arXiv:2305.01314v1 [cs.DS] 2 May 2023

平面图上的双集合割-不割问题*

Matthias Bentert† Pål Grønås Drange† Fedor V. Fomin† Petr A. Golovach†
Tuukka Korhonen†

摘要

我们研究如下平面图上的双集合割-不割问题。给定一个无向平面图 G 以及两个顶点集合 S 和 T。问题是，至少需要从 G中删除多少条边，才能将 S 与 T完全分隔，同时确保 S中的每个顶点以及 T 中的每个顶点仍处于同一个连通分量中。我们证明，该问题可以通过单边错误随机化算法在时间 $2^{|S|+|T|}n^{\mathcal{O}(1)}$ 内求解。我们的算法意味着平面图上的网络改道问题存在多项式时间算法，从而解决了文献中的一个开放问题。更一般地，我们通过给出一个运行时间为$4^{r+\mathcal{O}(\sqrt{r})}n^{\mathcal{O}(1)}$的算法，证明即使以平面图中覆盖终端 $S \cup T$的面数r 为参数，双集合割-不割问题仍然是固定参数可解的。

1 引言

我们考虑以下变体的割-不割问题。图 $G = (V, E)$中的割 是对 V 的划分 (A, B)，我们用 $\text{cut}_G(A)$ 表示其割集，即一端点属于 A、另一端点属于 $B = V \setminus A$ 的边集。对于两个不相交的顶点集合 S 和 T，若满足 $S \subseteq A$ 和 $T \subseteq B$，则 (A, B) 是一个 S-T-割 。

双集合割-不割

输入：一个图 G，两个不相交的终端集合 $S, T \subseteq V(G)$，以及一个整数 $k \geq 0$。
任务：判断图 G 中是否存在一个 S-T-割 (A, B)，满足 $|\text{cut}_G(A)| \leq k$，且 S 的顶点位于 $G[A]$ 的同一个连通分量中，T 的顶点位于 $G[B]$ 的同一个连通分量中。

我们对双集合割-不割感兴趣，原因有二。首先，双集合割-不割是 2-不相交连通子图问题的一个自然优化变体，受到图算法和计算几何领域的广泛关注 [13, 24, 31, 40, 44, 45]。在这个问题中，给定两个不相交集合 $S, T \subseteq V(G)$，需要判断能否找到不相交集合 $A_1 \supseteq S$和 $A_2 \supseteq T$，使得由 A_i, $i = 1, 2$ 诱导的 G 的子图是连通的。在双集合割-不割中，我们不仅要判断是否存在分别包含终端集合 S 和 T 的不相交连通集合，还要尽可能减小对应割的大小（如果存在）。Van 't Hof 等人 [45] 证明，2- 不相交连通子图问题在一般图上是 NP 完全的，即使 $|S| = 2$ 也是如此；Gray 等人 [24] 证明，该问题在平面图上是 NP 完全的。这意味着双集合割-不割在平面图上也属于 NP 完全。

其次，双集合割-不割与网络改道问题密切相关，该问题已受到运筹学和Networks领域的广泛研究 [8, 10, 11, 18, 20, 30, 37]。在该问题中，给定一个无向图 G、两个终端顶点 s 和 t、一条边 $b = uv$以及一个整数 k。任务是判断是否可以删除至多 k 条边，使得

*这些研究成果的相关研究获得了挪威研究委员会通过 BWCA 项目（资助编号：314528）提供的经费。Matthias Bentert 获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧盟"地平线 2020"研究与创新计划下提供的资助（资助协议编号：819416）。

†挪威卑尔根大学信息学系。电子邮箱：matthias.bentert@uib.no, pal.drange@uib.no,fomin@ii.uib.no, petr.golovach@uib.no, tuukka.korhonen@uib.no

边 b 将成为一座桥， s 在一侧， t 在另一侧。等价地，任务是判断是否存在一个大小至多为 $k+1$ 且包含 b的最小 s-t-割。虽然这个问题看起来与经典的 s-t-最小割问题非常相似，但该问题的复杂性状态（P 还是 NP）仍悬而未决。我们注意到，若双集合割-不割在 $|S|=|T|=2$ 的特殊情形存在多项式时间算法，则意味着网络改道存在多项式时间算法：有两种情况，要么 s 与 u在同一个连通分量中，要么 s 与 v在同一个连通分量中；它们分别对应于双集合割-不割的实例： $S=\{s,u\}$ 和 $T=\{t,v\}$，以及 $S=\{s,v\}$ 和 $T=\{t,u\}$。

网络改道 在交通网络中有重要应用，因此也在平面图上得到了研究。Cullenbine 等人 [10] 为以下情形提出了一种多项式时间算法：当两个终端 s 和 t 位于同一个面上时，平面图上的 网络改道 问题。他们提出了一个开放问题：这种多项式时间算法能否推广到任意平面图 [10]。Duan 等人发布了一篇预印本 [17], ，其中除其他结果外，声称有一种算法可以在多项式时间内解决平面图上的 网络改道 问题，但没有给出算法的描述。由于缺少若干细节，我们无法验证该结果的正确性。不过，这一结果可由我们的主要成果直接推出，即 定理 1，该定理证明了以 双集合割-不割 问题中的参数 $|S|+|T|$为参数时，在平面图上的固定参数可处理性。 定理 1 还证明了该问题的一个更一般结果：以图中包含所有终端的最少面数 r 为参数时，该问题具有固定参数可处理性。（注意， r 不会超过 $|S|+|T|$。）

定理 1。 存在一种单边错误随机算法，可在 $2^{|S|+|T|}\cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内解决平面图上的双集合割-不割问题。此外，存在一种单边错误随机算法，可在 $4^{r+\mathcal{O}(\sqrt{r})}\cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内解决该问题，其中 r 是给定平面图中覆盖 $S\cup T$ 所需的面数。

定理 1 给出了首个用于 平面图上的双集合割-不割且非单例 S 和 T的多项式时间算法。Duan 和 Xu [18] 展示了如何解决 平面图上的双集合割-不割 对于 $|S|=1$ 和 $|T|=2$的问题。随后，Bezáková 和 Langley [4], 提出了一种 $O(n^4)$时间算法，用于处理 $|S|=1$ 以及平面图上的任意 T。然而，情形 $|S|=|T|=2$ （它是 网络改道的一般化）的多项式时间可解性仍是一个悬而未决的问题。

我们用于证明定理 1 的主要工具，是一个关于在群标记图中计算最短路径的新算法结果。我们认为这一新结果本身就很有趣。我们所考虑的群是布尔群 $(\mathbb{Z}_2^d,+)$，由长度为d 的二进制向量组成，其中运算 $+$ 是按分量进行的异或（xor）。我们的算法在一个图中寻找最短的 s-t-路径，该图的边由$(\mathbb{Z}_2^d,+)$ 中的元素标记，且路径上各边的标记之和等于给定值。此外，我们施加约束，要求路径只能访问某些顶点集合一次。形式化地说，我们考虑以下问题。

异或约束最短路径

输入： 一个图 G，两个顶点 s 和 t，一个边标记函数 g: $E(G)\to\mathbb{Z}_2^d$，一个值 $c\in\mathbb{Z}_2^d$，以及 p 个顶点集 X_1、……、$X_p\subseteq V$。任务： 寻找一条 s-t-路径 P，使其在 G 中满足 (i) $\sum_{e\in E(P)} g(e)=c$，并且 (ii) 对每个 $i\in[p]$， $|V(P)\cap X_i|\leq 1$；在所有此类路径中，使其长度最小。

在第 3 节中，我们给出一种用于异或约束最短路径的算法，实际上，该算法适用于一般图，而不仅限于平面图。结果如下定理所示。

定理 2。 异或约束最短路径可由一种单边错误随机算法在 $2^{d+p}\cdot(n+m)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解。

我们将上述问题定义中把路径替换为圈的变体称为异或约束最短环。注意，定理 2 直接也意味着存在一种算法，能够在相同的运行时间内求解异或约束最短环。

定理 2 的证明基于对 Björklund、Husfeldt 和 Taslaman [6] 为 T-圈问题提出的技术进行改进。在 T-圈问题中，任务是寻找一个最短圈，使其经过一列指定的顶点 $T \subseteq V(G)$ [1]，；Björklund 等人给出了一种运行时间为 $2^{|T|}n^{\mathcal{O}(1)}$的算法。我们的算法推广了 Björklund 等人的算法，因为可以按如下方式将 T-圈问题归约为异或约束最短环问题，其中 $d = |T|$ 且 $p = 0$ 。我们将每个顶点 $v \in T$ 分配给 $\mathbb{Z}_2^d$的一个维度；为了确保该圈经过 v，我们在图中添加一个 v 的真孪生顶点 u，并将边 uv 赋值为 $\mathbb{Z}_2^d$ 中的一个向量，该向量仅在分配给 v的维度上取值为 1。所有其他边均赋值为零向量 0。显然，取值为全 1 向量的圈对应于一个经过 T中所有顶点的圈。

相关工作。 除了上文已经提到的与网络改道、2-不相交连通子图和双集合割-不割密切相关的工作外，我们简要回顾其他相关研究。

双集合割-不割是多路割-非割的一个特例：给定终端集合上的一个等价关系，任务是寻找一个割（或点割），使终端按照该关系彼此分离。这个问题在参数化复杂性领域已得到充分研究 [7, 12, 41]。然而，先前关于多路割-非割的参数化算法研究都集中于以割的大小为参数。多路割也是与我们的问题最为接近的问题之一。对于给定的 k 个终端，需要寻找能将所有 终端分隔开的最少数量的边。在平面图上，Dahlhaus 等人 [14] 的开创性论文给出了一个运行时间为 $n^{\mathcal{O}(k)}$的算法。Klein 和 Marx 在 [33] 中将运行时间改进至 $n^{\mathcal{O}(\sqrt{k})}$，而 Marx在 [38] 中证明，假设指数时间假设（ETH）成立，该运行时间是最优的。

