通过连续化实现增量最大化

Yann Disser[1],Max Klimm*[2]、Kevin Schewior†[3]和 David Weckbecker‡[1]

[1]达姆施塔特工业大学，德国，{disser|weckbecker}@mathematik.tu-darmstadt.de[2]柏林工业大学，德国，klimm@math.tu-berlin.de[3]丹麦南方大学，丹麦，kevs@sdu.dk

arXiv:2305.01310v1 [cs.DS] 2 May 2023

摘要

我们研究这样一个问题：为基数约束最大化问题寻找一个增量解，该解不仅能够涵盖固定基数下的解，还能描述随着基数界增大而逐步扩展解的过程。我们的目标是找到一个增量解，使其对于所有基数都能同时保证相对于最优解的良好竞争比。核心挑战在于刻画哪些最大化问题能够实现这一点，并确定能够达到的最佳竞争比。对于单调且可核算目标函数，已知竞争比的下界为 2.18，上界为 $\varphi+1\approx 2.618$；这些目标函数 [Bernstein 等人，《数学规划》， 2022]，涵盖了广泛的最大化问题。我们引入一种连续化技术，并确定了一个最优增量算法，这为 $\varphi+1$ 是最佳竞争比提供了有力证据。利用这一连续化方法，我们通过研究一种特定的递推关系得到改进的下界 2.246；该递推关系的特征多项式恰好在超过该下界时具有复根。基于最优连续算法并结合缩放方法，我们还给出了一种竞争比为 1.772 的随机化算法。最后，我们通过姚氏原理给出随机化下界 1.447。

*本研究得到德国研究基金会通过德国卓越战略资助，并由柏林数学研究中心提供支持（资助编号 EXC-2046/1，项目编号 390685689）。

†本研究部分得到丹麦独立研究基金自然科学项目资助，资助编号 DFF-0135-00018B。

‡受德国研究联合会（DFG）DI 2041/2 项目资助。

1 引言

经典优化问题以单个实例作为输入，并输出一个单一的解。尽管这种范式适用于静态情形，但它无法刻画持续增长的场景，例如不断发展的基础设施网络、不断扩张的公司，或拥有稳定收入的私人家庭。在这些情况下，单一的静态解可能会变得毫无用处，除非它能够持续扩展为更大、更全面的解，以适应变化后的情形。

为更恰当地描述此类情形，我们采用如下形式化定义的增量优化框架。
Incremental Maximization(IncMax)问题的一个实例由一个可数元素集合 U 以及一个单调目标函数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 构成，该函数为每个子集 $X \subseteq U$ 赋予一个价值 $f(X)$。对于一个 IncMax 实例，其解是元素 U 的一个排列 $\sigma = (e_1, e_2, \dots)$，使得 σ 的每个前缀相对于目标函数 f 都能产生良好的解。形式化地，对于 $k \in [n]$，令 $\textsc{Opt}(k) = \max\{f(X) : |X| = k, X \subseteq U\}$ 表示在基数约束 $|X| = k$ 下最大化 $f(X)$ 的问题的最优值。若对所有 $k \in [n]$ 都有 $\textsc{Opt}(k)/f(\{e_1, \dots, e_k\}) \leq \alpha$，则称确定性解 $\sigma = (e_1, e_2, \dots)$ 为 α-竞争的。随机化解是定义在确定性解上的概率分布 $\Sigma = (E_1, E_2, \dots)$（其中 $E_1, E_2, \dots$ 为随机变量）。若对所有 $k \in [n]$ 都有 $\textsc{Opt}(k)/\mathbb{E}[f(\{E_1, \dots, E_k\})] \leq \alpha$，则称其为 α-竞争的。在这两种情况下，我们将使该解成为 α-竞争解的所有 $\alpha \geq 1$ 中的下确界称为该解的（随机化）竞争比。若某个 $\alpha \geq 1$ 使一个（随机化）算法对每个实例都能产生一个 α-竞争解，则称该算法为 α-竞争算法；其（随机化）竞争比是所有此类 α 的下确界。一个问题类（或问题实例）的（随机化）竞争比，是针对该问题的所有（随机化）算法的竞争比的下确界。

显然，在这种一般形式下，不可能对竞争解的存在性得出有意义的结果。举例来说，考虑实例 $U = \{a, b, c\}$，其中对于某个 $M \in \mathbb{N}$，我们有

$$f(X) = \begin{cases} M, & \text{if } \{b, c\} \subseteq X, \\ |\{a\} \cap X|, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \text{for all } X \subseteq U.$$

于是，为了在 $k = 1$ 上具有竞争性，每个解都必须以元素 a 开始，但任何这样的顺序对于 $k = 2$ 都不可能优于 M- 竞争。根本问题在于，由 $\{b, c\}$ 给出的 $k = 2$ 的最优解不允许存在基数为 $k = 1$ 的竞争性部分解。为了解决这个问题，Bernstein 等人 [1] 考虑可问责函数，即满足以下条件的函数 f：对于每个 $X \subseteq U$，都存在 $e \in X$，使得 $f(X \setminus \{e\}) \geq f(X) - f(X)/|X|$。他们还证明，许多自然的增量优化问题都是单调且可问责的，例如以下问题。

加权匹配： U 是加权图的边集，而 $f(X)$ 是包含于 X 中的匹配的最大权重；

集合打包： U 是底集的加权子集集合，而 $f(X)$ 是从 X 中选取两两不相交子集的最大权重；

S子模函数最大化： U 是任意的，而 f 是单调且子模的 ；

（多维）背包问题： U 是一个包含若干物品的集合，这些物品具有（多维）大小和价值； $f(X)$ 是 X 中能够装入背包的物品子集的最大价值。

Bernstein 等人 [1] 提出了一种算法，用于计算一个 $(1 + \varphi)$-竞争的增量解，并证明 IncMax 问题的竞争比至少为 2。18。在本文中，我们假设目标函数 f 是可计量的。

我们的结果。首先，我们将一般的 IncMax 问题归约为特殊情形 IncMaxSep：该情形中，实例的元素可以划分为一组（可数的）均匀模子集，使得整体目标函数等于这些子集上模函数的最大值。随后，我们将 IncMaxCont 问题定义为一种连续化，并假设存在这样一个子集，其中包含规模为每个 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ 的（分数）元素。该问题平滑的结构更便于分析。

我们考虑连续算法 GreedyScaling(c_1, ρ)，该算法依次添加这些子集：从规模为 $c_1 > 0$ 的子集开始，沿着一系列规模尽可能大的子集继续添加，同时尽可能长时间地维持 ρ-竞争性。我们首先证明，始终存在一个具有这种形式的最优解。

定理 1。 对于 IncMaxCont 的每个实例，都存在一个起始价值 c_1 ，使得算法 GreedyScaling(c_1, ρ^*) 达到最优竞争比 $\rho^* \geq 1$。

连续嵌入使我们能够将每个算法视为一个递增序列：依次添加子集的规模。利用初等微积分，我们可以证明，对于一系列起始值，黄金比例 $\varphi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.618$, GreedyScaling($c_1$, ρ) 可达到已知上界 $\varphi + \bar{1}$ 。这里， $d(c)$ 指规模为 c 的子集的密度，即价值与规模之比（见第 2 节）。

定理 2。 GreedyScaling($c_1, \varphi + 1$) 是$(\varphi + 1)$-竞争的，当且仅当 $d(c_1) \geq \frac{1}{\varphi+1}$。 ——

另一方面，对于每个起始值 c_1，我们都能构造一个IncMaxCont实例，使得 GreedyScaling(c_1, ρ) 对任意 $\rho > 1$ 都不优于 $(\varphi+1)$-竞争。我们强调， $\varphi + 1$ 的最优值自然地源自复根的几何性质。基于这些证据，我们猜想 $\varphi + 1$ 是可能达到的最佳竞争比。

当然，要证明一般性的下界，需要构造一个单一实例，使得对于每个起始值，GreedyScaling 都不优于 $(\varphi + 1)$-竞争。将针对单一起始值的构造谨慎地串联起来，可得如下结果。

命题 3. 对于任意可数的起始值集合 $S \subset \mathbb{R}_{>0}$ ，都存在一个 IncMaxCont 实例，使得 GreedyScaling(c_1, ρ) 对任意 $c_1 \in S$ 和任意$\rho < \varphi + 1$都不是 ρ-竞争的。

关键的是，虽然当我们只允许有理数起始值 $c_1 \in \mathbb{Q}$ 时，这给出了一个下界，但要将该下界推广回 IncMax ，就必须排除所有实数。尽管我们无法做到这一点，但可以将复微积分分析外推到任意IncMaxCont 算法。借此，我们将 [1]中目前已知的最佳下界 2.18 提高了。

定理 4. IncMax 问题的竞争比至少为 2.246。

我们还可以将这一技术，特别是针对可分离问题实例的归约以及 GreedyScaling 算法的结构，应用于IncMax随机化算法的分析。我们采用一种基于 [1], 中算法的缩放方法，并结合受 [15] 中 CowPath问题的随机化算法启发、对起始值 c_1 进行随机选择的方法。由此得到的算法，其随机化竞争比优于我们的确定性下界。

定理 5. IncM ax 存在一种1.772竞争比的随机化算 法。

我们通过姚氏原理，为IncMax的可分实例补充了一个下界。

定理 6. 每种随机化 IncMax 算法的竞争比至少为1.447。

相关工作。 我们的工作基于 Bernstein 等人 [1]提出的增量最大化框架。我们提供了新的结构性理解，由此得到了更好的下界和新的随机化界。

Hassin 和 Rubinstein [12] 针对匹配问题研究了一个类似的框架。在这里，目标函数 f 是边集的总权重，并且解还必须是一个匹配。Hassin 和 Rubinstein [12] 证明，在这种设定下, _竞争比为 $\sqrt{2}$ ； Matuschke、Skutella 和 Soto [18] 证明，随机化竞争比为 ln(4) ≈ 1.38。之后，这一设定被推广到拟阵交 [6] 以及具有有界可交换性的独立系统 [14, 20]。需要注意的是，尽管我们的结果适用于更广泛的目标函数类别，但我们要求目标函数具有单调性，因此无法对解必须是匹配这一约束建模。不过，我们可以通过令目标函数 f 等于解中包含的某个匹配的最大权重（即，不必使用解中的所有

部分）来刻画匹配问题。尽管如此，很容易验证，设定 [12]中任意确定性算法竞争性的下界 $\sqrt{2}$ 同样适用于我们的情形。

Hassin 和 Segev [13] 研究了这样一个问题：寻找一个规模较小的子图，使其对所有 k都包含一条（或一棵）基数至多为 k 、权重至少为最优解的 α 倍的路径（或树），并证明对于该 $\alpha|V|/$，($1-\alpha^2$) 条边就足够了。关于物品具有大小、且以背包约束 [4, 5, 16, 19]取代基数约束的问题，也有进一步的研究结果。Goemans 和 Unda [8] 研究了一般的增量最大化问题，其目标函数为求和目标。

增量最小化 问题也在多种最小化问题中得到进一步研究，例如 k-中位数 [3, 21, 17], 设施选址 [17, 22], 和 k-中心 [9, 17]。正如 Lin 等人 [17],所指出的，关于最小延迟问题的结果 [2, 7] 隐含地给出了增量k-MST 问题的结果。对于每一步中可行解集合都会扩大的增量优化问题，也已有进一步的研究结果 [10, 11]。

2 增量最大化的可分性

作为界定 IncMax 的竞争比的第一步，我们引入一类结构相对简单的实例子类，并证明它与 IncMax 具有相同的竞争比。因此，在寻找竞争比的界时，我们可以将范围限定在这一子类中。

定义 7. 具有目标函数 $f\colon\ 2^U \to \mathbb{R}_{>0}$ 的 IncMax 实例，如果存在 U 的一个划分 $U = R_1 \cup R_2 \cup \ldots$ 和价值 $d_i > 0$，使得该实例可分，则称其为可分的。

$$f(X) = \max_{i\in\mathbb{N}}\{|X \cap R_i| \cdot d_i\} \quad \textit{for all } X \subseteq U.$$

我们将 d_i 称为集合 R_i 的密度，并将 $v_i := |R_i| \cdot d_i$ 称为集合 R_i 的价值。将 IncMax 限制到可分实例后，记作 IncMaxSep。

我们通过以下直接观察开始对 IncMaxSep 的分析。

引理 8. IncMaxSep 的任意实例都可以转化为一个竞争比相同或更差、且满足以下性质的实例。

1. 每种基数恰好有一个集合，即 $|R_i| = i$。*2.* 密度递减，即 $1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \ldots$。*3.* 价值递增，即 $v_1 \leq v_2 \leq \ldots$。

证明。 我们将证明，任何不满足这些假设的实例都可以转换为满足这些假设的实例，同时不改变任何规模下的最优值，也不改变最佳增量解的价值。因此，这两个实例的竞争比相同。

如果有两个集合 R_i，R_j 满足 $|R_i| = |R_j|$，那么只需考虑密度较高的那个，因为任何从较低密度集合中添加元素的解，都可以通过改为从另一个集合中添加元素而得到改进。如果存在 $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，使得没有集合包含 i个元素，我们可以在该实例中添加一个包含 i 个元素的新集合。这个新集合的价值为 v_{i-1}。于是，任何从新引入的集合中添加元素的解，都可以通过改为从集合 R_{i-1} 中添加元素而得到改进。如果不存在包含 1 个元素的集合 R_1，我们可以引入一个密度为 d_2的集合。这样，任何添加这一个元素的解，都可以改为同时从 R_2中添加一个元素。因此，可以满足第一个假设。

通过重新缩放目标函数 f，假设 $1 \geq d_1$ 不失一般性。如果存在 $i \in \mathbb{N}$ 满足 $d_i < d_{i+1}$，则对于该问题实例中从集合 R_i 添加元素的每个解，都可以改为从集合 R_{i+1} 添加元素，从而得到改进。由于 $|R_{i+1}| \geq |R_i|$，这是可行的。

第三个假设之所以成立，是因为如果存在 $i \in \mathbb{N}$ 满足 $v_i > v_{i+1}$，则通过改为从 R_i 添加元素，可以改进一个从 R_{i+1} 添加元素的解。 □

下文中，我们假设每个实例都满足引理 8 中的性质。

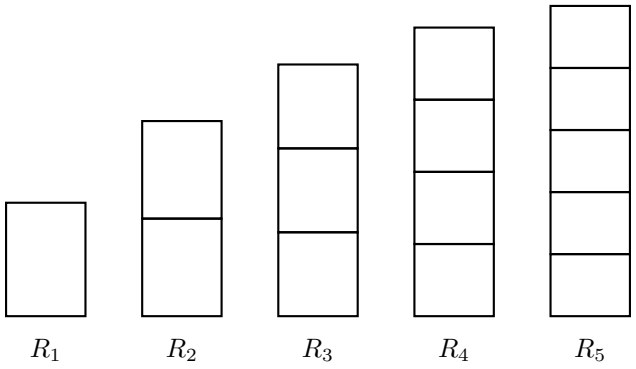

图 1: IncMaxSep 的一个实例示意图，其中包含 $N = 5$ 个集合。每个集合 R_i 由 i个元素组成。元素的高度表示其价值。与引理 8 中一样，单个元素的价值会随着 i 增大而降低，而整个集合 R_i 的价值则会增加。

定义 9. 如果解 IncMaxSep 首先添加集合 R_{c_1} 中的所有元素，然后添加集合 R_{c_2} 中的所有元素，依此类推，那么我们称该解由大小序列$(c_1, c_2, \dots)$ 表示。

只有当以这样的方式改变 IncMaxSep 的解时，它才可能得到改进：选择集合R_{c_1}， R_{c_2}，.....并依次添加这些集合中的所有元素。如果某个集合中的元素没有全部添加，那么改为添加一个较小的集合不会使解变差，因为较小集合的密度至少与较大集合的密度一样高。连续添加同一集合中的所有元素更好，因为这样解的价值增长得更快。

引理 10 ([1], 观察 2)。 存在一种算法，对于 IncMaxSep 可达到最优竞争比，使得该算法生成的解可以表示为一个序列$(c_1, c_2, \dots)$。我们可以假设 $v_{c_i} < v_{c_{i+1}}$， 因此，由于值 $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是非递减的，$c_i < c_{i+1}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$均成立。

从现在起，我们只考虑这种形式的解，并用其表示序列来表示一个解 X ，即 $X = (c_1, c_2, \dots)$。对于规模 $C \in \mathbb{N}$，我们用 $X(C)$ 表示由 X 添加的前 C 个元素，即 $|X(C)| = C$，并且，对于 $O_i := \arg\max\{f(S) \mid S \subseteq U,\ |S| = i\}$，有 $X\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} O_{c_i}$。

为了比较 IncMax 和 IncMaxSep 的竞争比，我们需要下面这个引理，它说明了为什么可问责性是 IncMax 的目标函数所应具备的一项理想性质。

引理 11. 函数 $f\colon\ U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是可问责的，当且仅当对于每个 $X \subseteq U$，且满足$n := |X| \in \mathbb{N}$, 都存在 X 的一个排序 $(e_1, \dots, e_n)$，使得对所有$i \in \{1, \dots, n\}$， $f(\{e_1, \dots, e_i\}) \geq \frac{i}{n} f(X)$。

证明。“⇐”: 令 $X \subseteq U$。存在 X 的一个排序 $(e_1, \dots, e_n)$，使得对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(\{e_1, \dots, e_i\}) \geq \frac{i}{n} f(X)$。特别地，我们有

$$f(X \setminus \{e_n\}) = f(\{e_1, \dots, e_{n-1}\}) \geq \frac{n-1}{n} f(X) = f(X) - \frac{f(X)}{|X|},$$

即， f 是可问责的。

“⇒”: 令 f 是可问责的，且 $X_n := X$。我们递归地定义 $X_{n-1}, \dots, X_1$。设对于 $i \in \{1, \dots, n-1\}$，集合 X_{i+1} 已定义，且 $|X_{i+1}| = i + 1$。根据 f 的可问责性，存在 $e \in X_{i+1}$ 使得

$$f(X_{i+1} \setminus \{e\}) \geq f(X_{i+1}) - \frac{f(X_{i+1})}{|X_{i+1}|} = \frac{i}{i+1} f(X_{i+1}).$$

令 $X_i := X_{i+1} \setminus \{e\}$。我们将序序列 $(e_1, \dots, e_n)$ 定义为 X 的唯一序列，使得$X_i = \{e_1, \dots, e_i\}$ 对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$都成立。于是，对于 $i \in \{1, \dots, n-1\}$，我们有

$$f(\{e_1,\dots,e_i\}) = f(X_i) \geq \frac{i}{i+1} f(X_{i+1}) \geq \cdots \geq \frac{i}{i+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{n} f(X_n) = \frac{i}{n} f(X). \qquad \square$$

借助这个引理，我们现在可以证明以下结论。

命题 12。 IncMax 和 IncMaxSep的竞争比相同。

证明。 由于 IncMaxSep 是 IncMax的一个子类， IncMaxSep 的竞争比小于或等于 IncMax的竞争比。

为证明反方向，令 $f\colon\ U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为IncMax某个实例的可核算目标函数。我们将构造一个 IncMaxSep 的实例，使得该问题实例的每个 ρ-竞争解都能导出 IncMax 初始实例的一个 ρ-竞争解，其目标函数为 f。

回忆一下， $\textsc{Opt}(i) = \max\{f(X) \mid |X| = i,\ X \subseteq U\}$。令 $O_i \subseteq U$满足 $|O_i| = i$，使得$f(O_i) = \textsc{Opt}(i)$。

现在，我们定义 IncMaxSep的实例。令 $n := |U|$，并令 $R_1,\dots,R_n$ 为不相交集合，使得对于 $i \in \{1,\dots,n\}$， $|R_i| = i$。对于 $i \in \{1,\dots,n\}$，令 $d_i := \textsc{Opt}(i)/i$，即我们有$v_i = \textsc{Opt}(i)$。将该问题的目标函数记为 f_{sep}。

令 $X = (c_1、\ldots\ldots、c_n)$ 为我们刚刚定义的可分问题实例的一个 ρ-竞争解。我们按如下方式定义该 IncMax 问题的一个解 X。首先，加入集合 O_{c_1} 中的所有元素，然后加入集合 O_{c_2} 中的所有元素，依此类推，直到加入所有最优解$O_{c_1}、\ldots\ldots、O_{c_n}$。对于 $i \in \{1,\dots,n\}$，集合 O_{c_i} 中的元素按照引理 11 给出的顺序加入。固定规模 $C \in \{1,\dots,n\}$。令 $i \in \{1,\dots,n\}$ 满足：最后一个加入解 $X(C)$ 的元素 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 来自 O_{c_i}。注意，对于规模 C， X 已完整加入规模为 c_{i-1} 的最优解，并加入了规模为 c_i 的最优解中的 $C - \sum_{j=1}^{i-1} c_j$ 个元素。根据引理 11 以及 f 的单调性，解 $\tilde{X}(C)$ 的价值为

$$f(\tilde{X}(C)) = \max\Big\{\textsc{Opt}(c_{i-1}), \frac{C - \sum_{j=1}^{i-1} c_j}{c_i} \textsc{Opt}(c_i)\Big\}. \tag{1}$$

$\tilde{}$与 X 类似，可分问题实例的解 $X(C)$包含集合 $R_{c_{i-1}}$ 中的所有元素，以及集合 R_{c_i} 中的 $C - \sum_{j=1}^{i-1} c_j$ 个元素。因此，解 $X(C)$ 的价值为

$$f_{\text{sep}}(X(C)) = \max\Big\{v_{c_{i-1}}, \big(C - \sum_{j=1}^{i-1} c_j\big) d_{c_i}\Big\} = \max\Big\{v_{c_{i-1}}, \frac{C - \sum_{j=1}^{i-1} c_j}{c_i} v_{c_i}\Big\}.$$

结合 $v_{c_j} = \textsc{Opt}(c_j)$ 对所有 $j \in \{1,\dots,n\}$ 均成立这一事实，以及式 (1)，我们得到

$$f(\tilde{X}(C)) = f_{\text{RC}}(X(C)) \geq \frac{1}{\rho} v(C) = \frac{1}{\rho} \textsc{Opt}(C). \qquad \square$$

3 连续化结果

为了求出 IncMaxSep 的竞争比下界，我们将该问题转化为连续问题。

定义13. 在 IncMaxCont 问题中，给定一个密度函数 $d\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to (0,1]$ 以及一个价值函数 $v(c) := cd(c)$。与离散问题一样，我们用大小序列 $X = (c_1, c_2, \dots)$ 表示 IncMaxCont 的增量解 X。对于给定的规模 $c \geq 0$，我们将该规模对应的解记为 $X(c)$。对于满足 $\sum_{i=1}^{n-1} c_i < c \leq \sum_{i=1}^{n} c_i$ 的 $n \in \mathbb{N}$， $X(c)$ 的价值定义为

$$f(X(c)) := \max\left\{\max_{i\in\{1,\dots,n-1\}} v(c_i), \left(c - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right) d(d_n)\right\}.$$

