i$-边。注意，对于每个$i \in [k]$，都可以将任意 $k$-图 $H$ 转化为一个 $k$-复形，方法是将每条边扩展为一个以 $k$ 个顶点为顶点的完全 $i$-图 $K_k^{(i)}$ 。

给定 $i \geq 2$，设 $H^{(i)}$ 是一个 $i$-图，$H^{(i-1)}$ 是一个 $(i-1)$-图，且二者具有相同的顶点集。我们将 $H^{(i)}$ 关于 $H^{(i-1)}$ 的相对密度 $d(H^{(i)}|H^{(i-1)})$ 定义为

$$d(H^{(i)}|H^{(i-1)}) := \begin{cases} \frac{|E(H^{(i)}) \cap \mathcal{K}_i(H^{(i-1)})|}{|\mathcal{K}_i(H^{(i-1)})|} & \text{if } |\mathcal{K}_i(H^{(i-1)})| > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

更一般地，若 $\mathbf{Q} := (Q(1)\ Q(2) \ldots, Q(r))$ 是 $H^{(i-1)}$ 的一个 $r$ 子超图集合，则定义 $\mathcal{K}_i(\mathbf{Q}) := \bigcup_{j=1}^{r} \mathcal{K}_i(Q(j))$，并且

$$d(H^{(i)}|\mathbf{Q}) := \begin{cases} \frac{|E(H^{(i)}) \cap \mathcal{K}_i(\mathbf{Q})|}{|\mathcal{K}_i(\mathbf{Q})|} & \text{if } |\mathcal{K}_i(\mathbf{Q})| > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

给定正整数 $s \geq k$，$(s,k)$-图 $H_s^{(k)}$ 是一个 $s$-部 $k$-图，也就是说，$H_s^{(k)}$ 的顶点集可以划分为集合 $V_1,\ldots,V_s$，使得对于 $i \in [s]$，$H_s^{(k)}$ 的每条超边与每个 $V_i$ 至多相交于一个顶点。类似地，$(s,k)$-复形 $\mathcal{H}_s^{\leq k}$ 是一个 $s$-部$k$-复形。

给定整数 $r \geq 1$、实数 $d_i \geq 0$ 和 $\delta > 0$，以及同一顶点集上的一个 $(i,i)$-图 $H_i^{(i)}$ 和一个 $(i,i-1)$-图 $H_i^{(i-1)}$。若每个满足 $|\mathcal{K}_i(\mathbf{Q})| \geq \delta |\mathcal{K}_i(H_i^{(i-1)})|$ 的 $r$-元组 $\mathbf{Q}$ 都满足 $d(H_i^{(i)}|\mathbf{Q}) = d_i \pm \delta$，则称 $H_i^{(i)}$ 关于 $H_i^{(i-1)}$ 是 $(d_i,\delta,r)$-正则的。此外，对于同一顶点划分 $V_1 \cup \cdots \cup V_s$ 上的两个 $s$-部$i$-图 $H_s^{(i)}$ 和 $(i-1)$-图 $H_s^{(i-1)}$，若对每个 $\Lambda_i \in [s]^i$，限制 $H_s^{(i)}[\Lambda_i] = H_s^{(i)}[\cup_{\lambda \in \Lambda_i} V_\lambda]$ 关于限制 $H_s^{(i-1)}[\Lambda_i] = H_s^{(i-1)}[\cup_{\lambda \in \Lambda_i} V_\lambda]$ 是 $(d_i,\delta,r)$-正则的，则称 $H_s^{(i)}$ 关于 $H_s^{(i-1)}$ 是 $(d_i,\delta,r)$-正则的。

定义 3.1（正则复形）。设整数 $s \geq k \geq 3$、实数 $\delta > 0$ 和 $\mathbf{d} = (d_2, \ldots, d_{k-1}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{[k-2]}$。若对于每个 $i = 2, \ldots, k-1$，$\mathcal{H}_s^{\leq k-1} = \{H_s^{(i)}\}_{i=1}^{k-1}$都是 $(\mathbf{d}\ \delta, 1)$-正则的，即 $H_s^{(i)}$相对于 $H_s^{(i-1)}$是 $(d_i,\delta,1)$-正则的，则称 $(s,k-1)$-复形 $\mathcal{H}_s^{\leq k-1} = \{H_s^{(i)}\}_{i=1}^{k-1}$是 $(\mathbf{d}\ \delta, 1)$-正则的。

3.2. 均匀划分。设 $V$ 是有限顶点集，$\mathcal{P}^{(1)} = \{V_1, \ldots, V_{a_1}\}$ 是 $V$ 的一个划分，其划分类称为簇。给定 $k \geq 3$ 和任意 $j \in [k]$，我们用 $\mathrm{Cross}^j = \mathrm{Cross}^j(\mathcal{P}^{(1)})$ 表示所有满足对每个$V_i \in \mathcal{P}^{(1)}$都有 $|J \cap V_i| \leq 1$ 的交叉 $j$-集合 $J \in [V]^k$ 的族。对于满足 $2 \leq |\Lambda| \leq k-1$ 的每个指标集 $\Lambda \subseteq [a_1]$，记 $\mathrm{Cross}_\Lambda$ 为所有与每个 $V_i$ 都相交且满足 $i \in \Lambda$ 的 $|\Lambda|$-集合 $V$ 的族。设 $\mathcal{P}_\Lambda$ 是 $\mathrm{Cross}_\Lambda$ 的一个划分。我们将 $\mathcal{P}_\Lambda$ 的划分类称为 $|\Lambda|$-胞。对于每个 $i = 2, \ldots, k-1$，令 $\mathcal{P}^{(i)}$ 为所有满足 $|\Lambda| = i$ 的 $\mathcal{P}_\Lambda$ 的并。因此，$\mathcal{P}^{(i)}$ 将 $\mathrm{Cross}_i$ 划分为若干个 $(i,i)$-图。

设 $1 \leq i < j \leq k$。注意，对于每个 $i$-集合 $I \in \mathrm{Cross}_i$，存在唯一的 $i$-元胞 $P_I^{(i)} \in \mathcal{P}^{(i)}$，使得 $I \in P_I^{(i)}$。对于每个 $j$-集合 $J \in \mathrm{Cross}^j$，我们将 $J$ 的多胞体定义为：

$$\hat{P}_J^{(i)} := \bigcup \{P_I^{(i)} : I \in [J]^i\}.$$

因此，我们可以将 $\hat{P}_J^{(i)}$ 视为一个 $(j,i)$-图，其顶点类是与 $J$ 相交的簇，边集为 $\bigcup_{I \in [J]^i} E(P_I^{(i)})$。令 $\hat{\mathcal{P}}^{(j-1)}$ 为所有 $\hat{P}_J^{(j-1)}$ 多胞体构成的划分族，其中每个 $J \in \mathrm{Cross}^j$ 都对应一个多胞体。容易验证，$\{\mathcal{K}_j(\hat{P}^{(j-1)}) : \hat{P}^{(j-1)} \in \hat{\mathcal{P}}^{(j-1)}\}$ 也是 $\mathrm{Cross}^j$ 的一个划分。

定义 3.2（划分族）。设 $V$ 是一个顶点集，$k \geq 2$ 是一个整数，且 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{k-1})$ 是一个正整数向量。若 $\mathbf{P} = \mathbf{P}(k-1, \mathbf{a}) = \{\mathcal{P}^{(1)}, \ldots, \mathcal{P}^{(k-1)}\}$ 是 $V$ 上的一个划分族，并满足以下条件，则称之为划分族：

- $\mathcal{P}_{(1)}$ 是将 $V$ 划分为 $a_1$ 个簇。

- $\mathcal{P}_{(i)}$ 是 Cross$_i$ 的一个划分，满足

$$|\{P^{(i)} \in \mathcal{P}^{(i)} : P^{(i)} \subseteq \mathcal{K}_i(\hat{P}^{(i-1)})\}| = a_i \tag{3.1}$$

对于每个 $\hat{}P^{(i-1)} \in \hat{}\mathcal{P}^{(i-1)}$。

因此，对于每个 $J \in$ Cross$^j$，我们可以将 $\bigcup_{i=1}^{j-1} \hat{}P_J^{(i)}$ 视为一个 $(j, j-1)$-复形。

定义 3.3（$(\eta, \delta, t)$-均匀）。设 $V$是一个含有 $n$ 个顶点的集合， $t \in \mathbb{N}$是一个 $(a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{N}^{[k-1]}$，且 $\eta$和 $\delta > 0$。如果划分族 P $=$P($k-1$, a) 满足以下条件，我们称其为 $(\eta, \delta, t)$-均匀：

(B1) $\mathcal{P}^{(1)}$ 是将 $V$ 划分为 $a_1$ 个大小相等的簇的划分，其中 $1/\eta \le a_1 \le t$ 且 $a_1$ 整除 $n$。(B2) $\mathcal{P}^{(i)}$ 是将 Cross$_i$ 划分为至多 $t$ 个部分的划分，分别对应 $i = 2, \ldots, k-1$。(B3) 对于每个 $k$-元集合 $K \in$ Cross$_k$，$(k, k-1)$-复形 $\bigcup_{i=1}^{k-1} \hat{}P_K^{(i)}$ 都是 (d $\delta$, 1)-正则，其中 d $=(1/a_2, \ldots, 1/a_{k-1})$。(B4) 对于每个 $j \in [k-1]$ 以及每个 $k$-元集合 $K \in$ Cross$_k$，我们有

$$|\mathcal{K}_k(\hat{P}_K^{(j)})| = (1 \pm \eta) \prod_{\ell=1}^{j} (\frac{1}{a_\ell})^{\binom{k}{\ell}} n^k.$$

备注 4。定义 3.3 的条件 (B3) 意味着 $i$-胞的 $\mathcal{P}^{(i)}$ 大小几乎相同，而定义 3.3 的条件 (B4) 并非 R¨odl 和 Schacht [25] 所述的 $(\eta, \delta, t)$-均匀命题的一部分。实际上，条件 (B4) 是由条件 (B1)、(B3) 以及所谓的稠密计数引理推出的，见 [15, 定理 6.5]（另见 [25, 定理 3.1] 或 [24,定理 2.1]）。

3.3. 正则性引理和嵌入引理的陈述。设 $\delta_k$ 是一个正实数， $r$ 是一个正整数。设 $H$ 是定义在 $V$ 上的一个 $k$- 图，且 P $=$P($k-1$, a) 是 $V$ 上的一个划分族。给定一个多胞体 $\hat{}P^{(k-1)} \in \hat{}\mathcal{P}^{(k-1)}$，若 $H$ 相对于 $\hat{}P^{(k-1)}$ 是 $(\delta_k, r)$-正则的，则称之为如此，其中 $H$ 相对于 $\hat{}P^{(k-1)}$ 是 $(d_k, \delta_k, r)$-正则的，且 $d_k = d(H|\hat{}P^{(k-1)})$。最后，我们定义 $H$ 相对于 P 是 $(\delta_k, r)$-正则的。

定义 3.4（相对于 P 的（$\delta_k, r$）-正则）。如果一个 $k$-图 $H = (V, E)$ 满足

$$|\bigcup \{\mathcal{K}_k(\hat{}P^{(k-1)}) : \hat{}P^{(k-1)} \in \hat{}\mathcal{P}^{(k-1)} \text{且 } H \text{ 相对于 } \hat{}P^{(k-1)}\}| \le \delta_k |\text{Cross}_k|. \text{不是（}\delta_k, r\text{）-正则}$$

这意味着， $V$ 的 $k$-集合中至多有 $\delta_k$ 比例构成一个 $K_k^{(k-1)}$，该 $K_k^{(k-1)}$ 位于某个多胞体内，而相对于该多胞体， $H$ 不是正则的。

现在我们已经准备好陈述 $k$-图的正则性引理。

定理 3.5（正则性引理 [25, 定理 2.3]）。设 $k \ge 2$ 为一个固定整数。对于所有正的常数 $\eta$ 和 $\delta_k$，以及所有函数 $r : \mathbb{N}^{[k-1]} \to \mathbb{N}$ 和 $\delta : \mathbb{N}^{[k-1]} \to (0, 1]$,，存在整数 $t$ 和 $n_0$，使得以下结论成立。对于每个阶为 $n \ge n_0$ 的 $k$-图 $H$，以及满足 $t!$ 整除 $n$ 的情形，都存在一个划分族 P $=$P($k-1$, a)，将 $V(H)$ 划分为具有 $=(a_1, \ldots, a_{k-1})$ $\in \mathbb{N}^{[k-1]}$ 的划分族，使得

(1) P 是 $(\eta, \delta$(a) $t)$-均匀的，且 (2) $H$

关于 P 是 $(\delta_k, r$(a))- 正则的。

与其他基于正则性方法的证明类似，对定理3.5提供的划分族进行“清理”将会很方便。给定一个有限集合 $V$ 以及定义在 $V$上的划分族 P $=$P($k-1$, a)，其中 a $=(a_1, \ldots, a_{k-1})$ 且 $k \ge 3$，如果一个 $a_1$-集合 $T \subset V$满足：对于每个 $i \in [a_1]$， $T$ 都满足 $|T \cap V_i| = 1$，则称 $T \subset V$为 $\mathcal{P}^{(1)}$ 的横截集。给定 $\mathcal{P}^{(1)}$的一个横截集 $T$，我们考虑如下选择

$$\mathcal{G}_T = \{P_J^{(k-2)} \in \mathcal{P}^{(k-2)} : J \in [T]^{k-2}\}$$

并令

$$\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) = \{K \in \mathrm{Cross}_k : P_J^{(k-2)} \in \mathcal{G}_T \ \text{ for every } J \in [K]^{k-2}\}$$