定理 1 的第二部分定理 1 涉及以覆盖终端顶点的面数为参数的参数化。这种参数化自然适用于平面图中连接或分离终端的优化问题。具体而言，面覆盖参数化已被用于研究多路割 [39], 斯坦纳树 [3, 32], 和各种流问题 [19, 21, 36]。

我们的定理 2 属于图中的路径相关两个领域的交集。第一个领域涉及在群标记图中计算最短路径的多项式时间算法 [15, 25, 34]。最近，Iwata 和 Yamaguchi [29] 给出了一种用于任意群标记路径中最短非零路径的算法。然而，对我们而言，我们需要一种计算最短路径的算法，使其标签之和等于群中的特定元素。

第二个领域涉及用于寻找满足某些性质的图中路径的固定参数可解算法[5, 6, 22, 35, 46]。正如我们已经提到的，我们用于异或约束最短路径的算法可以被视为 Björklund、Husfeldt 和 Taslaman [6] 针对 T-圈问题的算法在群标记设置下的扩展。

组织结构。本文其余部分安排如下。首先，我们概述如何实现两个主要结果。随后在第2节介绍一些记号和必要的定义。之后，我们在第异或约束最短路径节3中展示如何求解。第4节中，我们将该算法应用于开发一个（随机化）FPT 时间算法，用于求解以满足每个终端顶点都与至少一个此类面关联的最小面数为参数的双集合割-不割问题。第5 节专门证明，以终端数为参数的[1]困难性。第双集合割-不割节中，我们还介绍该问题。最后，我们在第6 节展示该 FPT 时间算法的两个应用，以推广文献中的已知结果，并在第7节总结一些尚待解决的开放问题。

1.1 定理1和2的概要

我们概述定理 1和2的证明。我们先概述平面 $2^{|S|+|T|} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$时间算法，用于求解平面图上的双集合割-不割，然后讨论 $S \cup T$ 可由至多 r 个面覆盖时的情形。

我们注意到，双集合割-不割的任何最优解都是图 G中的一个（按包含关系而言的）极小割。我们的算法基于平面图中的极小割与其对偶图中的环之间的对应关系（见图 1）。特别地，边集 $C \subseteq E(G)$ 是 G 中的极小割集，当且仅当在对偶图 G^*中，对应的边集 $C^* \subseteq E(G^*)$ 是一个圈。现在，为了将

[1]这意味着，算法也可以通过细分每条目标边，并将新顶点加入 T，来接收边列表。

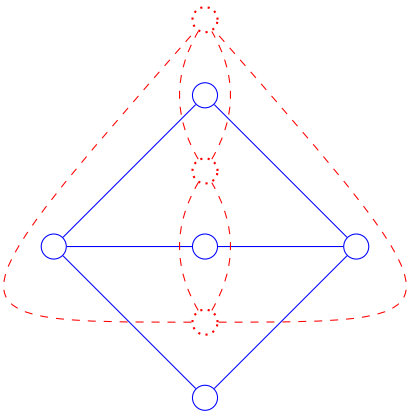


图 1：平面图（蓝色）及其对偶（多重）图（虚线/红色）的示例。请注意，面与顶点之间存在双射，边之间也存在双射；也就是说，每个红色面内恰有一个蓝色顶点，每个蓝色面内恰有一个红色顶点，并且每条红色边恰好与一条蓝色边相交，反之亦然。

双集合割-不割转化为一个关于在 G^*中寻找圈 C^* 的问题，我们希望根据C^*，判断两个终端顶点 u 和 v 在 G 中的割 C 同侧还是异侧。为此，我们注意到，若 $P \subseteq E$（G）是在 G 中任意一条 u-v路径的边集，且 P^* 是在 G^*中与之对应的边集，那么 u 和 v 位于 C 异侧，当且仅当 $|C^* \cap P^*|$ 为奇数。

由此可知，要求 u_i 和 v_i 位于 G 中 C 割的同一侧/不同侧的约束，可以表示为要求某个 $P_i^* \subseteq E$（G^*）为偶数/奇数的约束。通过在终端集合 S 中选取一个顶点 v，并为 S 中的每个其他终端顶点写入一个“同侧”约束，同时为 T 中的每个终端顶点写入一个“不同侧”约束，双集合割-不割问题便可归约为在 G^* 中寻找一条最短环 C^* 的问题，该环满足 $|S|+|T|-1$ 个给定约束，每个约束都要求某个 $P_i^* \subseteq E$（G^*）满足 $|C^* \cap P_i^*| \equiv b_i \pmod 2$，且 $b_i \in \{0,1\}$。

这个问题也可以等价地表述为异或约束最短环 问题，其中$d = |S| + |T| - 1$，因此定理 2 确实推出了一个 $2^{|S|+|T|} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间的算法，用于双集合割-不割 在平面图上的情形。请注意，这里我们没有使用(ii)中异或约束最短路径 问题陈述里的条件；该条件仅用于以面覆盖为参数的算法。

接下来，我们概述定理 2 针对异或约束最短路径的算法。该算法不仅适用于平面图，也适用于一般图，并且是 Björklund、Husfeldt 和 Taslaman 所提出算法的推广，该算法用于 [6] - T环问题。与以往许多用于寻找图中路径的参数化算法类似，我们的算法 [5, 6, 22, 35, 46] 利用了特征为二的域上多项式中单项式的抵消，以及随机化多项式恒等式检验 [42, 47]。

我们算法的思路是为输入关联一个特征为 2 的有限域上的多项式，并证明：(1) 该多项式非零当且仅当存在一个解；(2) 给定多项式中变量的一个赋值后，可以在时间$2^{d+p} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$[2]内计算出多项式的值。根据 DeMillo–Lipton–Schwartz–Zippel 引理 [42, 47], , 只需对变量的值进行随机赋值并计算多项式，即可在时间 $2^{d+p} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 内解决该问题。请注意，求解决策版本的问题也能通过自归约恢复该解。

更具体地说，与输入相关联的多项式定义如下。假设输入图是一个简单图，因为多重图上的问题可以很容易地归约为简单图。对于输入图的每条边 $e \in E(G)$，我们关联一个变量 $f(e)$；然后，对于一条长度为 ℓ 的 s-t-游走[3]$W = e_1, e_2, \ldots, e_\ell$，我们关联一个单项式 $f(W) = \prod_{i=1}^{\ell} f(e_i)$。接着，对于一个整数 ℓ，我们令 C_ℓ 表示所有满足异或约束最短路径问题陈述中条件 (i) 和 (ii) 的长度为 ℓ 的 s-t-游走的集合。最后，令 $f(\mathsf{C}_\ell) = \sum_{W \in \mathsf{C}_\ell} f(W)$ 表示与输入相关联的多项式。由于 $f(\mathsf{C}_\ell)$ 的单项式对应的是游走而非路径，因此设计一个运行时间为 $2^{d+p} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 的动态规划算法来计算 $f(\mathsf{C}_\ell)$ 的值并不复杂。更进一步，

[2]回顾一下，p 表示条件(ii) 在异或约束最短路径问题中的约束数量。[3]游走类似于路径，但其中可以重复经过顶点和边。

证明的技术部分是论证多项式 $f(C_\ell)$ 当且仅当存在一个解时非零，特别是，论证对应于不是路径的游走的单项式会相互抵消。这一论证是 Björklund 等人所使用论证的推广。 [6]。

接下来，我们转向这样的情形：在给定的 G 平面嵌入中， $S \cup T$ 可以由 r 个面覆盖。首先，我们注意到，不失一般性，可以假设输入图是 2-连通的。这一假设简化了论证，因为平面 2-连通图中每个面的边界都是一个圈 [16]。给定一个带有终端集合 S 和 T 的平面图 G，我们可以通过将问题规约为求解一个红蓝支配集问题的辅助实例，来找到 $S \cup T$ 的最小面覆盖。根据 Alber 等人 [2] 的结果，该问题可在平面图上于参数化次指数时间内求解。

假设 f 是 G 中覆盖了某些终端的一个面，令 C' 为构成 f 边界的圈。我们使用以下关键观察：对于 G 中任意一个分离 S 和 T 的极小割的割集 $C \subseteq E(G)$，有：（i）若 C' 包含两个终端集合中的顶点，则 $C \cap E(C')$ 会将 C' 分成两个连通分量（路径），使得每个分量恰好包含一个终端集合中的顶点；（ii）若 C' 包含一个终端集合中的顶点，则要么 $C \cap E(C') = \emptyset$，要么 $C \cap E(C')$ 会将 C' 分成两个连通分量（路径），且终端位于同一个分量中。我们利用这一观察，限制 G^* 中对应于潜在解割集 C 的圈 C^* 的行为。在情形（i）中，我们只需删除 G^* 中对应于 C' 中不应参与 C 的那些边的边（见图2）。情形（ii）则更复杂。假设 C' 包含 q 个终端。我们在 C' 中找到 q 条内部顶点不相交路径 P_1，……，P_q，其端点为这些终端。然后，我们将 G^* 中的顶点 f“拆分”为 q 个顶点 f_1，……，f_q，使得每个 f_i 都与 G^* 中对应于 P_i 中边的边相邻（见图3）。然而，这种拆分会使对偶图中的一个圈能够多次经过面 f。为避免这种情况，我们定义 $X_f = \{f_1, \ldots\ldots, f_q\}$，并在异或约束最短路径问题的约束（ii）中使用；这正是该问题需要约束（ii）的原因。