若对所有 $c > 0$， X 的增量解 X 都是 ρ-竞争的，即满足 $\rho \cdot f(X(c)) \geq v(c)$，则称其为 -竞争的。的竞争比定义为 $\inf\{\rho \geq 1 \mid X$ 满足 ρ-竞争的$\}$。

函数 d 和 v 的含义是：实例被划分为多个集合，每个正规模 $c \in \mathbb{R}$ 对应一个集合，其中包含 c 个分数单位，每个单位的价值为 $d(c)$，因此该集合的总价值为 $v(c)$。解可以作如下理解：首先加入规模为 c_1 的集合，然后加入规模为 c_2 的集合，依此类推。当 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\sum_{i=1}^{n-1} c_i < c \leq \sum_{i=1}^{n} c_i$ 时，解 $X(c)$ 已加入所有规模为 c_1、.....、c_{n-1} 的集合，以及规模为 c_n 的集合中的 $c - \sum_{i=1}^{n-1} c_i$ 个单位。与 IncMaxSep 问题不同，IncMaxCont 问题包含所有实数规模的子集，而不只是整数规模的子集；此外，它允许向解中加入分数元素，而不只是整数个元素。

对于该问题的离散版本，不失一般性，我们假设密度函数 d 单调不增，价值函数 v 单调不减。这些假设意味着 d 是连续的：如果并非如此，且对于某个规模 c'，d 不连续，即 $\lim_{c \nearrow c'} d(c) > \lim_{c \searrow c'} d(c)$，那么根据 v 的定义，$\lim_{c \nearrow c'} v(c) > \lim_{c \searrow c'} v(c)$，也就是说，$v$ 不会随 c 递增。因此，d 连续；根据 v 的定义，v 也连续。此外，不失一般性，我们假设 $d(0) = 1$。

对于固定的规模 $c \geq 0$，我们定义 $p(c) = \max\{c' \geq 0 \mid v(c') \leq \rho v(c)\}$。该价值表示：解的价值达到 $v(c)$ 时，仍具有 ρ-竞争性的规模上限。在整个分析过程中，我们假设 $p(c)$ 对每个 $c \geq 0$ 都有定义，即 $\lim_{c \to \infty} v(c) = \infty$。否则，任何算法都可以在其解的价值至少达到 $\frac{1}{\rho} \sup_{c \in \mathbb{R}_{\geq 0}} v(c)$ 时终止。

命题 14. IncMaxSep 的竞争比大于或等于 IncMax-Cont的竞争比。

证明. 给定一个 IncMaxCont 问题的实例，其价值函数为 v: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，密度函数为 d: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，并令 $\rho \geq 1, \epsilon > 0$。我们将构造一个 IncMaxSep 问题的实例，使得该问题实例中任何竞争比为 ρ 的解都能推出 IncMaxCont 的一个竞争比为 $\rho + \epsilon$的解。令 $\epsilon' > 0$ 足够小，使得

$$\epsilon' < \rho + \frac{1}{4} - \sqrt{(\rho + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{2}} \tag{2}$$

and

$$\rho < (1 - \epsilon')\lfloor 1 + \rho \rfloor. \tag{3}$$

This 这是可行的，因为 $\rho < \lfloor 1 + \rho \rfloor$。此外，令 $c_{\min} \geq 0$ 为 wi 中最大的值 th $d\big(c_{\mathrm{m}}$在 $+ \frac{\rho}{1-\epsilon'} v(c_{\min})\big) = 1 - \epsilon'$。

我们将 IncMaxSep 问题定义如下。令 $n \in \mathbb{N}$ 足够大，使得

$$d\Big(\frac{1}{n}\Big) \geq \max\Big\{\frac{\rho}{\rho + \epsilon}, 1 - \epsilon'\Big\} \tag{4}$$

and

$$\frac{nc_{\min} - 1}{nc_{\min}} \geq \frac{\rho}{\rho + \epsilon}. \tag{5}$$

令 R_1、R_2，.....为由元素组成且密度为 $|R_i| = i$ 的不相交集合。对于 $i \in \mathbb{N}$，令 $d_i := v\big(\frac{i}{n}\big)/i$ 为集合 R_i 的密度，即有

$$v_i = v\Big(\frac{i}{n}\Big) \tag{6}$$

and

$$d_i = \frac{d\big(\frac{i}{n}\big)}{n}. \tag{7}$$

令 $X = (c_1, c_2, ...)$ 为该实例中 IncMaxSep 的一个 ρ-竞争比解。不失一般性，我们可以假设对于所有 $i \in \mathbb{N}$，$c_i < c_{i+1}$。此外，我们可以假设 $d_{c_2} < \frac{d_1}{\rho}$。如果情况并非如此，我们只需考虑由 $(c_2, c_3, ...)$ 表示的解，它同样具有 ρ 的竞争比。

我们为 IncMaxCont 的实例定义解 $X_{\mathrm{c}} = \big(\frac{c_1}{n}, \frac{c_2}{n}, \ldots\big)$。我们将证明该解具有 $(\rho + \epsilon)$ 竞争比。固定规模 $C \geq 0$。如果 $C < \frac{c_1}{n}$，$X_{\mathrm{c}}(C)$ 只包含来自规模为 $X_{\mathrm{c}} = \big(\frac{c_1}{n}$ 的最优解的元素

来自规模为 $\frac{c_1}{n}$ 的最优解，即我们有

$$f(X_c(C)) = C \cdot d\big(\frac{c_1}{n}\big) \overset{(7)}{=} Cn \cdot d_{c_1} \geq Cn\frac{1}{\rho} \cdot d_1 \overset{(7)}{=} C\frac{1}{\rho} \cdot d\big(\frac{1}{n}\big)$$
$$\overset{(4)}{\geq} C\frac{1}{\rho+\epsilon} \geq \frac{1}{\rho+\epsilon}C \cdot d(C) = \frac{1}{\rho+\epsilon}v(C).$$

现在假设 $C \geq \frac{c_1}{n}\circ$ —
断言：我们有

$$\frac{c_1}{n} \geq c_{\min}. \tag{8}$$

断言的证明：反设 $\frac{c_1}{n} < c_{\min}\circ$ 由此可得 —

$$\begin{aligned}
d_{\lfloor c_1+\rho\frac{v_{c_1}}{d_1}\rfloor} &\overset{(6),(7)}{=} d_{\lfloor c_1+\rho n\frac{v(\frac{c_1}{n})}{d(\frac{1}{n})}\rfloor} \\
&\overset{(4)}{\geq} d_{\lfloor c_1+\rho n\frac{v(\frac{c_1}{n})}{1-\epsilon'}\rfloor} \\
&\overset{(7)}{=} d\Big(\Big\lfloor c_1+\rho n\frac{v(\frac{c_1}{n})}{1-\epsilon'}\Big\rfloor/n\Big)/n \\
&\geq d\Big(\frac{c_1}{n}+\frac{\rho}{1-\epsilon'}v\Big(\frac{c_1}{n}\Big)\Big)/n \\
&\geq d\Big(c_{\min}+\frac{\rho}{1-\epsilon'}v(c_{\min})\Big)/n \\
&= \frac{1-\epsilon'}{n}.
\end{aligned} \tag{9}$$

若 $c_1 = 1$，则有

$$\begin{aligned}
\rho \cdot v_{c_1} &\overset{c_1=1}{=} \rho d_1 \overset{(7)}{=} \frac{\rho}{n}d\big(\frac{1}{n}\big) \leq \frac{\rho}{n} \\
&\overset{(3)}{<} \frac{1-\epsilon'}{n}\lfloor 1+\rho\rfloor \\
&\overset{(9)}{\leq} \lfloor 1+\rho\rfloor d_{\lfloor c_1+\rho\frac{v_{c_1}}{d_1}\rfloor} \\
&\overset{c_1=1}{=} \Big\lfloor c_1+\rho\frac{v_{c_1}}{d_1}\Big\rfloor d_{\lfloor c_1+\rho\frac{v_{c_1}}{d_1}\rfloor} \\
&= v_{\lfloor c_1+\rho\frac{v_{c_1}}{d_1}\rfloor}.
\end{aligned}$$

否则，若 $c_1 \geq 2$，则有

$$\begin{aligned}
\rho \cdot v_{c_1} &= \rho \cdot c_1 d_{c_1} \overset{(7)}{=} \rho\frac{c_1}{n}d\big(\frac{c_1}{n}\big) \leq \rho\frac{c_1}{n} \\
&= (1-\epsilon')\frac{c_1}{n} + (\rho-1+\epsilon')\frac{c_1}{n} \\
&\overset{(2)}{<} (1-\epsilon')\frac{c_1}{n} + \Big((1-\epsilon')\rho-\frac{1}{2}\Big)(1-\epsilon')\frac{c_1}{n} \\
&\overset{c_1\geq 2}{\leq} (1-\epsilon')\frac{c_1}{n} + \Big((1-\epsilon')\rho-\frac{1}{c_1}\Big)(1-\epsilon')\frac{c_1}{n} \\
&= (c_1+(1-\epsilon')\rho c_1-1)\frac{1-\epsilon'}{n} \\
&\leq \lfloor c_1+(1-\epsilon')\rho c_1\rfloor\frac{1-\epsilon'}{n} \\
&\overset{(9),c_1\leq\lfloor c_1+\rho\frac{v(c_1)}{d(1)}\rfloor}{\leq} \lfloor c_1+\rho c_1 d_{c_1} n\rfloor\frac{1-\epsilon'}{n} \\
&= \lfloor c_1+\rho v_{c_1} n\rfloor\frac{1-\epsilon'}{n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq && \left\lfloor c_1 + \rho \frac{v_{c_1}}{d(\frac{1}{n})} n \right\rfloor \frac{1-\epsilon'}{n} \\
&\overset{(7)}{=} && \left\lfloor c_1 + \rho \frac{v_{c_1}}{d_1} \right\rfloor \frac{1-\epsilon'}{n} \\
&\overset{(9)}{\leq} && \left\lfloor c_1 + \rho \frac{v_{c_1}}{d_1} \right\rfloor d_{\left\lfloor c_1 + \rho \frac{v_{c_1}}{d_1} \right\rfloor} \\
&= && v_{\left\lfloor c_1 + \rho \frac{v_{c_1}}{d_1} \right\rfloor}.
\end{aligned}
$$

无论哪种情况，都有

$$
\rho \cdot v_{c_1} < v_{\left\lfloor c_1 + \rho \frac{v_{c_1}}{d_1} \right\rfloor} = v_{\left\lfloor c_1 + \rho \frac{v_{c_1}}{v_1} \right\rfloor}.
$$

由于 $d_{c_2} < \frac{v_1}{\rho}$，解 $X\left(\left\lfloor c_1 + \rho \frac{v_{c_1}}{v_1} \right\rfloor\right)$ 的价值为 $\max\{v_{c_1}, \rho \frac{v_{c_1}}{v_1} d_{c_2}\} = v_{c_1}$，也就是说，$X$ 不是 ρ-竞争的，这与假设矛盾。因此，断言成立，且我们有 $\frac{c_1}{n} \geq c_{\min}$。

对于解 X_{c} 的价值，我们有

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{c}}(C)) &\geq f_{\mathrm{c}}\Big(X_{\mathrm{c}}\Big(\frac{\lfloor nC \rfloor}{n}\Big)\Big) \\
&\overset{(6)}{=} f(X(\lfloor nC \rfloor)) \\
&\geq \frac{1}{\rho} v_{\lfloor nC \rfloor} \\
&= \frac{1}{\rho} \lfloor nC \rfloor d_{\lfloor nC \rfloor} \\
&\overset{(7)}{=} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\lfloor nC \rfloor}{n} d\Big(\frac{\lfloor nC \rfloor}{n}\Big) \\
&\geq \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\lfloor nC \rfloor}{n} d(C) \\
&\geq \frac{1}{\rho} \cdot \frac{nC-1}{nC} C \cdot d(C) \\
&\overset{(8)}{\geq} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{nc_{\min}-1}{nc_{\min}} C \cdot d(C) \\
&\overset{(5)}{\geq} \frac{1}{\rho+\epsilon} C \cdot d(C) \\
&= \frac{1}{\rho+\epsilon} v(C),
\end{aligned}
$$

也就是说，解 X_{c} 是 $(\rho+\epsilon)$-竞争的。任意取足够小的 $\epsilon > 0$，即可得出结论。

□

该命题意味着，我们不必为 IncMaxSep 问题构造下界，而可以为 IncMaxCont 问题构造下界。

需要注意的是，IncMaxSep 和 IncMaxCont 的竞争比是否相同尚不明确。这是因为，IncMaxCont 问题的解可能会添加分数元素，而 IncMaxSep 问题的解只能添加整数个物品。甚至存在这样的离散实例：该实例的每一种连续化形式的竞争比都小于初始实例的竞争比。

观察 15. 存在一个 IncMaxSep 实例，其竞争比严格大于每一个单调插值该IncMaxSep 实例的 IncMaxCont 实例的竞争比。

证明。考虑一个由 $N = 16$ 个集合组成的 IncMaxSep 实例，并且

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1, \\
d_3 = d_4 &= \frac{17}{40}, \\
d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{15} = d_{16} &= \frac{16473}{107200}.
\end{aligned}
$$

对于 $i \in \{2,5,6,7,8,9,10,11\}$，密度的选取使得 $i \cdot d_i = v_i = v_{i-1} = (i-1)d_{i-1}$。我们证明，对于这个问题实例，每个增量解（$c_1$，$c_2$，.....）的竞争比至少为 1.446。若 $c_1 \geq 2$，则 $d_{c_1} \leq \frac{1}{2}$，也就是说，当规模为 1 时，解的价值为 $d_{c_1} \leq \frac{1}{2}$，这意味着该解的竞争比至少为 2。因此，假设 $c_1 = 1$。若 $c_2 \geq 5$，则不失一般性，可以假设 $c_2 \geq 12$。否则，我们可以改为选择 $c_2 = 4$ 来改进该解。此时，规模为 4 时该解的价值为 $\max\{1, 3 \cdot d_{c_2}\} = \max\{1, 3 \cdot \frac{16473}{107200}\} = 1$，而最优解的价值为 $4d_4 = \frac{17}{10}$，也就是说，该解的竞争比至少为 1.7。不失一般性，可以假设 $v_{c_2} > v_{c_1}$，即 $c_2 \geq 3$。剩下的情况是 $c_2 \in \{3,4\}$。可以假设 $d_{c_3} < d_{c_2}$，否则我们可以通过移除 c_2 来改进该解。因此，由于 $v_{c_3} > v_{c_2}$，我们有 $c_3 \geq 12$，即 $d_{c_3} = \frac{16473}{107200}$。当规模为 $4c_2$ 时，该解的价值为 $\max\{\frac{17}{40}c_2, (4c_2 - 1 - c_2)\frac{16473}{107200}\} = \frac{17}{40}c_2$，而最优解的价值至少为 $4c_2 \cdot \frac{16473}{107200}$。因此，竞争比为 $4c_2 \cdot \frac{16473}{107200} / (\frac{17}{40}c_2) = \frac{969}{670} > 1.446$。

现在，我们考虑一个满足对所有 $i \in \{1, \ldots, 16\}$ 都有 $d(i) = d_i$ 的 IncMaxCont 实例。令 $\rho = \frac{57}{40} = 1.425$。我们证明增量解 $(c_1, c_2, c_3) = (\frac{1}{\rho}, 4, 12 - \frac{1}{\rho})$ 是 ρ-竞争的。注意，$c_1 \geq \frac{1}{\rho}$。根据引理 16，只需证明

$$d(c_i) \geq \frac{v(c_{i-1})}{p(c_{i-1}) - \sum_{j=1}^{i-1} c_j} \tag{10}$$

对于 $i \in \{2,3\}$。我们有 $p(c_1) \leq \frac{\rho v(d_3^{c_1})}{} = \frac{57}{17} v(c_1)$，因此

$$d(c_2) = d(4) = d_4 = \frac{17}{40} = \frac{1}{\frac{57}{17} - 1} \overset{d(c_1) \geq d_1 = 1}{\geq} \frac{1}{\frac{57}{17} - \frac{1}{d(c_1)}} \overset{v(c_1) = c_1 d(c_1)}{=} \frac{v(c_1)}{p(c_1) - c_1}.$$

我们有 $p(c_2) = p(4) = \frac{\rho v(4)}{d_{12}} = \frac{\frac{57}{40} \cdot 4 \cdot \frac{17}{40}}{\frac{16473}{107200}} = \frac{268}{17}$，因此

$$d(c_3) \overset{c_3 < 12}{\geq} d_{12} = \frac{16473}{107200} = \frac{4 \cdot \frac{17}{40}}{\frac{268}{17} - \frac{40}{57} - 4} = \frac{v(c_2)}{p(c_2) - c_1 - c_2}.$$

因此，对于 $i \in \{2,3\}$，式 (10) 成立，也就是说，解 (c_1, c_2, c_3) 是 ρ-竞争的。 □

请注意，尽管这表明存在一些实例，使得连续问题比离散问题更容易，但这并不排除 IncMaxSep 和IncMaxCont 的竞争比相同。这是因为证明中的实例并非最坏情况实例。

3.1 最优连续在线算法

本节将介绍一种求解 IncMaxCont 问题的算法，并对其进行分析。为了了解该算法的作用，请考虑以下引理。它根据（c_1，c_2，...）、v 和 d，给出了一个解（c_1，c_2，...）具有 ρ竞争性的刻画。

引理 16。 对于 IncMaxCont 问题的某个实例的一个解$(c_1, c_2, \ldots)$，以下陈述等价：

(i) $(c_1, c_2, \ldots)$ 具有 ρ竞争性。

(ii) 对所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $d(c_1) \geq \frac{1}{\rho}$，且 $d(c_{i+1}) \geq v(c_i) \frac{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j}{}$。

(iii) 我们有 $d(c_1) \geq \frac{1}{\rho}$，并且，对于所有 $i \in \mathbb{N}$, $p(c_i) > \sum_{j=1}^{i} c_j$ 和 $d(c_{i+1}) \geq v(c_i) \frac{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j}{}$。

证明。$(i) \Rightarrow (iii)$：由于 $X := (c_1, c_2, \ldots)$ 具有 ρ-竞争性，对于任意规模 $C \geq 0$，我们有$f(X(C)) \geq v(C)/\rho$。如果 $d(c_1) < \frac{1}{\rho}$成立，那么对于所有满足 $d(C) > \rho d(c_1)$ 的大小 $C \geq 0$，X都不具有 ρ-竞争性；这样的大小确实存在，因为 $d(0) = 1$。因此，我们有 $d(c_1) \geq \frac{1}{\rho}$。现在假设 $p(c_i) < \sum_{j=1}^{i} c_j$。根据 p的定义以及 v的单调性，我们知道

$\rho v(c_i) = v(p(c_i)) < v\big(\sum_{j=1}^{i} c_j\big)$ 这意味着，对于规模 $\sum_{j=1}^{i} c_i$， X 不具有 ρ-竞争性。这是矛盾，因此我们有 $p(c_i) \geq \sum_{j=1}^{i} c_j$。假设 $p(c_i) = \sum_{j=1}^{i} c_j$。令 $x \in (0, v(c_i) d(c_{i+1}))$。解 $X(p(c_i)+x)$ 的价值为 $f(X(p(c_i) + x)) = v(c_i)$，但根据 p 的定义以及 v 的单调性，我们知道 $\rho v(c_i) = v(p(c_i)) < v\big(\big(\sum_{j=1}^{i} c_j\big) + x\big)$，因此有 $p(c_i) > \sum_{j=1}^{i} c_j$。假设我们有 $d(c_{i+1}) < \frac{v(c_i)}{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j}$。我们已证明 $p(c_i) > \sum_{j=1}^{i} c_j$，并且由于 $\big(p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j\big) d(c_{i+1}) < v(c_i)$，解 $X(p(c_i))$ 的价值为 $f(X(p(c_i))) = v(c_i) = v(p(c_i))/\rho$。此外，基于同样的理由，存在 $\epsilon > 0$，使得 $\big(p(c_i) + \epsilon - \sum_{j=1}^{i} c_j\big) d(c_{i+1}) < v(c_i)$。这意味着解 $X(p(c_i) + \epsilon)$ 的价值为

$$f(X(p(c_i) + \epsilon)) = \max\{\big(p(c_i) + \epsilon - \sum_{j=1}^{i} c_j\big) d(c_{i+1}), v(c_i)\} = v(c_i),$$

但根据 p 的定义，我们知道 $v(p(c_i) + \epsilon) > \rho v(c_i)$，因此 X 不具备 ρ-竞争性。这与假设矛盾，因此 (iii) 必须成立。

$(iii) \Rightarrow (i)$：假设 (iii) 成立，但 $X := (c_1, c_2, \dots)$ 不具备 ρ-竞争性。那么存在 $C \geq 0$ 和 $\epsilon > 0$，使得 X 对 $[0, C]$ 中的所有规模都具备 ρ-竞争性，而对 $(C, C + \epsilon]$ 中的所有规模都不具备 ρ-竞争性，因为价值函数 v 和解 X 的价值都会随规模连续变化。令 $i \in \mathbb{N}$ 和 $0 < x \leq c_i$ 满足 $C = \big(\sum_{j=1}^{i-1} c_j\big) + x$。若 $i = 1$，则 $X(C)$ 的价值为 $x d(c_1) \geq \frac{1}{\rho} x \geq \frac{1}{\rho} x d(x) = \frac{1}{\rho} v(x)$。这与 X 在规模 C 下不具备 ρ-竞争性的事实矛盾，因此我们有 $i \geq 2$。假设 $x = c_i$ 成立。那么该解的价值为 $f(X(C)) = v(c_i)$。对于所有 $0 < x' \leq \min\{\epsilon, \frac{v(c_i)}{d(c_{i+1})}\}$，该解的价值为 $f(X(C + x')) = v(c_i)$，并且根据 C、 ϵ 和 x' 的定义， X 在规模 $C + x'$ 下不具备 ρ-竞争性，即 $v(C + x') > \rho v(c_i)$。由于这对任意小的 $x' > 0$ 都成立，且 X 在规模 C 下具备 ρ- 竞争性意味着 $v(C) \leq \rho v(c_i)$，因此我们知道 $p(c_i) = C = \sum_{j=1}^{i} c_j$，这与 (iii) 矛盾，因此 $x \neq c_i$，即 $x < c_i$。任意选取 $x' \in (x, \min\{c_i, x + \epsilon\})$，并令 $C' := \big(\sum_{j=1}^{i-1} c_j\big) + x'$。现在假设

$$x d(c_i) < v(c_{i-1}). \tag{11}$$

因此，解的价值为 $f(X(C)) = v(c_{i-1})$。又由于对于规模 C， X 是 ρ-竞争的，因此我们有 $C \leq p(c_{i-1})$。但由于对于任意 $x' > x$， $C' > p(c_{i-1})$，即对于任意 $C' > C$，我们有 $C = p(c_{i-1})$。由 (iii) 以及 v 的非负性可得 $p(c_{i-1}) - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \geq 0$，因此

$$x \overset{(11)}{<} \frac{v(c_{i-1})}{d(c_i)} \overset{(iii)}{\leq} p(c_{i-1}) - \sum_{j=1}^{i-1} c_j$$