为由 $\mathcal{G}_T$ 支持的 $V$ 的 $k$-集合。

推论 3.6。设 $m \geq k \geq 3$ 为固定整数。对于所有正的常数 $\eta \ll m^{-1}$ 和 $\delta_k < d_k$，以及所有函数 $r : \mathbb{N}^{[k-1]} \to \mathbb{N}$ 和 $\delta : \mathbb{N}^{[k-1]} \to (0,1]$，，存在整数 $t$ 和 $n_0$，使得以下结论成立。对于每个阶为 $n \geq n_0$ 且 $t!$ 整除 $n$ 的 $k$-图 $H = (V,E)$，都存在一个子超图 $H = (V,E)$，以及一个关于 $V$ 的划分族 $\mathbf{P} = \mathbf{P}(k-1, \mathbf{a})$，其中 $\mathbf{a} = (m, a_2, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{N}^{[k-1]}$，满足以下性质：

(C1) $\mathbf{P}$ 是 $(\eta, \delta(\mathbf{a}), t)$-均匀的。(C2) 对于每个 $k$-集合 $K \in \mathrm{Cross}_k$，$\hat{}H$ 关于 $\hat{}P_K^{(k-1)}$ 是 $(\delta_k, r)$-正则的，并且 $d(\hat{}H|\hat{}P_{(k-1)_K})$ 要么为 0，要么至少为 $d_k$。(C3) 存在一个 $\mathcal{P}^{(1)}$ 的横截集 $T$，使得对于每个 $\mathcal{Y} \in [m]^k$

$$|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap \hat{E}| \geq |\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap E| - 2d_k|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|.$$

证明。假设我们有常数

$$n_0{}^{-1} \ll r^{-1}, \delta \ll \min\{\delta_k, a_1^{-1}, \ldots, a_{k-1}^{-1}, t^{-1}\} \ll \delta_k, \eta \ll d_k, m^{-1} \leq k^{-1}.$$

我们将使用正则性引理（定理3.5），取 $\eta$, $\delta_k$ 足够小，并取函数$r$：$\mathbb{N}^{[k-1]} \to \mathbb{N}$和 $\delta$：$\mathbb{N}^{[k-1]} \to (0,1]$,，从而得到两个较大的整数 $t$和 $n_0$。令 $H = (V,E)$为一个阶为 $n \geq n_0$ 且 $t!$整除 $n$的 $k$-图。我们对 $H$ 应用定理3.5，得到 $V$的一个划分族$\mathbf{P}' = \mathbf{P}'(k-1, \mathbf{a}')$，其中$\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{N}_{>0}^{[k-1]}$，满足

$$\boldsymbol{\mathcal{P}'} \text{ is } (\eta, \delta(\mathbf{a}'), t)\text{-equitable and } H \text{ is } (\delta_k, r(\mathbf{a}'))\text{-regular w.r.t. } \boldsymbol{\mathcal{P}'}.$$

给定 $\mathcal{P}^{(1)}$的一个横截集 $T$，我们有

$$\mathcal{G}_T = \{P_J^{(k-2)} \in \mathcal{P}^{(k-2)} : J \in [T]^{k-2}\}.$$

由于$\boldsymbol{\mathcal{P}'}$是 $(\eta, \delta, t)$-均匀的，回顾定义(**B4**) 3.3中的性质，对于每个 $T$的横截集 $\mathcal{P}^{(1)}$ 以及每个 $k$-集合 $K \in [T]^k$，我们有

$$|\mathcal{K}_k(\hat{P}_K^{(k-2)})| = (1 \pm \eta) \prod_{\ell=1}^{k-2} (\frac{1}{a_\ell})^{\binom{k}{\ell}} n^k.$$

因此，每个多胞体 $\hat{}P_K^{(k-2)}$ 的体积都相同，至多相差一个由 $\eta$ 控制的乘法因子。此外，由于 $H$ 关于 $\mathbf{P}'$ 是 $(\delta_k, r)$-正则的，除了至多 $\delta_k|$ 个 $\mathrm{Cross}_k|$ $k$-集合 $K$ 外，$\mathrm{Cross}_k$ 中的所有集合都具有如下性质：$H$ 关于 $\hat{}P_K^{(k-1)}$ 是 $(\delta_k, r)$-正则的。一个简单的平均论证表明，存在一个合适的横截集 $T$，使得 $\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T)$ 中除至多 $2\delta_k|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T)|$ 个成员外，所有成员都具有如下性质：$H$ 关于其多胞体是 $(\delta_k, r)$-正则的。从现在起，我们固定这样一个 $T$ 的选取及其对应的集合 $\mathcal{G}_T$。

对于每个 $\mathcal{Y} \in [a_1]^k$，回忆一下，$\mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} = \{K \in \mathrm{Cross}_k : K \cap V_i \neq \emptyset$，其中 $i \in \mathcal{Y}\}$。现在我们考虑顶点集为 $[a_1]$的一个辅助 $k$-图 $R = ([a_1], E_R)$，其中当且仅当 $\mathcal{Y}$ 满足以下性质时，$\mathcal{Y} \in E_R$ 成立：

$$|\{K \in \mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} : H \textit{ is not } (\delta_k.r)\textit{-regular w.r.t. } \hat{P}_K^{(k-1)}\}| > 2\sqrt{\delta_k}|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|.$$

根据 $\mathcal{G}_T$ 的选取，我们可以得到

$$|E_R| \leq \frac{2\delta_k|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T)|}{2\sqrt{\delta_k}|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|} \leq 2\sqrt{\delta_k}\binom{a_1}{k}.$$

因此，由于 $\delta_k \ll 1/m$ 和 $m \ll \eta \leq a_1$的选择，辅助 $k$-图 $R$ 有一个大小为 $m$的独立集合 $M \subseteq [a_1]$。

ˆˆˆˆ 最后，我们构造所需的子超图 $H = (V, E)$。设 $V := \cup_{\lambda \in M} V_\lambda$，且 $\mathsf{P} = \mathsf{P}(k-1, \mathsf{a})$ 为在集合 $M$ 下受限的划分族 $\mathsf{P}'$。显然，$\mathsf{a} = (m, a_2, \ldots, a_{k-1})$。我们从 $\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap E$ 中删除所有属于多胞体 $\hat{P}^{(k-1)}$ 的边，其中 $\hat{H}$ 关于 $\hat{P}^{(k-1)}$ 不满足 $(\delta_k, r)$-正则性。根据 $M$ 和 $\delta_k \ll d_k$ 的选取，对于每个 $\mathcal{Y} \in [M]^k$，我们从 $\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap E$ 中删除的边数至多为 $2\sqrt{\delta_k}|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}| < d_k|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|$。此外，我们还从 $\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap E$ 中删除所有属于多胞体 $\hat{P}^{(k-1)}$ 的边，其中 $d(H|\hat{P}^{(k-1)}) < d_k$。令 $\hat{E}$ 为经过上述删除后得到的边集。那么，对于每个 $\mathcal{Y} \in [M]^k$，我们有

$$|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap \hat{E}| \geq |\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap E| - 2d_k|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|.$$

ˆ因此，$H$ 具备所有所需性质。 □

最后，我们陈述一个一般的嵌入引理，它允许将 $k$-图嵌入到由推论 3.6给出的划分中适当且足够正则、稠密的多胞体内，其中这些图具有固定的同构类型。这是 [4, 定理 2]的直接推论。

定理 3.7（嵌入引理）。设 $f$、$k$、$r$、$n_0$ 为正整数，并设 $\mathsf{d} = (d_2, \ldots, d_{k-1}) \in \mathbb{N}_{>0}^{[k-2]}$，使得对所有 $i < k$，均有 $1/d_i \in \mathbb{N}$，

$$n_0^{-1} \ll r^{-1}, \delta \ll \min\{\delta_k, d_2, \ldots, d_{k-1}\} \leq \delta_k \ll d_k, 1/f.$$

则对所有整数 $n \geq n_0$，以下结论成立。设 $F$ 是一个顶点集为 $[f]$ 的 $k$-图。假设 $\mathcal{H} = \{H^{(j)}\}_{j=1}^{k-1}$ 是一个具有簇 $V_1$、...、$V_f$ 的 $(\mathsf{d}, \delta, 1)$-正则 $(f, k-1)$-复形，且所有簇的大小均为 $n$。再假设 $H$ 是一个定义在同一顶点划分上的 $f$-部 $k$-图，并且对于每条超边 $\{i_1, \ldots, i_k\} \in E(F)$，$H$ 关于限制 $H^{(k-1)}[V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k}]$ 是 $(\delta_k, r)$-正则的，且 $d(H|H^{(k-1)}[V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k}]) \geq d_k$。那么 $H$ 包含 $F$ 的一个副本。

## 4. Proof of Theorem 1.11

为了证明定理 1.11，我们打算应用定理 3.7 (嵌入引理)。要应用定理 3.7，我们需要跟踪哪些多胞体是稠密且正则的。与 Szemer´edi 的正则性方法中约化图所起的作用类似，我们希望约化 $k$-图 $\mathcal{A}$ 非常适合分析推论 3.6 应用于宿主 $k$-图 $H$所给出的划分结构。换言之，我们希望 $(d+\varepsilon)$-稠密约化 $k$-图 $\mathcal{A}$ 能够继承 $(d+\varepsilon', \mu, k-2)$-稠密 $k$-图 $H$的一些有用性质，其中 $0 < \varepsilon < \varepsilon' \ll 1$。

出于上述目的，采用 $\pi_j(F)$ 的一种替代定义会更方便，我们将其记作 $\pi_{[k]^j}(F)$，该定义出自 Reiher、R¨odl 和 Schacht [21]。与定义 1.2 不同，它讨论的是 $H$ 相对于由 $\binom{k}{k-j}$ 多个 $j$-图组成的族的超边分布，而非仅相对于一个这样的 $j$-图。

给定有限集合 $V$ 和整数 $k \geq 3$，我们将笛卡尔幂 $V^{[k]}$ 视为函数来识别：把任意$k$元组 $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ 看作函数 $i \mapsto v_i$。此外，对于满足 $j < k$的集合 $J \in [k]^j$，我们用 $V^J$ 表示从 $J$到 $V$的所有函数组成的集合。这样，从 $V^{[k]}$到 $V^S$ 的自然投影就成为限制 $\vec{v} \mapsto \vec{v} \mid S$，而任意集合 $G_S \subseteq V^S$ 的原像记作

$$\mathcal{K}_k(G_S) = \{\vec{v} \in V^{[k]} : (\vec{v} \mid S) \in G_S\}.$$

更一般地，对于满足任意 $J \in [k]^j$都有 $G_J \subseteq V^J$ 的族 $\mathscr{G}_j = \{G_J \colon J \in [k]^j\}$，令

$$\mathcal{K}_k(\mathscr{G}_j) = \bigcap_{J \in [k]^j} \mathcal{K}_k(G_J).$$

给定一个 $k$-图 $H = (V, E)$，令

$$e_H(\mathscr{G}_j) = |\{(v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{K}_k(\mathscr{G}_j) : \{v_1, \ldots, v_k\} \in E\}|.$$

定义 4.1 ([21])。给定整数 $n \geq k > j \geq 0$，令实数 $d \in [0,1]$、$\mu > 0$和$H=(V、E)$ 构成一个具有 $k$-图，其中包含 $n$ 个顶点。若 $H$ 是 $(d,\mu,[k]^j)$-稠密的，则称

$$e_H(\mathscr{G}_j) \geq d|\mathcal{K}_k(\mathscr{G}_j)| - \mu n^k \tag{4.1}$$

对每个族 $\mathscr{G}_j = \{G_J$ 都成立：将某个 $J \in [k]^j$ 与某个 $G_J \subseteq V^J$ 相关联的 $J \in [k]^j\}$。

因此，我们令

$$\pi_{[k]^j}(F) = \sup\{d \in [0,1] : \text{for every } \mu > 0 \text{ and } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ there exists an } F\text{-free} \\ (d,\mu,[k]^j)\text{-dense } k\text{-graph } H \text{ with } |V(H)| \geq n_0\}.$$

Reiher、R¨odl 和 Schacht [21, Proposition 2.5] 证明了以下结果。

命题 4.2。对于正整数 $k > j > 0$，每个 $k$-图 $F$ 都满足

$$\pi_j(F) = \pi_{[k]^j}(F).$$

因此，可以设想在定理 1.12 中，我们本可以写成 $\pi_{[k]^{k-2}}(F)$，而不是 $\pi_{k-2}(F)$。现在，我们可以将 $(d,\mu,k-2)$-稠密 $k$-图中的嵌入问题转化为 $(d,\mu,[k]^{k-2})$-稠密 $k$-图中的嵌入问题，并利用推论 3.6 和定理 3.7证明定理 1.11。

证明定理 *1.11*。给定 $k \geq 3$、$d \in [0,1]$ 和 $\varepsilon > 0$，我们选择 $m^{-1} \ll \varepsilon$。设 $F$ 是一个满足定理 $k$-图，并满足定理 1.11 的表述，且 $|V(F)| = m$。我们固定辅助常数和函数，使其满足以下层次关系

$$0 < \mu \ll {n_0}^{-1} \ll r(\cdot)^{-1}, \delta(\cdot) \ll \min\{\delta_k, a_2^{-1}, \ldots, a_{k-1}^{-1}, t^{-1}\} \ll \delta_k, \eta \ll d_k, m^{-1},$$

其中 $\delta_k$ 以及函数 $r(\cdot)$ 和 $\delta(\cdot$由定理 3.7 应用于 $F$ 和 $d_k$时给出，且 $\eta$，$t$由推论 3.6 给出。根据命题 4.2，只需证明 $\pi_{[k]^{k-2}}(F) \leq d$。