我们对 G^* 覆盖中的所有面进行修改。这使我们能够限制需要分离的终端数量。对于覆盖中的每个面，我们选取代表元 f。如果边界环 C' 的 f 包含来自两个集合的终端，我们就从 C'上的终端中，每个集合选取一个代表元。如果 C' 包含来自一个集合的终端，我们就选取一个代表元。然后，我们应用与按 $|S| + |T|$参数化时相同的算法。不同之处在于，我们只处理这些代表元，并将约束 (ii) 添加到由覆盖中各面所构造的集合给出的异或约束最短路径辅助实例中。

2 预备知识

对于整数 a和 b，我们用 $[a, b]$ 表示集合 $\{a, a+1, \ldots, b\}$，并用 $[b]$ 表示集合 $[1, b]$。

图。本文考虑无向多重图，即允许重边和自环。我们使用标准的图论记号，未定义的概念请参见 [16] 。设 $G = (V, E)$ 为一个无向图。我们用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集。我们用 n 和 m 分别表示 G 中顶点和边的数量。路径 P 是一个图，其顶点集为 $\{v_0, v_1, \ldots, v_\ell\}$，边集为 $\{v_{i-1}v_i \mid i \in [\ell]\}$。顶点 v_0和 v_ℓ称为 P的端点。圈 C 是由两个端点之间再添加一条边而得到的路径。在边加权图中，路径或圈的长度是其边权之和；在无权图中，长度是其中边的数量。对于顶点子集 $U \subseteq V$，我们用 $G[U]$ 表示 G 中由 U 中的顶点诱导的子图，并用 $G - U$ 表示 $G[V \setminus V']$。对于边集 $S \subseteq E$，我们记作$G - S$，表示从 G 中删除 S中的边后得到的图。

我们主要关注平面输入图。关于严谨的介绍，读者可参阅 Diestel [16]以及 Agnarsson 和 Greenlaw [1] 所著的教科书。简单来说，如果一个图可以绘制在平面上，且其边彼此不相交，那么该图就是平面图。这样的绘图称为该图的平面嵌入，具有平面嵌入的平面图称为平面图。我们注意到，利用 Hopcroft 和 Tarjan 的经典算法 [28]，可以在线性时间内完成平面性检测并找到平面嵌入。平面图的面是由一组边围成，且不包含其他顶点或边的区域。位于一个面的边界上的顶点和边构成其边界。

给定一个具有面 F的平面图 $G=(V,E)$，其对偶图 $G^*=(F,E^*)$（见图 1）定义如下。 G^* 的顶点是 G 的面；对于每条 $e\in E(G)$， G^* 都有一条对偶边 e^*，其端点要么是两个边界上都包含 e 的面，要么当 e 恰好位于一个面 f 的边界上时， e^* 是位于 f 的自环（即， e 是 G的一条桥）。请注意，即使 G 是简单图， G^* 也不一定是简单图，如图 1 所示。我们注意到， G^* 是一个平面图，且有一种平面嵌入，使得 G^* 中与 G 的面 f 对应的每个顶点都绘制在 f 内部，并且每条对偶边 e^* 仅与 e 相交一次，且不与 G的任何其他边相交。本文中，我们假设 G^* 具有这样的嵌入。

对于一个连通平面图 G，我们的结果至关重要的一点是， G 中的每个极小割都与 G^*中的一个圈一一对应。更准确地说，回顾一下，平面上的每个圈恰好有两个面。那么，(A,B) 是平面图 G 的一个极小割，当且仅当 G^* 中存在一个圈 C^*，使得 A 的顶点位于 C^* 的一个面内，而 B 的顶点位于另一个面内。此外，C^* 由 e^* 组成； e^* 是与 $e\in \mathrm{cut}(A)$ 对偶的边，并且 C^* 的长度为 $|\mathrm{cut}(A)|$。

设 G 为一个平面图， G^* 为其对偶图。如果路径 P（圈 C）在 G 与.....交叉 G^* 的圈C^*，即在 $e\in E$（P）中$e\in E$（C），则称其为 C^* 包含与 e对偶的边 $e^*\in E^*$。 P 与 C^* 的交叉次数是 P 中满足 P 与 C^* 交叉的边的数量。我们将使用以下观察结果。

观察 1. 设 G 为一个平面图，设 s、$t\in V$，并设 P 为一条 s-t-路径。对于 G^* 的任意圈 C^*，s 和 t 位于 C^* 的不同面中，当且仅当 P 和 C^* 的交叉点数量为奇数。

最后，给定一个有 F 个面的平面图 G 的顶点子集 $U\subseteq V$， U 的面覆盖是一个面子集 $F'\subseteq F$，其中 U 中的每个顶点都位于 F' 中某个面的边界上。

群。 群 $(\mathbb{Z}_2^d,+)$ 由所有长度为 d 的二进制串构成，两个串的和定义为这两个串的按位异或（或称无进位加法）。就此而言，它可视为一个 d 维的 按位异或向量空间 $\mathbb{F}_2^d$。很容易看出，这确实是一个（阿贝尔）群：(1) 封闭性显然成立，因为根据定义，它包含每一个长度为 d 的二进制串。(2) 结合律可通过简单的分类讨论看出，即 $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$ 在且仅在该位上 1 的个数为奇数时按位为 1。(3) 单位元是全 **0** 向量，即 $a\oplus\mathbf{0}=a$。(4) a 的逆元是其自身，即 $a\oplus a=\mathbf{0}$。

3 异或约束下的最短路径

在异或约束最短路径问题中，给定一个图 G、两个顶点 s 和 t、一个边标记函数 g: $E(G)\to\mathbb{Z}_2^d$、一个值 $c\in\mathbb{Z}_2^d$，以及 p 个顶点集 X_1、.....、$X_p\subseteq V(G)$。问题是寻找一条 s-t-路径 P，满足 (i) $\sum_{e\in E(P)} g(e)=c$，并且 (ii) 对每个 $i\in[p]$， $|V(P)\cap X_i|\le 1$；在所有满足这些条件的路径中，使 P中的边数最少。

本节将证明定理 2，现重述如下。

定理 2. 异或约束最短路径可以通过一种单边错误随机算法在 $2^{d+p}\cdot(n+m)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解。

作为推论，我们通过猜测异或约束最短环的一个解顶点 v，在输入图中添加一个假孪生顶点 u，使 v 的所有关联边 u 的赋值均为零，然后寻找一条最短的 u-v-路径，使其满足条件 (i) 和(ii)。

推论 1. 异或约束最短环可由单边错误随机算法在 $2^{d+p}\cdot(n+m)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解。

3.1 算法

在本节的其余部分，我们假设输入图 G 是一个简单图。注意，一个输入n-顶点 m-边多重图可以通过先移除自环，再将每条边细分一次，将该边的标签赋给其中一条细分边，并将另一条细分边标记为零，从而转换为一个具有 $(n+m)$ 个顶点和 $2m$ 条边的简单图。这会使解的长度恰好加倍。不失一般性，我们还假设 $s\neq t$。

接下来介绍一些记号。我们称一个序列 $(v_0、v_1、\ldots\ldots、v_{\ell-1}、v_\ell)$ 由 $\ell+1$ 个顶点组成，是一个 s-t-游走，长度为 ℓ，如果 $v_0=s$，$v_\ell=t$，并且 $v_{i-1}v_i\in E(G)$ 对于每个 $i\in[\ell]$。注意，与路径不同，游走可以多次包含同一个顶点。我们称一个 s-t-游走是 可行的，如果它满足约束条件 (i)和 (ii)，特别是，如果

1. $\sum_{i=1}^{\ell} g(v_{i-1}v_i)=c$，以及
2. 对于每个 $i\in[p]$，至多存在一个 $j\in[0,\ell]$ 使得 $v_j\in X_i$。

对于一个整数 $\ell\geq 1$，令 $\mathcal{C}_\ell$ 表示所有长度恰为 ℓ 的可行 s-t-游走的集合。我们为 $\mathcal{C}_\ell$ 关联如下多项式。

令 $q=2^{\lceil\log_2 n\rceil+1}$，并回顾一下，GF($q$) 是一个特征为 2、阶为 q 的有限域。我们如下定义 GF(q) 上的多项式。对于每条边 $uv\in E(G)$，我们关联一个变量 $f(uv)$。然后，对于一个长度为 ℓ 的s-t-游走 $W=(v_0,\ldots,v_\ell)$，我们关联单项式

$$f(W)=\prod_{i=1}^{\ell} f(v_{i-1}v_i), \tag{1}$$

对于所有长度为 ℓ 的可行 s-t-游走组成的集合$\mathcal{C}_\ell$，我们关联多项式

$$f(\mathcal{C}_\ell)=\sum_{W\in\mathcal{C}_\ell} f(W).$$

注意，$f(\mathcal{C}_\ell)$ 的度为 ℓ。现在，我们的算法将基于以下引理，该引理将在第 3.2 节中证明。

引理 1。满足 s-t-路径且符合 *(i)* 和*(ii)* 的最短路径长度等于满足以下条件的最小整数 ℓ：$f(\mathcal{C}_\ell)$ 是一个非零多项式。若不存在这样的 ℓ，则不存在这样的 s-t-路径。

根据 引理 1，还需要设计一个算法来测试 $f(\mathcal{C}_\ell)$ 是否为非零多项式。为此，我们使用 DeMillo–Lipton–Schwartz–Zippel 引理。

引理 2 ([42, 47])。设 $p(x_1、\ldots\ldots、x_n)$ 是域 $\mathbb{F}$上次数为 d 的非零多项式，且 S 是 $\mathbb{F}$的子集。如果每个 x_i 都独立地从 S中赋予一个均匀随机值，则 $p(x_1、\ldots\ldots、x_n)=0$的概率至多为 $d/|S|$。