或者，等价地，$C = \big(\sum_{j=1}^{i-1} c_j\big) + x < p(c_{i-1})$。这与假设矛盾，因此 (11) 不成立，即我们有 $x d(c_i) \geq v(c_{i-1})$，从而解的价值为 $f(X(C)) = x d(c_i)$。由于对于规模 C， X 是 ρ- 竞争的，因此我们有

$$v(C) \leq \rho \cdot x d(c_i). \tag{12}$$

这意味着

$$d(C) = \frac{v(C)}{C} \overset{(12)}{\leq} \rho \frac{x}{C} d(c_i) \leq \rho d(c_i). \tag{13}$$

我们可以得出结论

$$\begin{aligned}
v(C') &= C' d(C') \\
&\overset{d \text{ non-inc.}}{\leq} C' d(C) \\
&= C d(s) + (C' - C) d(C) \\
&= v(C) + (x' - x) d(C) \\
&\overset{(11),(13)}{\leq} \rho \cdot x d(c_i) + (x' - x) \rho d(c_i) \\
&= \rho \cdot x' d(c_i),
\end{aligned}$$

这与以下事实相矛盾： X 对于规模为 C' 的情况并非 ρ-竞争的，因此必须成立（i）。（iii）$\Rightarrow$（ii）：这可以直接推出。

(ii) $\Rightarrow$ (iii)：假设 (ii) 成立。我们需要证明，对于所有 $i \in \mathbb{N}$， $p(c_i) > \sum_{j=1}^{i} c_j$。($iii$) 的其余部分可由 ($ii$) 立即推出。我们将对 i 使用归纳法证明这一点。对于 $i = 1$，根据 p 的定义、 v 的连续性以及 $c_1 > 0$ 这一事实，我们有 $p(c_1) > c_1$。现在假设

$$p(c_i) > \sum_{j=1}^{i} c_j \tag{14}$$

hold对于某个 $i \in \mathbb{N}$。如果 $p(c_i) \geq \sum_{j=1}^{i+1} c_j$，那么 (14) 对 $i+1$ 成立，因为 $p(c_{i+1}) > p(c_i)$。因此，假设 e

$$p(c_i) < \sum_{j=1}^{i+1} c_j. \tag{15}$$

在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}
& v\Big(\sum_{j=1}^{i+1} c_j\Big) \\
= \quad & \Big(\sum_{j=1}^{i+1} c_j\Big) \cdot d\Big(\sum_{j=1}^{i+1} c_j\Big) \\
\overset{(15),d \text{ non-inc.}}{\leq} \quad & \Big(\sum_{j=1}^{i+1} c_j\Big) \cdot d(p(c_i)) \\
= \quad & p(c_i) d(p(c_i)) + \Big(\Big(\sum_{j=1}^{i+1} c_j\Big) - p(c_i)\Big) d(p(c_i)) \\
= \quad & v(p(c_i)) + \Big(\Big(\sum_{j=1}^{i+1} c_j\Big) - p(c_i)\Big) d(p(c_i)) \\
\overset{\text{def of } p}{=} \quad & \rho v(c_i) + \Big(\Big(\sum_{j=1}^{i+1} c_j\Big) - p(c_i)\Big) \frac{\rho v(c_i)}{p(c_i)} \\
\overset{(14),c_1>0}{<} \quad & \rho \cdot \Big(p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j\Big) \frac{v(c_i)}{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j} + \Big(\Big(\sum_{j=1}^{i+1} c_j\Big) - p(c_i)\Big) \frac{\rho v(c_i)}{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j} \\
= \quad & \rho \cdot c_{i+1} \frac{v(c_i)}{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j} \\
\overset{(ii)}{\leq} \quad & \rho \cdot c_{i+1} d(c_{i+1}) \\
= \quad & \rho v(c_{i+1}).
\end{aligned}$$

由于 v 递增且连续，这意味着 $p(c_{i+1}) > \sum_{j=1}^{i+1} c_j$。 □

分数背后的直觉

$$\frac{v(c_i)}{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j}$$

如下：解（c_1，……，c_{i-1}，c_i）的价值为 $v(c_i)$，且该价值在规模不超过 $p(c_i)$ 时具有 ρ-竞争性。该解所需的规模为 $\sum_{j=1}^{i} c_j$。因此，为保持竞争性，接下来增加的规模，即 c_{i+1}，需要满足 $\big(p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j\big) d(c_{i+1}) \geq v(c_i)$，也就是说，密度 $d(c_{i+1})$ 必须足够大，使得规模为 $p(c_i)$ 的解的价值为$\big(p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j\big) d(c_{i+1})$。

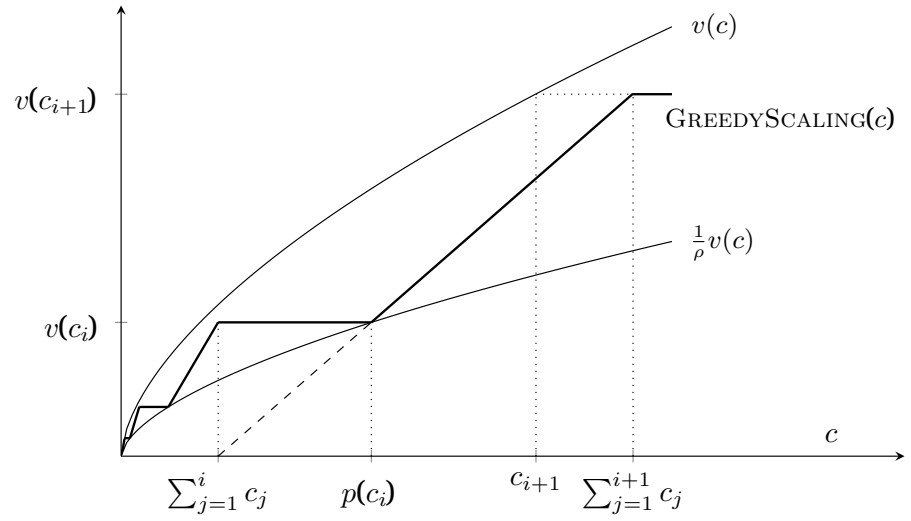

图 2： GreedyScaling$(c_1,\ \rho)$ 的工作原理示意图。在规模 $\sum_{j=1}^{i} c_j$ 与规模 $\sum_{j=1}^{i+1} c_j$ 之间，算法会加入规模为 c_{i+1} 的最优解。所选规模使得部分加入的解的价值恰好在规模为 p 时达到 $v(c_i)$，即先前加入的规模为 c_i 的解失去 ρ-竞争力时。

我们使用这个分数来定义一个求解 IncMaxCont 问题的算法。对于该算法，我们假设 v 严格递增且 d 严格递减，以使算法的选择唯一。每个 IncMaxCont 实例都可以通过对 d 和 v 中的常数部分稍作“倾斜”，以任意小的损失转换为满足这一条件的形式。算法 GreedyScaling$(c_1,\ \rho)$ 首先加入规模为 $c_1 > 0$ 的最优解，并选择规模 c_{i+1}，使得

$$d(c_{i+1}) = \frac{v(c_i)}{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j}, \tag{16}$$

也就是说，在满足引理 16 中不等式的前提下，规模尽可能大。算法示意图见图 2。

利用（16）中的算法定义和引理 16，我们能够证明以下 g.

命题 17. 算法 GreedyScaling(c_1, ρ) 是 ρ-竞争的，当且仅当它生成一个解 $(c_1, c_2, \dots)$，且对于所有 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $c_i < c_{i+1}$，并且 $d(c_1) \geq \frac{1}{\rho}$。

证明. “⇐”：如果对于所有 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $c_i < c_{i+1}$，且 $d(c_1) \geq \frac{1}{\rho}$，我们可以直接应用引理 16，从而得到该解是 ρ-竞争的。

“⇒”：如果 $d(c_1) < \frac{1}{\rho}$，根据引理 16，该解不是 ρ-竞争的。现在，假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$，$c_{k+1} \leq c_k$。如果对于某个 $i \in \mathbb{N}$，$c_i \leq 0$，那么该解无效，因此也不是 ρ-竞争的。因此，假设对于所有 $i \in \mathbb{N}$，$c_i > 0$。现在我们将迭代证明，对于所有

$i \in \{k, k+1, \dots\}$，都有 $c_{i+1} < c_i$。为此，假设 $c_{i+1} \le c_i$。那么

$$\begin{aligned} d(c_{i+2}) &= \frac{v(c_{i+1})}{p(c_{i+1}) - \sum_{j=1}^{i+1} c_j} \\ &= \frac{1}{\frac{\rho}{d(p(c_{i+1}))} - \frac{1}{v(c_{i+1})} \sum_{j=1}^{i+1} c_j} \\ &\overset{c_{i+1} \le c_i}{\ge} \frac{1}{\frac{\rho}{d(p(c_i))} - \frac{1}{v(c_i)} \sum_{j=1}^{i+1} c_j} \\ &> \frac{1}{\frac{\rho}{d(p(c_i))} - \frac{1}{v(c_i)} \sum_{j=1}^{i} c_j} \\ &= \frac{v(c_i)}{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j} = d(c_{i+1}). \end{aligned}$$

由于 d 是非递增的，我们有 $c_{i+2} < c_{i+1}$。通过迭代论证可知，对于所有 $i \in \{k, k+1, \dots\}$，都有 $c_{i+1} < c_i$。这意味着，对于所有大小，解（c_1，c_2，.....）的价值小于或等于 $v(c_k)$。然而，对于大规模 $C \in \mathbb{N}$，我们有 $v(C) > \rho v(c_k)$，当 $\lim_{c \to \infty} v(c) = \infty$ 时。 □

为了证明选择正确的 c_1 和 ρ 后，GreedyScaling(c_1，ρ) 能计算出最优解，我们需要以下引理。该引理指出，如果能够为该问题找到一个 ρ-近似算法，那么对于任意 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个算法，使得在不损失 ρ-竞争性的情况下，无法将该算法生成的解中的任何大小缩减到 k。其证明思路如下。我们从某个 ρ-竞争性解开始，逐步缩减大小，直到收敛到某个算法，并证明该算法满足所需性质。为避免遇到由以若干个 0 开头的序列表示的算法，我们从一个截至大小 k 具有最小数量选定规模的算法开始搜索。

引理 18。设 v 严格递增，ρ 是一个可实现的近似比，且 $k \in \mathbb{N}$。那么存在一个 ρ-竞争解 $(c_1^*, c_2^*, \dots)$，使得不存在其他满足以下条件的 ρ- 竞争解 $(c_1', c_2', \dots)$：对于所有 $i \in \{1, \dots, n-1\}$，$c_i' \le c_i^*$；对于所有 $i \in \{n, n+1, \dots\}$，$c_i' = c_i^*$；且 $\sum_{i=1}^{n} c_i' < \sum_{i=1}^{n} c_i^*$，其中 $n :=$ 最小值 $\{\ell \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{\ell} c_i^* \ge k\}$。此外，存在某个与 k 无关的 $C > 0$，使得 $c_1^* > C$。

证明。我们固定一个满足 $c_1 < c_2 < \dots$ 的 ρ-竞争解 $(c_1, c_2, \dots)$。定义 $n := \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{\ell} c_i \ge k\}$。对于 $i \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{S}_i$ 为所有满足对于任意 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 均有 $c_{n+j} = c_{i+j}'$ 的 ρ-竞争解 $(c_1', c_2', \dots)$ 的集合。令 $m := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \mathcal{S}_i \neq \emptyset\}$。这个价值是良定义的，因为 $(c_1, c_2, \dots) \in \mathcal{S}_n$。对于每个解 $(c_1', c_2', \dots) \in \mathcal{S}_m$，我们有

$$0 < c_1' < c_2' < \dots < c_m' = c_n \tag{17}$$

因为否则就可能跳过某个规模，这与 m 的最小性矛盾。对于每个 $(c_1', c_2', \dots) \in \mathcal{S}_m$，我们定义集合

$$\mathcal{S}_m((c_1', c_2', \dots)) := \{(c_1'', c_2'', \dots) \in \mathcal{S}_m \mid \forall i \in \mathbb{N} : c_i'' \le c_i'\}.$$

要证明该引理，只需证明存在某个解（c_1^*，c_2^*、...）使得

$$\mathcal{S}_m((c_1^*, c_2^*, \dots)) = \{(c_1^*, c_2^*, \dots)\}. \tag{18}$$

容易看出，对于每个 $(c_1'', c_2'', \dots) \in \mathcal{S}_m((c_1', c_2', \dots))$，都有

$$\mathcal{S}_m((c_1'', c_2'', \dots)) \subseteq \mathcal{S}_m((c_1', c_2', \dots)). \tag{19}$$

对于 $(c_1'$，c_2'，...$) \in \mathcal{S}_m$，我们定义

$$s_m((c_1', c_2', \dots)) := \inf\Big\{\sum_{i=1}^{m} c_i'' \;\Big|\; (c_1'', c_2'', \dots) \in \mathcal{S}_m((c_1', c_2', \dots))\Big\}.$$

由于 (17) 成立，这个价值大于 0 且小于 $\sum_{j=1}^{n} c_j$，因此定义良好。我们固定一个解 $(c_1^1, c_2^1, \dots) \in \mathcal{S}_m$，并递归地定义一个解序列，使得对于所有 i, $j \in \mathbb{N}$，都有 $(c_1^{j+1}, c_2^{j+1}, \dots) \in \mathcal{S}_m((c_1^j, c_2^j, \dots))$，并且满足

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i^{j+1}\Big) - s_m((c_1^j, c_2^j, \dots)) \le \Big(\frac{1}{2}\Big)^j. \tag{20}$$

由于下确界可以被任意精确地逼近，因此这个序列是良定义的。

命题 *1*：极限 $(c_1^*, c_2^*, \dots) := \lim_{j\to\infty}(c_1^j, c_2^j, \dots)$ 存在。

命题 1 的证明：序列 $\big(s_m((c_1^j, c_2^j, \dots))\big)_{j\in\mathbb{N}}$ 是递增的，这是由 (19) 得出的；序列 $\big(\sum_{i=1}^{m} c_i^j\big)_{j\in\mathbb{N}}$ 是递减的，因为 $(c_1^{j+1}, c_2^{j+1}, \dots) \in \mathcal{S}_m((c_1^j, c_2^j, \dots))$。此外，$s_m((c_1^j, c_2^j, \dots)) \le \sum_{i=1} c_i^j$，并且由 (20) 可知，$\lim_{j\to\infty} s_m((c_1^j, c_2^j, \dots)) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1} c_i^j$。由于对于所有 i, $c_i^{j+1} \le c_i^j$ $j \in \mathbb{N}$，序列 $\big((c_1^j, c_2^j, \dots)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ 收敛到某个解 $(c_1^*, c_2^*, \dots)$，且

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^* = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{m} c_i^j = \lim_{j\to\infty} s_m((c_1^j, c_2^j, \dots)). \tag{21}$$

命题 *2*：我们有 $(c_1^*, c_2^*, \dots) \in \mathcal{S}_m$。

命题 *2* 的证明：对于每个 $j \in \mathbb{N}$，我们都有 $c_{m+\ell}^j = c_{n+\ell}$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 均成立，因此对所有 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$也有 $c_{m+\ell}^* = c_{n+\ell}$ 成立。因此，只需证明解 $(c_1^*, c_2^*, \dots)$ 是 ρ-竞争的。对于所有 $j \in \mathbb{N}$，我们有 $c_1^j \ge \frac{1}{\rho}$，因此 $c_1^* = \lim_{j\to\infty} c_1^j \ge \frac{1}{\rho}$。接下来，我们证明

$$d(c_{i+1}^*) \ge \frac{v(c_i^*)}{p(c_i^*) - \sum_{\ell=1}^{i} c_\ell^*}$$

对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。由于 v 具有连续性和严格单调性，函数 p 连续。v 和 p 的连续性意味着 $v(c_i')/(p(c_i') - \sum_{\ell=1}^{i} c_\ell')$ 关于 c_1', …, c_i' 连续。根据引理 16，我们有

$$d(c_{i+1}^j) \ge \frac{v(c_i^j)}{p(c_i^j) - \sum_{\ell=1}^{i} c_\ell^j}$$

对于所有 $j \in \mathbb{N}$，因为 $(c_1^j, c_2^j, \dots\dots)$ 是 ρ-竞争的。该不等式两边关于 c_1^j, c_2^j, …… 都是连续的，并且我们有 $\lim_{j\to\infty} c_i^j = c_i^*$。这两个事实意味着

$$d(c_{i+1}^*) \ge \frac{v(c_i^*)}{p(c_i^*) - \sum_{\ell=1}^{i} c_\ell^*}$$

成立。要证明 $(c_1^*, c_2^*, \dots\dots)$ 具有 ρ-竞争性，根据引理 16，只需证明 $0 < c_1^* < c_2^* < \dots$ 成立。我们知道，对于所有解 $(c_1^j, c_2^j, \dots\dots)$, $j \in \mathbb{N}$，该结论都成立。因此，我们有 $0 \le c_1^* \le \dots \le c^* < c_{+1}^* < \dots$。但是，如果其中某些不等式以等号成立，我们就可以略去相应的大小，直到得到一个满足严格不等式的解。该解累积出一个规模为 c^* 的解所需的大小少于 m 个，即 m 不会是最小的。因此，$0 < c_1^* < c_2^* < \dots$ 成立。

我们已证明 $(c_1^*, c_2^*, \dots) \in \mathcal{S}_m$，因此 $(c_1^*, c_2^*, \dots) \in \mathcal{S}_m((c_1^j, c_2^j, \dots))$，这意味着 $\mathcal{S}_m((c_1^*, c_2^*, \dots)) \subseteq \mathcal{S}_m((c_1^j, c_2^j, \dots))$。结合我们已证明 $(c_1^*, c_2^*, \dots) \in \mathcal{A}_m((c_1^*, c_2^*, \dots))$ 这一事实，可得

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^* \ge s_m((c_1^*, c_2^*, \dots)) \ge \lim_{j\to\infty} s_m((c_1^j, c_2^j, \dots)) \overset{(21)}{=} \sum_{i=1}^{m} c_i^*,$$

即，$s_m((c_1^*, c_2^*, \dots)) = \sum_{i=1}^{m} c_i^*$。因此，式（18）成立。

还需证明存在某个 $C > 0$，它独立于 k，且满足 $c_1^* > C$。反设，对于不同的 k取值，c_1^* 不以 0 为界。取足够小的 $\epsilon > 0$，使得 $\frac{\rho}{1-\epsilon} - 1 \le \rho$。此外，取 $k \in \mathbb{N}$，使得上述定义的价值 c_1^*

满足 $d(p(c_1^*)) \geq 1-\epsilon$。这是可行的，因为 $d(0) = 1$， d连续，且 c_1^*不以 0 为界。由 m 的极小性以及引理 16，可得

$$\frac{1}{\rho} > d(c_2^*) \geq \frac{v(c_1^*)}{p(c_1^*) - c_1^*} = \frac{1}{\frac{\rho}{d(p(c_1^*))} - \frac{1}{d(c_1^*)}} \geq \frac{1}{\frac{\rho}{1-\epsilon} - 1} \geq \frac{1}{\rho}$$

这与假设矛盾。因此， c_1^* 有一个大于 0 的下界。 □

利用这个引理，我们可以证明，对于适当选择的 c_1 和 ρ， GreedyScaling(c_1， ρ) 能达到所有可能的竞争比。这立即推出定理 1。

引理 19. 设 v 严格递增， d 严格递减，并设 ρ 是一个可达到的近似比。存在一个起始值 $c_1^* \in \left[d^{-1}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right), d^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$，使得算法 GreedyScaling($c_1^*$, ρ) 对于$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 中的所有规模均为 ρ-竞争的。

证明。根据引理 18，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个 ρ-竞争的解 ($c_1^k, c_2^k, \dots$)，使得当 $n(k) := \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{\ell} c_i \geq k\}$ 时，不存在其他 ρ-竞争的解 ($c_1', c_2', \dots$) 满足：对于所有 $i \in \{1, \dots, n(k) - 1\}$， $c_i' \leq c_i^k$；对于所有 $i \in \{n(k)\ n(k)+1, \dots\}$ 和 $\sum_{i=1}^{n(k)} c_i' < \sum_{i=1}^{n(k)} c_i^k$。此外，存在 $C > 0$，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}$， $c_1^k \geq C$。不失一般性，可以假设对于所有 $i \in \mathbb{N}$， $v(c_{i+1}^k) \geq v(c_i^k)$。由于 ($c_1^k, c_2^k, \dots$) 是 ρ- 竞争的，根据引理 16，我们知道，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，有

$$d(c_{i+1}^k) \geq \frac{v(c_i^k)}{p(c_i^k) - \sum_{j=1}^{i} c_j^k}. \tag{22}$$

假设存在 $i' \in \{1, \dots, n(k) - 1\}$，使得 (22) 不成立为等式。根据 v、 d 和 p 的连续性，我们可以找到 $c_{i'}' < c_{i'}^k$，使得

$$d(c_{i'+1}^k) > \frac{v(c_{i'}')}{p(c_{i'}') - c_{i'}' - \sum_{j=1}^{i'-1} c_j} > \frac{v(c_{i'}^k)}{p(c_{i'}^k) - \sum_{j=1}^{i'} c_j^k}. \tag{23}$$

解 $(c_1', c_2', \dots) := (c_1^k, \dots, c_{i'-1}^k, c_{i'}', c_{i'+1}^k, \dots)$ 满足

$$d(c_{i+1}') \geq \frac{v(c_i')}{p(c_i') - \sum_{j=1}^{i} c_j'}$$

对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。对于 $i \in \{1, \dots, i'-1\}$，这直接由 (22) 得出；对于 $i = i'$，这由 (23) 得出；对于 $i \in \{i'+1, i'+2, \dots\}$，这是由 (22) 以及 $c_{i'}' < c_{i'}^k$ 这一事实得出的。对于所有 $i \in \{1, \dots, n(k) - 1\}$，我们有 $c_i' \leq c_i^k$；对于所有 $i \in \{n(k)\ n(k)+1, \dots\}$ 和 $\sum_{i=1}^{n(k)} c_i' < \sum_{i=1}^{n(k)} c_i^k$，这与我们最初对 ($c_1^k$, $c_2^k, \dots$) 的选择矛盾。因此，对于所有 $i \in \{1, \dots, n(k) - 1\}$，(22) 均成立为等式。

序列 $\left(c_1^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ 有界，因为 $C \leq c_1^k \leq d^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)$。因此，根据博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理，它包含一个收敛子序列 $\left(c_1^{k_\ell}\right)_{\ell \in \mathbb{N}}$，满足 $k_\ell \in \mathbb{N}$，且对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 都有 $k_{\ell+1} > k_\ell$。我们对所有 $i \in \mathbb{N}$ 定义 $c_i^* := \lim_{\ell \to \infty} c_i^{k_\ell}$。由 v 的连续性，且因为这对所有序列 $\left(c_i^k\right)_{i \in \mathbb{N}}$ 都成立，我们有 $v(c_1^*) \geq v(d^{-1}(C)) > 0$，以及 $v(c_{i+1}^*) \geq v(c_i^*)$。根据引理 16，我们有 $d(c_1^k) \geq \frac{1}{\rho}$，并且

$$d(c_{i+1}^k) \geq \frac{v(c_i^k)}{p(c_i^k) - \sum_{j=1}^{i} c_j^k}$$

对所有 $i,\ k \in \mathbb{N}$。 d、 v 和 p 的连续性推出 $d(c_1^*) \geq \frac{1}{\rho^*}$且

$$d(c_{i+1}^*) \geq \frac{v(c_i^*)}{p(c_i^*) - \sum_{j=1}^{i} c_j^*}.$$

因此，序列 $\left(c_1^*, c_2^*, \dots\right)$ 表示一个 ρ-竞争性算法。接下来只需证明

$$c_{i+1}^* = d^{-1}\left(\frac{v(c_i^*)}{p(c_i^*) - \sum_{j=1}^{i} c_j^*}\right).$$

注意，$n(k)$ 随 k 增大，即对于所有 $N \in \mathbb{N}$，都存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于满足 $k \geq K$ 的所有 $k \in \mathbb{N}$，$n(k) \geq N$。这意味着对于每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在某个 $K \in \mathbb{N}$，使得

$$d(c_{i+1}^k) = \frac{v(c_i^k)}{p(c_i^k) - \sum_{j=1}^{i} c_j^k}$$

对所有满足 $k \geq K$ 的 $k \in \mathbb{N}$。由于 $c_i^* = \lim_{\ell \to \infty} c_i^{k_\ell}$，所需的等式得证，即序列 $(c_1^*, c_2^*, \dots)$ 描述了算法 GreedyScaling(c_1^*, ρ)。 □

这一结果立即推出定理 1。

对于一系列初始值 c_1，我们可以在定理 2 中给出 GreedyScaling$(c_1, \varphi + 1)$ 的竞争比上界，其中 $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$ 是黄金比例。

定理 2。 GreedyScaling$(c_1, \varphi + 1)$ 是$(\varphi + 1)$-竞争的，当且仅当 $d(c_1) \geq \frac{1}{\varphi + 1}$.