设 $H$是一个具有 $n \geq n_0$个顶点的 $(d+2\varepsilon,\mu,[k]^{k-2})$ -稠密 $k$-图。将推论 3.6 应用于 $\hat{}\hat{}\hat{}H$，可得 $H$的一个子超图 $H=(V,E)$，以及$V$的一个划分族 $\mathbf{P}=\mathbf{P}(k-1,\mathbf{a})$，其中 $\mathbf{a}=(m,a_2,\ldots,a_{k-1}) \in \mathbb{N}_{>0}^{k-1}$满足推论 3.6 的性质 (C1)–(C3)。令$\mathcal{P}^{(1)} = \{V_1,V_2,\ldots,V_m\}$。回顾推论 3.6 的性质 (C3)，存在$\mathcal{P}^{(1)}$ 的一个横截集 $T$，使得对每个 $\mathcal{Y} \in [m]^k$

$$|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap \hat{E}| \geq |\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap E| - 2d_k|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|. \tag{4.2}$$

现在按如下方式构造一个 $m$-约化 $k$-图 $\mathcal{A}$，其指标集为 $[m]$：对于每个 $\mathcal{X} \in [m]^{k-1}$，将顶点类 $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$定义为所有满足 $P^{k-1} \in \mathcal{K}_{k-1}(\hat{}P^{(k-2)}{}_{T_{\mathcal{X}}})$ 的 $k-1$-胞 $P^{k-1} \in \mathcal{P}^{k-1}$ 的集合，其中 $T_{\mathcal{X}} := \{T \cap V_i : i \in \mathcal{X}\}$ 且 $\hat{}P^{(k-2)}_{T_{\mathcal{X}}} = \bigcup\{P_I^{(k-2)}) : I \in [T_{\mathcal{X}}]^{k-2}\}$。因此，所有顶点类 $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 的大小 $a_{k-1}$ 都相同，因为 $\mathbf{P}$ 是一个划分族，见等式 (3.1)。剩下需要定义 $\mathcal{A}$ 的组成部分。为简便起见，用 $P^{(k-1)}(w)$ 表示与 $w \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 对应的 $(k-1)$-胞。给定一个 $k$-集合 $\mathcal{Y} \in [M]^k$，令 $E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})$ 表示 $\bigcup_{\mathcal{X} \in [\mathcal{Y}]^{k-1}} \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 中所有满足以下条件的 $k$-集合$\{w_1,w_2,\ldots,w_k\}$组成的集合：$\bigcup\{P^{(k-1)}(w_i) : i \in [k]\}$ 构成一个 $k$-部 $(k-1)$-图 $\hat{}P^{(k-1)}$（多胞体），相对于该多胞体，$\hat{}H$ 是 $(\delta_k,r)$-正则的，且 $d(\hat{}H|\hat{}P^{(k-1)}) \geq d_k$。

我们首先断言，$m$-约化的 $k$-图 $\mathcal{A}$ 是 $(d+\varepsilon)$-稠密的。给定一个 $k$-集合 $\mathcal{Y} \in [m]^k$，由于 $H$ 是 $(d+2\varepsilon,\mu,[k]^{k-2})$-稠密的，我们有

$$|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap E| \geq (d+2\varepsilon)|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}| - \mu n^k. \tag{4.3}$$

注意 $\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap$交叉$_{\mathcal{Y}} = \mathcal{K}_k(\hat{}P_{T_{\mathcal{Y}}}^{(k-2)})$，其中 $T_{\mathcal{Y}} = \{T \cap V_i\colon \ i \in \mathcal{Y}\}$ 且 $\hat{}P_{T_{\mathcal{Y}}}^{(k-2)} = \bigcup\{P_I^{(k-2)}\colon I \in [T_{\mathcal{Y}}]^{k-2}\}$。由于$\boldsymbol{\mathcal{P}'}$是 $(\eta, \delta(\mathbf{a})\ t)$-均匀的，根据定义(B4)的条件3.3，我们有

$$|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}| = (1 \pm \eta) \prod_{\ell=1}^{k-2} (\frac{1}{a_\ell})^{\binom{k}{\ell}} n^k, \tag{4.4}$$

并且每个多胞体 $\hat{}P^{(k-1)}$ 都满足

$$|\mathcal{K}_k(\hat{P}^{(k-1)})| = (1 \pm \eta) \prod_{\ell=1}^{k-1} (\frac{1}{a_\ell})^{\binom{k}{\ell}} n^k, \tag{4.5}$$

将（4.4）中的下界与我们的选择 $\mu \ll t^{-1}$、$\varepsilon$ 结合，可得

$$|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}| \geq (1-\eta) \cdot (\frac{1}{t})^{\sum_{\ell=1}^{k-2}\binom{k}{\ell}} n^k \geq \frac{1}{t^{2^k}} n^k \geq \frac{2\mu}{\varepsilon} n^k,$$

因此（4.3）可改写为

$$|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap E| \geq (d + \frac{3}{2}\varepsilon) |\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|. \tag{4.6}$$

由（4.2）和（4.6），以及 $d_k \ll \varepsilon$，可得

$$|\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap \hat{E}| \geq (d + \frac{5}{4}\varepsilon) |\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|. \tag{4.7}$$

特别地，来自 $\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}} \cap \hat{}E$的这些边全都位于多胞体 $\hat{}P^{(k-1)}$中，而这些多胞体被编码为 $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}$ 的边。然而，根据（4.5），每个多胞体 $\hat{}_{P^{(k-1)}}$ 至多可支持

$$|\mathcal{K}_k(\hat{P}^{(k-1)})| \leq (1+\eta) \frac{1}{a_{k-1}^k} \prod_{\ell=1}^{k-2} (\frac{1}{a_\ell})^{\binom{k}{\ell}} n^k \leq \frac{1+\eta}{1-\eta} \cdot \frac{1}{a_{k-1}^k} \cdot |\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|$$

$\hat{}$ 的边 $H$。基于这些原因，（4.7）可得

$$(d + \frac{5}{4}\varepsilon) |\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}| \leq |E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})| \cdot \frac{1+\eta}{1-\eta} \cdot \frac{1}{a_{k-1}^k} \cdot |\mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}|$$

由此得到

$$|E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})| \geq (d+\varepsilon) a_{k-1}^k = (d+\varepsilon) \cdot \prod_{\mathcal{X} \in [\mathcal{Y}]^{k-1}} |\mathcal{P}_{\mathcal{X}}|.$$

因此，$\mathcal{A}$ 是一个（$d+\varepsilon$）-稠密的 $m$-约化 $k$-图。

接下来，令$\mathcal{H} = \{H^{(j)}\}_{j=1}^{k-1}$表示由所有满足 $K \in \mathcal{K}_k(\mathcal{G}_T) \cap \mathrm{Cross}_{\mathcal{Y}}$的（$k, k-1$）-复形$\bigcup_{i=1}^{k-1} \hat{}P$（$_i$）$_K$构成的（$m, k-1$）-复形。由于$\mathbf{P'}$是（$\eta, \delta(\mathbf{a})\ t$）-均匀的，根据定义 3.3 的条件（B3），$\mathcal{H}$ 是（$\mathbf{d}\ \delta,\ \mathbf{1}$）-正则的，其中$\mathbf{d} = (1/a_2, \ldots, 1/a_{k-1})$。此外，$\mathcal{A}$嵌入 $F$，这意味着存在一个从 $F$到 $\mathcal{A}$ 的约化映射（$\phi, \psi$）；也就是说，如果 $F$ 的$i_1{}^{\text{th}}, i_2{}^{\text{th}}, \ldots, i_k{}^{\text{th}}$个顶点构成一条 $k$-超边，那么

$$\{\psi(i_2, \ldots, i_k), \psi(i_1, i_3, \ldots, i_k), \ldots, \psi(i_1, \ldots, i_{k-1})\} \in E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}).$$

根据 $\mathcal{A}$，$\hat{}H$是关于限制 $\delta_k$，$r$-正则的 $H^{(k-1)}[V_{\phi(i_1)} \cup \cdots \cup V_{\phi(i_k)}]$和$d(H|H^{(k-1)}[V_{\phi(i_1)} \cup \cdots \cup V_{\phi(i_k)}]) \geq d_k$。因此，将定理 3.7 应用于 $\hat{}H$和 $F$，我们有 $\hat{}F \subset H \subset H$。□

## 5. Embedding lemma of reduced $k$-graphs

在本节中，我们将证明约化 $k$-图的一些辅助结果，并利用它们证明一个嵌入引理（引理5.1），该引理针对密度大于 $k$的约化 $k^{-k}$-图，这是本节的主要结果。

引理 5.1. 给定 $\varepsilon > 0$ 和整数 $m > k \geq 3$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得以下结论成立。对于每个 $(k^{-k}+\varepsilon)$-稠密的 $N$-约化 $k$-图 $\mathcal{A}$，存在一个诱导子超图$\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$，其指标集为 $M \subseteq [N]$，且满足 $|M| = m$；并且存在 $(2k-1)$ 个顶点（不一定互不相同）$\alpha^1_{\mathcal{X}}, \ldots, \alpha^k_{\mathcal{X}}, \beta^1_{\mathcal{X}}, \ldots, \beta^{k-1}_{\mathcal{X}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$，对所有 $\mathcal{X} \in [M]^{k-1}$ 均成立，使得以下结论成立。

(D1) 对所有 $\mathcal{Y} \in [M]^k$ 和 $\mathcal{X}_\ell \in [\mathcal{Y}]^{k-1}$，若 $\ell \in [k]$，则有 $\{\alpha^1_{\mathcal{X}_1}, \alpha^2_{\mathcal{X}_2}, \ldots, \alpha^k_{\mathcal{X}_k}\} \in E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})$。(D2) 存在一对 $\{i', j'\} \in [k]^2$，满足 $i' < j'$，使得对所有 $\mathcal{Y} \in [M]^k$ 和 $\mathcal{X}_\ell \in [\mathcal{Y}]^{k-1}$，若 $\ell \in [k]$，则有 $\{\beta^1_{\mathcal{X}_1}, \ldots, \beta^{j'-1}_{\mathcal{X}_{j'-1}}, \alpha^{i'}_{\mathcal{X}_{j'}}, \beta^{j'}_{\mathcal{X}_{j'+1}}, \ldots, \beta^{k-1}_{\mathcal{X}_k}\} \in E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})$。

我们将引理 5.1 的证明推迟到本节末尾。结合定理 1.11 和引理5.1，我们先给出定理 1.12的证明。

定理 *1.12*的证明。给定 $m > k \geq 3$，令 $F$ 为一个满足定理 $m$阶 $k$图中的条件 (♣) 和 (♠) 的 1.12。回顾条件 (♣)， $F$没有 $V(F)$ 的消失序。由定理 1.4 和推论 1.5，显然有 $\pi_{k-2}(F) \geq k^{-k}$。

接下来，我们将应用定理 1.11 来证明 $\pi_{k-2}(F) \leq k^{-k}$。只需证明，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得每个 $(k^{-k}+\varepsilon)$-稠密 $N$-约化 $k$-图都嵌入 $F$。我们首先将引理 5.1 应用于 $\varepsilon$ 和 $m$，得到 $N$。令 $\mathcal{A}$ 为一个 $(k^{-k}+\varepsilon)$-稠密 $N$-约化 $k$-图，其指标集为 $[N]$；令 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ 为一个诱导子超图，它在指标集 $M \subseteq [N]$ 上满足引理 5.1 中的性质 (D1) 和 (D2)，其中 $|M| = m$。现在，根据性质 (D2)，我们固定满足 $i' < j'$ 的 $\{i', j'\} \in [k]^2$。回顾条件 (♠)， $F$ 可划分为两个生成子超图 $F^1_{i',j'}$ 和 $F^2_{i',j'}$，使得存在 $V(F)$ 的一个排序 $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$；该排序对于 $F^1_{i',j'}$ 以及 $F^2_{i',j'}$ 都是消失序，并且对于任意两条边 $e_1 \in E(F^1_{i',j'})$、 $e_2 \in E(F^2_{i',j'})$，若 $|e_1 \cap e_2| = k-1$, $e_1 \cap e_2$，则其相对于 $F^1_{i',j'}$ 是 $i'$-型，且相对于 $F^2_{i',j'}$ 是 $j'$-型。因此，对于每个 $(k-1)$-集合 $S \in \partial F$， $S$ 仅满足以下三种情形之一：

(1) $S$ 相对于 $F^1_{i',j'}$ 是 $r$ 型的，其中某个 $r \in [k]$ 满足条件；
(2) $S$ 相对于 $F^2_{i',j'}$ 是 $t$ 型的，其中某个 $t \in [k]$ 满足条件；
(3) $S$ 相对于 $F^1_{i',j'}$ 是 $i'$ 型的，且相对于 $F^2_{i',j'}$是 $j'$ 型的。