根据引理 2，为了概率性地检验 $f(\mathsf{C}_\ell)$ 是否非零，只需在将 GF(q) 中的值随机赋值给变量 $f(uv)$ 后，计算 $f(\mathsf{C}_\ell)$。由于 $f(\mathsf{C}_\ell)$ 的度为 $\ell\leq n$，且 GF(q) 的阶为 $q\geq 2n$，因此只要 $f(\mathsf{C}_\ell)$ 非零，该检验以至少 0.5 的概率得出正确结果。注意，如果 $f(\mathsf{C}_\ell)$ 是零多项式，则该检验始终正确。接下来，我们将展示如何高效地完成这一计算。

引理 3。给定变量 $f(uv)$ 对所有 $uv\in E(G)$的赋值后，多项式 $f(\mathsf{C}_\ell)$ 的值可在 $O(2^{d+p}n^2\ell)$时间内计算得出。

证明。我们通过对游走进行动态规划来计算多项式。对于 $u\in V(G)$、$l\in[0,\ell]$、$y\in\mathbb{Z}_2^d$ 和 $T\subseteq[p]$，记 $\mathcal{C}(u,l,y,T)$ 为长度为 l 且满足以下条件的 s-u-游走 ($s=v_0,v_1,\ldots,v_l=u$) 的集合：

- $\sum_{i=1}^{l} g(v_{i-1}v_i)=y$，
- 对于每个 $i\in[p]\setminus T$，都有 $\{v_0,v_1,\ldots,v_l\}\cap X_i=\emptyset$，并且
- 对于每个 $i\in T$，恰好存在一个 $j\in[0,l]$ 使得 $v_j\in X_i$。

然后，我们将 $f(\mathsf{C}(u,l,y,T))$ 记作值 $\sum_{W\in\mathsf{C}(u,l,y,T)} f(W)$，其中 $f(W)$ 的定义同公式 (1)，并将空乘积解释为 1。现在，我们有 $f(\mathsf{C}_\ell)=\sum_{T\subseteq[p]} f(\mathsf{C}(t,\ell,c,T))$。还需证明，可以通过动态规划计算值 $f(\mathsf{C}(u,l,y,T))$。

令 $T_v=\{i\in[p]\mid v\in X_i\}$ 对每个 $v\in V(G)$ 成立。然后，通过设置$f(\mathcal{C}(s,0,0,T_s))=1$，并将其他所有 $l=0$ 的值设为 0，来计算 $l=0$ 的值。接着，当 $l\geq 1$时，根据较小 l 对应的值，通过动态规划计算 $f(\mathcal{C}(u,l,y,T))$ 的值，具体如下。

- If $T_u \subseteq T$, then $f(\mathcal{C}(u,l,y,T)) = \sum_{uw \in E(G)} f(uw) \cdot f(\mathcal{C}(w,l-1,y-g(\{u,w\}),T \setminus T_u))$.
- Otherwise, $f(\mathcal{C}(u,l,y,T)) = 0$.

显然，这样可以正确计算这些值，总运行时间为 $\mathcal{O}(2^{d+p}n^2\ell)$。 □

现在，我们的算法通过引理 3，对变量 $f(uv)$ 赋予随机值，并针对递增的 $\ell \leq n$ 值计算 $f(\mathsf{C}_\ell)$；一旦计算结果非零，就报告 ℓ 是满足条件 (i) 和 (ii) 的最短 s-t-路径的长度。如果未找到这样的 $\ell \leq n$，算法就报告不存在这样的 s-t-路径。注意，算法的正确性仅取决于使用正确的 ℓ 进行计算时所用的随机性，因此算法以至少 0.5 的概率给出正确结果，并且绝不会报告短于最短解长度的长度。通过多次运行算法，可以将这一概率误差呈指数级降低。要恢复该解，只需用算法测试可以从图 G 中移除哪些边，直到 G 变成一条 s-t-路径。显然，无论是恢复解，还是将错误概率降至指数级小，只需运行多项式次算法。因此，除了将在下一小节给出的引理 1 的证明之外，定理 2 的证明至此完成。

3.2 正确性证明

本节旨在证明引理 1。我们首先证明这样的方向：存在一个长度为 ℓ 的解 $f(\mathcal{C}_\ell)$ 非零。

引理 4 。 如果存在一个满足 s-t-路径，其长度为 ℓ 且满足 *(i)* 和 *(ii)*，那么 $f(\mathcal{C}_\ell)$ 是一个非零多项式 l.

证明。设 $W = (s = v_0, v_1, \ldots, v_\ell = t)$ 是一条满足条件 (i) 和 (ii)、长度为 ℓ 的 s-t-路径上的顶点序列。注意，W 是一条可行的 s-t-游走，且 $W \in \mathsf{C}_\ell$。由于游走 W 中的每个顶点至多出现一次，我们注意到，W 可以由其边集唯一确定，因此 W 是 C_ℓ 中唯一具有单项式 $f(W) = \prod_{i=1}^{\ell} f(v_{i-1}v_i)$ 的游走。因此，单项式 $f(W)$ 在多项式 $f(\mathsf{C}_\ell)$ 中出现，且其系数为 1，所以 $f(\mathsf{C}_\ell)$ 非零。 □

仍需证明：如果不存在长度至多为 ℓ 的解，那么 $f(\mathcal{C}_\ell)$ 是零多项式。为此，我们先陈述主要引理，但将其证明推迟到本小节末尾。

引理 5。 如果不存在 s-t-长度至多为 ℓ 且满足条件 *(i)* 和 *(ii)* 的路径，则存在一个函数 ϕ：$\mathcal{C}_\ell \to \mathcal{C}_\ell$，使得对于每个 $W \in \mathcal{C}_\ell$ 都有

1. $\phi(\phi(W)) = W$,
2. $\phi(W) \neq W$，以及
3. $f(\phi(W)) = f(W)$。

现在，假设 引理 5成立，引理 1 的证明可以如下完成。

引理 6。 如果不存在 s-t-长度至多为 ℓ 且满足条件 *(i)* 和 *(ii)* 的路径，则 $f(\mathcal{C}_\ell)$ 是零多项式。

证明。 令 ϕ 为引理 5所给出的函数。根据性质1 和2，集合$\mathcal{C}_\ell$ 可以划分为若干配对$\{W, \phi(W)\}$。现在，性质 3 表明 $f(W) = f(\phi(W))$，由于 GF(q) 是特征为 2 的域，因此有 $f(W) + f(\phi(W)) = 0$。因此，$\sum_{W \in \mathcal{C}_\ell} f(W) = 0$。 □

结合引理 4 和6 可得引理 1。剩下要证明的是引理 5。

引理 5 的证明。假设不存在满足条件 (i) 和 (ii) 的长度不超过 ℓ 的 s-t 路径。我们将显式定义函数 $\phi : \mathsf{C}_\ell \to \mathsf{C}_\ell$，并证明它满足所有要求的性质。设 $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ 是 C_ℓ 中的一条 s-t 游走。ϕ 的定义思路是，在 W 中找到一个子游走 $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j)$，其中 $0 \leq i < j \leq \ell$，然后反转该子游走，即将这条游走映射

$$W = (v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_\ell)$$

为游走

$$W\overleftarrow{[i,j]} = (v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{j-1}, \ldots, v_{i+1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_\ell).$$

特别地，对于精心选择的配对 i，j我们将有 $\phi(W) = W\overleftarrow{[i,j]}$，且满足 $0 \le i < j \le \ell$。选择该配对时将确保 $v_i = v_j$，从而保证 $W\overleftarrow{[i,j]} \in \mathcal{C}_\ell$以及 $f(W\overleftarrow{[i,j]}) = f(W)$，因为游走中相邻顶点的配对多重集不会改变。

剩下需要论证的是，可以选择这样的配对 i，j，使性质 $\phi(\phi(W)) = W$和 $\phi(W) \neq W$成立。注意，性质 $\phi(W) \neq W$成立，当且仅当从 i到 j的子游走不是一个回文，即反向后仍与原序列相同的序列。现在我们定义一个过程，该过程输出一个配对 i，j，使得 $0 \le i < j \le \ell$、$v_i = v_j$，并且从 i到 j的子游走不是回文。

该过程首先将 $i = j = 0$设为初始值。随后重复执行以下步骤：首先选择 i，使其成为满足以下条件的最小整数 $i > j$：顶点 v_i 在游走中索引大于 j 的位置出现不止一次。若不存在这样的 i，则输出 FAIL。然后，将 j 设为满足 $v_i = v_j$的最大整数，特别地，它是 v_i 在游走中最后一次出现的索引。此时可以保证 $0 \le i < j \le \ell$ 且 $v_i = v_j$。现在，如果从 i 到 j 的子游走不是回文，则输出数对 i，j。否则，该过程继续重复。

注意，该过程始终输出 FAIL 或一个数对 i，j，其中 $0 \le i < j \le \ell$ 且 $v_i = v_j$，使得从 i 到 j 的子游走不是回文。我们证明，该过程实际上永远不会输出 FAIL。

断言 1。 *上述定义的过程永远不会输出 FAIL。*

命题证明。 假设该过程输出了 FAIL，并设 $i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \ldots < i_t < j_t$为过程期间考察的配对序列 i, j。我们将收缩后的游走 W'定义为从 $W = (v_0, \ldots, v_\ell)$ 中删除索引属于 $[i_1+1, j_1] \cup [i_2+1, j_2] \cup \ldots \cup [i_t+1, j_t]$的顶点后得到的子序列。特别地，$W'$是将过程中考察的每个回文 $v_{i_k}, \ldots, v_{j_k}$收缩为单个顶点 v_{i_k}后，从 W得到的。