证明。“⇒”：根据引理 16，$d(c_1) \geq \frac{1}{\varphi+1}$ 成立，因为该算法的竞争比为 $(\varphi + 1)$。“⇐”：设 $(c_1, c_2, \dots)$ 为算法 GreedyScaling$(c_1, \varphi + 1)$ 产生的解。根据命题 17，要证明其竞争比为 $(\varphi + 1)$，只需证明 $c_i \leq c_{i+1}$。

断言：对所有 $i \in \mathbb{N}$，我们有 $c_{i+1} \geq (\varphi + 1)c_i$。

我们有 $p(c_i) = \max\{c \geq 0 \mid v(c) \leq (\varphi + 1)v(c_i)\}$。这意味着，根据 v的连续性，$v(p(c_i)) = (\varphi + 1)v(c_i)$，因此

$$p(c_i) = \frac{v(p(c_i))}{d(p(c_i))} = \frac{(\varphi + 1)v(c_i)}{d(p(c_i))} \geq \frac{(\varphi + 1)v(c_i)}{d(c_i)} = (\varphi + 1)c_i, \tag{24}$$

其中，不等式成立是因为 $v(p(c_i)) = (\varphi + 1)v(c_i) > v(c_i)$。因此，又因为 v 是递增的，$p(c_i) > c_i$，这意味着 $d(p(c_i)) \leq d(c_i)$，因为 d 是单调的。

断言的证明：我们将用归纳法证明该断言。令 $i \in \mathbb{N}$，并假设该断言对所有 $j \in \{1, \dots, i-1\}$ 都成立。于是，对所有 $j \in \{1, \dots, i-1\}$，$c_j \leq \frac{1}{(\varphi+1)^{i-j}} c_i$，因此

$$\sum_{j=1}^{i} c_j \leq c_i \sum_{j=1}^{i} (\varphi + 1)^{j-i} = \frac{1 - (\varphi + 1)^{-i}}{1 - (\varphi + 1)^{-1}} c_i < \frac{1}{1 - (\varphi + 1)^{-1}} c_i = \varphi c_i. \tag{25}$$

由此可得

$$\begin{aligned} d(c_{i+1}) = \frac{v(c_i)}{p(c_i) - \sum_{j=1}^{i} c_j} &\overset{(25)}{<} \frac{v(c_i)}{p(c_i) - \varphi c_i} \overset{(24)}{\leq} \frac{v(c_i)}{p(c_i) - \frac{\varphi}{\varphi+1} p(c_i)} \\ &= (\varphi + 1)\frac{v(c_i)}{p(c_i)} = \frac{v(p(c_i))}{p(c_i)} = d(p(c_i)), \end{aligned}$$

这意味着 $c_{i+1} > p(c_i)$，因为 d 是递减的。结合 (24)，即可得到该断言。 □

由于对于固定实例，具有正确初始值 c_1 的 GreedyScaling(c_1, ρ) 是最优算法，因此我们可以通过找到一个实例，使其成为所有满足 $d(c_1) \leq 1/\rho$ 的初始值 $c_1 > 0$ 下的 GreedyScaling (c_1, ρ) 的下界，从而给出 IncMaxCont 问题的 $\rho > 1$ 下界。接下来，我们证明，对于任意可数的初始值集合，都存在一个实例，使得对于其中任意初始值，GreedyScaling(c_1, ρ) 的竞争比都无法优于 $\varphi + 1$。为此，我们需要以下引理。

引理 20. 对于满足 $\beta > 0$ 的 α、β、ρ、$\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，考虑递归定义的序列 $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$，其中

$$t_0 = \beta, \qquad t_{n+1} = \frac{1}{\frac{\rho}{t_n(1-\epsilon)} - \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(\rho+\epsilon)^{j-n}}{t_j}\right) - \frac{\alpha}{(\rho+\epsilon)^n}} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

If $1 < \rho < \varphi + 1$，则存在 $\epsilon' > 0$ 使得，对于所有 $\epsilon \in (0, \epsilon']$，存在 $\ell \in \mathbb{N}$ 满足 $t_\ell < 0$.

证明。 重新排列各项，我们得到

$$t_0 = \beta, \qquad \frac{(\rho+\epsilon)^{n+1}}{t_{n+1}} = \frac{\rho(\rho+\epsilon)^{n+1}}{t_n(1-\epsilon)} - \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+1}}{t_j}\Big) - \alpha(\rho+\epsilon) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

我们对所有 $n \in \mathbb{N}$ 代入 $a_n = 1/t_n$，得到递归定义的序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中$a_0 = 1/\beta$ 以及

$$a_{n+1}(\rho+\epsilon)^{n+1} = a_n \frac{\rho}{1-\epsilon}(\rho+\epsilon)^{n+1} - \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j(\rho+\epsilon)^{j+1}\Big) - \alpha(\rho+\epsilon) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{26}$$

这也意味着

$$a_n(\rho+\epsilon)^{n} = a_{n-1} \frac{\rho}{1-\epsilon}(\rho+\epsilon)^{n} - \Big(\sum_{j=0}^{n-1} a_j(\rho+\epsilon)^{j+1}\Big) - \alpha(\rho+\epsilon) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

将（27）从（26）中减去，我们得到

$$a_{n+1}(\rho+\epsilon)^{n+1} - a_n(\rho+\epsilon)^{n} = a_n \frac{\rho}{1-\epsilon}(\rho+\epsilon)^{n+1} - a_{n-1}\frac{\rho}{1-\epsilon}(\rho+\epsilon)^{n} - a_n(\rho+\epsilon)^{n+1}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，从而得到

$$a_{n+1} = a_n\Big(\frac{1}{\rho+\epsilon} + \frac{\rho}{1-\epsilon} - 1\Big) - a_{n-1}\frac{\rho}{(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。结合初始值 $a_0 = 1/\beta$ 以及

$$a_1 = \frac{1}{t_1} = \frac{\rho}{\beta(1-\epsilon)} - \frac{1}{\beta} - \alpha$$

this 得出一个唯一确定的线性齐次递推关系，其特征多项式 al

$$0 = x^2 - \Big(\frac{1}{\rho+\epsilon} + \frac{\rho}{1-\epsilon} - 1\Big)x + \frac{\rho}{(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)}.$$

令 $D(\rho,\ \epsilon) = \big(\frac{1}{(\rho+\epsilon)} + \frac{\rho}{(1-\epsilon)} - \frac{1}{2}\big)^2 - \frac{\rho}{(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)}$。那么特征多项式的根为

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2(\rho+\epsilon)} + \frac{\rho}{2(1-\epsilon)} - \frac{1}{2} - \sqrt{D(\rho,\epsilon)}, \\ y &= \frac{1}{2(\rho+\epsilon)} + \frac{\rho}{2(1-\epsilon)} - \frac{1}{2} + \sqrt{D(\rho,\epsilon)}. \end{aligned} \tag{28}$$

我们断言，若 $\rho < \varphi + 1$，则存在 $\epsilon > 0$ 使得 $D(\rho,\ \epsilon) < 0$。为证明这一断言，考虑函数

$$D(\rho, 0) = \Big(\frac{1}{2\rho} + \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2}\Big)^2 - 1.$$

函数 $h(\rho) = \frac{1}{2\rho} + \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2}$的导数为 $h'(\rho) = -\frac{1}{2\rho^2} + \frac{1}{2} > 0$，其中 $\rho > 1$。因此，h 在 $\rho \in (1,\ \infty)$ 上严格递增，因此，$D(\rho,\ 0)$ 在 $\rho \in (1,\ \infty)$ 上也严格递增。因此，$D(\rho,\ 0)$ 在 $\rho_0 \in (1,\ \infty)$ 上至多有一个根。该根满足

$$\frac{1}{2\rho_0} + \frac{\rho_0}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

重新整理各项后得到 $1 + \rho_0^2 = 3\rho_0$。此方程的唯一解 $\rho_0 > 1$ 是 $\varphi + 1$。我们已经证明，对于所有 $\rho < \varphi + 1$，$D(\rho,\ 0) < 0$。由于 $D(\rho,\ \epsilon)$ 关于 ϵ 连续，因此存在 $\epsilon' > 0$，使得对于所有 $\epsilon \in$，也有 $D(\rho,\ \epsilon) < 0$ $(0,\ \epsilon')$。对于如此选取的 $\rho \in (1,\ \varphi + 1)$ 和 ϵ，我们有

特征多项式（28）的根互不相同且均为复数。于是，数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 可表示为闭式

$$a_n = \lambda x^n + \mu y^n \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{29}$$

其中常数 λ，$\mu \in \mathbb{C}$ 的选取使得初始值满足方程

$$a_0 = \frac{1}{\beta} = \lambda + \mu \qquad \text{and} \qquad a_1 = \frac{\rho}{\beta(1-\epsilon)} - \frac{1}{\beta} - \alpha = \lambda x + \mu y \tag{30}$$

成立。注意，根据 (28)，x 和 y 互为共轭复数，因此，根据 (30)，λ 和 μ 也互为共轭复数。因此，我们可以将 (29) 改写为

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda x^n + \bar{\lambda}\bar{x}^n \\ &= \lambda x^n + \lambda\bar{x}^n \\ &= 2\mathfrak{R}(\lambda x^n) \end{aligned} \tag{31}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。对于第二个等式，我们利用了共轭运算对乘法满足分配律；对于第三个等式，我们利用了复数 $z \in \mathbb{C}$ 的实部可表示为 $\mathfrak{R}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$。在 (31) 中，常数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $\lambda + \bar{\lambda} = 1/\beta$ 和 $\lambda x + \bar{\lambda}\bar{x} = \frac{\rho}{\beta(1-\epsilon)} - \frac{1}{\beta} - \alpha$。转换为极坐标后，我们得到

$$\lambda = r_\lambda \exp(\mathrm{i}\varphi_\lambda) \qquad \text{and} \qquad x = r_x \exp(\mathrm{i}\varphi_x)$$

对于某些 r_λ，$r_x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 以及某个 φ_λ，$\varphi_x \in [0, 2\pi)$。交换 x 和 y 的角色后，不失一般性地假设 $\varphi_x \in [0, \pi]$。我们得到

$$a_n \overset{(31)}{=} 2\mathfrak{R}(\lambda x^n) = 2\mathfrak{R}\big(r_\lambda r_x^n \exp(\mathrm{i}(\varphi_\lambda + n\varphi_x))\big) \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

设 $k = \lceil \pi/\varphi_x \rceil$。我们断言，$a_0, \ldots, a_k$ 并非严格递增。为说明这一点，注意到 $a_0 = 1/\beta$，因此，

$$1 = \operatorname{sgn}(a_0) = \operatorname{sgn}\big(2\mathfrak{R}\big(r_\lambda \exp(\mathrm{i}\varphi_\lambda)\big)\big) = \operatorname{sgn}\big(2\mathfrak{R}\big(\exp(\mathrm{i}\varphi_\lambda)\big)\big).$$

另一方面，我们有

$$-1 = \operatorname{sgn}\big(2\mathfrak{R}\big(\exp(\mathrm{i}\varphi_\lambda + \pi)\big)\big).$$

由于 $\varphi_x \leq \pi$，这意味着 $\operatorname{sgn}(a_k) = -1$ 或 $\operatorname{sgn}(a_{k-1}) = -1$ （也可能两者皆是）。无论哪种情况，这都意味着存在 $\ell \in \mathbb{N}$，使得 $a_\ell < 0$。由于对所有 $n \in \mathbb{N}$，$t_n = 1/a_n$，这进一步意味着 $t_\ell < 0$。 □

下面的引理表明，给定点 $((x_0, v_0), \ldots, (x_k, v_k)) \in (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0})^{k+1}$，且对所有 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ 均有 $v_i < v_{i+1} < \frac{x_{i+1}}{x_i} v_i$，只需在这些点之间进行线性插值，就可以构造一个 IncMax 的实例，使得对所有 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$，$v(x_i) = v_i$。

引理 *21*。给定一个 IncMax 实例，其价值函数为 $\bar{v}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，密度函数为 $\bar{d}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。设 $k \in \mathbb{N}$ 且 $((x_0, v_0), \ldots, (x_k, v_k)) \in (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0})^{k+1}$，其中 $\bar{v}(x_0) = v_0$，并且对所有 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$，$v_i < v_{i+1} < \frac{x_{i+1}}{x_i} v_i$。那么，存在一个 IncMax 实例，其价值函数为 $v\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，密度函数为 $d\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对所有 $x \in [0, x_0]$，$v(x) = \bar{v}(x)$，并且对所有 $i \in \{0, \ldots, k\}$，$v(x_i) = v_i$。

证明。我们定义

$$v(x) := \bar{v}(x) \quad \text{for all } c \in [0, x_0] \tag{32}$$

并且，对所有 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$，

$$v(x) := v_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\big(v_{i+1} - v_i\big) \quad \text{for all } x \in (x_i, x_{i+1}]. \tag{33}$$

注意，$x_{i+1} > x_i$ 因为 $\frac{x_{i+1}}{x_i} v_i \succ v_{i+1}$ 且 $v_i < v_{i+1}$。此外，对于 $x > x_k$，我们定义

$$v(x) := v_{k-1} + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(v_k - v_{k-1}). \tag{34}$$

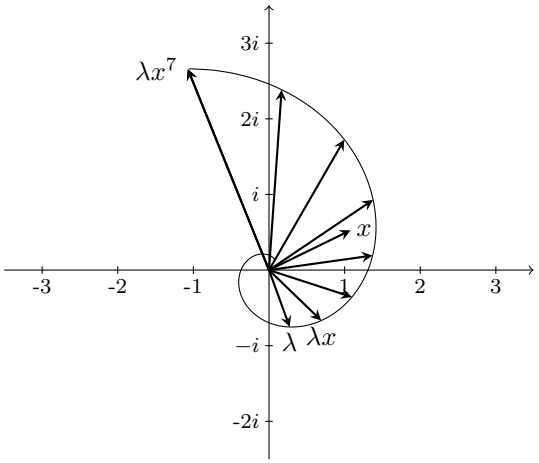

图 3：反复将 λ 乘以 $x \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$，相当于绕原点旋转，并且在某个时刻会到达实部为负数的半平面。

我们令 $d(0) := 1$ 且 $d(x) := {}^{v_{(x)}}x$ 对所有 $x > 0$成立。

我们需要证明：(i) v 严格递增，(ii) d 严格递减，(iii) $d(0) = 1$，对于所有 $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，$(iv)$ $v(x) = xd(x)$，对于所有 $x \in [0, x_0]$，(v) $v(x) = \bar{v}(x)$，以及对于所有 $i \in \{0, \dots, k\}$，(vi) $v(x_i) = v_i$。

在区间 $[0, x_0]$ 上，(i) 成立，这是因为 (32) 成立，且 $\bar{v}$ 严格递增。对于 $x > x_0$，我们有

$$v(x) \overset{(33),(34)}{=} v_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\big(v_{i+1} - v_i\big)$$

对某个 $i \in \{0, \dots, k-1\}$ 成立，因此

$$v'(x) \overset{(33),(34)}{=} \frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i} \overset{v_{i+1} > v_i, x_{i+1} > x_i}{>} 0,$$

也就是说，(i) 对于 $x > x_0$ 成立。

在区间 $[0, x_0]$ 上，(ii) 成立，这是因为 d 严格递增，且根据 d 的定义及 (32)，$d(x) = d(x)$。对于 $x > x_0$，我们有

$$d(x) \overset{(33),(34)}{=} \frac{v_i}{x} + \frac{1 - \frac{x_i}{x}}{x_{i+1} - x_i}\big(v_{i+1} - v_i\big)$$

对于某个 $i \in \{0, \dots, k-1\}$，因此

$$d'(x) \overset{\text{Def. of } d,(33),(34)}{=} -\frac{1}{x^2}\Big(v_i - x_i\frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i}\Big) \overset{v_{i+1} < \frac{x_{i+1}}{x_i} v_i}{<} -\frac{1}{x^2}\Big(v_i - \frac{x_{i+1}v_i - x_i v_i}{x_{i+1} - x_i}\Big) = 0,$$

也就是说，(ii) 对 $x > x_0$ 成立。

根据 d 的定义，我们有 $d(0) = 1$，也就是说，(iii) 成立。

根据定义 d，我们有 $v(0) = \bar{v}(0) = 0 \cdot d(0) = 0 \cdot d(0)$，且 $v(x) = xd(x)$，也就是说，(iv) 成立。

由 (32)，(v) 成立。

我们有 $v(x_0) \overset{(32)}{=} \bar{v}(x_0) = v_0$，并且对于 $i \in \{1, \dots, k\}$，我们有

$$v(x_i) \overset{(33)}{=} v_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\big(v_i - v_{i-1}\big) = v_i,$$

即，(vi) 成立。 □

下面的计算是为了说明在后续证明中可以将引理 21 应用于一个点序列。

引理 22。令 $1<\rho<\varphi+1,\quad x_0,\quad v_0,\quad z>0,$

$$t_0=\frac{v_0}{x_0},\qquad t_{n+1}=\frac{1}{\frac{\rho}{t_n(1-\epsilon)}-\big(\sum_{j=0}^{n}\frac{(\rho+\epsilon)^{j-n}}{t_j}\big)-\frac{z}{(\rho+\epsilon)^n v_0}}\quad \textit{for all } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

并令 $\epsilon\in(0,\,1)$ 充分小。根据引理 *20*，存在 $\ell'\in\mathbb{N}$，使得 $t_{\ell'}<0$。令 $\ell\in\{0,\dots,\ell'-1\}$ 为满足 $\frac{1}{t_\ell}>\frac{1}{t_{\ell+1}}$ 的最小索引。于是，

(i) $(\rho+\epsilon)^n v_0<\rho(\rho+\epsilon)^n v_0$ *for all* $n\in\{0,\dots,\ell\}$,

(ii) $\rho(\rho+\epsilon)^n v_0<(\rho+\epsilon)^{n+1}v_0$ *for all* $n\in\{0,\dots,\ell-1\}$,

(iii) $\rho(\rho+\epsilon)^n v_0<\frac{\frac{\rho(\rho+\epsilon)^n v_0}{(1-\epsilon)t_n}}{\frac{(\rho+\epsilon)^n v_0}{t_n}}(\rho+\epsilon)^n v_0$ *for all* $n\in\{0,\dots,\ell\}$, *and*

(iv) $(\rho+\epsilon)^{n+1}v_0<\frac{\frac{(\rho+\epsilon)^{n+1}v_0}{t_{n+1}}}{\frac{\rho(\rho+\epsilon)^n v_0}{(1-\epsilon)t_n}}\rho(\rho+\epsilon)^n v_0$ *for all* $n\in\{0,\dots,\ell-1\}$.