为方便起见，我们重新排列 $M$ 中的指标，并记作 $M = [m]$。令 $\phi\colon V(F) \to [m]$，使得对所有 $\ell \in [m]$， $\phi(v_\ell) = \ell$。给定 $S \in \partial F$，令 $\phi(S)$ 表示由 $S$ 中顶点的下标组成的 $(k-1)$-集合。现在我们如下考虑 $\psi\colon \partial F \to V(\mathcal{A}')$。对每个 $S \in \partial F$，若 $S$ 相对于 $F^1_{i',j'}$ 是 $r$ 型的，其中某个 $r \in [k] \setminus \{i'\}$ 满足条件，则令 $\psi(S) = \alpha^r_{\phi(S)}$；若 $S$ 相对于 $F^1_{i',j'}$ 是 $i'$ 型的，或相对于 $F^2_{i',j'}$ 是 $j'$ 型的，则令 $\psi(S) = \alpha^{i'}_{\phi}(s)$；若 $S$ 相对于 $F^2_{i',j'}$ 是 $t$ 型的，其中某个 $t \in [j'-1]$ 满足条件，则令 $\psi(S) = \beta^t_{\phi(S)}$；若 $S$ 相对于 $F^2_{i',j'}$ 是 $t$ 型的，其中某个 $t \in [k] \setminus [j']$ 满足条件，则令 $\psi(S) = \beta^{t-1}_{\phi}{}_S()$。由引理 5.1 中的性质 (D1) 和 (D2)，可得 $(\phi, \psi)$ 是从 $F$ 到 $\mathcal{A}'$ 的约化映射。因此， $\mathcal{A}$ 嵌入 $F$。□

为了证明引理5.1，我们的主要工具是经典的多色超图拉姆齐定理，现将其陈述如下以供参考。

定理 5.2 (Ramsey [17])。对于任意 $r_R$， $k_R$， $n_R \in \mathbb{N}$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得每个 $r_R$-边着色的 $k_R$-均匀团，其中有 $N$ 个顶点，都包含一个单色的 $k_R$-均匀团，其中有$n_R$ 个顶点。

接下来，我们陈述并证明几个有助于证明引理5.1的引理。为方便起见，我们先介绍一些有用的记号。回顾一下，约化 $k$-图 $\mathcal{A}$ 的每个组成部分总是一个 $k$-部 $k$-图。为方便起见，我们如下考虑 每个顶点的归一化度： $\mathcal{A}$ 给定一个 $m$-约化 $k$-图 $\mathcal{A}$、一个 $k$-集合 $\mathcal{Y}=[\![y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_k]\!]\in[m]^k$ 以及一个坐标 $y_\ell\in\mathcal{Y}$，满足 $\ell\in[k]$，我们定义

$$\deg_{\mathcal{Y}\to y_\ell}(v):=\frac{|\{e\in E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}):v\in e\}|}{\prod_{j\in[k]\setminus\{\ell\}}|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_j\}}|}$$

对于每个 $v\in\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}}$。此外，对于 $\rho>0$，令

$$\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}\to y_\ell}:=\{v\in\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}}:\deg_{\mathcal{Y}\to y_\ell}(v)\geq\rho\}.$$

为便于理解我们的记号，我们将属于 $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}}$ 的顶点称为 $\ell$ 型顶点（相对于某些 $\mathcal{Y}=[\![y_1、\ y_2、\ \ldots、\ y_k]\!]\subset\mathbb{N}$）。

下面的引理说明，当 $N\in\mathbb{N}$ 足够大时，每个 $N$-约化的 $k$-图 $\mathcal{A}$ 都包含一个诱导子超图 $\mathcal{A}'$，使得对于每个 $\ell\in[k]$，在 $\mathcal{A}'$ 的所有组成部分中，具有不可忽略归一化度的 $\ell$ 型顶点所占的比例近似相同。

引理 5.3。给定 $\rho>0$ 和整数 $m^*\geq k\geq 3$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得以下结论成立。对于每个 $N$-约化的 $k$-图 $\mathcal{A}$，存在常数 $t_\ell$ （对于 $\ell\in[k]$），并且存在一个定义在集合 $M^*\subseteq[N]$ 上的诱导子超图 $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}$，其中 $|M^*|=m^*$，使得对于每个 $k$-集合 $\mathcal{Y}=[\![y_1、\ y_2、\ \ldots、\ y_k]\!]\in[M^*]^k$，以下结论成立

$$t_\ell|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}}|\leq|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}\to y_\ell}|<(t_\ell+\rho)|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}}|\quad \textit{for every } \ell\in[k]. \tag{5.1}$$

证明。 应用定理 5.2，取 $r_R=(\lfloor\rho^{-1}\rfloor+1)^k$， $k_R=k$ 以及 $n_R=m^*$，得到 $N\in\mathbb{N}$。令$\mathcal{A}$ 为一个 $N$-约简 $k$-图。考虑一个顶点集为 $r_R$-边染色的 $k$-均匀团$[N]$，如下所示。对于每个 $\mathcal{Y}=[\![y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_k]\!]\in[N]^k$以及 $\ell\in[k]$，我们用三元组 $\mathcal{Y}$对其染色

$$\left(\left\lfloor\frac{|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_1\}\to y_1}|}{\rho|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_1\}}|}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_2\}\to y_2}|}{\rho|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_2\}}|}\right\rfloor,\ldots,\left\lfloor\frac{|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_k\}\to y_k}|}{\rho|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_k\}}|}\right\rfloor\right).$$

根据定理 5.2，存在一个子集 $M^*\subseteq[N]$，满足 $|M^*|=m^*$，使得所有在 $M^*$上诱导出的 $k$-集合具有相同的颜色，即（$t'_1,\ t'_2,\ \ldots\ldots,\ t'_k$）。因此，集合 $M^*$上的诱导子超图 $\mathcal{A}'$满足引理的陈述，其中 $t_\ell=\rho t'_\ell$ 适用于 $\ell\in[k]$。 □

使用引理 5.3，我们将证明，当密度大于 $N$-约化 $k$-图 $\mathcal{A}$ 时，它包含一个性质良好的诱导子超图 $k^{-k}$。

引理 5.4. 给定 $\varepsilon>0$，存在 $\rho>0$，使得对于整数 $m>k\geq 3$，存在 $N\in\mathbb{N}$，满足以下结论。对于每个 $(k^{-k}+\varepsilon)$-稠密的 $N$-约化 $k$-图 $\mathcal{A}$，存在一个诱导子超图 $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}$，其顶点集合为 $M\subseteq[N]$，且满足 $|M|=m$，并具有以下性质：

- 存在一对 $\{i',j'\}\in[k]^2$，满足 $i'<j'$，使得对于所有满足 $\mathcal{X}:=I\setminus\{z_{i'},z_{j'+1}\}$ 的 $I=[\![z_1,z_2,\ldots,z_{k+1}]\!]\in[M]^{k+1}$，均有

$$|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{i'}}\cap\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{j'+1}}|\geq\rho|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}|.$$

证明。 给定 $\varepsilon>0$ （不妨设 $\varepsilon<1/2$），令 $\rho=\frac{\varepsilon}{k^k}$ 且 $\rho_0=\rho\binom{k}{2}$。我们首先将定理 5.2 应用于 $r_R=\binom{k}{2}$、$k_R=2k-1$ 和 $n_R=2m+1$，得到 $N'\in\mathbb{N}$。然后将引理 5.3 应用于 $\rho_0$ 和 $m^*=N'$，得到 $N$。

设 $\mathcal{A}$ 是一个（$k^{-k}+\varepsilon$）-稠密 $N$-约化 $k$-超图，并令 $\mathcal{A}^*$ 为集合$M^*$ 上的诱导子超图，其中 $|M^*|=m^*$ 由引理 5.3 给出，并附带实数 $t_\ell$，对于 $\ell\in[k]$ 满足以下性质

引理陈述中给出的5.3。然后，我们首先断言

$$\sum_{\ell\in[k]} t_\ell \geq 1+\rho_0. \tag{5.2}$$

若不是这样，假设 $\sum_{\ell=1}^{k} t_\ell < 1+\rho_0$。给定 $\mathcal{Y}=[\![y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_k]\!]\in[M^*]^k$ 以及 $\ell\in[k]$，对于每个顶点 $\mathcal{Y}\to y_\ell(u)$，$<\rho_0$ 都有度数 $u\in\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}}\setminus\mathcal{S}^{\rho_0}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}\to y_\ell}$。由引理 5.3，可得

$$\begin{aligned}|E(\mathcal{A}_\mathcal{Y})| &< \sum_{\ell=1}^{k}\left|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}}\setminus\mathcal{S}^{\rho_0}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}\to y_\ell}\right|\cdot\left(\rho_0\prod_{j\in[k]\setminus\{\ell\}}|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_j\}}|\right)+\prod_{\ell\in[k]}\left|\mathcal{S}^{\rho_0}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}\to y_\ell}\right|\\ &\overset{(5.1)}{\leq}\left(k\rho_0+\prod_{\ell\in[k]}(t_\ell+\rho_0)\right)\prod_{j\in[k]}|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_j\}}|.\end{aligned}$$

根据算术几何平均不等式，$\mathcal{A}_\mathcal{Y}$ 的边密度至多为

$$k\rho_0+\left(\frac{\sum_{\ell=1}^{k}(t_\ell+\rho_0)}{k}\right)^k\leq k\rho_0+\left(\frac{1+(k+1)\rho_0}{k}\right)^k<k^{-k}+\varepsilon,$$

这与 相矛盾：$\mathcal{A}$ 是（$k^{-k}+\varepsilon$）-稠密的，最后一个不等式由 $\rho_0=\varepsilon k^{1-k}$得出 .

接下来考虑集合 $\binom{k}{2}$ 上的 $2k-1$-边染色（ $M^*$ ）-均匀团，如下所示。给定一个（$2k-1$）-集合 $Q=[\![y_1,\ x_1,\ y_2,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ y_{k-1},\ x_{k-1},\ y_k]\!]\subset M^*$ 以及 $\mathcal{X}\colon=[\![x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_{k-1}]\!]$，令边染色 $\phi\colon[M^*]^{2k-1}\to[k]^2$ 满足以下算法 1：

**算法 1**

Given a $(2k-1)$-set $Q$, **input:** $\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to\{y_\ell\}}$ for $\ell\in[k]$, and **output:** $\phi(Q)$.

```
for i = 1 to k − 1 do
    for j = i + 1 to k do
        if |S^ρ_{X→y_i} ∩ S^ρ_{X→y_j}| ≥ ρ|P_X| then
            return {i, j}
        end if
    end for
end for
```

我们断言算法 1是有效的。若非如此，假设 $|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y_i}\cap\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y_j}|<\rho|\mathcal{P}_\mathcal{X}|$对所有$\{i,j\}\in[k]^2$，则有

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_\mathcal{X}|\geq|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y_1}\cup\cdots\cup\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y_k}|&\geq\sum_{\ell\in[k]}|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y_\ell}|-\sum_{\{i,j\}\in[k]^2}|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y_i}\cap\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y_j}|\\ &\overset{(\rho_0>\rho)}{\geq}\sum_{\ell\in[k]}|\mathcal{S}^{\rho_0}_{\mathcal{X}\to y_\ell}|-\sum_{\{i,j\}\in[k]^2}|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y_i}\cap\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y_j}|\overset{(5.1)}{>}\left(\sum_{\ell\in[k]}t_\ell-\rho_0\right)|\mathcal{P}_\mathcal{X}|\overset{(5.2)}{\geq}|\mathcal{P}_\mathcal{X}|,\end{aligned}$$

这是不可能的。根据定理 5.2，我们将得到一个集合 $M_0\subseteq M^*$ 满足 $|M_0|=2m+1$，使得在 $M_0$ 上诱导出的所有（$2k-1$）-集合颜色都相同，设为 $\{i',j'\}$，且 $i'<j'$。

为方便起见，设 $M_0=[2m+1]$。我们选择 $M=\{2,4,6,\ldots,2m\}\subset M_0$。令 $\mathcal{A}'$ 为 $\mathcal{A}$ 在指标集 $M$ 上的诱导子超图。于是 $\mathcal{A}'$ 满足引理的陈述。事实上，对于任意 $I=[\![z_1,z_2,\ldots,z_{k+1}]\!]\in[M]^{k+1}$，我们可以通过从 $I$ 中添加元素，将其扩充为一个 $(2k-1)$-集合

$Q = [\![y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots, y_{k-1}, x_{k-1}, y_k]\!]$，使得 $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\} = I \setminus \{z_{i'}, z_{j'+1}\}$ 且 $y_{i'} = z_{i'}$ 和 $y_{j'} = z_{j'+1}$。设 $\mathcal{X} = I \setminus \{z_{i'}, z_{j'+1}\}$。由于 $\phi(Q) = \{i', j'\}$，我们有

$$|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{i'}} \cap \mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{j'+1}}| \geq \rho|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}|.$$

□

回顾引理 5.1 的陈述，我们需要找到一个位于 $k^{-k} + \varepsilon$-稠密 $N$-约化 $k$-图 $\mathcal{A}$ 中的“行为良好”的诱导子超图$\mathcal{A}'$，其中“行为良好”是指，对 $\mathcal{A}'$ 的每个顶点类 $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$，都能找到 $(2k-1)$ 个满足引理 5.1 中性质 (D1) 和 (D2) 的顶点。给定一个约化 $k$-图 $\mathcal{A}$，且其中每个组成部分都有具备良好性质的候选集，例如考虑每个组成部分中归一化度不可忽略的 $\ell$-型顶点，我们的目标是从 $\mathcal{A}$ 的每个顶点类中选出一个代表顶点，使其对于所属的每个组成部分都具备良好性质。由于 $\mathcal{A}$ 的每个顶点类可能属于许多不同的组成部分，因此即使相对于每个涉及该顶点类的组成部分，候选集的大小都与整体大小成线性比例，也可能不存在一个适用于 $\mathcal{A}$ 所有组成部分的单一顶点。不过，借助 Ramsey 理论的力量，我们可以通过取 $\mathcal{A}$ 的诱导子超图找到这样的代表顶点。下面的引理旨在确定这样的代表顶点。