现在我们声称，W' 是一个可行的长度至多为 ℓ的 s-t-游走，而且其中没有任何顶点出现超过一次。这就产生了矛盾，因为在这种情况下，W'实际上会是一个长度至多为 ℓ、满足条件 (i) 和 (ii) 的 s-t-路径，但我们假设不存在这样的 s-t-路径。我们注意到，收缩后的游走 W' 确实是一个 s-t-游走，因为它是从一个 s-t-游走经过收缩若干子游走得到的，而这些子游走的起点和终点均为同一顶点。显然，它的长度也至多为 ℓ，并且满足条件 (ii)，因为 W' 中的顶点多重集是 W中顶点多重集的子集。对于条件 (i)，我们注意到，如果子游走 $v_i, \ldots, v_j$是回文，那么 $\sum_{k=i+1}^{j} g(v_{k-1}v_k) = 0$，因为每一对相邻顶点出现的次数都是偶数，而且我们所用的是群 $\mathbb{Z}_2^d$。因此，收缩这些回文不会改变 W上的边标签之和，所以 W' 满足条件 (ii)。

最后，我们证明在 W' 中没有顶点出现多次。为反证，假设某个顶点在 W' 中出现多次，这尤其意味着存在索引 i'、j'，满足 $0 \le i' < j' \le \ell$ 和 $v_{i'} = v_{j'}$ 不在 $[i_1 + 1, j_1] \cup [i_2 + 1, j_2] \cup \ldots \cup [i_t + 1, j_t]$ 中。若 $i' < i_1$，则这与 i_1的选取相矛盾；若 $i' = i_1$，则这与 j_1的选取相矛盾。类似地，若对于某个 $1 \le k < t$有 $j_k < i' \le i_{k+1}$，则这与 i_{k+1} 或 j_{k+1}的选取相矛盾；若 $i' > j_t$，则这与以下事实相矛盾：i_t，j_t 是算法考虑的最后一对。 □

现在，函数 $\phi : \mathcal{C}_\ell \to \mathcal{C}_\ell$定义为 $\phi(W) = W\overleftarrow{[i,j]}$，其中 i，j是上述过程输出的有序对。我们已经证明了 $\phi(W) \neq W$和 $f(\phi(W)) = f(W)$，因此只需证明 $\phi(\phi(W)) = W$。为此，只需注意操作 $W\overleftarrow{[i,j]}$不会改变选择 i,j 的过程的行为，因为它不会改变索引 i 之前的游走，也不会改变 v_i 最后一次出现的位置为索引 j这一事实。

□

这就完成了定理 2的证明。

4 面覆盖参数化的两集合割-不割

本节将证明，当参数取为输入图的平面嵌入中覆盖终端的面数最小值时，双集合割-不割是固定参数可解的。我们将使用以下关键观察。首先，我们注意到，当参数取为覆盖的大小时，可以在固定参数可解时间内找到最小面覆盖。

为此，我们利用关于平面图上的红蓝支配集问题的已知结果。该问题的任务是：给定一个二分图 G，其顶点被划分为两个集合 R 和 B（分别为红色和蓝色顶点），以及一个整数 $r \geq 1$，判断是否存在一个集合 D，其中至多包含 r 个红色顶点，并且该集合支配蓝色顶点；也就是说，每个 $v \in B$ 都与 D中的至少一个顶点相邻。Alber 等人证明了 [2] 该问题可以在平面图上于 $2^{\mathcal{O}(\sqrt{r})} \cdot n$ 时间内求解。

引理 7. 可以在 $2^{\mathcal{O}(\sqrt{r})} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内判定平面图 G 的顶点集 U 是否存在大小至多为 r 的面覆盖。此外，如果存在这样的覆盖，也可以在相同时间内找到。

证明。设 G 是一个具有 F 个面的平面图，并令 $U \subseteq V(G)$。我们通过设置 $R = F$、$B = U$，并在 v 位于面 f 的边界上时令 $f \in R$ 与 $v \in U$ 相邻，来构造红蓝支配集实例。于是，U 能被至多 r 个面覆盖，当且仅当蓝色顶点集合能被至多 r 个红色顶点支配。注意，所构造的红蓝图是平面的。因此，Alber 等人 [2] 的结果推出了该引理的结论。 □

其次，我们注意到以下联系。

观察 2. 设 (G, S, T, k) 是一个双集合割-不割实例，其中 G 是一个连通图。当且仅当存在 G 的一个极小割 (A, B)，满足 $|\text{割}(A)| \leq k$，且 $S \subseteq A$ 和 $T \subseteq B$时，(G, S, T, k) 是一个是实例。

证明。若 G 有一个极小割 (A, B)，满足 $|\text{割}(A)| \leq k$，且 $S \subseteq A$ 和 $T \subseteq B$，则 (G, S, T, k) 是一个是实例，因为 $G[A]$ 和 $G[B]$ 是连通的。反过来，设 (A, B) 是 G的一个大小最小的割，使得 S 的顶点位于 $G[A]$ 的同一个连通分量中，且 T 的顶点位于 $G[B]$的同一个连通分量中。我们断言 (A, B) 是极小的。反设 (A, B) 不是极小的，即 $G[A]$ 或 $G[B]$ 不连通。不失一般性，假设 $G[B]$ 不连通。于是，存在一个子集 $R \subseteq B$，使得 $G[R]$ 是 $G[B]$ 的一个连通分量，且 $R \cap T = \emptyset$。考虑割 (A', B')，其中 $A' = A \cup R$，且 $B' = B \setminus R$。我们有，S 的顶点位于 $G[A']$ 的同一个连通分量中，而 T 的顶点位于 $G[B']$的同一个连通分量中。然而，由于 G 是连通的，G 有一条边，其一个端点在 A 中，另一个端点在 R中。因此，$|\text{割}(A')| < |\text{割}(A)|$，这与 (A, B) 的选择矛盾。这证明了该观察。 □

这一观察意味着，要在平面图 G 上求解双集合割-不割问题，我们必须在对偶图 G^* 中找到一个最短环 C^*，使得 S 和 T 的顶点位于 C^*的不同面中。首先，我们注意到，不失一般性地，可以假设输入图是 2-连通的。这个假设简化了论证，因为 2-连通平面图中每个面的边界都是一个圈 [16]。

引理 8。 存在一个多项式时间算法，给定双集合割-不割的一个实例 (G, S, T, k)，该算法要么求解此问题，要么输出双集合割-不割的一个等价实例 (G', S', T', k)，其中 G' 是 G的一个 2-连通诱导子图。此外，给定 G 的一个平面嵌入，使得 $S \cup T$ 至多可由 r 个面覆盖，则在 G' 的诱导嵌入中，$S' \cup T'$ 至多可由 r 个面覆盖。

证明。假设 G 不连通。那么，如果 S 的顶点位于 G 的不同连通分量中，或者对称地，T 的顶点位于不同的连通分量中，则 (G, S, T, k) 是一个平凡的否实例。此外，如果顶点 S 与 T 的顶点位于 G 的不同连通分量中，则 (G, S, T, k) 是一个平凡的是实例。剩下的情况是，S 的顶点与 T 位于 G 的同一个连通分量中。此时，我们可以删除其他所有连通分量。因此，可以假设 G 是连通的。

如果 G 是 2-连通的，那么该引理的结论显然成立。假设 G 有一个割点 v。那么，X 存在一个分离 (X, Y)，其分隔集为 v；也就是说，存在子集 $X, Y \subseteq V(G)$，使得$X \cup Y = V(G)$、$X \cap Y = \{v\}$，并且 G 没有边 xy 连接 $x \in X \setminus Y$ 与 $y \in Y \setminus X$。注意，若 (A, B) 是 G 的一个极小割，且 $v \in A$，那么 $X \subseteq A$ 或 $Y \subseteq B$；否则，$G[B]$ 就会不连通。因此，对于 G 的任意极小割 (A, B)，$\text{cut}(A) = \text{cut}(A')$，其中 (A', B') 是 $G[X]$ 或 $G[Y]$ 的一个极小割。根据这一观察，可得到以下四种情形（忽略对称情况）。首先，考虑所有终端都在分离的同一侧的情形。

情形 1。 $(X \setminus Y) \cap (S \cup T) = \emptyset$。那么，对于 G 的任意极小割 (A, B)，若 $v \in A$ 且 S 和 T 位于不同部分，则 $X \subseteq A$，并且 (G, S, T, k) 与 $(G[Y], S, T, k)$ 等价；也就是说，我们可以通过删除 $X \setminus Y$ 中的顶点来缩减输入实例。

接下来，我们假设分离的每一部分都包含来自 S 和 T 的终端。

情形 2. $X \cap S \neq \emptyset$, $X \cap T \neq \emptyset$, $Y \cap S \neq \emptyset$, and $Y \cap T \neq \emptyset$. 因为对于 G 的任意极小割 (A, B)，若满足 $v \in A$，则必有 $X \subseteq A$ 或 $Y \subseteq B$，所以不存在分离 S 和 T 的极小割。因此，(G, S, T) 是一个否实例。我们报告不存在解并停止。

现在，我们假设分离的一部分包含来自 S 和 T 的终端，而另一部分仅包含来自集合 S 和 T 之一的终端。

情形 3. $(X \setminus Y) \cap S \neq \emptyset$, $X \cap T = \emptyset$, $Y \cap S \neq \emptyset$, and $Y \cap T \neq \emptyset$. 那么，对于 G 的任意极小割 (A, B)，若满足 $v \in A$，且 S 和 T 位于不同部分，则 $X \subseteq A$。此外，$S \subseteq A$ 和 $T \subseteq B$。这意味着 (G, S, T, k) 等价于 $(G[Y], S', T, k)$，其中 $S' = (S \setminus X) \cup \{v\}$。由此，我们可以通过删除 $X \setminus Y$ 中的顶点并修改 S 来缩减输入实例。