证明。不等式（*i*）和（*ii*）成立，因为 $\rho>1$、$\epsilon>0$ 和 $v_0>0$。

令 $n\in\{0,\dots,\ell\}$。不等式（*iii*）等价于 $\rho<\frac{\rho}{1-\epsilon}$，这成立，因为 $\epsilon\in(0,\,1)$。令 $n\in\{0,\dots,\ell-1\}$。不等式（*iv*）等价于

$$\frac{1}{t_n}<(1-\epsilon)\frac{1}{t_{n+1}}\quad\text{for all } n\in\{0,\dots,\ell-1\}. \tag{35}$$

对于固定的 $1<\rho<\varphi+1$，我们定义比值 $r(n,\,\epsilon):=\frac{t_n}{t_{n+1}}$，对所有 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 均成立。注意，$r(0,\,\epsilon)=\frac{\rho}{1-\epsilon}-1-\frac{z}{v_0}t_0$，且对于 $n\in\mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}
r(n,\epsilon) &= \frac{t_n}{t_{n+1}}\\
&= \Big(\frac{\rho}{t_n(1-\epsilon)}-\big(\sum_{j=0}^{n}\frac{(\rho+\epsilon)^{j-n}}{t_j}\big)-\frac{z}{(\rho+\epsilon)^n v_0}\Big)t_n\\
&= \Big(\frac{\rho}{t_n(1-\epsilon)}-\frac{1}{t_n}-\frac{\rho}{t_{n-1}(\rho+\epsilon)(1-\epsilon)}\\
&\qquad+\frac{1}{\rho+\epsilon}\Big(\frac{\rho}{t_{n-1}(1-\epsilon)}-\big(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\rho+\epsilon)^{j-n+1}}{t_j}\big)-\frac{z}{(\rho+\epsilon)^{n-1}v_0}\Big)\Big)t_n\\
&= \Big(\frac{\rho}{t_n(1-\epsilon)}-\frac{1}{t_n}-\frac{\rho}{t_{n-1}(\rho+\epsilon)(1-\epsilon)}+\frac{1}{\rho+\epsilon}\cdot\frac{1}{t_n}\Big)t_n\\
&= \frac{\rho}{1-\epsilon}-1-\frac{\rho}{(\rho+\epsilon)(1-\epsilon)}\cdot\frac{t_n}{t_{n-1}}+\frac{1}{\rho+\epsilon}\\
&= \frac{\rho}{1-\epsilon}-1+\frac{1}{\rho+\epsilon}-\frac{\rho}{(\rho+\epsilon)(1-\epsilon)}\cdot\frac{1}{r(n-1,\epsilon)}.
\end{aligned}\tag{36}$$

断言：对于所有 $n\in\{0,\dots,\ell-1\}$，我们有

$$r(n,\epsilon)>\frac{r(n,0)}{1-\epsilon}. \tag{37}$$

断言的证明：我们通过归纳法证明该断言。对于 $n=0$，我们有

$$\frac{r(0,\epsilon)}{r(0,0)}=\frac{\frac{\rho}{1-\epsilon}-1-\frac{z}{v_0}t_0}{\rho-1-\frac{z}{v_0}t_0}=\frac{\rho-(1-\epsilon)\big(1+\frac{z}{v_0}t_0\big)}{\rho-\big(1+\frac{z}{v_0}t_0\big)}\cdot\frac{1}{1-\epsilon}\overset{\epsilon>0}{>}\frac{1}{1-\epsilon},$$

也就是说，(37) 对 $n=0$ 成立。

如果 $\rho<2$，不失一般性，我们可以假设 $\epsilon<1-\frac{\rho}{2}$，因为 ϵ 足够小。这就得到

$$t_0=r(0,\epsilon)t_1=\Big(\frac{\rho}{1-\epsilon}-1-\frac{z}{v_0}t_0\Big)t_1<\Big(\frac{\rho}{1-\epsilon}-1\Big)t_1\overset{\epsilon<1-\frac{\rho}{2}}{<}t_1,$$

即 $\ell = 0$，证明至此完成。因此，从现在起假设 $\rho \geq 2 > \varphi$。设对于某个 $n \in \{0, \dots, \ell - 2\}$，式（37）成立。那么

$$\frac{\rho}{\rho+\epsilon} \cdot \frac{1}{r(n,\epsilon)} \overset{\epsilon>0}{<} \frac{1}{r(n,\epsilon)} \overset{(37)}{<} \frac{1-\epsilon}{r(n,0)} \overset{\epsilon>0}{<} \frac{1}{r(n,0)} \tag{38}$$

and

$$\epsilon\rho(\rho+\epsilon) + (1-\epsilon)\rho = \epsilon\rho^2 + \epsilon^2\rho + \rho - \epsilon\rho = (\rho+\epsilon) + (\rho^2 - \rho - 1)\epsilon + \epsilon^2\rho \overset{\rho\geq 2}{\geq} \rho + \epsilon + \epsilon^2\rho > \rho + \epsilon$$

这等价于

$$\epsilon + \frac{1-\epsilon}{\rho+\epsilon} > \frac{1}{\rho}. \tag{39}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\frac{r(n+1,\epsilon)}{r(n+1,0)} &\overset{(36)}{=} \frac{\frac{\rho}{1-\epsilon} - 1 + \frac{1}{\rho+\epsilon} - \frac{\rho}{(\rho+\epsilon)(1-\epsilon)} \cdot \frac{1}{r(n,\epsilon)}}{\rho - 1 + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r(n,0)}} \\
&= \frac{\rho - 1 + \epsilon + \frac{1-\epsilon}{\rho+\epsilon} - \frac{\rho}{\rho+\epsilon} \cdot \frac{1}{r(n,\epsilon)}}{\rho - 1 + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r(n,0)}} \cdot \frac{1}{1-\epsilon} \\
&\overset{(38),(39)}{>} \frac{\rho - 1 + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r(n,0)}}{\rho - 1 + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r(n,0)}} \cdot \frac{1}{1-\epsilon} \\
&= \frac{1}{1-\epsilon},
\end{aligned}$$

这就证明了该断言。

注意，ℓ 依赖于 ϵ。因此，从现在开始，我们将其写作 $\ell(\epsilon)$。根据 $\ell(0)$ 的定义，对所有 $n \in \{0, \dots, \ell - 1\}$，我们有

$$r(n,0) \geq 1 \tag{40}$$

且 $r(\ell,0) < 1$。注意，根据定义，对于所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$(t_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ 在 ϵ 上连续。因此，如果 $\epsilon > 0$ 足够小（这是我们所假设的），则有 $r(\ell,\epsilon) < 1$，并且对所有 $n \in \{0, \dots, \ell - 1\}$，

$$r(n,\epsilon) \overset{(37)}{>} \frac{r(n,0)}{1-\epsilon} \overset{(40)}{\geq} \frac{1}{1-\epsilon}.$$

这立即推出了（35），从而完成了证明。 □

有了这些准备，我们现在可以定义一个 IncMaxCont 的实例，它排除了 GreedyScaling（c_1，ρ）的一个初始值。

定理 23。 设给定一个 IncMax 的实例，其价值函数为 $\bar{v}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，密度函数为 $d\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。设 $\rho \in (1, \varphi + 1)$ 且 $0 < c_1 < C$。那么存在一个 IncMax 的实例，其价值函数为 $v\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，密度函数为 $d\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $v(c) = \bar{v}(c)$ 对所有 $c \in [0, C]$ 均成立，并且对于此实例，GreedyScaling(c_1, ρ) 不是 ρ-竞争的。此外，存在某个 $C > 0$，使得对于所有 $c \geq C$，都可以改变 $v(c)$，同时不影响 GreedyScaling(c_1, ρ) 对此实例不是 ρ-竞争这一事实。

证明。如果 GreedyScaling(c_1, ρ) 对于由 $\bar{v}$ 给出的实例不是 ρ-竞争的，我们可以直接选择 $v = \bar{v}$ 和 C，使其取为某个值，使得 GreedyScaling(c_1, ρ) 不是 ρ-竞争的。设 GreedyScaling(c_1, ρ) 对于由 $\bar{v}$ 给出的实例是 ρ-竞争的，并令带有 $\bar{c}_1 = c_1$ 的 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots)$ 描述 GreedyScaling(c_1, ρ) 在该实例上的运行。我们将定义函数 v，使得 GreedyScaling(c_1, ρ) 在由 v 给出的实例上不是 ρ-竞争的。为此，我们将定义一列点及其关联价值，使得 GreedyScaling(c_1, ρ) 被迫选择这些点，而引理 20 将表明该序列并不有效。令 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 使得 $\bar{c}_{k-1} \leq C < \bar{c}_k$，令 $v_k := \bar{v}(\bar{c}_k)$，并令 $z := \sum_{j=1}^{k-1} \bar{c}_j$。

我们考虑递归定义的序列

$$t_0 = \bar{d}(\bar{c}_k), \qquad t_{n+1} = \frac{1}{\frac{\rho}{t_n(1-\epsilon)} - \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(\rho+\epsilon)^{j-n}}{t_j}\right) - \frac{z}{(\rho+\epsilon)^n v_k}} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

由于 $\rho < \varphi + 1$，根据引理 20，存在 $\epsilon' > 0$，使得对于所有 $\epsilon \in (0, \epsilon']$，都存在 $\ell' \in \mathbb{N}$，满足 $t_{\ell'} < 0$。令 $\epsilon \in (0, \epsilon']$ 足够小。由于 $t_{\ell'} < 0$，我们有

$$\frac{\rho}{t_{\ell'-1}(1-\epsilon)} - \left(\sum_{j=0}^{\ell'-1} \frac{(\rho+\epsilon)^{j-\ell'+1}}{t_j}\right) - \frac{z}{(\rho+\epsilon)^{\ell'-1} v_k} < 0,$$

也就是说，我们可以将 $\ell \in \{0, \dots, \ell' - 1\}$ 定义为满足以下条件的最小索引

$$\frac{1}{t_\ell} > \frac{\rho}{t_\ell(1-\epsilon)} - \left(\sum_{j=0}^{\ell} \frac{(\rho+\epsilon)^{j-\ell}}{t_j}\right) - \frac{z}{(\rho+\epsilon)^{\ell} v_k} = \frac{1}{t_{\ell+1}}. \tag{41}$$

对于 $n \in \{0, \dots, \ell\}$，令

$$x_{2n} := \frac{(\rho+\epsilon)^n v_k}{t_n}, \qquad v_{2n} := (\rho+\epsilon)^n v_k \tag{42}$$

and

$$x_{2n+1} := \frac{\rho(\rho+\epsilon)^n v_k}{(1-\epsilon)t_n}, \qquad v_{2n+1} := \rho(\rho+\epsilon)^n v_k. \tag{43}$$

对于 $c \in [0, x_0]$，令 $v(c) = \bar{v}(c)$；对于 $c > x_0$，令 v 为满足 $v(x_n) = v_n$ 的函数，对所有$n \in \{0, \dots, 2\ell\}$ 而言，该函数在这些点之间进行线性插值。根据引理 21 和引理 22，这是某个 IncMax 实例的有效价值函数。剩下需要证明的是，对于由 v 给出的实例，GreedyScaling(c_1, ρ) 并非 ρ-竞争的。

设 (c_1, c_2, ...) 为 v 给出的实例上由 GreedyScaling(c_1, ρ) 生成的解。注意，对于所有 $i \in \{1, \dots, k\}$，$c_i = \bar{c}_i$，因为对于所有 $c \in [0, \bar{c}_k]$，$v(c) = \bar{v}(c)]$,，即 $z = \sum_{j=1}^{k-1} c_j$。

断言：对于所有 $n \in \{0, \dots, \ell + 1\}$，我们有

$$d(c_{k+n}) = t_n. \tag{44}$$

断言的证明：我们用归纳法证明这一点。对于 $n = 0$，我们有

$$d(c_k) \overset{(16)}{=} \bar{d}(\bar{c}_k) = t_0, \tag{45}$$

其中我们用到了以下事实：对于所有 $c \in [0, \bar{c}_k]$，$v(c) = \bar{v}(c)$。

假设对于某个 $n \in \{0, \dots, \ell\}$，该断言对所有 $i \in \{0, \dots, n\}$ 都成立。根据 (42)，并且由于对于所有 $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，$v(c) = cd(d)$，对于所有 $j \in \{0, \dots, n\}$，我们有

$$d(x_{2j}) = \frac{v_{2j}}{c_{2j}} \overset{(42)}{=} t_j \overset{(44)}{=} d(c_{k+j}),$$

即，

$$c_{k+j} = x_{2j} \tag{46}$$

因为 d 严格递减。此外，我们有

$$v(x_{2j+1}) \overset{(43)}{=} \rho(\rho+\epsilon)^j v_k \overset{(42)}{=} \rho v(x_{2j}) \overset{(46)}{=} \rho v(c_{k+j}),$$

即，

$$p(c_{k+j}) = x_{2j+1}. \tag{47}$$

因为 v 是严格递增的。这得到

$$\begin{aligned} d(c_{k+n+1}) &\overset{(16)}{=} \frac{v(c_{k+n})}{p(c_{k+n}) - \sum_{j=1}^{k+n} c_j} \\ &\overset{(46),(47)}{=} \frac{v(x_{2n})}{x_{2n+1} - z - \sum_{j=0}^{n} x_{2j}} \\ &\overset{(42),(43)}{=} \frac{(\rho+\epsilon)^n v_k}{\frac{\rho(\rho+\epsilon)^n v_k}{(1-\epsilon)t_n} - z - \sum_{j=0}^{n} \frac{(\rho+\epsilon)^j v_k}{t_j}} \\ &= \frac{1}{\frac{\rho}{(1-\epsilon)t_n} - \frac{z}{(\rho+\epsilon)^n v_k} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(\rho+\epsilon)^{j-n}}{t_j}} \\ &= t_{n+1}, \end{aligned}$$

这就证明了该断言。

这意味着

$$\frac{1}{d(c_{k+\ell+1})} \overset{(44)}{=} \frac{1}{t_{\ell+1}} \overset{(41)}{<} \frac{1}{t_\ell} \overset{(44)}{=} \frac{1}{d(c_{k+\ell})},$$

也就是说，要么 $d(c_{k+\ell+1}) > d(c_{k+\ell})$，因此 $c_{k+\ell+1} < c_{k+\ell}$，因为 d 严格递减；要么$d(c_{k+\ell+1}) < 0$。在这两种情况下，根据命题 17，这意味着对于由 v 给出的实例，GreedyScaling(c_1, ρ) 都不是 ρ-竞争的。

请注意，在整个证明过程中，$c > x_{2\ell+1}$ 的价值 $v(c)$ 从未被用到。因此，令$C = x_{2\ell+1} + 1$ 是一个有效的选择。 □

如前所述，我们可以反复应用命题 23，排除所有可数的初始值集合，从而得到命题 3。

命题 3。对于每个可数的初始值集合 $S \subset \mathbb{R}_{>0}$，都存在一个 IncMaxCont 的实例，使得 GreedyScaling(c_1, ρ) 对任意 $c_1 \in S$ 和任意$\rho < \varphi + 1$都不是 ρ-竞争的。

3.2 一般下界

现在，我们想运用证明引理 20 和命题 3 时使用的技巧，为 IncMaxCont 的竞争比证明一个下界。令 ρ^* 为多项式 $-4\rho^6 + 24\rho^4 - \rho^3 - 30\rho^2 + 31\rho - 4$ 的唯一实根 $\rho \geq 1$。与之前一样，我们需要证明一个递归定义的序列会在某处变为负数。

引理 24. 对于 $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\epsilon > 0$，考虑如下递归定义的序列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$：

$$t_0 = 1, \qquad t_1 = \frac{1-\epsilon}{\rho}, \qquad t_n = \frac{1-\epsilon}{\frac{\rho}{t_{n-1}} - \frac{1}{t_{n-2}} - \frac{1}{\rho}\left(\sum_{j=0}^{n-3} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+2-n}}{t_j}\right)} \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

如果 $1 < \rho < \rho^*$，那么存在 $\epsilon' > 0$，使得对于所有 $\epsilon \in [0, \epsilon']$，都存在满足 $t_\ell < 0$ 的 $\ell \in \mathbb{N}$。

证明。令 $1 < \rho < \rho^*$。重新排列各项，可得

$$\frac{1-\epsilon}{t_n} = \frac{\rho}{t_{n-1}} - \frac{1}{t_{n-2}} - \frac{1}{\rho}\Big(\sum_{j=0}^{n-3} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+2-n}}{t_j}\Big) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

我们对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 代入 $a_n = 1/t_n$，得到递归定义的序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $a_0 = 1/\beta$，并且

$$(1-\epsilon)a_n = \rho a_{n-1} - a_{n-2} - \frac{1}{\rho}\Big(\sum_{j=0}^{n-3} (\rho+\epsilon)^{j+2-n} a_j\Big) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}. \tag{48}$$

这也意味着

$$(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)a_{n+1} = \rho(\rho+\epsilon)a_n - (\rho+\epsilon)a_{n-1} - \frac{1}{\rho}\Big(\sum_{j=0}^{n-2}(\rho+\epsilon)^{j+2-n}a_j\Big) \quad \text{对所有 } n\in\mathbb{N}\text{而言} \tag{49}$$

将 (49) 减去 (48)，得到

$$(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)a_{n+1} - (1-\epsilon)a_n = \Big(\rho(\rho+\epsilon)a_n - (\rho+\epsilon)a_{n-1} - \frac{1}{\rho}a_{n-2}\Big) - \Big(\rho a_{n-1} - a_{n-2}\Big)$$

对所有 $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ 均成立，从而得到

$$(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)a_{n+1} = (\rho^2+1+\rho\epsilon-\epsilon)a_n - (2\rho+\epsilon)a_{n-1} + \Big(1-\frac{1}{\rho}\Big)a_{n-2}$$

对于所有 $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$。结合初始值

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = \frac{\rho}{1-\epsilon}, \quad \text{and} \quad a_2 = \frac{\rho a_1 - a_0}{1-\epsilon} = \frac{\rho^2-1+\epsilon}{(1-\epsilon)^2}, \tag{50}$$

this 得到一个由特征多项式唯一确定的线性齐次递推关系 al

$$0 = x^3 - \frac{\rho^2+1+\rho\epsilon-\epsilon}{(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)}x^2 + \frac{2\rho+\epsilon}{(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)}x - \frac{1-\frac{1}{\rho}}{(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)}. \tag{51}$$

利用

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\rho^2+1+\rho\epsilon-\epsilon}{(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)}, \\ b &= \frac{2\rho+\epsilon}{(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)}, \\ c &= -\frac{1-\frac{1}{\rho}}{(1-\epsilon)(\rho+\epsilon)}, \end{aligned}$$

该多项式的判别式为

$$D(\rho,\epsilon) = \Big(\frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}\Big)^3.$$

特别地，我们有

$$D(\rho,0) = \frac{-4\rho^6+24\rho^4-\rho^3-30\rho^2+31\rho-4}{108\rho^5} > 0$$

因为 $1<\rho<\rho^*$。注意，a,b,c 在 ϵ 上均连续，因此 $D(\rho,\epsilon)$ 也连续。因此，存在 $\epsilon'>0$，使得对所有 $\epsilon\in[0,\epsilon']$，都有 $D(\rho,\epsilon)>0$。多项式的判别式满足 $D(\rho,\epsilon)>0$，这意味着 (51) 有一个实根 r_1 和两个共轭复根 r_2 与 $r_3=r_2$。我们希望用这些根表示递推关系，即希望找到 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{C}$，使得

$$a_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n + \lambda_3 r_3^n. \tag{52}$$

现在我们将证明 $\lambda_3=\lambda_2$。结合初始值 (50) 和 (52)，可得

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \\ \frac{\rho}{1-\epsilon} &= \lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2+\lambda_3 r_3, \\ \frac{\rho^2-1+\epsilon}{(1-\epsilon)^2} &= \lambda_1 r_1^2+\lambda_2 r_2^2+\lambda_3 r_3^2. \end{aligned}$$

这意味着

$$0 = \mathfrak{Im}(\lambda_1) + \mathfrak{Im}(\lambda_2) + \mathfrak{Im}(\lambda_3), \tag{53}$$
$$0 = \mathfrak{Im}(\lambda_1 r_1) + \mathfrak{Im}(\lambda_2 r_2) + \mathfrak{Im}(\lambda_3 r_3), \tag{54}$$
$$0 = \mathfrak{Im}(\lambda_1 r_1^2) + \mathfrak{Im}(\lambda_2 r_2^2) + \mathfrak{Im}(\lambda_3 r_3^2). \tag{55}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{Re}(r_1 - r_2)\mathfrak{Im}(\lambda_2 + \lambda_3) + \mathfrak{Im}(r_1 - r_2)\mathfrak{Re}(\lambda_2 - \lambda_3) \\
= \;& \mathfrak{Re}(r_1 - r_2)\mathfrak{Im}(\lambda_2) + \mathfrak{Im}(r_1 - r_2)\mathfrak{Re}(\lambda_2) \\
& + \mathfrak{Re}(r_1 - r_2)\mathfrak{Im}(\lambda_3) - \mathfrak{Im}(r_1 - r_2)\mathfrak{Re}(\lambda_3) \\
\overset{r_1 \in \mathbb{R}, r_3 = \overline{r_2}}{=} \;& \mathfrak{Re}(r_1 - r_2)\mathfrak{Im}(\lambda_2) + \mathfrak{Im}(r_1 - r_2)\mathfrak{Re}(\lambda_2) \\
& + \mathfrak{Re}(r_1 - r_3)\mathfrak{Im}(\lambda_3) + \mathfrak{Im}(r_1 - r_3)\mathfrak{Re}(\lambda_3) \\
= \;& \mathfrak{Im}\big((r_1 - r_2)\lambda_2 + (r_1 - r_3)\lambda_3\big) \\
\overset{r_1 \in \mathbb{R}}{=} \;& r_1 \mathfrak{Im}(\lambda_2) - \mathfrak{Im}(\lambda_2 r_2) + r_1 \mathfrak{Im}(\lambda_3) - \mathfrak{Im}(\lambda_3 r_3) \\
\overset{(53),(54)}{=} \;& -r_1 \mathfrak{Im}(\lambda_1) + \mathfrak{Im}(\lambda_1 r_1) \\
\overset{r_1 \in \mathbb{R}}{=} \;& 0
\end{aligned} \tag{56}$$

and

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{Re}(r_1^2 - r_2^2)\mathfrak{Im}(\lambda_2 + \lambda_3) + \mathfrak{Im}(r_1^2 - r_2^2)\mathfrak{Re}(\lambda_2 - \lambda_3) \\
= \;& \mathfrak{Re}(r_1^2 - r_2^2)\mathfrak{Im}(\lambda_2) + \mathfrak{Im}(r_1^2 - r_2^2)\mathfrak{Re}(\lambda_2) \\
& + \mathfrak{Re}(r_1^2 - r_2^2)\mathfrak{Im}(\lambda_3) - \mathfrak{Im}(r_1^2 - r_2^2)\mathfrak{Re}(\lambda_3) \\
\overset{r_1 \in \mathbb{R}, r_3 = \overline{r_2}}{=} \;& \mathfrak{Re}(r_1^2 - r_2^2)\mathfrak{Im}(\lambda_2) + \mathfrak{Im}(r_1^2 - r_2^2)\mathfrak{Re}(\lambda_2) \\
& + \mathfrak{Re}(r_1^2 - r_3^2)\mathfrak{Im}(\lambda_3) + \mathfrak{Im}(r_1^2 - r_3^2)\mathfrak{Re}(\lambda_3) \\
= \;& \mathfrak{Im}\big((r_1^2 - r_2^2)\lambda_2 + (r_1^2 - r_3^2)\lambda_3\big) \\
\overset{r_1 \in \mathbb{R}}{=} \;& r_1^2 \mathfrak{Im}(\lambda_2) - \mathfrak{Im}(\lambda_2 r_2^2) + r_1^2 \mathfrak{Im}(\lambda_3) - \mathfrak{Im}(\lambda_3 r_3^2) \\
\overset{(53),(55)}{=} \;& -r_1^2 \mathfrak{Im}(\lambda_1) + \mathfrak{Im}(\lambda_1 r_1^2) \\
\overset{r_1 \in \mathbb{R}}{=} \;& 0.
\end{aligned} \tag{57}$$

N注意到 $(r_1^2 - r_2^2) = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2)$，并且事实 $(r_1 + r_2) \notin \mathbb{R}$ 意味着该矩阵 x

$$M := \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(r_1 - r_2) & \mathfrak{Im}(r_1 - r_2) \\ \mathfrak{Re}(r_1^2 - r_2^2) & \mathfrak{Im}(r_1^2 - r_2^2) \end{pmatrix}$$