引理 5.5. 给定 $\rho > 0$、整数 $m \geq k \geq 3$ 和 $t \in [k]$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得下述结论成立。若 $\mathcal{A}$是一个 $N$-约化 $k$-图，且对于每个 $k$-集合 $\mathcal{Y} = [\![y_1, y_2, \ldots, y_k]\!] \in [N]^k$，则存在一个满足 $|\mathcal{S}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_t\}\to y_t}| \geq \rho|\mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_t\}}|$的子集 $\mathcal{S}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_t\}\to y_t} \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{Y}\setminus\{y_t\}}$。那么，存在一个以指标集 $M \subseteq [N]$ 为顶点集的诱导子超图 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$，其中 $|M| = m$，且对于所有$\mathcal{X} \in [M]^{k-1}$，顶点 $v_{\mathcal{X}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$满足下述性质：

- 对于每个 $\mathcal{X} = [\![x_1, \ldots, x_{k-1}]\!] \in [M]^{k-1}$，顶点 $v_{\mathcal{X}}$满足

$$v_{\mathcal{X}} \in \bigcap_{x_{t-1}<y<x_t,\ y\in M} \mathcal{S}_{\mathcal{X}\to y},$$

其中，$x_{t-1} = 0$ 对于 $t = 1$，而 $x_t = N$ 对于 $t = k$。

证明。给定 $\rho > 0$、 $m \geq k \geq 3$ 和 $t \in [k]$，我们应用定理 5.2，取 $r_R = 2$ $k_R = m$ 和$n_R = \max\{m^2, 2\lceil\frac{m}{\rho}\rceil\}$，得到 $N \in \mathbb{N}$。令 $\mathcal{A}$为满足引理条件的一个 $N$-约化 $k$-图。现在我们按如下方式构造一个定义在顶点集 $[N]$ 上的 $m$-均匀团的二边染色。对于每个 $m$-集合 $Q = [\![a_1、 a_2、 \ldots\ldots、 a_m]\!] \in [N]^m$，令 $L = [\![a_t、 a_{t+1}、 \ldots\ldots、 a_{t+m-k}]\!]$ 以及 $\mathcal{X} = Q \setminus L$。显然， $\mathcal{X} \in [N]^{k-1}$。若存在顶点 $v_{\mathcal{X}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 使得$v_{\mathcal{X}} \in \bigcap_{\ell\in L} \mathcal{S}_{\mathcal{X}\to\ell}$，则称 $Q$ 被染成蓝色；否则，称 $Q$ 被染成红色。

根据定理 5.2，存在一个集合 $S \subseteq [N]$，满足 $|S| = n_R$，使得在集合 $S$ 上诱导出的所有边 $Q$ 颜色相同。为方便起见，我们重新排列 $S$ 中的指标，并记 $S = [n_R]$。令$J = [\![t, t+1, \ldots\ldots, n_R - k + t]\!]$ 以及 $\mathcal{X} = [n_R] \setminus J$。根据引理的条件，对于 $j \in J$，每个集合 $\mathcal{S}_{\mathcal{X}\to j} \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$都满足 $|\mathcal{S}_{\mathcal{X}\to j}| \geq \rho|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}|$。由于 $n_R \geq 2\lceil\frac{m}{\rho}\rceil$，通过双重计数，存在一个顶点$v_{\mathcal{X}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$和一个子集 $I \subseteq J$，满足 $|I| = m - k + 1$，使得

$$v_{\mathcal{X}} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_{\mathcal{X}\to i},$$

这意味着，在集合 $S$ 上诱导出的 $m$-元集合的公共颜色是蓝色。

现在，我们选择 $M = \{m, 2m \ldots, m^2\}$。显然， $M \subset S$。对于每个 $\mathcal{X} = [\![x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]\!] \in [M]^{k-1}$，我们通过从 $\{x_{t-1}+1, x_{t-1}+2, \ldots, x_t-1\}$ 中添加 $(m-k+1)$ 个元素，将 $\mathcal{X}$ 扩展为一个 $m$-集合 $Q$，使得 $Q$ 包含集合 $\{x \in M$ 中的所有元素： $x_{t-1} < x < x_t\}$。由于 $Q$ 被染成蓝色，存在一个顶点 $v_{\mathcal{X}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 满足

$$v_{\mathcal{X}} \in \bigcap_{x_{t-1}<y<x_t,\ y\in M} \mathcal{S}_{\mathcal{X}\to y}.$$

□

下面的引理旨在根据集合 $\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{i'}} \cap \mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{j'+1}}$ 选取代表顶点，这些集合由引理 5.4给出。

引理 5.6. 给定 $\rho > 0$、整数 $m > k \geq 3$ 和 $\{i', j'\} \in [k]^2$，其中 $i' < j'$，存在 $N \in \mathbb{N}$使得下述结论成立。设 $\mathcal{A}$是一个 $N$-约化的 $k$-图。若对每个 $I = [\![z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}]\!] \in [N]^{k+1}$和 $\mathcal{X} = I \setminus \{z_{i'}, z_{j'+1}\}$，都存在满足 $|\mathcal{S}_{z_{i'}\leftarrow\mathcal{X}\to z_{j'+1}}| \geq \rho|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}|$的子集 $\mathcal{S}_{z_{i'}\leftarrow\mathcal{X}\to z_{j'+1}} \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$。那么存在一个以集合 $M \subseteq [N]$ 为顶点集的诱导子超图 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$，其中 $|M| = m$，且对所有 $\mathcal{X} \in [M]^{k-1}$，顶点 $v_{\mathcal{X}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 都满足下述性质：

对每个 $\mathcal{X} = [\![x_1, \ldots, x_{k-1}]\!] \in [M]^{k-1}$，顶点 $v_{\mathcal{X}}$满足

$$v_{\mathcal{X}} \in \bigcap_{\substack{x_{i'-1} < y < x_{i'},\ x_{j'-1} < y' < x_{j'} \\ \{y, y'\} \subset M}} \mathcal{S}_{y\leftarrow\mathcal{X}\to y'},$$

*where* $x_{i'-1} = 0$ *for* $i' = 1$ *and* $x_{j'} = N$ *for* $j' = k$.

证明。给定 $\rho > 0$、$m \geq k \geq 3$ 和 $\{i', j'\} \in [k]^2$，其中 $i' < j'$，我们应用定理 5.2，取 $r_R = 2$、$k_R = 2m - k + 1$ 和 $n_R = \max\{m^2, 3\lceil\frac{m}{\rho}\rceil\}$，得到 $N \in \mathbb{N}$。令 $\mathcal{A}$ 为满足引理条件的一个 $N$-约化 $k$-图。现在我们考虑顶点集 $[N]$ 上的一个 2-边染色 $k_R$-均匀团，如下所示。对于任意 $(2m - k + 1)$-集合 $Q = [\![a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{2m-k+1}]\!] \subset [N]$，令 $L_1 = [\![a_{i'}, a_{i'+1}, \ldots\ldots, a_{i'+m-k}]\!]$，$L_2 = [\![a_{j'+m-k+1}, a_{j'+m-k+2}, \ldots\ldots, a_{j'+2m-2k+1}]\!]$ 和 $\mathcal{X} = Q\backslash(L_1 \cup L_2)$。我们规定，若存在一个顶点 $v_{\mathcal{X}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 使得 $Q$，则将 $Q$ 染成蓝色

$$v_{\mathcal{X}} \in \bigcap_{\ell\in L_1,\ \ell'\in L_2} \mathcal{S}_{\ell\leftarrow\mathcal{X}\to\ell'},$$

否则，$Q$被染成红色。

根据定理 5.2，存在一个集合 $S \subseteq [N]$，满足 $|S| = n_R$，使得集合 $S$ 上诱导出的所有边 $Q$ 具有相同的颜色。为方便起见，我们重新排列 $S$ 中的指标，并记作 $S = [n_R]$。令$J_1 = [\![i', i' + 1, \ldots\ldots, i' + \lceil\frac{m}{\rho}\rceil - 1]\!]$，$J_2 = [\![j' + \lceil\frac{m}{\rho}\rceil, j' + \lceil\frac{m}{\rho}\rceil + 1, \ldots\ldots, j' + 2\lceil\frac{m}{\rho}\rceil - 1]\!]$，且 $\mathcal{X} = [2\lceil\frac{m}{\rho}\rceil + k - 1] \setminus (J_1 \cup J_2)$。由于 $n_R = \max\{m^2, 3\lceil\frac{m}{\rho}\rceil\}$，我们有 $J_1$、$J_2$、$\mathcal{X} \subset S$。根据引理的条件，我们有

$$|\mathcal{S}_{i'-1+j\leftarrow\mathcal{X}\to j'-1+\lceil\frac{m}{\rho}\rceil+j}| \geq \rho|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}|, \text{ for } j \in [\lceil\frac{m}{\rho}\rceil].$$

一个简单的平均论证表明，存在一个顶点 $v_{\mathcal{X}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$和一个子集 $J \subset [\lceil\frac{m}{\rho}\rceil]$，使得$|J| = m - k + 1$

$$v_{\mathcal{X}} \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{S}_{i'-1+j\leftarrow\mathcal{X}\to j'-1+\lceil\frac{m}{\rho}\rceil+j},$$

这意味着，在集合 $S$ 上诱导出的 $(2m - k + 1)$-集合的公共颜色是蓝色。

现在我们选择 $M = \{m, 2m \ldots, m^2\}$。对于每个 $\mathcal{X} = [\![x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]\!] \in [M]^{k-1}$，我们通过从集合 $\{x \in S$中添加元素，将 $\mathcal{X}$扩展为一个 $(2m-k+1)$-集合 $Q$：$x_{i'-1} < x < x_{i'}\}$和 $\{x' \in S$：$x_{j'-1} < x' < x_{j'}\}$，使得 $Q$ 包含 $\{y \in M$：$x_{i'-1} < y < x_{i'}$ 或 $x_{j'-1} < y < x_{j'}\}$中的所有元素。由于$Q$ 被染成蓝色，存在一个顶点 $v_{\mathcal{X}}$ 满足

$$v_{\mathcal{X}} \in \bigcap_{\substack{x_{i'-1} < y < x_{i'},\ x_{j'-1} < y' < x_{j'} \\ \{y, y'\} \subset M}} \mathcal{S}_{y\leftarrow\mathcal{X}\to y'}.$$

□

为了证明引理5.1，我们还需要一个适用于 $k$-部图 $k$-图的辅助引理。

引理 5.7. 对任意 $\rho>0$、 $k\geq 3$ 和 $t\in[k-1]$，对于每个具有顶点划分 $\{V_1,\dots,V_k\}$ 的 $k$-部 $k$-图 $H$，以下结论成立。设 $T=\{v_1,\dots,v_t\}$ 是 $V(H)$ 的一个子集，且对 $i\in[t]$ 有 $v_i\in V_i$。如果 $T$ 包含在 $H$ 的至少 $\rho\prod_{j\in[k]\setminus[t]}|V_j|$ 条边中，那么存在至少 $\frac{\rho}{2}|V_{t+1}|$ 个顶点 $u\in V_{t+1}$，使得它们共同包含在至少 $\frac{\rho}{2}\prod_{j\in[k]\setminus[t+1]}|V_j|$ 条 $H$ 的边中。

证明。给定 $T=\{v_1,\dots,v_t\}$，其中 $v_i\in V_i$ 对于 $i\in[t]$，令

$$U_{t+1}=\{u\in V_{t+1}:T\cup\{u\}\text{ is contained in at least }\frac{\rho}{2}\prod_{j\in[k]\setminus[t+1]}|V_j|\text{ edges of }H\}.$$

如果 $|U_{t+1}|<\frac{\rho}{2}|V_{t+1}|$，那么包含 $T$ 的 $H$ 中的边数至多为

$$|U_{t+1}|\cdot\prod_{j\in[k]\setminus[t+1]}|V_j|+|V_{t+1}\setminus U_{t+1}|\cdot\frac{\rho}{2}\prod_{j\in[k]\setminus[t+1]}|V_j|<\rho\prod_{j\in[k]\setminus[t]}|V_j|,$$

这与该引理的假设相矛盾。 □

利用引理 5.4 – 5.7，我们现在可以证明引理 5.1。

引理 *5.1* 的证明。 我们首先概述此证明的主要思路。论证分为 $2k$ 个阶段。给定 $\varepsilon>0$ 和 $m>k\geq 3$，我们选择满足以下层次关系的常数（从右向左）：

$$N^{-1}\ll m_{2k-1}^{-1}\ll m_{2k-2}^{-1}\ll\cdots\ll m_1^{-1}\ll m^{-1},\varepsilon<1/2,$$