最后，我们考虑分离的每一侧都只包含来自集合 S 和 T 之一的终端的情形。

情形 4. $(X \setminus Y) \cap S \neq \emptyset$, $X \cap T = \emptyset$, $Y \cap S = \emptyset$，以及 $(Y \setminus X) \cap T \neq \emptyset$。考虑 G 的一个极小割 (A, B)，其中 $v \in A$，使得 S 和 T 位于不同的部分。若 $X \subseteq A$，则对于满足 $\{v\} \in A$ 且 $T \subseteq B$ 的 $G[B]$ 的一个极小割 (A', B')，有 $\text{cut}(A) = \text{cut}(A')$。情形 $Y \subseteq A$ 是对称的。借助 Bezáková 和 Langley [4] 的结果，我们可以在多项式时间内解决该问题。根据这一结果，当 $|S| = 1$ 时，该问题可在多项式时间内求解。我们将 Bezáková 和 Langley 的算法应用于 $(G[Y], \{v\}\ T, k)$ 和 $(G[X], S, \{v\}\ k)$，并得出结论：只要这些实例中至少有一个是实例为是，则 (G, S, T, k) 就是一个是实例。

由于可以通过 Tarjan 的经典算法在线性时间内列出 G 的割点 [43]，我们可以得出结论：在多项式时间内，我们要么解决该问题，要么将输入实例约化为等价实例（G'，S'，T'，k），其中 G' 没有割点。如果得到的图 G' 只有两个顶点，那么问题是平凡的，因为 $|S'| = |T'| = 1$ 且最小割是唯一的。否则，G' 是 G 的 2-连通诱导子图。

为证明该引理的第二个结论，假设 G 嵌入在平面上，且 $S \cup T$ 被一组面 F' 覆盖。考虑 G' 的诱导嵌入。由于 G' 是 G 的诱导子图，对于 G 的每个面 f，都存在 G' 的一个面 f'，使得 G 中被 f 覆盖的每个顶点都被 G' 中的 f' 覆盖。我们通过将每个面 $f \in F'$ 对应的此类面 f' 加入其中，从 F' 构造 G' 的一组面 F''。我们声称 F'' 覆盖 $S' \cup T'$。根据 F' 的定义，我们知道每个 $x \in (S \cup T) \cap (S' \cup T')$ 都被 F'' 覆盖。因此，我们还需要证明每个 $x \in (S' \cup T') \setminus (S \cup T)$ 也都被覆盖。注意，只有在情形 3 中才会引入新的终端。假设 $(X \setminus Y) \cap S \neq \emptyset$, $X \cap T = \emptyset$, $Y \cap S \neq \emptyset$，且 $Y \cap T \neq \emptyset$。那么，存在一个面 $f \in F'$，它覆盖了 $(X \setminus Y) \cap S$ 中的一个顶点。由于 v 是一个割点，我们知道面 f' 覆盖 v。这意味着 F'' 覆盖 $S' \cup T$，其中 $S' = (S \setminus X) \cup \{v\}$。至此，证明完成。 □

从现在起，我们假设所考虑的双集合割-不割实例中的图是 2-连通的。我们提醒读者，平面 2-连通图中每个面的边界都是一个圈。并且，对偶图 G^* 没有自环。此外，由于自环与双集合割-不割无关，我们假设输入图没有自环。

我们使用以下关于图中同一面边界上顶点的分离性质。

引理 9. 设 G 是一个平面图，且 X 和 Y 是圈 C 的互不相交的非空顶点集；圈 C 构成了 G 的一个面 f 的边界。设 C^* 是 G^* 中的任意一个圈。当且仅当 $f \in V(C^*)$ 且 C 与 C^* 在两条边 e_1 和 e_2 上交叉，并满足以下条件时，X 的顶点与 Y 的顶点位于 C^* 的不同面中：*(i)* X 的顶点属于 $\{e_1, e_2\}$ 的同一个连通分量，*(ii)* Y 的顶点属于 $\{e_1, e_2\}$ 的同一个连通分量，且 *(iii)* X 的顶点与 Y 的顶点属于 $\{e_1, e_2\}$ 的不同连通分量。

证明。 假设 X 的顶点和 Y 的顶点位于 C^*的不同面中。那么， f 是 C^*的一个顶点。设 e_1^* 和 e_2^* 为与 f 关联的 C^* 的边，并设 e_1 和 e_2 分别为 e_1^*和 e_2^*的对偶边。注意， C 同时包含 e_1 和 e_2 ，且 C 仅在这两条边处与 C^* 交叉。我们有 $C - \{e_1, e_2\}$ 有两个连通分量 P_1 和 P_2，它们是路径。由于 C^* 将 X和 Y分隔开，我们有 X 完全包含在 P_1 中或完全包含在 P_2 中，而 Y 完全包含在另一条相应的路径中。因此，条件 (i)–(iii) 均得到满足。

反向地，假设 C 与 C^* 交叉于两条边 e_1 和 e_2 ，且满足条件 (i)–(iii)。考虑由 (i)–(iii) 保证存在的 x-y-路径 P，其位于 C 中，对任意 $x \in X$ ，并且包含 e_1 而不包含 e_2。 P 与 C^* 的交叉数为 1。因此， x 和 y 位于 C^* 的不同面中，这由观察 1得出。证明完毕。 □

引理 10. 设 G 是一个平面图， X 是圈 C 的非空顶点集，该圈构成 G 的一个面 f 的边界。设 C^* 是 G^* 中任意一个圈。那么，当且仅当以下条件之一成立时， X 的顶点位于 C^* 的同一个面中： $f \notin V(C^*)$ C 不与 C^* 交叉；或者 $f \in V(C^*)$ C 与 C^* 交叉于两条边 e_1 和 e_2 ，且 X 的顶点位于 $C - \{e_1, e_2\}$ 的同一个连通分量中。

证明。假设 X 的顶点位于 C^* 的同一个面中，并且假设 C 与 C^* 相交。那么， f 是 C^* 的一个顶点，且 C^* 有两条边 e_1^* 和 e_2^* 与 f 关联。我们知道， C 与 C^* 在边 e_1 和 e_2 处相交，而这两条边分别是 e_1^* 和 e_2^*的对偶。由于 C 是一个圈， $C - \{e_1, e_2\}$ 有两个连通分量 P_1 和 P_2 ，且它们都是路径。我们证明，要么 $X \subseteq V(P_1)$，要么 $X \subseteq V(P_2)$。为导出矛盾，假设存在 x、 $y \in X$ ，使得 $x \in V(P_1)$ 且 $y \in V(P_2)$。那么， C 中存在一条 x-y 路径 P，它包含 e_1 ，但不包含 e_2。 P 和 C^* 的交叉数为 1，因此根据观察 1， x 和 y 位于 C^* 的不同面中；矛盾。因此， X 的顶点位于 $C - \{e_1, e_2\}$ 的同一个连通分量中。

对于反方向，假设 C 不与 C^* 相交，或者 C 与 C^* 在两条边上相交 e_1，并且 e_2 使得 X 的顶点位于 $C - \{e_1, e_2\}$的同一个连通分量中。在这两种情况下，对于任意两个顶点 x、 $y \in X$，都存在一条 x-y-路径 P，它不与 C^*相交。根据观察 1， X 的顶点位于 C^*的同一个面中。证明完毕。 □

现在我们可以给出本节的主要结果。

定理 1. 存在一种单边错误随机化算法，可在时间 $2^{|S|+|T|} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 内解决平面图上的双集合割-不割问题。此外，存在一种单边错误随机化算法，可在时间 $4^{r+\mathcal{O}(\sqrt{r})} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 内解决该问题，其中 r 是给定平面图中覆盖 $S \cup T$ 所需的面数。

证明。 我们先证明关于终端面覆盖大小的参数化的结论，然后说明如何使用该算法的简化版本，按终端数量进行参数化。

设 (G, S, T, k) 是一个双集合割-不割实例，其中给定了 G 在平面上的嵌入。我们提醒一下，假设 G 是 2-连通的。我们利用 G 的嵌入构造对偶图 G^* 及其嵌入。根据观察 2，我们的任务是在 G^* 中寻找一个长度至多为 k 的圈 C^* ，使得 S 和 T 位于 C^* 的不同面中。我们使用推论 1 中的异或约束最短环算法来寻找这样的圈。

我们使用 引理 7 来验证是否存在一个大小至多为 F'的面集合 r，覆盖 $S \cup T$。如果不存在这样的覆盖，我们就停止。此后，我们假设给定了 F' 。我们将 F' 划分为两个集合，其中 $F_1 \subseteq F'$是边界上同时含有来自 S和 T的顶点的面集合，而 $F_2 \subseteq F'$由满足以下条件的面 $f \in F'$ 组成：其边界 f只包含 S 的顶点，或只包含 T的顶点。我们通过分析每个面 $f \in F'$来修改 G^*。修改的最终目的是减少所考虑的终端数量。

对 F_1 的修改。设 $f \in F_1$ 和 C 为 G 中构成 f 边界的圈。回想一下， $S' = S \cap V(C) \neq \emptyset$，且 $T' = T \cap V(C) \neq \emptyset$。如果不存在两条边 e_1、 $e_2 \in E(C)$ ，使得 S' 的顶点与 T' 的顶点位于 $C - \{e_1, e_2\}$ 的不同连通分量中，那么由引理 9 可知，不存在这样的圈 C^*，使得 S' 的顶点与 T' 的顶点位于 C^* 的不同面中。这意味着（G， S， T， k）是一个否实例。因此，我们假设情况并非如此，并在 C 中选取两条包含极小的不相交路径 P_1 和 P_2，使得 $S' \subseteq V(P_1)$ 且 $T' \subseteq V(P_2)$ 。我们通过删除每条与 f 相 incident 且与边 $e \in E(P_1) \cup E(P_2)$ 对偶的边 e^* 来修改 G^* （见图2）。