的秩为 2，即，由 (56) 和 (57) 给出的方程组 $M \cdot (\mathfrak{Im}(\lambda_2 + \lambda_3)\ \mathfrak{Re}(\lambda_2 - \lambda_3))^T = (0,0)^T$ 只有解 $(0,0)^T$。由此可得 $\mathfrak{Im}(\lambda_2) = -\mathfrak{Im}(\lambda_3)$ 且 $\mathfrak{Re}(\lambda_2) = \mathfrak{Re}(\lambda_3)$，也就是说，我们有 $\lambda_3 = \lambda_2$，并且根据 (53)，有 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$。因此，递推关系可以写成

$$a_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n + \overline{\lambda_2 r_2^n} = \lambda_1 r_1^n + 2\mathfrak{Re}(\lambda_2 r_2^n).$$

我们有 $|r_1| < 1$ 和 $|r_2| > 1$。存在 $\ell \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathfrak{Re}(\lambda_2 r_2^\ell) < -\frac{\lambda_1}{2}$，因为 $r_2 \notin \mathbb{R}$ 和 $|r_2| > 1$。因此，$a_\ell = \lambda_1 r_1^\ell + 2\mathfrak{Re}(\lambda_2 r_2^\ell) < \lambda_1 r_1^\ell - \lambda_1 < 0$，其中最后一个不等式由事实 $|r_1| < 1$ 得出。 □

有了这个引理，我们就可以构造IncMaxCont 的竞争比下界，并据此通过命题 12 和命题 14 得到IncMax的下界。回顾一下，$\rho^* \approx 2.246$ 是方程 $-4\rho^6 + 24\rho^4 - \rho^3 - 30\rho^2 + 31\rho - 4$的唯一解 $\rho \geq 1$。

定理 4. IncMax 问题的竞争比至少为 2.246。

证明。令 $\rho < \rho^*$。根据引理 24，存在 $\epsilon' > 0$ 使得，对于所有 $\epsilon \in (0, \epsilon']$，递归定义的序列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$t_0 = 1, \qquad t_1 = \frac{1-\epsilon}{\rho}, \qquad t_n = \frac{1-\epsilon}{\frac{\rho}{t_{n-1}} - \frac{1}{t_{n-2}} - \frac{1}{\rho}\left(\sum_{j=0}^{n-3} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+2-n}}{t_j}\right)} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

在某一点变为负值。因此，对于 $\epsilon > 0$，我们可以将 $\ell(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 定义为满足 $\frac{1}{t_{\ell(\epsilon)}} \geq \frac{1}{t_{\ell(\epsilon)+1}}$ 的最小价值。注意，当 $t_{\ell(\epsilon)+1} < 0$ 或 $t_{\ell(\epsilon)+1} \geq t_{\ell(\epsilon)}$ 时，情况就是如此。这意味着 $t_0 > t_1 > \cdots > t_{\ell(\epsilon)}$。令 $v_i = (\rho+\epsilon)^i$，并令 $\epsilon \in (0, \epsilon']$ 足够小，使得 $\ell := \ell(\epsilon) = \ell(0)$，并且对于所有 $n \in \{0, \ldots, \ell-1\}$，我们都有

$$\frac{1}{t_{n+1}} > \frac{\epsilon}{\rho+\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{t_n} + \frac{1}{v_n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{v_j}{t_j}\right), \tag{58}$$

这是可行的，因为该不等式对 $\epsilon = 0$ 成立。

我们考虑 IncMaxCont 的一个实例，其价值函数满足

$$v(0) = 0, \quad v\left(\frac{v_n}{t_n}\right) = v_n, \quad \text{and} \quad v\left(\frac{v_n}{t_{n+1}}\right) = v_n \quad \text{for all } n \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$$

并在这些点之间进行线性插值。这意味着，对于 $0 \leq c \leq 1$，有 $d(c) = 1$；对于 $\frac{v_n}{t_n} \leq c \leq \frac{v_n}{t_{n+1}}$，有 $v(c) = v_n$；对于 $\frac{v_n}{t_{n+1}} \leq c \leq \frac{v_{n+1}}{t_{n+1}}$，有 $d(c) = t_{n+1}$。

假设该问题实例存在一个 ρ-竞争解（c_0，……，c_N），其中某个 $N \in \mathbb{N}$。不失一般性，我们可以假设，对于所有 $n \in \{0, \ldots, N\}$，都有

$$d(c_n) \in \{t_0, t_1, \ldots, t_\ell\}. \tag{59}$$

如果情况并非如此，则对于某个 $i \in \{0, \ldots, N-1\}$，有 $\frac{v_i}{t_i} < c_n < \frac{v_i}{t_{i+1}}$。那么，我们可以通过设定 $c_n = \frac{v_i}{t_i}$ 来改进该解，因为 $v(c_n) = v_i = v\left(\frac{v_i}{t_i}\right)$，且 $\frac{v_i}{t_i} < c_n$；也就是说，该解以更快的速度获得相同的价值，并且可以更早开始添加下一个规模。此外，我们可以假设

$$d(c_n) > d(c_{n+1}) \tag{60}$$

对所有 $n \in \{0, \ldots, N-1\}$。否则，我们可以通过移除 c_n和 c_{n+1}中较小的一个来改进解。这也意味着 $N \leq \ell$。

现在我们将通过归纳法证明，对于 $n \in \{0, \ldots, N\}$，有

$$d(c_n) > t_{n+1}, \tag{61}$$

并且，对于 $n \in \{0, \ldots, N-1\}$，有

$$c_n \geq \frac{1}{\rho} \cdot \frac{v_n}{t_n}. \tag{62}$$

对于 $n = 0$，根据引理 16，我们有 $d(c_0) \geq \frac{1}{\rho} > \frac{1-\epsilon}{\rho}$，即 (61) 成立。如果 $c_0 < \frac{1}{\rho} \cdot \frac{v_0}{t_0} = \frac{1}{\rho}$，那么只添加 c_0 所得的解在规模不超过 $p(c_0) = \rho c_0$ 时是 ρ-竞争的。根据引理 16，我们有

$$d(c_1) \geq \frac{v(c_0)}{p(c_0) - \sum_{j=0}^{0} c_j} = \frac{c_0 t_0}{\rho c_0 - c_0} = \frac{1}{\rho - 1} > \frac{1-\epsilon}{\rho} = t_1,$$

即，利用 (59)，我们得到 $d(c_1) = t_0$，这与 (60) 矛盾。因此，$c_0 \geq \frac{1}{\rho} \cdot \frac{v_0}{t_0}$，也就是说 (62) 同样成立。现在，假设对于某个 $n \in \{0, \ldots, N-1\}$，(61) 和 (62) 对所有 $i \in \{0, \ldots, n\}$ 均成立。由于 $c_n \geq \frac{1}{\rho} \cdot \frac{v_n}{t_n}$，我们有

$$p(c_n) = \frac{\rho v(c_n)}{t_{n+1}}. \tag{63}$$

注意，对于所有 $i \in \{0, \ldots, N\}$，我们有 $d(c_i) \in \{t_0, \ldots, t_\ell\}$，并且 $d(c_{i+1}) < d(c_i)$。我们有 $t_0 > \cdots > t_\ell$；结合 $i \in \{0, \ldots, n\}$ 对应的 (61)，可推出对于所有$i \in \{0, \ldots, n\}$，$d(c_i) = t_i$。因此，$c_n \leq \frac{v_n}{t_n}$，从而

$$v(c_n) \leq v\left(\frac{v_n}{t_n}\right) = v_n. \tag{64}$$

根据引理 16，c_{n+1} 必须满足

$$\begin{aligned}
d(c_{n+1}) &\geq \frac{v(c_n)}{p(c_n)-\sum_{j=0}^{n} c_j} \overset{(63)}{=} \frac{v(c_n)}{\frac{\rho v(c_n)}{t_{n+1}}-\sum_{j=0}^{n} c_j} \\
&\overset{(62)}{\geq} \frac{v(c_n)}{\frac{\rho v(c_n)}{t_{n+1}}-c_n-\frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{v_j}{t_j}} \\
&= \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_n}-\frac{1}{\rho v(c_n)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\rho+\epsilon)^j}{t_j}} \\
&\overset{(64)}{\geq} \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_n}-\frac{1}{\rho v_n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\rho+\epsilon)^j}{t_j}\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_n}-\frac{1}{\rho}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\rho+\epsilon)^{j-n}}{t_j}\right)} \\
&= \frac{1}{1-\epsilon}t_{n+2} > t_{n+2}.
\end{aligned}$$

由于 $t_0 > \cdots > t_\ell$，我们有 $d(c_{n+1}) \notin \{t_{n+2}, \ldots, t_\ell\}$，这意味着 $d(c_{n+1}) = t_{n+1}$。因此，(61) 对 $n+1$ 成立。现在，假设对于某个 $n \in \{0, \ldots, N-2\}$，(61) 和 (62) 对所有$i \in \{0, \ldots, n\}$ 都成立，并假设 (62) 对 $n+1$ 不成立，即我们有 $c_{n+1} < \frac{1}{\rho}\cdot\frac{v_{n+1}}{t_{n+1}}$。那么，$v(c_{n+1}) = c_{n+1}t_{n+1} < \frac{1}{\rho}v_{n+1}$，也就是说，解 $(c_0, \ldots, c_{n+1})$ 在规模 $p(c_{n+1}) = \rho v_{(c_{n+1})}t_{n+1} = \rho c_{n+1}$ 之前是 ρ-竞争的。根据引理 16，解中的下一个规模必须满足

$$\begin{aligned}
d(c_{n+2}) &\geq \frac{v(c_{n+1})}{p(c_{n+1})-\sum_{j=0}^{n+1} c_j} = \frac{v(c_{n+1})}{\rho c_{n+1}-\sum_{j=0}^{n+1} c_j} \\
&\overset{(62)}{\geq} \frac{v(c_{n+1})}{\rho c_{n+1}-c_{n+1}-c_n-\frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{v_j}{t_j}} \\
&= \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_{n+1}}-\frac{c_n}{v(c_{n+1})}-\frac{1}{\rho v(c_{n+1})}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{v_j}{t_j}} \\
&> \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_{n+1}}-\frac{\rho c_n}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_{n+1}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{v_j}{t_j}} \\
&\geq \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_{n+1}}-\frac{\rho v_n}{v_{n+1}t_{n+1}}-\frac{1}{v_{n+1}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{v_j}{t_j}} \\
&= \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_{n+1}}-\frac{\rho}{\rho+\epsilon}\cdot\frac{1}{t_{n+1}}-\frac{\rho}{\rho+\epsilon}\frac{1}{\rho v_n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{v_j}{t_j}} \\
&\geq \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_{n+1}}-\frac{\rho}{\rho+\epsilon}\cdot\frac{1}{t_n}-\frac{\rho}{\rho+\epsilon}\frac{1}{\rho v_n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{v_j}{t_j}} \\
&\overset{(58)}{\geq} \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_n}-\frac{1}{\rho v_n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{v_j}{t_j}} \\
&= \frac{1}{\frac{\rho}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_n}-\frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\rho+\epsilon)^{j-n}}{t_j}} \\
&= \frac{1}{1-\epsilon}t_{n+2} > t_{n+2}.
\end{aligned}$$

由于 $t_0 > \cdots > t_\ell$，我们有 $d(c_{n+2}) \notin \{t_{n+2}, \ldots, t_\ell\}$。但是，对于所有 $i \in \{0, \ldots, n+1\}$，我们也有$d(c_i) = t_i$，因此 $d(c_{n+2}) \notin \{t_0, \ldots, t_{n+1}\}$。这与（59）矛盾，因此（62）对 $n+1$ 成立。

我们已经证明，对于所有 $n \in \{0, \ldots, N\}$，(61) 都成立。结合 $d(c_n) \in \{t_0, \ldots, t_\ell\}$ 对于 $n \in \{0, \ldots, N\}$、$d(c_0) > \cdots > d(c_N)$ 和 $t_0 > \cdots > t_\ell$ 这一事实，我们得到 $N \geq \ell - 1$，并且对于所有 $n \in \{0, \ldots, \ell-1\}$，$d(c_n) = t_n$。如果 $N = \ell - 1$，则该解的价值为 $v(c_{\ell-1})$，对应

规模 $\frac{v_\ell}{t_\ell}$。然而，该规模下的最优解的价值为 $v(\frac{v_\ell}{t_\ell}) = v_\ell = (\rho+\epsilon)v_{\ell-1} \geq (\rho+\epsilon)v(c_{\ell-1})$。因此，$(c_0, \ldots\ldots, c_N)$ 将不是 ρ-竞争的。因此，我们有 $N = \ell$。通过类似的论证，我们得到 $c_\ell \geq \frac{1}{\rho} \cdot \frac{v_\ell}{t_\ell}$。由 (61) 可知，$d(c_\ell) > t_{\ell+1}$。如果 $t_{\ell+1} \geq t_\ell$，我们知道 $d(c_\ell) \neq t_\ell$。但我们还有 $d(c_\ell) \notin \{t_0, \ldots, t_{\ell-1}\}$，因为 $d(c_\ell) < d(c_{\ell-1}) = t_{\ell-1}$ 且 $t_0 < \cdots < t_{\ell-1}$。这与假设 $d(c_\ell) \in \{t_0, \ldots, t_\ell\}$ 矛盾。因此，$t_{\ell+1} < t_\ell$。根据 ℓ 的定义，我们有 $\frac{1}{t_{\ell+1}} < \frac{1}{t_\ell}$，这意味着

$$0 > t_{\ell+1} = \frac{1-\epsilon}{\frac{\rho}{t_\ell} - \frac{1}{t_{\ell-1}} - \frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{\ell-2} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+1-\ell}}{t_j}} > \frac{1}{\frac{\rho}{t_\ell} - \frac{1}{t_{\ell-1}} - \frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{\ell-2} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+1-\ell}}{t_j}}.$$

这等价于

$$\frac{\rho}{t_\ell} - \frac{1}{t_{\ell-1}} - \frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{\ell-2} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+1-\ell}}{t_j} < 0. \tag{65}$$

我们有 $p(c_{\ell-1}) = \rho v_{(c_{\ell-1})\ t_\ell}$，因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_{\ell-1}}\Big(p(c_{\ell-1}) - \sum_{j=0}^{\ell-1} c_j\Big) &= \frac{1}{v_{\ell-1}}\Big(\frac{\rho v(c_{\ell-1})}{t_\ell} - c_{\ell-1} - \sum_{j=0}^{\ell-2} c_j\Big) \\
&\overset{(62)}{\leq} \frac{1}{v_{\ell-1}}\Big(\frac{\rho v(c_{\ell-1})}{t_\ell} - c_{\ell-1} - \frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{\ell-2} \frac{v_j}{t_j}\Big) \\
&= \frac{c_{\ell-1}}{v_{\ell-1}}\Big(\rho\frac{t_{\ell-1}}{t_\ell} - 1\Big) - \frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{\ell-2} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+1-\ell}}{t_j}.
\end{aligned}$$

由 $c_{\ell-1} \leq \frac{v_{\ell-1}}{t_{\ell-1}}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_{\ell-1}}\Big(p(c_{\ell-1}) - \sum_{j=0}^{\ell-1} c_j\Big) &\leq \frac{1}{t_{\ell-1}}\Big(\rho\frac{t_{\ell-1}}{t_\ell} - 1\Big) - \frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{\ell-2} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+1-\ell}}{t_j} \\
&= \frac{\rho}{t_\ell} - \frac{1}{t_{\ell-1}} - \frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{\ell-2} \frac{(\rho+\epsilon)^{j+1-\ell}}{t_j} \\
&\overset{(65)}{<} 0.
\end{aligned}$$

由 $v_{\ell-1} = (\rho+\epsilon)^{\ell-1} > 0$，我们发现 $p(c_{\ell-1}) - \sum_{j=0}^{j-1} c_j < 0$，这与引理 16 (iii) 以及 $(c_0, \ldots, c_N)$ 是 ρ-竞争的这一事实相矛盾。因此，不存在 ρ-竞争的解。

□

4 随机化增量最大化

我们转而分析用于求解（离散） IncMaxSep 问题的随机化算法。与确定性算法不同，我们不将算法获得的价值与最优解进行比较，而是比较算法获得的期望值。这使我们能够找到一种随机化竞争比小于 2.24 的算法，而定理 4 给出了确定性算法竞争比的下界。

4.1 随机化算法

缩放算法，即规模 c_i 是按照适当的缩放因子 $\delta > 1$选择的算法，已被证明在该问题的确定性版本中表现良好。事实上，目前已知的最佳算法就是一种缩放算法 [1]。分析表明，缩放算法的平均表现优于实际的竞争比，而后者仅在少数规模下是紧确的，

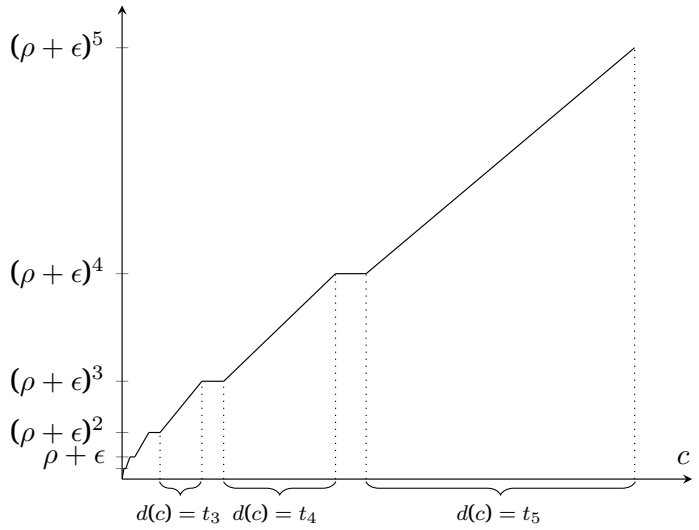

图4: $\rho = 2.1$的下界构造。

通过随机化初始规模 c_0，我们得以在分析中平均消除最坏情况规模的影响。

我们描述用于 IncMaxSep的随机化算法 RandomizedScaling 。为此，我们考虑函数

$$\begin{aligned} g(x) \quad = \quad & \frac{1-\sqrt{\left(\frac{x^3-1}{x-1}x^z-1\right)^2+4x^{5+2z}}}{2\log(x)x^{3+z}} - (1-\delta)\frac{1-x^{-3}}{x-1} + z - \frac{1-x^{-3}}{2(x-1)\log(x)} \\ & -\Big(\frac{1-x^{-3}}{x-1} - \frac{1}{x^{3+z}}\Big)\Big(\log_x\Big(\sqrt{\Big(\frac{x^3-1}{x-1}x^z-1\Big)^2+4x^{5+2z}} - \frac{x^3-1}{x-1}x^z + 1\Big) \\ & -\log_x(2) - 3\Big) - \frac{2x^{2+z}}{\Big(\sqrt{\left(\frac{x^3-1}{x-1}x^z-1\right)^2+4x^{5+2z}} - \frac{x^3-1}{x-1}x^z + 1\Big)\log(x)} \\ & +\frac{2}{\log(x)} - \Big(1+\frac{1}{x^{3+z}}\Big)\Big(\log_x(x^{3+z}+1) + \log_x(x-1) - \log_x(x^4-1)\Big) \end{aligned}$$

其中 $z = \log_x\Big(\frac{x^4-1}{x-1} - 1\Big) - 3$。令 $r \approx 5.1646$ 为 g的唯一最大值。算法RandomizedScaling 首先从均匀分布中随机选择 $\epsilon \in (0,1)$。对于所有 $i \in \mathbb{N}_0$，它计算 $\tilde{c}_i := r^{i+\epsilon}$和 $c_i := \lfloor \tilde{c}_i \rfloor$，并返回解$(c_0, c_1, c_2, \dots)$。[1]这种方法类似于一种用于求解 [15], 中的 CowPath问题的随机化算法，该算法也会计算这样的序列，但会以不同的方式选择 $r \in \mathbb{R}$，以便探索星形图。

我们定义

$$\tilde{t}_i := \sum_{j=0}^{i} \tilde{c}_j = r^\epsilon \frac{r^{i+1}-1}{r-1} \qquad \text{and} \qquad t_i := \sum_{j=0}^{i} c_j.$$

˜为提高可读性，我们令 $\tilde{c}_{-1} = c_{-1} = t_{-1} = \tilde{t}_{-1} = 0$。注意，对于所有 $i \in \mathbb{N}_0$，都有

$$t_{i-1} \le \tilde{t}_{i-1} = r^\epsilon \frac{r^i-1}{r-1} \overset{r>2}{\le} r^{i+\epsilon} - r^\epsilon \le r^{i+\epsilon} - 1 = \tilde{c}_i - 1 \le c_i. \tag{66}$$

对于每个规模 $c \in \mathbb{N}_0$，我们将算法 RandomizedScaling 创建的解记为 $X_{\text{ALG}}(c)$。注意，规模为 $c \in \mathbb{N}_0$ 的最优解由集合 R_c 给出，因为 $v_1 \le v_2 \le \dots$和 $d_1 \ge d_2 \ge \dots$。因此，规模为 c 的最优解的价值为 v_c。

[1]根据此定义，该算法在有限实例上不会终止。为避免这种情况，只需停止计算大小 c_i，直到它们大于实例中的元素数量。

为了求出 RandomizedScaling 的随机化竞争比上界，我们需要以下引理。该引理根据 C 所在的区间，对 RandomizedScaling 在固定规模 $C \in \mathbb{N}$ 下的解的期望值作出估计。

引理 25. 设 $C \in \mathbb{N}$。

1. 对于 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，当 $\mathbb{P}[C \in (c_{i-1}, c_i]] > 0$ 时，我们有

$$\mathbb{E}\big[f(X_{\text{ALG}}(C)) \mid C \in (c_{i-1}, c_i]\big] \geq \mathbb{E}\Big[\max\Big\{\frac{c_{i-1}}{C}, \frac{C - t_{i-1}}{\max\{C, c_i\}}\Big\} \;\Big|\; C \in (c_{i-1}, c_i]\Big] \cdot v_C.$$

2. 对于 $i \in \mathbb{N}$，当 $\mathbb{P}[C \in (\tilde{c}_i, \tilde{t}_i - 1]] > 0$ 时，我们有

$$\mathbb{E}\big[f(X_{\text{ALG}}(C)) \mid C \in (\tilde{c}_i, \tilde{t}_i - 1]\big] \geq \mathbb{E}\Big[1 - \frac{\tilde{t}_{i-1}}{C} \;\Big|\; C \in (\tilde{c}_i, \tilde{t}_i - 1]\Big] \cdot v_C.$$