以及 $\rho=\varepsilon k^{-k}$。设 $\mathcal{A}$ 是一个 $(k^{-k}+\varepsilon)$-稠密的 $N$-约化 $k$-图。在 $1^{\text{th}}$ 步骤中，根据引理 5.4，我们可以得到一个大小为 $m_{2k-1}$ 的指标集 $M_{2k-1}\subseteq[N]$ 和一对 $\{i',j'\}\in[k]^2$，使得 $i'<j'$，并且由 $M_{2k-1}$ 诱导的子超图 $\mathcal{A}_{2k-1}\subseteq\mathcal{A}$ 满足引理 5.6 中的条件。然后，在下一阶段，利用引理 5.6，我们可以将指标集 $M_{2k-1}$ 缩减为一个大小为 $m_{2k-2}$ 的某个 $M_{2k-2}\subseteq M_{2k-1}$，并为所有 $\mathcal{X}\in[M_{2k-2}]^{k-1}$ 得到顶点 $\alpha_{\mathcal{X}}^{i'}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$，使得由 $M_{2k-2}$ 诱导的子超图 $\mathcal{A}^{2k-2}\subseteq\mathcal{A}^{2k-1}$ 以及满足 $\mathcal{X}\in[M_1]^{k-1}$ 的顶点 $\alpha_{\mathcal{X}}^{i'}$ 满足引理 5.6 中的性质。接下来，将顶点 $\alpha_{\mathcal{X}}^{i'}$ 视为 $i'$- 类型顶点。由于每个 $\alpha_{\mathcal{X}}^{i'}$ 都有不可忽略的归一化度，根据引理 5.7，我们总能选取数量与之线性成比例的顶点，使其归一化度之和不可忽略。随后，我们可以利用引理 5.5 缩减这些候选集，从而得到某个 $\ell\in[k]\setminus\{i'\}$ 对应的顶点 $\alpha_{\mathcal{X}}^{\ell}$。这一迭代过程（交替使用引理 5.7 和引理 5.5）可以持续 $(k-1)$ 个步骤，直到选出所有所需的顶点 $\alpha_{\mathcal{X}}^1,\dots,\alpha_{\mathcal{X}}^{i'-1},\alpha_{\mathcal{X}}^{i'+1},\dots,\alpha_{\mathcal{X}}^k$。然后，我们将顶点 $\alpha_{\mathcal{X}}^{i'}$ 视为 $j'$- 类型顶点，并在之后的每个步骤中分别以类似方式得到所需的顶点 $\beta_{\mathcal{X}}^1,\dots,\beta_{\mathcal{X}}^{k-1}$。

令 $\mathcal{A}$ 为一个（$k^{-k}+\varepsilon$）-稠密的 $N$-约化 $k$-图。首先，我们应用引理 5.4，结合 $\varepsilon$ 得到一个常数 $\rho=\varepsilon k^{-k}$。根据引理 5.4，存在一个诱导子超图 $\mathcal{A}_{2k-1}\subseteq\mathcal{A}$，其定义在集合 $M_{2k-1}\subseteq[N]$ 上，大小为 $m_{2k-1}$，以及一对 $\{i',j'\}\in[k]^2$，满足 $i'<j'$ 以下性质：

- For each $I=[\![z_1,z_2,\dots,z_{k+1}]\!]\in[M_{2k-1}]^{k+1}$ with $\mathcal{X}:=I\setminus\{z_{i'},z_{j'+1}\}$, we have
$$|\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{i'}}\cap\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{j'+1}}|\geq\rho|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}|.$$

在 $2^{\text{th}}$这一步中，我们应用引理5.6，取 $\rho$到 $\mathcal{A}_{2k-1}$和集合 $\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{i'}}\cap\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to z_{j'+1}}$，得到一个诱导子超图 $\mathcal{A}_{2k-2}\subseteq\mathcal{A}_{2k-1}$，其定义在集合 $M_{2k-2}\subseteq M_{2k-1}$ 上，大小为 $m_{2k-2}$，并且顶点 $\alpha_{\mathcal{X}}^{i'}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 对所有$\mathcal{X}=[\![x_1、\ .....、\ x_{k-1}]\!]\in[M_{2k-2}]^{k-1}$ 满足

$$\alpha_{\mathcal{X}}^{i'}\in\bigcap_{\substack{x_{i'-1}<y<x_{i'},\ x_{j'-1}<y'<x_{j'}\\ \{y,y'\}\subset M_{2k-2}}}\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y}\cap\mathcal{S}^{\rho}_{\mathcal{X}\to y'},$$

其中，对于 $i'=1$， $x_{i'-1}=0$；对于 $j'=k$， $x_{j'}=N$。

为方便起见，不失一般性，我们可以假设 $i'=1$ 和 $j'=2$。到目前为止，对于所有 $\mathcal{X}=[\![x_1,\ \ldots\ldots,\ x_{k-1}]\!]\in[M_{2k-2}]^{k-1}$，我们已有顶点$\alpha^1_{\mathcal{X}}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$。此外，对于任意满足 $\{y,y'\}\subset M_{2k-2}$的 $0<y<x_2$和$x_1<y'<x_2$，我们有

$$\deg_{\mathcal{X}\cup\{y\}\to y}(\alpha^1_{\mathcal{X}})\geq\rho\quad\text{and}\quad\deg_{\mathcal{X}\cup\{y'\}\to y'}(\alpha^1_{\mathcal{X}})\geq\rho. \tag{5.3}$$

接下来，对于每个 $\mathcal{Y}=[\![y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_k]\!]\in[M_{2k-2}]^k$ 以及 $\mathcal{X}_\ell=\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}$，令

$$U_{\mathcal{X}_2\to y_2}=\{u\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}_2}:\{\alpha^1_{\mathcal{X}_1},u\}\text{ is contained in at least }\frac{\rho}{2}\prod_{j\in[k]\setminus\{1,2\}}|\mathcal{P}_{\mathcal{X}_j}|\text{ edges of }\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}\}.$$

由于 $\deg_{\mathcal{Y}\to y_1}(\alpha^1_{\mathcal{X}_1})\geq\rho$(见（5.3）），我们有$|U_{\mathcal{X}_2\to y_2}|\geq\frac{\rho}{2}|\mathcal{P}_{\mathcal{X}_2}|$根据引理5.7。在 $3^{\text{th}}$这一步中，我们应用引理5.5，取 $\rho/2$，对 $\mathcal{A}_{2k-2}$ 和集合 $U_{\mathcal{X}_2\to y_2}$ 得到一个诱导子超图$\mathcal{A}_{2k-3}\subseteq\mathcal{A}_{2k-2}$，其定义在集合 $M_{2k-3}\subseteq M_{2k-2}$ 上，大小为 $m_{2k-3}$，并含有顶点 $\alpha^2_{\mathcal{X}}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$，对所有 $\mathcal{X}\in[M_{2k-3}]^{k-1}$均成立，使得对于每个 $\mathcal{X}=[\![x_1、\ \ldots\ldots、\ x_{k-1}]\!]\in[M_{2k-3}]^{k-1}$，顶点$\alpha^2_{\mathcal{X}}$满足

$$\alpha^2_{\mathcal{X}}\in\bigcap_{x_1<y<x_2,\ y\in M_{2k-3}}U_{\mathcal{X}\to y}.$$

现在假设针对 $3\leq t\leq k$ 的步骤 $t$ 已完成。我们得到了定义在大小为 $m_{2k-t}$ 的集合 $M_{2k-t}$ 上的诱导子超图 $\mathcal{A}_{2k-t}$，以及对所有 $\mathcal{X}\in[M_{2k-t}]^{k-1}$ 而言的顶点 $\alpha^1_{\mathcal{X}},\alpha^2_{\mathcal{X}},\ldots,\alpha^{t-1}_{\mathcal{X}}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$。特别地，对于每个满足 $\mathcal{X}_\ell=\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}$ 的 $\mathcal{Y}=[\![y_1,y_2,\ldots,y_k]\!]\in[M_{2k-t}]^k$，我们有

$$|\{e\in E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}):\{\alpha^1_{\mathcal{X}_1},\alpha^2_{\mathcal{X}_2},\ldots,\alpha^{t-1}_{\mathcal{X}_{t-1}}\}\subset e\}|\geq\frac{\rho}{2^{t-2}}\prod_{j\in[k]\setminus[t-1]}|\mathcal{P}_{\mathcal{X}_j}|.$$

接下来，对于每个满足 $\mathcal{X}_\ell=\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}$ 的 $\mathcal{Y}=[\![y_1,y_2,\ldots,y_k]\!]\in[M_{2k-t}]^k$，令

$$U_{\mathcal{X}_t\to y_t}=\{u\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}_t}:\{\alpha^1_{\mathcal{X}_1},\ldots,\alpha^{t-1}_{\mathcal{X}_{t-1}},u\}\text{ is contained in at least }\frac{\rho}{2^{t-1}}\prod_{j\in[k]\setminus[t]}|\mathcal{P}_{\mathcal{X}_j}|\text{ edges of }\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}\}.$$

根据引理 5.7，我们有 $|U_{\mathcal{X}_t\to y_t}|\geq\frac{\rho}{2^t}|\mathcal{P}_{\mathcal{X}_t}|$。在第 $(t+1)^{\text{th}}$ 步中，我们应用引理 5.5，以 $\rho/2^t$ 为对象，使用 $\mathcal{A}_{2k-t}$ 和集合$U_{\mathcal{X}_t\to y_t}$，得到一个诱导子超图 $\mathcal{A}_{2k-t-1}\subseteq\mathcal{A}_{2k-t}$，它定义在集合 $M_{2k-t-1}\subseteq M_{2k-t}$ 上，大小为 $m_{2k-t-1}$，并得到对所有 $\mathcal{X}\in[M_{2k-t-1}]^{k-1}$ 都成立的顶点 $\alpha^t_{\mathcal{X}}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$，使得对于每个 $\mathcal{X}=[\![x_1,\ldots,x_{k-1}]\!]\in[M_{2k-t-1}]^{k-1}$，顶点 $\alpha^t_{\mathcal{X}}$ 满足

$$\alpha^t_{\mathcal{X}}\in\bigcap_{x_{t-1}<y<x_t,\ y\in M_{2k-t-1}}U_{\mathcal{X}\to y}.$$

因此，当第（$k+1$）$^{\text{th}}$ 步结束时，我们可以得到一个诱导子超图 $\mathcal{A}_{k-1}$，它定义在大小为 $m_{k-1}$ 的集合 $M_{k-1}$上，顶点为 $\alpha^1_{\mathcal{X}},\alpha^2_{\mathcal{X}},\ldots,\alpha^k_{\mathcal{X}}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$，对所有 $\mathcal{X}\in[M_{k-1}]^{k-1}$ 均成立。特别地，对于每个$\mathcal{Y}\in[M_{k-1}]^k$以及满足 $\ell\in[k]$的 $\mathcal{X}_\ell\in[\mathcal{Y}]^{k-1}$，我们有 $\{\alpha^1_{\mathcal{X}_1},\alpha^2_{\mathcal{X}_2},\ldots,\alpha^k_{\mathcal{X}_k}\}\in E(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})$。

接下来，对于每个 $k$-集合 $\mathcal{Y}=[\![y_1,\ldots,y_k]\!]\in[M_{k-1}]^k$ 以及满足 $\ell\in[k]$的 $\mathcal{X}_\ell=\mathcal{Y}\setminus\{y_\ell\}$，令

$$U'_{\mathcal{X}_1\to y_1}=\{u'\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}_1}:\{u',\alpha^1_{\mathcal{X}_2}\}\text{ is contained in at least }\frac{\rho}{2}\prod_{j\in[k]\setminus\{1,2\}}|\mathcal{P}_{\mathcal{X}_j}|\text{ edges of }\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}\}.$$

回顾结论（5.3），我们有 $\deg_{\mathcal{Y}\to y_2}(\alpha^1_{\mathcal{X}_2})\geq\rho$。因此，我们有 $|U'_{\mathcal{X}_1\to y_1}|\geq\frac{\rho}{2}|\mathcal{P}_{\mathcal{X}_1}|$根据引理 5.7。根据引理 5.5，应用于 $\mathcal{A}_{k-1}$和集合 $U'_{\mathcal{X}_1\to y_1}$，存在一个诱导子超图 $\mathcal{A}_{k-2}\subseteq\mathcal{A}_{k-1}$，其顶点集为 $M_{k-2}\subseteq M_{k-1}$，大小为 $m_{k-2}$，并且存在顶点 $\beta^1_{\mathcal{X}}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$，对所有$\mathcal{X}\in[M_{k-2}]^{k-1}$，使得对于每个 $\mathcal{X}=[\![x_1、\ \ldots、\ x_{k-1}]\!]\in[M_{k-2}]^{k-1}$，顶点 $\beta^1_{\mathcal{X}}$满足

$$\beta^1_{\mathcal{X}}\in\bigcap_{0<y<x_1,\ y\in M_{k-2}}U'_{\mathcal{X}\to y},$$

这意味着，对于任意 $\mathcal{Y} = [\![y_1, \ldots, y_k]\!] \in [M_{k-2}]^k$ 和满足 $\ell \in [k]$ 的 $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{Y} \setminus \{y_\ell\}$，对 $\{\beta^1_{\mathcal{X}_1}, \alpha^1_{\mathcal{X}_2}\}$ 至少包含在 $\mathcal{A}_\mathcal{Y}$ 的 $\frac{\rho}{2}\prod_{i\in[k]\setminus\{1,2\}} |\mathcal{P}_{\mathcal{X}_i}|$ 条边中。因此，在后续每一步 $t$（其中 $k+3 \le t \le 2k$），我们考虑集合

$$U'_{\mathcal{X}_{t-k}\to y_{t-k}} = \left\{ u' \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}_t} : \left|\{e \in \mathcal{A}_\mathcal{Y} : \{\beta^1_{\mathcal{X}_1}, \alpha^1_{\mathcal{X}_2}, \ldots, \beta^{t-k-2}_{\mathcal{X}_{t-k-1}}, u'\} \subseteq e\}\right| \ge \frac{\rho}{2^{t-k-1}} \prod_{j\in[k]\setminus[t-k]} |\mathcal{P}_{\mathcal{X}_j}| \right\}.$$

与选择顶点的过程类似 $\alpha^3_\mathcal{X}$，……，$\alpha^k_\mathcal{X}$，我们应用引理 5.7 和引理 5.5，利用集合 $U'_{\mathcal{X}_{t-k}\to y_{t-k}}$ 得到诱导子超图 $\mathcal{A}_{2k-t} \subseteq \mathcal{A}_{2k-t+1}$，其定义在集合 $M_{2k-t}$ 上，大小为 $m_{2k-t}$，顶点为 $\beta^{t-k-1}_\mathcal{X} \in \mathcal{P}_\mathcal{X}$，对所有 $\mathcal{X} \in [M_{2k-t}]^{k-1}$均成立。