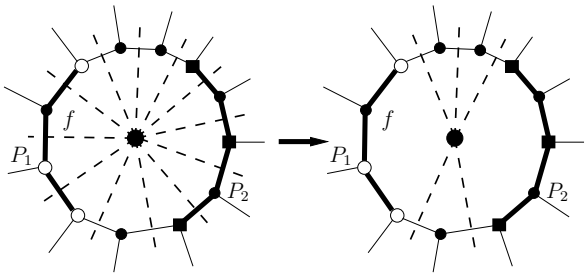


图2：对 $f \in F_1$ 的修改。 S' 的顶点用白色圆圈表示， T' 的顶点用黑色方块表示，而 G 的其他顶点用黑色圆圈表示。 G^* 的边用虚线表示。路径 P_1 和 P_2 用粗线表示。

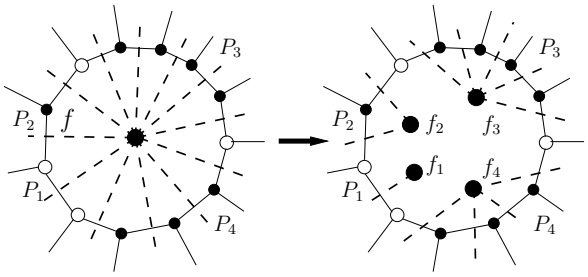


图3：对 $f \in F_2$ 的修改。 R 的顶点用白色圆圈表示，而 G 的其他顶点用小黑圆圈表示。 G^* 的顶点 f 以及顶点 f_1、 $f_2 \ldots$、 f_4 用大黑圆圈表示； G^* 的边以及构造出的新边用虚线表示。

对.....的修改 F_2。 设 $f \in F_2$，设 C 为 G 中构成 f边界的圈，并令$L = V(C) \cap (S \cup T)$。注意，根据 F_2的定义， $L \subseteq S$或 $L \subseteq T$成立。我们将G^*的顶点 f拆分为 $q = |L|$个顶点 f_1， f_2， ...， f_q，如下所示。若 $q \geq 2$，则 C包含 q条内部顶点不相交路径 P_1， P_2， ...， P_q，其端点位于 L中（且其内部顶点不在 L中）。然后我们

- 删除 f，并构造一个由 q 个新顶点组成的集合 $X_f = \{f_1、 f_2、 .....、 f_q\}$，
- 对于 P_j 中的每个 $j \in [q]$ 和边 e，我们将 G^* 的对偶边 e^* 替换为一条与 f_j 相 incident 的边，其第二个端点与 e^* 的第二个端点相同，除非 e^* 已因对 F_1 的某次修改而被删除。

对于 $q = 1$，我们正式设定 $X_f = \{f\}$ 和 $f_1 = f$，也就是说，我们不进行任何修改。构造如图3所示。注意，顶点 $f_1, f_2, \ldots, f_q$可以嵌入到 G 的面 f中，使得所得图 H^* 是平面图。对于每条边 $e^* \in E(H^*)$，都存在一条边 $e \in E(G^*)$，使得 e^* 是由 G^*中与 e 对偶的边构造而成的。稍微滥用一下记号，我们不区分 H^* 和 G^*中的边。特别地，我们称 e^* 与 e对偶。

我们的下一个目标是为 $\mathbb{Z}_2^d$ 中的边分配标签 H^*，其中 d需满足适当条件。为此，对于每个 $f \in F'$，我们从 $S \cup T$中贪心地选取一个代表元集合 R。对于每个 $f \in F_1$，我们分别从 S 和 T中选取两个终端，它们位于 G的面 f 的边界上。对于每个 $f \in F_2$，我们从 f的面的边界上选取一个终端。然后，我们在 G 中构造一棵任意的、包含极小的树 Q，使其覆盖 R。使用标准工具可以在线性时间内完成此操作（例如参见 [9]）。我们任意选取一个顶点 $u \in R \cap S$，并设定 $d = |R| - 1$。注意到 $|R| \leq 2|F_1| + |F_2|$ 和 $d \leq 2|F_1| + |F_2| - 1$。记 $v_1, \ldots, v_d$为 $L \setminus \{u\}$ 的顶点，并令每个 $i \in [d]$对应的 Q中的 Q_i-v_i-路径为 u。我们通过设定 $g(e) = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$来定义 $g\colon E(G) \to \mathbb{Z}_2^d$，其中对于每个 $i \in [d]$，若 $e \in E(Q_i)$ 0 $e \notin E\ Q_i$.，则 $\delta_i = \begin{cases} 1 \\ \text{，否则 ( )} \end{cases}$

此外，令 $g^*\colon E(H^*) \to \mathbb{Z}_2^d$ 通过对每个与 $e \in E(G)$ 对偶的 $e^* \in E(H^*)$ 设定 $g^*(e^*) = g(e)$ 来定义，并令 $c = (c_1, \ldots..., c_d) \in \mathbb{Z}_2^d$，其中

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{if } v_i \in S, \\ 1 & \text{if } v_i \in T \end{cases} \quad \text{for } i \in [d].$$

我们证明以下断言。

断言 2。图 G^* 包含一个长度至多为 k 的圈 C^*，使得 S 的顶点与 T的顶点位于 C^* 的不同面中，当且仅当异或约束最短环的实例 $(H^*, g^*, c, \{X_f \mid f \in F_2\})$ 有解，且解环的长度至多为 k。

断言 *2* 的证明 。假设 C^* 是 G^* 中的一个圈，长度至多为 k，并且 S 与 T 位于不同ˆ面中（均属于 C^*）。注意，C^* 对应于 H^* 中的一个圈：将每个对应于面 $f \in F_2$ 的顶点替换为某个顶点 f_j，该顶点通过分裂 f得到。

形式化地，令 $f \in V(C^*) \cap F_2$。由于 $f \in F_2$，f的边界环 C'要么只包含 S 的顶点，要么只包含 T的顶点。不失一般性，假设它只包含来自 S的顶点。由于 S 的顶点与 T 的顶点位于 C^*的不同面中，因此 S' 的顶点位于 C^*的同一个面中。根据引理 10，C' 与 C^* 恰好交于两条边 e_1 和 e_2，使得 S' 的顶点属于 $C' - \{e_1, e_2\}$的同一个连通分量。这意味着，e_1和 e_2是 C' 中某条路径 P_j 的边，该路径的端点位于 S' 中，且其内部顶点不在 S'中。回忆一下，H^* 有一个顶点 f_j，它与顶点 $f \in V(C^*)$关联着相同的边。因此，我们可以在 C^* 中用 f_j替换 f。

为说明 ˆC^* 的每条边都是 H^*的边，注意到每条不是 H^* 的边的边 $e \in E(G^*)$，都与某个顶点 f 相接，使得面 $f \in F_1$。假设存在 $f \in V(C^*)$，使得 $f \in F_1$。令 C' 为 f 的边界环。注意到 $S' = S \cap V(C') \neq \emptyset$，且 $T' = T \cap V(C') \neq \emptyset$。由于 S' 的顶点和 T' 的顶点位于 C^* 的不同面中，根据引理 9，C' 与 C^* 在两条边 e_1 和 e_2 处交叉，使得 (i) S' 的顶点位于 $C' - \{e_1, e_2\}$ 的同一个连通分量中，(ii) T' 的顶点位于 $C' - \{e_1, e_2\}$ 的同一个连通分量中，并且 (iii) S' 的顶点和 T' 的顶点位于 $C' - \{e_1, e_2\}$ 的不同连通分量中。对于 C' 中包含极小的不相交路径 P_1 和 P_2，使得 $S' \subseteq V(P_1)$ 且 $T' \subseteq V(P_2)$，我们有 $e_1, e_2 \notin E(P_1) \cup E(P_2)$。因此，ˆ 与 f 在 C^* 中相接的边 e_1^* 和 e_2^* 都是 H^*的边。这就证明了 C^* 是 H^*中的一个圈。

ˆˆ 显然，C^* 与 C^*的长度相同。此外，根据构造可知，对于每个 $i \in [p]$，C^* 至多包含 X_i 的一个顶点。令 $i \in [d]$，并考虑 c_i 以及 $g^*(e^*)$的第 i个坐标 $g^*(e^*)[i]$，其中 $e^* \in E($ ˆ$C^*)$。假设对于代表终端 $v_i \in R$，有 $v_i \in S$。由于 $u \in S$和 $v_i \in S$，我们知道 u 和 v_i 位于 C^* 的同一个面中；根据观察 1，路径 Q_iˆ和 C^* 的交叉次数为偶数。C^* 的构造表明，Q_i和ˆC^* 的交叉次数也为偶数。因此，$\sum_{e^* \in E(\hat{}C^*)} g^*(e^*)[i] = 0 = c_i$。类似地，若 $v_i \in T$，则 Q_i 和ˆC^* 的交叉次数为奇数，且$\sum_{e^* \in E(\hat{}C^*)} g^*(e^*)[i] = 1 = c_i$。由此，$\sum_{e^* \in E(\hat{}C^*)} g^*(e^*) = c$。ˆ我们得出结论：$C^*$ 是一个满足异或约束最短环约束的圈。因此，异或约束最短环的实例（$H^*, g^*, c, \{X_f \mid f \in F_2\}$）存在一个长度至多为 k的解环。