3. 对于 $i \in \mathbb{N}$，当 $\mathbb{P}[C \in (\tilde{t}_{i-1} - 1, \tilde{c}_i]] > 0$ 时，我们有

$$\mathbb{E}\big[f(X_{\text{ALG}}(C)) \mid C \in (\tilde{t}_{i-1} - 1, \tilde{c}_i]\big] \geq \mathbb{E}\Big[\max\Big\{\frac{\tilde{c}_{i-1} - 1}{C}, \frac{C - \tilde{t}_{i-1}}{\tilde{c}_i}\Big\} \;\Big|\; C \in (\tilde{t}_{i-1} - 1, \tilde{c}_i]\Big] \cdot v_C.$$

证明。我们证明 *(i)*。对于 $C \in (t_{i-1}, c_i]$，当 $i \in \mathbb{N}_0$ 时，算法 RandomizedScaling 已完成添加规模为 c_{i-1} 的最优解，并正在添加规模为 c_i 的最优解。因此，

$$\begin{aligned} f(X_{\text{ALG}}(C)) &= \max\{v_{c_{i-1}}, (C - t_{i-1})d_{c_i}\} \\ &= \max\Big\{c_{i-1}d_{c_{i-1}}, (C - t_{i-1})\frac{v_{c_i}}{c_i}\Big\} \\ &\overset{d \text{ dec.}, v \text{ inc.}}{\geq} \max\Big\{c_{i-1}d_C, (C - t_{i-1})\frac{v_C}{c_i}\Big\} \\ &= \max\Big\{\frac{c_{i-1}}{C}, \frac{C - t_{i-1}}{c_i}\Big\} \cdot v_C. \end{aligned} \tag{67}$$

现在，假设 $C \in (c_i, t_i]$，且 $i \in \mathbb{N}$。根据 (66)，我们有 $t_{i-1} \leq c_i$，即对于规模 C，算法 RandomizedScaling 已完成添加规模为 c_{i-1} 的最优解，并正在添加规模为 c_i 的最优解。因此，我们有

$$\begin{aligned} f(X_{\text{ALG}}(C)) &\geq \max\{v_{c_{i-1}}, (C - t_{i-1})d_{c_i}\} \\ &= \max\{c_{i-1}d_{c_{i-1}}, (C - t_{i-1})d_{c_i}\} \\ &\overset{d \text{ dec.}}{\geq} \max\{c_{i-1}d_C, (C - t_{i-1})d_C\} \\ &= \max\Big\{\frac{c_{i-1}}{C}, \frac{C - t_{i-1}}{C}\Big\} \cdot v_C. \end{aligned} \tag{68}$$

结合（67）和（68），对于 $C \in (c_{i-1}, c_i]$，我们得到

$$f(X_{\text{ALG}}(C)) \geq \max\Big\{\frac{c_{i-1}}{C}, \frac{C - t_{i-1}}{\max\{C, c_i\}}\Big\} \cdot v_C.$$

我们证明（*ii*）。对于 $C \in (\tilde{c}_i, \tilde{t}_i - 1]$ 且 $i \in \mathbb{N}$ 的情形，有 $C > \tilde{c}_i \geq c_i \overset{(66)}{\geq} t_{i-1}$，即算法 RandomizedScaling 已完成添加规模为 c_{i-1} 的最优解，且正在添加规模为 c_i 的最优解，或已完成添加规模为 c_i的最优解。因此，我们有

$$\begin{aligned} f(X_{\text{ALG}}(C)) &\geq \min\{(C - t_{i-1})d_{c_i}, v_{c_i}\} \\ &\geq \min\{C - \tilde{t}_{i-1}, c_i\}d_{c_i} \\ &\overset{C \leq \tilde{t}_i - 1}{=} (C - \tilde{t}_{i-1})d_{c_i} \\ &= \Big(1 - \frac{\tilde{t}_{i-1}}{C}\Big)\frac{d_{c_i}}{d_C} \cdot v_C \\ &\overset{d \text{ dec.}}{\geq} \Big(1 - \frac{\tilde{t}_{i-1}}{C}\Big) \cdot v_C. \end{aligned}$$

最后，我们证明（iii）。对于 $C \in (\tilde{t}_{i-1}-1, \tilde{c}_i]$ 且 $i \in \mathbb{N}$ 的情形，有 $C > \tilde{t}_{i-1}-1 \geq t_{i-1}-1$。由于$C$, $t_{i-1} \in \mathbb{N}$，这意味着 $C \geq t_{i-1}$，即算法 RandomizedScaling 已完成添加规模为 c_{i-1} 的最优解，且正在添加规模为 c_i 的解。因此，我们有

$$\begin{aligned} f(X_{\mathrm{ALG}}(C)) &= \max\{v_{c_{i-1}}, (C-t_{i-1})d_{c_i}\} \\ &= \max\Big\{c_{i-1}d_{c_{i-1}}, (C-t_{i-1})\frac{v_{c_i}}{c_i}\Big\} \\ &\overset{d \text{ dec.}, v \text{ inc.}}{\geq} \max\Big\{c_{i-1}d_C, (C-t_{i-1})\frac{v_C}{c_i}\Big\} \\ &= \max\Big\{\frac{c_{i-1}}{C}, \frac{C-t_{i-1}}{c_i}\Big\}\cdot v_C \\ &\geq \max\Big\{\frac{\tilde{c}_{i-1}-1}{C}, \frac{C-\tilde{t}_{i-1}}{c_i}\Big\}\cdot v_C, \end{aligned}$$

这里用到了这样一个事实：$C \leq \tilde{c}_i$ 和 $C \in \mathbb{N}$，因此 $C \leq c_i = \lfloor \tilde{c}_i \rfloor$。 □

在分析该算法时，还需要以下估计。

引理 26. 设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in (0,1]$ 满足 $r^{k+\delta} \geq \sum_{i=0}^{3} r^i$。则

$$\begin{aligned} g(r) \leq I(k,\delta) := &\int_{\min\{1,\mu(k-1)\}}^{1} 1 - \frac{\tilde{t}_{k-2}}{r^{k+\delta}}\,d\epsilon + \int_{\min\{1,\nu(k-1)\}}^{\min\{1,\mu(k-1)\}} \frac{\tilde{c}_{k-1}-1}{r^{k+\delta}}\,d\epsilon \\ &+ \int_{\delta}^{\min\{1,\nu(k-1)\}} \frac{r^{k+\delta}-\tilde{t}_{k-1}}{\tilde{c}_k}\,d\epsilon + \int_{\max\{0,\mu(k)\}}^{\delta} 1 - \frac{\tilde{t}_{k-1}}{r^{k+\delta}}\,d\epsilon \\ &+ \int_{\max\{0,\nu(k)\}}^{\max\{0,\mu(k)\}} \frac{\tilde{c}_k-1}{r^{k+\delta}}\,d\epsilon + \int_{0}^{\max\{0,\nu(k)\}} \frac{r^{k+\delta}-\tilde{t}_k}{\tilde{c}_{k+1}}\,d\epsilon \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mu(i) &= \log_r(r^{k+\delta}+1) + \log_r(r-1) - \log_r(r^{i+1}-1), \\ \nu(i) &= \log_r\Big(\sqrt{\Big(r^{k+\delta}\frac{1-r^{-(i+1)}}{r-1}-1\Big)^2 + 4r^{2k+2\delta-1}} - r^{k+\delta}\frac{1-r^{-(i+1)}}{r-1} + 1\Big) - \log_r(2) - i. \end{aligned}$$

证明. 根据 δ 和 k，这些积分中只有 3 个或 4 个非零。我们分别讨论不同的情形。

情形 1（$\nu(k) > 0$）：则

$$\begin{aligned} & \nu(k-1) + \log_r(2) + (k-1) \\ = \ & \log_r\Big(\sqrt{\Big(r^{k+\delta}\frac{1-r^{-k}}{r-1}-1\Big)^2 + 4r^{2k+2\delta-1}} - r^{k+\delta}\frac{1-r^{-k}}{r-1} + 1\Big) \\ \geq \ & \log_r\Big(\sqrt{\Big(r^{k+\delta}\frac{1-r^{-(k+1)}}{r-1}-1\Big)^2 + 4r^{2k+2\delta-1}} - r^{k+\delta}\frac{1-r^{-(k+1)}}{r-1} + 1\Big) \\ = \ & \nu(k) + \log_r(2) + k, \end{aligned}$$

也就是说，我们有 $\nu(k-1) \geq \nu(k)+1 > 1$。对于该不等式，我们用到了这样一个事实：对于 $a > b > 0$ an d

$x>0$，我们有 $\sqrt{b^2+x}-b>\sqrt{a^2+x}-a$。由此得到

$$
\begin{aligned}
& I(k,\delta) \\
= & \int_{\delta}^{1} \frac{\bar{c}-\frac{r^k-1}{r-1}r^{\epsilon}}{r^{k+\epsilon}}\mathrm{d}\epsilon \\
& +\int_{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)}^{\delta} 1-\frac{\frac{r^k-1}{r-1}r^{\epsilon}}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
& +\int_{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}+1\right)-\log_r(2)-k}^{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)} \frac{r^{k+\epsilon}-1}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
& +\int_{0}^{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}+1\right)-\log_r(2)-k} \frac{\bar{c}-\frac{r^{k+1}-1}{r-1}r^{\epsilon}}{r^{k+1+\epsilon}}\mathrm{d}\epsilon \\
= & \Big[-\frac{\bar{c}}{\log(r)r^{k+\epsilon}}-\frac{1-r^{-k}}{r-1}\epsilon\Big]_{\delta}^{1}+\Big[\epsilon-\frac{(r^k-1)r^{\epsilon}}{\log(r)(r-1)\bar{c}}\Big]_{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)}^{\delta} \\
& +\Big[\frac{r^{k+\epsilon}}{\log(r)\bar{c}}-\frac{\epsilon}{\bar{c}}\Big]_{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}+1\right)-\log_r(2)-k}^{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)} \\
& +\Big[-\frac{\bar{c}}{\log(r)r^{k+1+\epsilon}}-\frac{1-r^{-(k+1)}}{r-1}\epsilon\Big]_{0}^{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}+1\right)-\log_r(2)-k} \\
= & \delta+\frac{2+r^{-(k+\delta)}}{\log(r)}-\frac{2r^{k-1+\delta}}{\log(r)\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}+1\right)} \\
& -\frac{\sqrt{\left(\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}+1}{2\log(r)r^{k+\delta}}-\Big(\frac{1-r^{-(k+1)}}{r-1}-\frac{1}{r^{k+\delta}}\Big) \\
& \Big(\log_r\Big(\sqrt{\Big(\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}-1\Big)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-r^{-1}}{r-1}r^{\delta}+1\Big)-\log_r(2)-k\Big) \\
& -\frac{1-r^{-k}}{r-1}\big(1-\delta+\frac{1}{\log(r)}\big)-\Big(1+\frac{1}{r^{k+\delta}}\Big)\big(\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)\big) \\
=: & f_1(k,\delta).
\end{aligned}
$$

通过分析这个表达式可以看出，当 k 和 δ 较小时，该表达式取得最小值。

我们有 $\nu(k)>0$，这仅在 $\delta>\log_r\big(\frac{r-r^{-k}}{2\ r-1\ ()}+\sqrt{\big(\frac{r-r^{-k}}{2\ r-1\ ()}\big)^2+r+r^{-k}}\big)$ 时成立。因此，$f_1(k,\delta)$ 在 $k=3$ 和 $\delta=\log_r\big(\frac{r-r^{-3}}{2\ r-1\ ()}+\sqrt{\big(\frac{r-r^{-3}}{2\ r-1\ ()}\big)^2+r+r^{-2}}\big)$ 时取最小值。计算价值后，我们得到

$$
I(k,\delta)\geq f_1(k,\delta)\geq f_1\Big(3,\log_r\Big(\frac{r-r^{-3}}{2(r-1)}+\sqrt{\Big(\frac{r-r^{-3}}{2(r-1)}\Big)^2+r+r^{-2}}\Big)\Big)>0.566>g(r).
$$

情形 2（$\nu(k) \le 0$ 和 $\nu(k-1) > 1$）：则

$$
\begin{aligned}
& I(k,\delta) \\
= & \int_{\delta}^{1} \frac{\bar{c} - \frac{r^k-1}{r-1} r^{\epsilon}}{r^{k+\epsilon}} \mathrm{d}\epsilon \\
& + \int_{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)}^{\delta} 1 - \frac{\frac{r^k-1}{r-1} r^{\epsilon}}{\bar{c}} \mathrm{d}\epsilon \\
& + \int_{0}^{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)} \frac{r^{k+\epsilon}-1}{\bar{c}} \mathrm{d}\epsilon \\
= & \Big[-\frac{\bar{c}}{\log(r) r^{k+\epsilon}} - \frac{1-r^{-k}}{r-1}\epsilon \Big]_{\delta}^{1} \\
& + \Big[\epsilon - \frac{(r^k-1) r^{\epsilon}}{\log(r)(r-1)\bar{c}} \Big]_{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)}^{\delta} \\
& + \Big[\frac{r^{k+\epsilon}}{\log(r)\bar{c}} - \frac{\epsilon}{\bar{c}} \Big]_{0}^{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)} \\
= & -\frac{r^{\delta}}{\log(r) r} - \frac{1-r^{-k}}{r-1}(1-\delta+\frac{1}{\log(r)}) + \frac{2+r^{-(k+\delta)}}{\log(r)} - \frac{1}{\log(r) r^{\delta}} \\
& + \delta - \big(1+\frac{1}{r^{k+\delta}}\big)\big(\log_r(r^{k+\delta}+1) + \log_r(r-1) - \log_r(r^{k+1}-1)\big) \\
=: & \ f_2(k,\delta)
\end{aligned}
$$

通过分析这个表达式可以看出，当 k 较小且 δ 较大时，表达式取得最小值。我们有 $\nu(k) \le 0$ 和 $\nu(k-1) > 1$，这仅在满足条件 $\delta \in (0,1]$ 时成立

$$
\delta > \log_r\Big(\frac{r^2 - r^{2-k}}{2(r-1)} + \sqrt{ \big(\frac{r^2 - r^{2-k}}{2(r-1)}\big)^2 + r^3 + r^{3-k} } \Big)
$$

and

$$
\delta \le \log_r\Big(\frac{r - r^{-k}}{2(r-1)} + \sqrt{ \big(\frac{r - r^{-k}}{2(r-1)}\big)^2 + r + r^{1-k} } \Big).
$$

因此，当 $k = 3$ 时，$f_2(k,\ \delta)$ 取得最小值，并且 $\delta = \log_r\Big(\frac{r-r^{-3}}{2(r-1)} + \sqrt{ \big(\frac{r-r^{-3}}{2(r-1)}\big)^2 + r + r^{-2} } \Big)$。计算价值可得

$$
I(k,\delta) \ge f_2(k,\delta) \ge f_2\Big(3, \log_r\Big(\frac{r - r^{-3}}{2(r-1)} + \sqrt{ \big(\frac{r - r^{-3}}{2(r-1)}\big)^2 + r + r^{-2} } \Big)\Big) > 0.566 > g(r).
$$

情况 3（$\nu(k-1) \le 1$ 和 $\mu(k) > 0$）：那么

$$
\begin{aligned}
\mu(k-1) &= \mu(k) + \log_r(r^{k+1}-1) - \log_r(r^k - 1) \\
&= \mu(k) + 1 + \log_r\Big(\frac{r^k - r^{-1}}{r^k - 1}\Big) \\
&\ge \mu(k) + 1 \\
&> 1.
\end{aligned} \tag{69}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
& I(k,\delta) \\
= & \int_{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)-\log_r(2)-k+1}^{1} \frac{r^{k-1+\epsilon}-1}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
& + \int_{\delta}^{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)-\log_r(2)-k+1} \frac{\bar{c}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\epsilon}{r^{k+\epsilon}}\mathrm{d}\epsilon \\
& + \int_{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)}^{\delta} 1-\frac{\frac{r^k-1}{r-1}r^\epsilon}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
& + \int_{0}^{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)} \frac{r^{k+\epsilon}-1}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
= & \Big[\frac{r^{k-1+\epsilon}}{\log(r)\bar{c}}-\frac{\epsilon}{\bar{c}}\Big]_{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)-\log_r(2)-k+1}^{1} \\
& + \Big[-\frac{\bar{c}}{\log(r)r^{k+\epsilon}}-\frac{1-r^{-k}}{r-1}\epsilon\Big]_{\delta}^{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)-\log_r(2)-k+1} \\
& + \Big[\epsilon-\frac{(r^k-1)r^\epsilon}{\log(r)(r-1)\bar{c}}\Big]_{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)}^{\delta} \\
& + \Big[\frac{r^{k+\epsilon}}{\log(r)\bar{c}}-\frac{\epsilon}{\bar{c}}\Big]_{0}^{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)} \\
= & -\frac{1-r^{-k}}{2(r-1)\log(r)}-\frac{2r^{k-1+\delta}}{\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)\log(r)} \\
& + \frac{1-\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}}{2\log(r)r^{k+\delta}}-\Big(\frac{1-r^{-k}}{r-1}-\frac{1}{r^{k+\delta}}\Big)-(1-\delta)\frac{1-r^{-k}}{r-1}+\delta \\
& \Big(\log_r\Big(\sqrt{\Big(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\Big)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\Big)-\log_r(2)-k\Big) \\
& + \frac{2}{\log(r)}-\Big(1+\frac{1}{r^{k+\delta}}\Big)\Big(\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)\Big) \\
=: & \ f_3(k,\delta)
\end{aligned}
$$

通过分析这个表达式可以看出，当 k 和 δ 较小时，它取得最小值。我们有 $\nu(k-1)\leq 1$ 且 $\mu(k)>0$，这仅在以下情况下成立：

$$\log_r\Big(\frac{r^{k+1}-1}{r-1}-1\Big)-k<\delta\leq\log_r\Big(\frac{r^2-r^{2-k}}{2(r-1)}+\sqrt{\Big(\frac{r^2-r^{2-k}}{2(r-1)}\Big)^2+r^3+r^{3-k}}\Big).$$

Thus, $f_3(k,\delta)$ 在 $k=3$ 和 $\delta=\log_r\left(\frac{r^4-1}{r-1}-1\right)-3$ 的条件下取最小值。计算价值后，我们得到 in

$$I(k,\delta)\geq f_3(k,\delta)\geq f_3\Big(3,\log_r\Big(\frac{r^4-1}{r-1}-1\Big)-3\Big)=g(r).$$

情况 4（$\mu(k) \le 0$ 和 $\mu(k-1) > 1$）：那么

$$
\begin{aligned}
& I(k,\delta) \\
= & \int_{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)-\log_r(2)-k+1}^{1} \frac{r^{k-1+\epsilon}-1}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
& + \int_{\delta}^{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)-\log_r(2)-k+1} \frac{\bar{c}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\epsilon}{r^{k+\epsilon}}\mathrm{d}\epsilon \\
& + \int_{0}^{\delta} 1-\frac{\frac{r^k-1}{r-1}r^\epsilon}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
= & \left[\frac{r^{k-1+\epsilon}}{\log(r)\bar{c}}-\frac{\epsilon}{\bar{c}}\right]_{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)-\log_r(2)-k+1}^{1} \\
& + \left[-\frac{\bar{c}}{\log(r)r^{k+\epsilon}}-\frac{1-r^{-k}}{r-1}\epsilon\right]_{\delta}^{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)-\log_r(2)-k+1} \\
& + \left[\epsilon-\frac{(r^k-1)r^\epsilon}{\log(r)(r-1)\bar{c}}\right]_0^\delta \\
= & \frac{1}{\log(r)r^\delta}-\frac{1}{r^{k+\delta}}-\frac{1}{2\log(r)r^{k+\delta}}+\frac{1}{\log(r)}+\frac{1-r^{-k}}{r-1}\delta \\
& - \frac{2r^{k-1+\delta}}{\log(r)\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)} - \left(\frac{1-r^{-k}}{r-1}-\frac{1}{r^{k+\delta}}\right) \\
& \left(\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta+1\right)-\log_r(2)-k+1\right) \\
& - \frac{\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^\delta-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}}{2\log(r)r^{k+\delta}}+\delta-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r^\delta}\right)\frac{1-r^{-k}}{\log(r)(r-1)} \\
=: & \ f_4(k,\delta).
\end{aligned}
$$

当 k 较小时，该表达式取最小值。

注意，我们有 $0 \ge \mu(k) = \log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^{k+1}-1)$，这等价于

$$
r^{k+\delta}+1 \le \frac{r^{k+1}-1}{r-1} = \sum_{i=0}^{k} r^i.
$$

由于 $r^{k+\delta} \ge \sum_{i=0}^{3} r^i$，我们有 $k \ge 4$，即对于 $k=4$，$f_4(k,\delta)$ 取最小值。通过分析该函数关于 $k=4$ 的情况，我们得到

$$
I(k,\delta) \ge f_4(k,\delta) \ge f_4(4,\delta) > 0.566 > g(r).
$$

情形 5（$\mu(k-1) \le 1$）：于是

$$
\begin{aligned}
& I(k,\delta) \\
= & \int_{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^k-1)}^{1} 1-\frac{\frac{r^{k-1}-1}{r-1}r^{\epsilon}}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
& +\int_{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}+1\right)-\log_r(2)-k+1}^{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^k-1)} \frac{r^{k-1+\epsilon}-1}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
& +\int_{\delta}^{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}+1\right)-\log_r(2)-k+1} \frac{\bar{c}-\frac{r^k-1}{r-1}r^{\epsilon}}{r^{k+\epsilon}}\mathrm{d}\epsilon \\
& +\int_{0}^{\delta} 1-\frac{\frac{r^k-1}{r-1}r^{\epsilon}}{\bar{c}}\mathrm{d}\epsilon \\
= & \Big[\epsilon-\frac{(r^{k-1}-1)r^{\epsilon}}{\log(r)(r-1)\bar{c}}\Big]_{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^k-1)}^{1} \\
& +\Big[\frac{r^{k-1+\epsilon}}{\log(r)\bar{c}}-\frac{\epsilon}{\bar{c}}\Big]_{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}+1\right)-\log_r(2)-k+1}^{\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^k-1)} \\
& +\Big[-\frac{\bar{c}}{\log(r)r^{k+\epsilon}}-\frac{1-r^{-k}}{r-1}\epsilon\Big]_{\delta}^{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}+1\right)-\log_r(2)-k+1} \\
& +\Big[\epsilon-\frac{(r^k-1)r^{\epsilon}}{\log(r)(r-1)\bar{c}}\Big]_0^{\delta} \\
= & 1-\Big(1+\frac{1}{\bar{c}}\Big)\big(\log_r(r^{k+\delta}+1)+\log_r(r-1)-\log_r(r^k-1)\big)-\frac{\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}}{2\log(r)\bar{c}} \\
& +\delta+\frac{2}{\log(r)}+\frac{\log_r\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}+1\right)-\log_r(2)-k+1}{\bar{c}} \\
& -\log_r(2)-\frac{2\bar{c}}{\left(\sqrt{\left(\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}-1\right)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}+1\right)\log(r)r}+\frac{3}{2\log(r)\bar{c}} \\
& -\frac{1-r^{-k}}{r-1}\Big(\log_r\Big(\sqrt{\big(\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}-1\big)^2+4r^{2k+2\delta-1}}-\frac{r^k-1}{r-1}r^{\delta}+1\Big)+\frac{1}{2\log(r)}-k+1-\delta\Big) \\
=: & f_5(k,\delta).
\end{aligned}
$$