按照所述过程执行 $2k$ 个步骤后，我们得到一个诱导子超图 $\mathcal{A}'$（即 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_{2k-1} \subseteq \mathcal{A}$），它定义在集合 $M$ 上，大小为 $m$，顶点为 $\alpha^1_\mathcal{X}$、……、$\alpha^k_\mathcal{X}$、$\beta^1_\mathcal{X}$、……、$\beta^{k-1}_\mathcal{X} \in \mathcal{P}_\mathcal{X}$，对所有 $\mathcal{X} \in [M]^{k-1}$均成立，并满足本引理中的性质 (**D1**) 和 (**D2**)。□

## 6. Proof of Theorem 1.13

本节将证明定理 1.13。给定一个 $k$图 $F$，要证明 $\pi_{k-2}(F) \ge k^k$，一个必要条件是证明 $F$ 没有 $V(F)$ 的消失序。由于 $V(F)$ 有 $|V(F)|!$ 种排序方式，按照“消失序”的定义逐一检查 $V(F)$ 的排序会很麻烦。因此，我们将证明一个引理（见引理 6.1），它有助于排除 $k$图的顶点存在消失序的可能性。特别地，当 $k = 3$ 时，引理 6.1 等价于 [10, 引理 16]。作为 [10,引理 16]，一个不那么显然的推广，我们先引入一些记号。

给定 $k \ge 2$，长度为 $\ell > k$ 的紧 $k$均匀圈 $C^{(k)}_\ell$ 是一个顶点序列 $(v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1})$，满足对于每个 $0 \le i \le \ell-1$，$\{v_i, \ldots, v_{i+k-1}\}$ 都是一条超边，其中指标按模 $\ell$ 相加。一个 $k$均匀有向超图 $D$ ($k$简称 $k$-有向图) 是一对 $D = (V(D), A(D))$，其中 $V(D)$ 是顶点集，而 $A(D)$ 是由顶点的 $k$元组构成的集合，称为有向边集。长度为 $\ell > k$ 的有向紧 $k$均匀圈 $\vec{C}^{(k)}_\ell$ 是一个顶点序列 $(v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1})$，满足对于 $0 \le i \le \ell-1$，$(v_i, \ldots, v_{i+k-1})$ 是一条有向边（指标按模 $\ell$ 相加）。通常，2-有向图和有向紧 2-均匀圈分别简称为有向图和有向圈。给定一个 $k$-有向图 $D$，我们定义其传递有向图 $T(D)$ 如下：$T(D)$ 与 $D$ 具有相同的顶点集，并且 $D$ 的每条有向边都对应于 $T(D)$ 中的一个传递竞赛图；也就是说，若 $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in A(D)$，则对于任意 $1 \le i < j \le k$，$(x_i, x_j) \in A(T(D))$。特别地，若一个 $k$-有向图 $D$ 的顶点 $k$ 元集合在 $A(D)$ 中至多有一种排序，则称其为简单的。

引理 6.1. 对于 $k \ge 3$，一个 $k$-图 $F$具有一个 $V(F)$ 的消失序，当且仅当存在一个 $k$-边染色的简单（$k-1$）有向图 $D$，其顶点集为 $V(F)$，使得 $F$的每条 $k$-超边都对应于一种 $k$-边染色 $\vec{C}^{(k-1)}_k$，其边依次染为 0、1、…$k-1$（按此顺序[1]），并且存在两个连续整数 $\{\beta, \beta+1\} \subset \mathbb{Z}_k$，使得 $D$ 的子有向图 $D_{\beta,\beta+1}$ 包含所有染为 $\beta$ 或 $\beta+1$ 的有向边，并满足以下性质：

- 传递有向图 $T(D_{\beta,\ \beta+1})$ 不包含有向圈。

在引理的证明 6.1中，我们将使用无圈有向图的一个基本性质。给定一个有向图 $D$ 及其顶点的一个排序（$v_1$，$v_2$，……，$v_n$），若对每条有向边（$v_i$，$v_j$）$\in A$（$D$），都有 $i < j$，则称此排序为无圈的。

命题 6.2 ([1，命题 2.1.3])。每个无圈有向图都有一个由其顶点构成的无圈序。

[1]这意味着，在 $V(H)$ 的某个排序下，如果 $k$-超边 $e = [\![v_1, v_2, \ldots, v_k]\!]$，那么 $\vec{C}^{(k-1)}_k = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$，且有向边 $(v_i, \ldots, v_{i+k-2})$ 被着色为 $i-1$，其中指标相加按模 $k$ 计算。

引理 6.1 的证明。给定一个有 $f$ 个顶点的 $k$-图 $F$，设 $\tau=(v_1,\dots,v_f)$ 是 $V(F)$ 的一个消失序。我们按如下方式构造一个定义在 $V(F)$ 上的 $k$-边染色 $(k-1)$-有向图 $D$。对于任意 $e\in E(F)$，若在 $\tau$ 下 $e=\{\!\{v_{i(1)},\dots,v_{i(k)}\}\!\}$，则有向紧 $(k-1)$-均匀圈 $\vec{C}_k^{(k-1)}=(v_{i(1)},\dots,v_{i(k)})$ 存在于 $D$ 中。此外，对每个 $j\in[k]$，有向边 $(v_{i(j)},v_{i(j+1)},\dots,v_{i(j+k-2)})$ 对每个 $j\in[k]$ 都染成 $(j-1)$（下标模 $k$ 取值）。由于 $\tau$ 是 $V(F)$ 的一个消失序，我们得到 $D$ 是一个简单的 $(k-1)$-有向图，且 $F$ 的每条 $k$-边都对应于 $\vec{C}_k^{(k-1)}$，其边在该排序下染成 0、1、$\dots k-1$。设 $D_{0,1}$ 是 $D$ 的子有向图，包含所有染成 0 或 1 的有向边。注意，对于每条边 $e=\{\!\{v_{i(1)},\dots,v_{i(k)}\}\!\}\in E(F)$，都有 $(v_{i(1)},v_{i(2)},\dots,v_{i(k-1)})$、$(v_{i(2)},v_{i(3)},\dots,v_{i(k)})\in A(D_{0,1})$，这意味着在传递有向图 $T(D_{0,1})$ 中，每条有向边都从排序 $\tau$ 下编号较小的顶点指向编号较大的顶点。因此，$T(D_{0,1})$ 不含有向圈。

接下来，给定 $V(F)$ 的一个排序，假设存在一个 $k$-边染色的简单（$k-1$）有向图 $D$，其颜色为 0、1、.....、$k-1$，并满足引理中给出的性质。由对称性，不妨设传递有向图 $T(D_{0,\,1})$ 是无圈的（否则，我们循环轮换颜色以满足这一条件）。根据命题 6.2，$T(D_{0,\,1})$ 有一个无圈序 $\tau'$，它是 $V(T(D_{0,\,1}))$ 的排序。根据 $T(D_{0,\,1})$ 的定义，$\tau'$ 是 $V(F)$ 的一个消失序。□

现在我们利用引理 6.1 和定理 1.12 来证明定理 1.13。

定理 1.13 的证明。设 $F_t^k$ 是定理 1.13 中给出的 $k$-图。首先应用引理 6.1，证明 $F_t^k$ 没有 $V(F_t^k)$ 的消失序。考虑引理 6.1 陈述中所描述的一个（$k-1$）有向图 $D$。由对称性，可以假设 $(a_1,a_2,\dots a_{k-1})\in A(D)$ 且其颜色为 0。设 $x\in\{b,c,d\}$。由于 $F_t^k$ 的每条 $k$-超边都对应于 $D$ 中一个有向紧 $k$-均匀圈，其边的颜色为 0、1、.....、$k-1$，由循环对称性可得，对于每个 $i\in[k-1]$，$(a_i,\dots..,a_{k-1},x_0,\dots..,x_{i-2})\in A(D)$ 的颜色为 $(i-1)$；并且 $(x_0,x_1,\dots..,x_{k-2})\in A(D)$ 的颜色为 $k-1$。此外还可得，对于每个 $0\le\ell\le t-k+2$，$(x_\ell,x_{\ell+1},\dots..,x_{\ell+k-2})\in A(D)$ 的颜色为 $\ell-1$（模 $k$）；而 $(b_{t-k+3},\dots..,b_t,c_t)$、$(c_{t-k+3},\dots..,c_t,d_t)$ 和 $(d_{t-k+3},\dots..,d_t,b_t)\in A(D)$ 的颜色为 $t-k+2$（模 $k$）。

给定 $\beta\in\mathbb{Z}_k$，令 $D_\beta$ 表示包含所有以 $\beta$ 着色的有向（$k-1$）边的 $D$ 的子有向图。对于每个 $j\in\{t-k+3,t-k+4,\dots,t\}$，若 $\beta\equiv j$（模 $k$），则传递有向图 $T(D_\beta)$ 总是包含一个由 $(b_t,c_t)$、$(c_t,d_t)$、$(d_t,b_t)$ 构成的有向圈。为简便起见，令 $D'=D_{t-k+2\ (\text{模 }k)}\cup D_{t+1\ (\text{模 }k)}$。注意，以下有向边

$$(b_{t-k+2},\dots,b_{t-1},b_t),(c_{t-k+2},\dots,c_{t-1},c_t),\text{ and }(d_{t-k+2},\dots,d_{t-1},d_t)$$
$$(c_t,b_{t-k+2},\dots,b_{t-1}),(d_t,c_{t-k+2},\dots,c_{t-1}),\text{ and }(b_t,d_{t-k+2},\dots,d_{t-1})$$

全部属于 $D'$。因此，传递有向图 $T(D')$ 也包含一个由以下边构成的有向圈：

$$(b_{t-1},b_t),(b_t,d_{t-1}),(d_{t-1},d_t),(d_t,c_{t-1}),(c_{t-1},c_t),(c_t,b_{t-1}).$$

因此，对于每一对 $\{\beta,\beta+1\}\subset\mathbb{Z}_k$，传递有向图 $T(D_{\beta,\,\beta+1})$ 总是包含一个有向圈。由引理 6.1，$F_t^{(k)}$ 没有 $V(F)$ 的消失序。

接下来，我们声称 $F_t^{(k)}$ 也满足定理 1.12 的性质 (♠)。为简单起见，令 $e_1=\{d_{t-k+2},\dots,d_t,b_t\}$，$e_2=\{d_{t-k+1},\dots d_{t-1},d_t\}$ 和 $S=e_1\cap e_2=\{d_{t-k+2},\dots,d_t\}$。此外，令 $F_1$ 为 $F_t^{(k)}$ 的生成子超图，其唯一的超边为 $e_1$；令 $F_2$ 为从 $F_t^{(k)}$ 中删除超边 $e_1$后得到的生成子超图。显然，$\{S\}=\partial F_1\cap\partial F_2$。接下来，对每个满足 $i<j$的 $\{i,j\}\in[k]^2$，我们将找到 $V(F_t^{(k)})$ 的一个排序 $\tau_{i,j}$，使得 $\tau_{i,j}$ 对于 $F_1$ 和$F_2$均为消失的，并且在排序 $\tau_{i,j}$下，$(k-1)$-集合 $S$ 相对于 $F_1$ 为 $i$-型，相对于 $F_2$ 为 $j$-型。我们先考虑 $V(F_t^{(k)})$ 的一个划分 $\{X_1,X_2,\dots,X_k\}$，其中

$$X_\ell=\{x_r\in V(F_t^{(k)}):r\equiv t+\ell\pmod k,\quad x\in\{a,b,c,d\},\quad 0\le r\le t\}\text{ for }\ell\in[k].$$

为 $\ell \in [k]$ 令 $Y_\ell = X_\ell \setminus \{b_{t-k+\ell}, d_{t-k+\ell}\}$。

当 $i > 1$ 和 $j - i \geq 2$时，我们考虑 $V(F_t^{(k)})$ 的一个排序 $\tau_{i,j}$，依次包含 $X_2$的所有顶点、$X_3$的所有顶点，依此类推，直到 $X_i$的所有顶点；接着是排序 $(b_{t-k+i+1}, \ldots, b_{t-k+j-1}, b_t, d_{t-k+i+1}, \ldots, d_{t-k+j-1})$；然后是 $Y_{i+1}$的所有顶点，依此类推，直到 $Y_{j-1}$的所有顶点；接着是 $Y_k$的所有顶点、顶点 $d_t$、$X_1$的所有顶点、$X_j$的所有顶点、$X_{j+1}$的所有顶点，依此类推，直到 $X_{k-1}$的所有顶点。集合 $X_\ell$ 和 $Y_\ell$ 中元素的排序是任意的。注意，对于 $F_1$，$\tau_{i,j}$ 是消失的，因为 $E(F_1) = \{e_1\}$。在排序 $\tau_{i,j}$ 下，我们有

$$e_1 = (d_{t-k+2}, \ldots, d_{t-k+i}, b_t, d_{t-k+i+1}, \ldots, d_{t-k+j-1}, d_t, d_{t-k+j}, \ldots, d_{t-1}), \text{ and}$$
$$e_2 = (d_{t-k+2}, \ldots, d_{t-k+i}, d_{t-k+1}, d_{t-k+i+1}, \ldots, d_{t-k+j-1}, d_t, d_{t-k+j}, \ldots, d_{t-1})$$

因此，集合 $S$ 相对于 $e_1$ 属于 $i$ 型，相对于 $e_2$ 属于 $j$ 型。令 $e_3 = \{b_{t-k+2}, \ldots, b_t, c_t\}$ 和 $e_4 = \{c_{t-k+2}, \ldots, c_t, d_t\}$。注意，对于 $\ell \in [k]$，$F_2 \setminus \{e_3, e_4\}$ 中的每条 $k$-超边恰好包含一个来自 $X_\ell$ 的顶点。特别地，给定 $e \in E(F_2) \setminus \{e_3, e_4\}$ 和 $0 \leq r \leq t-k$，对于 $2 \leq \ell \leq j-1$，$e \setminus \{x_{r+\ell:r\equiv t} (\text{模 } k)\}$ 相对于 $F_2$ 属于 $(\ell-1)$ 型；$e \setminus \{x_{r+k:r\equiv t} (\text{模 } k)\}$ 相对于 $F_2$ 属于 $(j-1)$ 型；$e \setminus \{x_{r+1:r\equiv t} (\text{模 } k)\}$ 相对于 $F_2$ 属于 $j$ 型；对于 $j \leq \ell \leq k-1$，$e \setminus \{x_{r+\ell:r\equiv t} (\text{模 } k)\}$ 相对于 $F_2$ 属于 $(\ell+1)$ 型。此外，$e_3$ 的阶为 $(b_{t-k+2}, \ldots, b_{t-k+j-1}, b_t, c_t, b_{t-k+j}, \ldots, b_{t-1})$，而 $e_4$ 的阶为 $(c_{t-k+2}, \ldots, c_{t-k+j-1}, c_t, d_t, c_{t-k+j}, \ldots, c_{t-1})$。因此，$\tau_{i,j}$ 也是 $V(F_2)$ 的一个消失序，并且在排序 $\tau_{i,j}$ 下，集合 $S$ 相对于 $F_2$ 属于 $j$ 型。

当 $i = 1$ 和 $j - i \geq 2$ 时，我们考虑 $V(F(k)_t)$ 的任意一种排序 $\tau'_{i,j}$，其中依次包含排序 $(b_{t-k+2}, \ldots, b_{t-k+j-1}, b_t, d_{t-k+2}, \ldots, d_{t-k+j-1})$，接着是 $Y_2$ 的所有顶点，再接着是 $Y_{j-1}$ 的所有顶点，然后是 $Y_k$ 的所有顶点，再然后是顶点 $d_t$，接着是 $X_1$ 的所有顶点，然后是 $X_j$ 的所有顶点，.....最后是 $X_{k-1}$ 的所有顶点。如果 $i = 1$ 和 $j = 2$，那么我们考虑 $\tau'_1$，其中 2 依次包含顶点 $b_t$，接着是 $Y_k$ 的所有顶点，然后是顶点 $d_t$，接着是 $X_1$ 的所有顶点，.....最后是 $X_{k-1}$ 的所有顶点。类似地，我们可以轻松验证，排序 $\tau'_{i,j}$ 对 $F_1$ 和 $F_2$ 都是消失的，并且集合 $S$ 关于 $F_1$ 是 $i$-型，关于 $F_2$ 是 $j$-型。

当 $i > 1$和 $j = i + 1$时，我们考虑 $\tau''_{i、j}$ 的任意排序，其中依次包含 $V(F(k)_t)$ 的所有顶点，然后是 $X_2$ 的所有顶点，接着是 $X_3$ 的所有顶点，.....，然后是 $X_i$ 的所有顶点，接着是顶点 $b_t$，然后是 $Y_k$ 的所有顶点，接着是顶点 $d_t$，然后是 $X_1$ 的所有顶点，接着是 $X_{i+1}$ 的所有顶点，.....，最后是 $X_{k-1}$ 的所有顶点。类似地，我们可以很容易验证，排序 $\tau''_{i、j}$ 对 $F_1$ 和 $F_2$ 都是消失的，并且集合 $S$ 关于 $F_1$ 是 $i$ 型的，关于 $F_2$ 是 $j$ 型的。因此，$F_t^{(k)}$ 也满足定理 1.12 的性质（♠）。□

## 7. 结论

定理 1.12 为满足 $k$-图 $F$ 提供了 $\pi_{k-2}(F) = k^{-k}$的充分条件。尽管目前我们还没有对所有 $k$-图 $F$（其中 $\pi_{k-2}(F) = k^{-k}$）给出完整刻画，但由于以下结果，这一充分条件很可能已经接近完整刻画。

定理 7.1。给定 $k \geq 3$，令 $F$ 为一个不满足以下条件的 $k$-图：

(♠*) 对于每一对 $\{i, j\} \in [k]^2$，若有 $i < j$，则 $F$ 总能被划分为两个生成子超图 $F^1_{i、j}$ 和 $F^2_{i、j}$，使得存在一个 $V$ 的排序 $F$，该排序对于 $F^1_{i、j}$ 以及 $F^2_{i、j}$ 都是消失的；并且对于每一对 $e_1 \in E(F^1_{i、j})$ 和 $e_2 \in E(F^2_{i、j})$，若有 $|e_1 \cap e_2| = k-1$、$e_1 \cap e_2$，则它们要么关于 $F^1_{i、j}$ 和某个 $\ell \in [k]$ 的 $\ell$-类型相同，并且关于 $F^2_{i、j}$ 的类型也相同；要么 $e_1 \cap e_2$ 关于 $F^1_{i、j}$ 是 $i$-类型，而 $e_1 \cap e_2$ 关于 $F^2_{i、j}$ 是 $j$-类型。

那么 $\pi_{k-2}(F) \geq 3(k+1)^{-k} > k^{-k}$。

证明。假设存在一对 $\{i', j'\} \in [k]^2$ 满足 $i' < j'$，使得 $k$-图 $F$ 不满足性质（♠*）。我们将使用定理 $\pi_{k-2}(F) \geq 3(k+1)^{-k}$ 来证明 1.8。令

$\mathscr{P} = \{(1, 2, \ldots, k), (1, \ldots, i'-1, k+1, i'+1, \ldots, k), (1, \ldots, j'-1, k+1, j'+1, \ldots, k)\}$ 是 $[k+1]^{[k]}$ 的一个子集。对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\psi\colon [n]^{k-1} \to [k+1]$，我们考虑顶点集为 $[n]$、边集为

$$E(H) = \{e = [\![i_1, i_2, \ldots, i_\ell]\!] \in [n]^k : (\psi(e \setminus \{i_1\}), \psi(e \setminus \{i_2\}), \ldots, \psi(e \setminus \{i_k\})) \in \mathscr{P}\}.$$

注意到， $H$ 的每个子超图都满足性质（♠*），其中 $\{i', j'\}$。因此， $H$ 是$F$-自由的。由定理 1.8，可得 $\pi_{k-2}(F) \geq |\mathscr{P}|/(k+1)^k = 3(k+1)^{-k}$。□

受定理 7.1启发，我们有如下猜想。

**Conj猜想 7.2.** 给定 $k \geq 3$，设 $F$ 是一个满足以下条件的 $k$-图 *s:*

**(♣)** $F$没有 $V(F)$ 的消失序；**(♠*)** 对每个满足 $i < j$ 的对 $\{i, j\} \in [k]^2$， $F$ 总能划分为两个生成子超图 $F_i^1$、$_j$和 $F_i^2$、$_j$，使得存在 $V(F)$ 的一个排序，它对于 $F_i^1$、$_j$ 和 $F_i^2$、$_j$ 都是消失序；并且对于任意两条超边 $e_1 \in E(F_i^1,_j)$、 $e_2 \in E(F_i^2,_j)$，若 $|e_1 \cap e_2| = k-1$，则对于某个 $\ell \in [k]$，$e_1 \cap e_2$ 相对于 $F_i^1$、$_j$ 和 $F_i^2$、$_j$ 属于相同的 $\ell$-类型；或者 $e_1 \cap e_2$ 相对于 $F_i^1$、$_j$ 属于 $i$-类型，且 $e_1 \cap e_2$ 相对于 $F_i^2$、$_j$ 属于 $j$-类型。

于是 $\pi_{k-2}(F) = k^{-k}$。

Garbe、Kr´al' 和 Lamaison [10] 也针对 $k = 3$提出了以下问题。

问题 7.3。是否存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\pi_{k-2}(\cdot)$ 从 $k^{-k}$ 跃升至至少 $k^{-k} + \varepsilon$?

如果猜想 7.2 成立，那么我们可以轻易得到 $\pi_{k-2}(\cdot)$ 将从 $k^{-k}$ 跃升至至少 $3(k+1)^{-k}$。此外，与问题 1.6相比，自然会提出以下问题。

问题 7.4。是否存在一个 $k$-图 $F$，使得 $\pi_{k-2}(F)$ 等于或任意接近 $3(k+1)^{-k}$?

## References


[1] J. Bang-Jensen 和 G. Z. Gutin。 *Digraphs: theory, algorithms and applications*。Springer Science & Business Media， 2008。

[2] M. Buci ´ ´ ´ ´ *Trans. Amer.* c、J. Cooper、 *Math. Soc.* 2023

D. Kral'、S. Mohr 和 D. Munha Correia。圈的均匀 Turán 密度。 , 。[3] F. R. K. Chung 和 R. L. Graham。拟随机超图。 *Random Structures Algorithms* 1 1 105 124, , ( ): – 。[4] O. Cooley、 1990

N. Fountoulakis、D. K¨uhn 和 D. Osthus。稀疏 $k$均匀超图的嵌入与拉姆齐数。 *Combinatorica*, 29(3):263–297, 2009。[5] P. Erd˝os。关于图和广义图的极值问题。 *Israel J. Math.*, 2:183–190, 1964。[6] P. Erd˝os。保罗·图兰（1910–1976）：他在图论领域的工作。 *J. Graph Theory*, 1(2):97–101, 1977。[7] P. Erd˝os 和 M. Simonovits。图论中的一个极限定理。 *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1:51–57, 1966。[8] P. Erd˝os 和 V. T. S´os。关于超图的 Ramsey–Tur´an 型定理。 *Combinatorica*, 2(3):289–295, 1982。[9] P. Erd˝os 和 A. H. Stone。关于线性图的结构。 *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:1087–1091, 1946。[10] F. Garbe、D. Kr ´ ´ *arXiv:* al' 和 A. Lamaison。具 *2105.09883*, 2021

有最小正均匀 Turán 密度的超图。 , 。[11] R. Glebov、D. Kr ´ ˝ ´ 3 211 1 349 366, al' 和 J. Volec。Erdos 和 2016

Sos 关于-图的问题。 *Israel J. Math.*, ( ): – 。[12] W. T. Gowers。超图正则性与多维 Szemer ´ *Ann. of Math.* edi 定理。( ): – 。[13] S. 166 3 897 946, 2007

Janson、A. Rucinski 和 T. Luczak。 *Random graphs*。John Wiley & Sons， 2011。[14] P. Keevash。超图 Tur ´ *Surveys in combinatorics 2011* 392 *London Math. Soc.* an 问题。载于 , 第 卷 , 页 *Lecture Note Ser.* 83 139 2011

码 – 。剑桥大学出版社， 剑桥， 。[15] Y. Kohayakawa、V. R ¨ *J.* odl 和 J. Skokan。超图、 *Combin. Theory Ser. A* 97 2 307 352, 2002

拟随机性与正则性条件。 , ( ): – 。[16] W. Mantel。问题 28。 *Wiskundige Opgaven*, 10(60-61):320, 1907。[17] F. P. Ramsey。关于一个形式逻辑问题。 *Proc. London Math. Soc. (2)*, 30(4):264–286, 1929。

[18] A. A. Razborov。关于禁含 4 顶点构形的 3-超图。 *SIAM J. Discrete Math.*, 24(3):946– 963, 2010。[19] C. Reiher。均匀稠密超图中的极值问题。 *Eur. J. Combin.*, 88:103–117, 2020。[20] C. Reiher、V. R¨odl 和 M. Schacht。均匀稠密超图中 Tur´an 密度消失的超图。*J. Lond. Math. Soc. (2)*, 97(1):77–97, 2018。[21] C. Reiher、V. R¨odl 和 M. Schacht。关于曼特尔定理在均匀稠密超图中的推广。*Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16):4899–4941, 2018。[22] C. Reiher、V. R ¨ ´ 3 *J.* odl 和 *Eur. Math. Soc.* 20 5 1139 1159, 2018
M. Schacht。关于弱拟随机-均匀超图中的 Turan 问题。 , ( ): – 。[23] V. R¨odl。关于具有均匀分布边的图的普适性。 *Discrete Math.*, 59(1-2):125–134, 1986年。[24] V. R¨odl 和 M. Schacht。超图的正则划分：计数引理。 *Combin. Probab. Comput.*, 16 6 887 901, 2007 ( ): – 。[25] V. R¨odl 和 M. Schacht。超图的正则划分：正则性引理。 *Combin. Probab. Comput.*, 16 6 833( ): –885, 2007。[26] E. Szemer´edi。图的正则划分。载于 Probl`emes combinatoires et th´eorie des graphes（Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976）, 第 260 卷 *Colloq. Internat. CNRS*, 第 399–401 页。CNRS, 巴黎, 1978。[27] P. Tur´an。图论中的一个极值问题。 *Mat. Fiz. Lapok*, 48:436–452, 1941。

School of Mathematics, Shandong University, Jinan, China. Email: lhao17@mail.sdu.edu.cn.
School of Mathematics, Shandong University, Jinan, China. Email: ghwang@sdu.edu.cn.
School of Mathematics Shandong University Jinan China and Laboratoire Interdisciplinaire des , „, , , , Sciences du Numérique Université Paris-Saclay Orsay France. Email: .
, gracezhou@mail.sdu.edu.cn