当 k 较小且 δ 较大时，该表达式取得最小值。由 (69) 可得 $\mu(k) \le \mu(k-1)-1 \le 0$。因此，与情形 4 类似，我们有 $k \ge 4$。

我们有 $\nu(k-1) \le 1$，这仅在 $\delta \le \log_r\left(r^{\frac{r^k-1}{r-1}}-1\right)-k$ 时成立。因此，当 $k=4$ 且 $\delta=\log_r\left(r^{\frac{r^4-1}{r-1}}-1\right)-4$ 时，$f_5(k,\delta)$ 取得最小值。计算其价值，得到

$$
I(k,\delta) \ge f_5(k,\delta) \ge f_5\Big(4,\log_r\Big(r\frac{r^4-1}{r-1}-1\Big)-4\Big) > 0.566 > g(r). \qquad \square
$$

利用这些引理，我们可以证明 $1/g(r) < 1.772$ 关于 RandomizedScaling 的随机化竞争比的一个上界。

定理 5。 IncMax 存在一个竞争比为1.772 的随机化算法。

证明。令 $(c_1, c_2, \dots)$ 表示通过 RandomizedScaling 得到的解。令 $C \in \mathbb{N}$。对于 $C < \sum_{i=0}^{3} r^i$，我们有 $C \le c_3 \le t_3$。令 $S_4 := \{(\lfloor r^x \rfloor, \lfloor r^{1+x} \rfloor, \lfloor r^{2+x} \rfloor, \lfloor r^{3+x} \rfloor) \mid x \in (0,1)\}$ 表示序列 (c_0, c_1, c_2, c_3) 可能对应的所有序列的集合。我们将 $\sigma \in S_4$ 记为

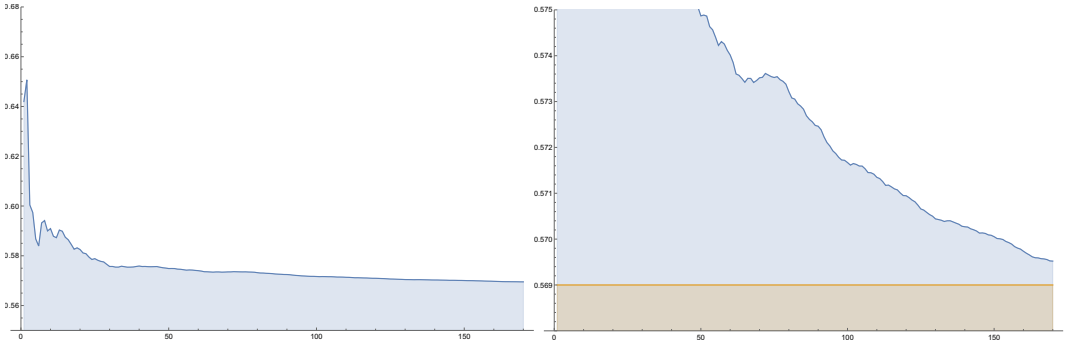

图5：两幅图都展示了当大小小于 $\sum_{i=0}^{3} r^i$ 时，RandomizedScaling 的竞争比上界。右图中的水平线表示价值 0.569。

$\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$。根据 $c_{-1} = 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathbb{E}\big[f(X_{\mathrm{ALG}}(C))\big]}{v(C)} \\
= \quad & \frac{1}{v(C)} \sum_{i=0}^{3} \mathbb{E}\big[f(X_{\mathrm{ALG}}(C)) \mid C \in (c_{i-1}, c_i]\big] \cdot \mathbb{P}\big[C \in (c_{i-1}, c_i]\big] \\
\overset{\text{Lemma 25}(i)}{\geq} \quad & \sum_{i=0}^{3} \mathbb{E}\Big[\max\Big\{\frac{c_{i-1}}{C}, \frac{C - t_{i-1}}{\max\{C, c_i\}}\Big\} \;\Big|\; C \in (c_{i-1}, c_i]\Big] \cdot \mathbb{P}\big[C \in (c_{i-1}, c_i]\big] \\
= \quad & \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}\big[C \in (c_{i-1}, c_i]\big] \sum_{\sigma \in S_4} \max\Big\{\frac{\sigma_{i-1}}{C}, \frac{C - \sigma_0 - \cdots - \sigma_{i-1}}{\max\{C, \sigma_i\}}\Big\} \\
& \qquad \cdot \frac{\mathbb{P}\big[\big((c_0, c_1, c_2, c_3) = \sigma\big) \cap \big(C \in (c_{i-1}, c_i]\big)\big]}{\mathbb{P}\big[C \in (c_{i-1}, c_i]\big]} \\
= \quad & \sum_{i=0}^{3} \sum_{\sigma \in S_4} \max\Big\{\frac{\sigma_{i-1}}{C}, \frac{C - \sigma_0 - \cdots - \sigma_{i-1}}{\max\{C, \sigma_i\}}\Big\} \\
& \qquad \cdot \mathbb{P}\big[\big((c_0, c_1, c_2, c_3) = \sigma\big) \cap \big(C \in (c_{i-1}, c_i]\big)\big] \\
= \quad & \sum_{i=0}^{3} \sum_{\substack{\sigma \in S_4 \\ \sigma_{i-1} < C \leq \sigma_i}} \max\Big\{\frac{\sigma_{i-1}}{C}, \frac{C - \sigma_0 - \cdots - \sigma_{i-1}}{\max\{C, \sigma_i\}}\Big\} \cdot \mathbb{P}\big[(c_0, c_1, c_2, c_3) = \sigma\big].
\end{aligned}
$$

对于 $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_4$，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[(c_0, c_1, c_2, c_3) = \sigma\big] &= \mathbb{P}\Big[\bigcap_{i \in \{0,1,2,3\}} \big(r^{i+\epsilon} \in [\sigma_i, \sigma_i + 1)\big)\Big] \\
&= \mathbb{P}\Big[\bigcap_{i \in \{0,1,2,3\}} \big(\epsilon \in [\log_r(\sigma_i) - i, \log_r(\sigma_i + 1) - i)\big)\Big] \\
&= \mathbb{P}\Big[\epsilon \in \big[\max_{i \in \{0,1,2,3\}} (\log_r(\sigma_i) - i), \min_{i \in \{0,1,2,3\}} (\log_r(\sigma_i + 1) - i)\big)\Big].
\end{aligned}
$$

这为我们提供了一个显式公式，用于计算随机化竞争比。对所有 $C \in \{1, \ldots, \lfloor \sum_{i=0}^{3} r^i \rfloor\}$ 都这样做（参见图5），我们得到 $\mathbb{E}\big[f(X_{\mathrm{ALG}}(C))\big] \geq 0.569 \cdot v_C > g(r) \cdot v_C$。

假设 $C \geq \sum_{i=0}^{3} r^i$，并令 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in (0, 1]$ 唯一确定，使得

$$
C = r^{k+\delta} \tag{70}
$$

我们有

$$
\tilde{c}_{k-1} = r^{k-1+\epsilon} \overset{\epsilon \leq 1}{\leq} r^k \overset{(70)}{<} C \overset{(70)}{\leq} r^{k+1} \overset{\epsilon \geq 0}{\leq} r^{k+1+\epsilon} = \tilde{c}_{k+1}
$$

并且，对于所有 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\tilde{t}_i - 1 < \tilde{c}_{i+1} < \tilde{t}_{i+1} - 1$$

其中，第一个不等式是由以下事实得出的

$$\frac{\tilde{t}_i - 1}{\tilde{c}_{i+1}} < \frac{\tilde{t}_i}{\tilde{c}_{i+1}} = \frac{r^\epsilon}{r^{i+1+\epsilon}} \cdot \frac{r^{i+1} - 1}{r - 1} < \frac{1}{r-1} < 1$$

第二个不等式则是由以下事实得出的：$(\tilde{t}_{i+1} - 1) - \tilde{c}_{i+1} = \tilde{t}_i - 1 \geq \tilde{c}_0 - 1 = r^\epsilon - 1 > 0$。这意味着，存在 4 个区间， C 可以落入其中：

$$I_1 = (\tilde{c}_{k-1}, \tilde{t}_{k-1} - 1], \quad I_2 = (\tilde{t}_{k-1} - 1, \tilde{c}_k], \quad I_3 = (\tilde{c}_k, \tilde{t}_k - 1], \quad I_4 = (\tilde{t}_k - 1, \tilde{c}_{k+1}].$$

我们将计算 ϵ 取何值时， C 会落入哪个区间。对于 $i \in \mathbb{N}$，我们有 ve

$$\begin{aligned} C \leq \tilde{c}_i \quad &\Leftrightarrow \quad r^{k+\delta} \leq r^{i+\epsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad \epsilon \geq k - i + \delta \end{aligned} \tag{71}$$

and

$$\begin{aligned} C \leq \tilde{t}_i - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad r^{k+\delta} \leq r^\epsilon \frac{r^{i+1} - 1}{r - 1} - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \epsilon \geq \log_r(r^{k+\delta} + 1) + \log_r(r-1) - \log_r(r^{i+1} - 1) =: \mu(i). \end{aligned} \tag{72}$$

规模为 C 的算法解的期望值为

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[f(X_{\mathrm{ALG}}(C))] \\
= \quad & \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}[f(X_{\mathrm{ALG}}(C)) \mid C \in I_i] \cdot \mathbb{P}[C \in I_i] \\
\overset{\text{Lemma 25}(ii),(iii)}{\geq} \quad & \Big[\mathbb{E}\Big[1 - \frac{\tilde{t}_{k-2}}{C} \;\Big|\; C \in (\tilde{c}_{k-1}, \tilde{t}_{k-1} - 1]\Big] \cdot \mathbb{P}[C \in I_1] \\
& + \mathbb{E}\Big[\max\Big\{\frac{\tilde{c}_{k-1} - 1}{C}, \frac{C - \tilde{t}_{k-1}}{\tilde{c}_k}\Big\} \;\Big|\; C \in (\tilde{t}_{k-1} - 1, \tilde{c}_k]\Big] \cdot \mathbb{P}[C \in I_2] \\
& + \mathbb{E}\Big[1 - \frac{\tilde{t}_{k-1}}{C} \;\Big|\; C \in (\tilde{c}_k, \tilde{t}_k - 1]\Big] \cdot \mathbb{P}[C \in I_3] \\
& + \mathbb{E}\Big[\max\Big\{\frac{\tilde{c}_k - 1}{C}, \frac{C - \tilde{t}_k}{\tilde{c}_{k+1}}\Big\} \;\Big|\; C \in (\tilde{t}_k - 1, \tilde{c}_{k+1}]\Big] \cdot \mathbb{P}[C \in I_4]\Big] \cdot v_C \\
\overset{(71),(72)}{=} \quad & \Big[\int_{\min\{1, \mu(k-1)\}}^{1} 1 - \frac{\tilde{t}_{k-2}}{C}\, d\epsilon \\
& + \int_{\delta}^{\min\{1, \mu(k-1)\}} \max\Big\{\frac{\tilde{c}_{k-1} - 1}{C}, \frac{C - \tilde{t}_{k-1}}{\tilde{c}_k}\Big\}\, d\epsilon \\
& + \int_{\max\{0, \mu(k)\}}^{\delta} 1 - \frac{\tilde{t}_{k-1}}{C}\, d\epsilon \\
& + \int_{0}^{\max\{0, \mu(k)\}} \max\Big\{\frac{\tilde{c}_k - 1}{C}, \frac{C - \tilde{t}_k}{\tilde{c}_{k+1}}\Big\}\, d\epsilon\Big] \cdot v_C
\end{aligned}$$

此外，对于 $i \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{c}_i - 1}{C} \geq \frac{C - \tilde{t}_i}{\tilde{c}_{i+1}} \\
\Leftrightarrow\quad & r^{i+1+\epsilon}(r^{i+\epsilon} - 1) \geq r^{k+\delta}\Big(r^{k+\delta} - r^{\epsilon}\frac{r^{i+1}-1}{r-1}\Big) \\
\Leftrightarrow\quad & r^{2i+1}(r^{\epsilon})^2 + \Big(r^{k+\delta}\frac{r^{i+1}-1}{r-1} - r^{i+1}\Big)r^{\epsilon} - r^{2k+2\delta} \geq 0 \\
\overset{r^{\epsilon}\geq 0}{\Leftrightarrow}\quad & r^{\epsilon} \geq -\frac{1}{2r^i}\Big(r^{k+\delta}\frac{1-r^{-(i+1)}}{r-1} - 1\Big) \\
&\qquad + \sqrt{\frac{1}{4r^{2i}}\Big(r^{k+\delta}\frac{1-r^{-(i+1)}}{r-1} - 1\Big)^2 + r^{2k-2i+2\delta-1}} \\
\Leftrightarrow\quad & \epsilon \geq \log_r\Big(\sqrt{\Big(r^{k+\delta}\frac{1-r^{-(i+1)}}{r-1} - 1\Big)^2 + 4r^{2k+2\delta-1}} - r^{k+\delta}\frac{1-r^{-(i+1)}}{r-1} + 1\Big) \\
&\qquad - \log_r(2) - i =: \nu(i),
\end{aligned}$$

也就是说，我们可以计算两个独立的积分，而不是对最大值求一个积分，从而得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_{\text{ALG}}(C))] \geq \Big[&\int_{\min\{1,\mu(k-1)\}}^{1} 1 - \frac{\tilde{t}_{k-2}}{C}\,d\epsilon && + \int_{\min\{1,\nu(k-1)\}}^{\min\{1,\mu(k-1)\}} \frac{\tilde{c}_{k-1}-1}{C}\,d\epsilon \\
&+ \int_{\delta}^{\min\{1,\nu(k-1)\}} \frac{C - \tilde{t}_{k-1}}{\tilde{c}_k}\,d\epsilon && + \int_{\max\{0,\mu(k)\}}^{\delta} 1 - \frac{\tilde{t}_{k-1}}{C}\,d\epsilon \\
&+ \int_{\max\{0,\nu(k)\}}^{\max\{0,\mu(k)\}} \frac{\tilde{c}_k - 1}{C}\,d\epsilon && + \int_{0}^{\max\{0,\nu(k)\}} \frac{C - \tilde{t}_k}{\tilde{c}_{k+1}}\,d\epsilon\Big] \cdot v_C \\
\overset{\text{Lemma 26}}{\geq}\quad & g(r) \cdot v_C > 0.56437 \cdot v_C > \frac{1}{1.772} v_C.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

4.2 随机化下界

下面证明定理 6 中关于 IncMaxSep 的下界。

定理 6. 每个随机化的 IncMax 算法的竞争比至少为 1.447。

证明。我们固定 N 为集合数量 $R_1, \ldots, R_N$，并将 $d_1, \ldots, d_N$ 留作确定该实例的参数；我们将所得实例记为 $I(d_1, \ldots, d_N)$。注意，给定元素 $\{1, \ldots, N\}$ 上的概率分布 $p_1, \ldots, p_N$，姚氏原理 [23] 给出

$$\inf_{\text{ALG}\in\mathcal{A}_N} \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \frac{i \cdot d_i}{\text{ALG}(I(d_1, \ldots, d_N), i)}$$

作为该问题随机化竞争比的一个下界。这里，$\text{ALG}(I, i)$ 表示在实例 I 上，由 ALG 生成的解中前 i 个元素的价值；$\mathcal{A}_N$ 是在包含 N 个集合 $R_1, \ldots, R_N$ 的实例上所有确定性算法的集合。如前所述，我们可以假设

$$\mathcal{A}_N := \left\{ \text{ALG}_{c_1,\ldots,c_\ell} \;\middle|\; 1 \leq c_1 < \cdots < c_\ell \leq N, \sum_{i=1}^{\ell} c_i \leq N \right\},$$

其中，$\text{ALG}_{c_1,\ldots,c_\ell}$ 是这样一种算法：先将 R_{c_1} 的所有元素加入解中，再将 R_{c_2} 的所有元素加入解中，依此类推。将 R_{c_ℓ} 的 c_ℓ 个元素加入后，它从此开始加入任意元素。

我们可以将最大化竞争比下界的问题表述为一个优化问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \rho \\
\text{s.t.} \quad & \rho \le \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \frac{i \cdot d_i}{\textsc{Alg}(I(d_1,\dots,d_N),i)} \quad \forall \textsc{Alg} \in \mathcal{A}_N, \\
& \sum_{i=1}^{N} p_i = 1, \\
& d_1,\dots,d_N \ge 0, \\
& p_1,\dots,p_N \ge 0.
\end{aligned}
$$

注意，表达式 $\textsc{Alg}_{c_1,\dots,c_\ell}(I(d_1,\dots,d_N),\ i)$ 也可以通过对所有 $\textsc{Alg}_{c_1,\dots,c_\ell}$ 选择元素所来自的集合取最大值，写成 $c_1,\dots,c_\ell$、$d_1,\dots,d_N$ 和 i 的函数：

$$
\textsc{Alg}_{c_1,\dots,c_\ell}(I(d_1,\dots,d_N),i) = \max_{1\le j\le \ell} \left\{ \max\left\{ i - \sum_{1\le j'<j} c_{j'}, c_j \right\} \cdot d_{c_j} \right\}.
$$

上述含有 $N = 10$ 的优化问题的一个可行解为

$$
\begin{aligned}
&(\rho; d_1,\dots,d_{10}; p_1,\dots,p_{10}) \\
&= (1.447; 1, 1/2, 1/2, 1/2, 2/5, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3; 0.132, 0, 0, 0.395, 0, 0, 0, 0, 0, 0.473),
\end{aligned}
$$

其目标值为 1。447。 □

参考文献

[1]Aaron Bernstein、Yann Disser、Martin Groß 和 Sandra Himburg。增量最大化的一般界。*Math. Program.*，191(2):953–979，2022年。doi:10.1007/ s10107-020-01576-0。[2]Avrim Blum、Prasad Chalasani、Don Coppersmith、William R. Pulleyblank、Prabhakar Raghavan 和 Madhu Sudan。最小延迟问题。载于第二十六届 *ACM* 理论计算研讨会（*STOC*）论文集，第163–171页。ACM，1994年。doi:10.1145/195058.195125。[3] Marek Chrobak、Claire Kenyon、John Noga 和 Neal E. Young。通过在线竞价求增量中位数。*Algorithmica*, 50(4):455–478，2008年。doi:10.1007/s00453-007-9005-x。[4] Yann Disser、Max Klimm、Nicole Megow 和 Sebastian Stiller。装填容量未知的背包。*SIAM J. Discret. Math.*, 31(3):1477–1497，2017年。doi:10.1137/16M1070049。[5] Yann Disser、Max Klimm 和 David Weckbecker。在增量背包约束下的分数次可加最大化。载于第*19*届近似与在线算法国际研讨会（*WAOA*）论文集，第206–223页。施普林格，2021年。doi: 10.1007/978-3-030-92702-8_13。[6] Ryo Fujita、Yusuke Kobayashi 和 Kazuhisa Makino。鲁棒匹配与拟阵交。*SIAM J. Discret. Math.*，27(3):1234–1256，2013年。doi:10.1137/100808800。[7] Michel X. Goemans 和 Jon M. Kleinberg。最小延迟问题的改进近似比。*Math. Program.*，82:111–124，1998年。doi:10.1007/BF01585867。[8]Michel X. Goemans 和 Francisco Unda。组合优化问题的增量近似。载于第*20*届组合优化问题近似算法国际研讨会（*APPROX*）论文集，第6:1–6:14页，2017年。doi:10.4230/LIPIcs.APPROX-RANDOM.2017.6。[9] Teofilo F. Gonzalez。使最大簇间距离最小化的聚类。*Theor.Comput. Sci.*，38:293–306，1985年。doi:10.1016/0304-3975(85)90224-5。

[10] Jeff Hartline 和 Alexa Sharp。组合最大化问题的增量模型。载于第五届国际实验算法研讨会（*WEA*）论文集，第36–48页，2006年。doi:10.1007/11764298_4。[11] Jeff Hartline 和 Alexa Sharp。增量流。*Networks*，50(1):77–85，2007年。doi:10.1002/ net.20168。[12] Refael Hassin 和 Shlomi Rubinstein。鲁棒匹配。*SIAM J. Discret. Math.*，15(4):530–537，2002年。doi:10.1137/S0895480198332156。[13] Refael Hassin 和 Danny Segev。树和路径的鲁棒子图。*ACM Trans. Algo-rithms*，2(2):263–281，2006年。doi:10.1145/1150334.1150341。[14] Naonori Kakimura 和 Kazuhisa Makino。鲁棒独立系统。*SIAM J. Discret.Math.*，27(3):1257–1273，2013年。doi:10.1137/120899480。[15] Ming-Yang Kao、John H Reif 和 Stephen R Tate。在未知环境中搜索：奶牛路径问题的最优随机化算法。*Information and Computation*，131(1):63–79，1996年。[16] Max Klimm 和 Martin Knaack。在未知背包约束下最大化有界曲率的次模函数。载于第*25*届组合优化问题近似算法国际研讨会（*APPROX*）论文集，第49:1–49:19页，2022年。doi:10.4230/LIPIcs.APPROX/RANDOM.2022.49。[17] Guolong Lin、Chandrashekhar Nagarajan、Rajmohan Rajaraman 和 David P. Williamson。增量近似与层次聚类的一般方法。*SIAM J. Comput.*，39(8):3633–3669，2010年。doi:10.1137/070698257。[18] Jannik Matuschke、Martin Skutella 和 Jos´e A. Soto。鲁棒随机匹配。*Math.Oper. Res.*，43(2):675–692，2018年。doi:10.1287/moor.2017.0878。[19] Nicole Megow 和 Juli´an Mestre。未知装填与覆盖约束下排序的实例敏感鲁棒性保证。载于第四届理论计算机科学创新会议（*ITCS*）论文集，第495–504页，2013年。doi:10.1145/2422436.2422490。[20] Juli´an Mestre。近似算法中的贪心方法。载于第*14*届欧洲算法年度研讨会（*ESA*）论文集，第528–539页，2006年。doi:10.1007/11841036_48。[21] Ramgopal R. Mettu 和 C. Greg Plaxton。在线中位数问题。*SIAM J. Comput.*，32(3):816–832，2003年。doi:10.1137/S0097539701383443。[22] C. Greg Plaxton。层次选址问题的近似算法。*J. Comput.Syst. Sci.*，72(3):425–443，2006年。doi:10.1016/j.jcss.2005.09.004。[23] Andrew Chi-Chin Yao。概率计算：迈向统一的复杂性度量。载于第*18*届计算机科学基础年度研讨会（*SFCS 1977*），第222–227页，1977年。doi:10.1109/SFCS.1977.24。