对于相反方向，假设 Xor Constrained Shortest ˆˆ Cycle 的 $(H^*, g^*, c, \{X_f \mid f \in F_2\})$ 存在一个解环 C^*，其长度至多为 k。注意，由于 C^* 对每个 $f \in F_2$ 至多包含 X_f 的一个顶点，C^* 对应于在 G^* 中得到的圈 C^*，该圈是将每个为面 $f \in F_2$ 构造的顶点 f_jˆ 替换为顶点 $f \in F$ 而得到的。显然，C^* 与 C^* 的长度相同。我们还有 $\sum_{e^* \in E(C^*)} g^*(e^*) = \sum_{e^* \in E(\hat{}C^*)} g^*(e^*) = c$。考虑任意维度 $i \in [d]$。若 $v_i \in S$，则$\sum_{e^* \in E(C^*)} g^*(e^*)[i] = c_i = 0$。因此，根据观察 1，$u$ 和 v_i 位于 C^* 的同一个面中。若 $v_i \in T$，则 $\sum_{e^* \in E(C^*)} g^*(e^*)[i] = c_i = 1$，且 u 和 v_i 位于 C^*的不同面中。这证明了 $S' = S \cap R$ 和 $T' = T \cap R$ 的顶点位于 C^*的不同面中。

我们断言，S 的顶点和 T 的顶点位于 C^*的不同面中。为证明这一点，考虑一个顶点 $v \in (S \cup T) \setminus R$。根据对称性，不失一般性地假设 $v \in S$。由于 S' 的顶点和 T' 的顶点位于 C^*的不同面中，只需证明存在某个 $s \in S'$，使得 s 和 v 位于 C^*的同一个面中。令 $f \in F'$ 为覆盖 v的一个面。

首先假设 $f \in F_1$。那么，R 包含来自构成 f边界的圈 C' 的两个代表顶点 $s \in S$ 和 $t \in T$。由于 s 和 t 位于 C^* 的不同面中，根据引理 9，$f \in V(C^*)$ 和 C' 在两条边 e_1 和 e_2 处与 C^* 相交，使得 s 和 t 位于$C' - \{e_1, e_2\}$的不同连通分量中。根据 H^*的构造，在 C' 中存在一条路径 P_1，使得与 f 关联的 S 中的所有顶点都包含在 P_1 中，并且对于 P_1中的每条边 e，都有 $e^* \notin E(H^*)$。因此，P_1 是 $C' - \{e_1, e_2\}$中的一条路径，因为 $e_1^*, e_2^* \in E(H^*)$。根据引理 9，顶点 t 和与 f 关联的 S 中的顶点位于 C^*的不同面中。特别地，v 是 C^* 中不同于 t 的另一个面，因此它与 s位于 C^* 的同一个面中。

现在假设 $f \in F_2$。那么， R 包含一个代表 $s \in S$，使得 s 位于 f的边界上。如果 $f \notin V(C^*)$，那么根据引理 10， s 和 v 位于 C^* 的同一个面中。假设 $f \in V(C^*)$。那么， f 的边界环 C' 在两条边 e_1 和 e_2处与 C^* 相交。提醒一下， C^* 由ˆ圈 C^*构造而成。根据 H^*的构造，存在一条路径 P_j，其内部顶点不属于 S，且边 e_1和 e_2包含在 P_j中。因此， s和 v位于 $C' - \{e_1, e_2\}$的同一个连通分量中。根据引理 10， s 和 v 位于 C^*的同一个面中。至此，命题得证。 □

根据断言 2，求解双集合割-不割在$(G,\ S,\ T,\ k)$等价于求解异或约束最短环在$(H^*,\ g^*,\ c,\ \{X_f \mid f \in F_2\})$。为此，我们使用推论 1中的算法。

为了评估运行时间，注意到可以在 $2^{\mathcal{O}(\sqrt{r})} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内构造一个大小至多为 r 的面覆盖 F'（如果存在）。给定这样的覆盖，可以在多项式时间内构造图 H^* 以及集合 X_f（针对 $f \in F_2$）。由于 $d \leq 2|F_1| + |F_2| - 1 \leq 2r$，标记 g^*和 $c \in \mathbb{Z}_2^d$ 也可以在多项式时间内构造。最后，由于 $d \leq 2|F_1| + |F_2| - 1$ 和 $p = |\{X_i \mid f \in F_2\}| = |F_2|$，我们有 $p + d \leq 2r - 1$，而推论 1 中的算法运行时间为 $4^r \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$。因此，总运行时间为 $4^{r+\mathcal{O}(\sqrt{r})} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$。证明完毕。

上述按面覆盖大小进行参数化的算法使用了G 的平面嵌入，因为我们必须找到一个覆盖终端的面集。然而，如果我们按 $\ell = |S| + |T|$对双集合割-不割进行参数化，则不需要嵌入，我们可以使用该算法的一个简化变体。给定一个双集合割-不割实例 (G, S, T, k)，其中 G是一个平面图，我们使用 Hopcroft 和 Tarjan 的经典算法 [28] 来寻找 G的平面嵌入。然后，我们使用该算法的一个变体，其中不修改 G^*，即令 $H^* = G^*$，并假设所有终端都是代表元，即令 $R = S \cup T$。标记 $g^*\colon E(H^*) \to \mathbb{Z}_2^d$和 c 的定义方式与按面覆盖大小进行参数化的算法相同。根据观察 1，求解 (G, S, T, k) 上的双集合割-不割，等价于求解 $(H^*, g^*, c, \emptyset)$ 上的异或约束最短环。由于 $d = |R| - 1 = |S| + |T| - 1$，我们得出结论，可以通过推论 1 中的算法在 $2^{|S|+|T|} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解该问题。

□

5 困难性

已知，双集合割-不割在平面图上是 NP 完全的 [24]，且在一般图中即使满足 $|S| = 2$ [45]，它仍是 NP 完全的。我们通过证明，即使满足 $|S| = 1$，双集合割-不割在以 $|T|$ 为参数时仍是 W[1]-困难的，从而加强了后一结果。为此，我们从以解的规模 k为参数的正则多色团问题进行多项式时间归约——该问题是多色团问题的一种变体，其中每个顶点的度都相同 d——且满足 $|T| = k$。已知该问题是 W[1]-困难的；假设 ETH 成立，则它无法在 $f(k) \cdot n^{o(k)}$ 时间内求解。

命题 1。 当以 $|T|$ 为参数时，即使满足 $|S| = 1$，双集合割-不割仍是W[1]-困难的。此外，除非 *ETH* 不成立，否则这个受限版本无法在 $f(|T|) \cdot n^{o(k)}$ 时间内求解。

证明。设 (G, k) 是正则多色团的一个实例。令 $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，令 $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ 为 $V(G)$ 的 k 划分，并令 d为 G 中每个顶点的度。我们构造一个等价实例 (H, S, T, ℓ)，对应双集合割-不割，具体如下。图 H包含 G作为诱导子图。此外，对于 $i \in [n]$和 $j \in [n+2m]$的每种组合，它还包含新顶点 s，$t_1, t_2, \ldots, t_k$和 v_i^j。对于 $i \in [n]$和 $j \in [n+m]$的每种组合，顶点 s都与 v_i^j相连。此外，对于每个 $i \in [n]$，每个顶点 v_i 都与满足 $j \in [n + 2m]$的每个顶点 v_i^j 相连。最后，对于每个 $i \in [k]$，顶点 t_i 都与 V_i中的所有顶点相连。我们设 $S = \{s\}$、 $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$，且 $\ell = n - k + k(n + 2m) + k(d - k + 1)$。至此，构造完成。注意 $|T| = k$，并且该归约可在多项式时间内完成。

只需证明这两个实例是等价的。为此，假设 G 中存在一个大小为 k 的多色团。为便于记号，设该团由顶点 $C = \{v_1、 v_2.....、 v_k\}$组成，并对每个 $i \in [k]$令 $v_i \in V_i$。我们按如下方式删除 ℓ 条边。对于每个 V_i，删除 $V_i \setminus \{v_i\}$ 中顶点与 t_i之间的所有边。对于 $i \in [k]$ 和 $j \in [n + 2m]$的每种组合，我们还删除 v_i 与 v_i^j 之间的所有边。最后，删除 G 中恰好有一个端点位于 C 中的所有边。总的来说，我们删除了 $n - k + k(n + 2m) + k(d - k + 1)$ 条边，因为 C 中的每个顶点都有 d 条关联边，其中有 $(k - 1)$ 条的另一个端点也位于 C 中。注意，所得图

包含两个连通分量，其中一个包含 $T \cup C$ 中的所有顶点，另一个包含其余所有顶点。因此，所得的双集合割-不割实例也是一个是实例。

反过来，假设存在一个由 ℓ 条边组成的集合，删除这些边后会使 S 与 T 不连通，同时保持 T 中的顶点之间连通。注意，为了保持 T 中的顶点之间连通，必须保留 t_i 与 V_i 中某个顶点之间的至少一条边。同样，为了便于记号，我们假设 t_i 与 v_i 之间的边仍保留在图中。注意，为了断开 t_i 与 s，现在需要使顶点 v_i 与 s 不连通，因此对于每个 $i \in [k]$ 和每个 $j \in [n+2m]$，都必须删除边 sv_i^j 或 $v_i^j v_i$ 中至少一条。此外，如果 V 中至少有 $k+1$ 个顶点不属于解中 s 所在的连通分量，那么我们至少需要删除 $k+1 \cdot (n+2m) > \ell$ 条边。该不等式成立是因为 $k(d-k+1) \leq kd < nd = 2m$。我们证明顶点集 $C = \{v_i \mid i \in [k]\}$ 构成一个多色团。首先，根据构造，C 中的每个顶点都与一个不同的顶点 t_i 相连，因此 C 是一个多色顶点集。其次，注意我们需要删除 s 所在连通分量中的顶点与所选顶点 v_i（满足 $i \in [k]$）之间的所有边。由于我们已经删除了 $n-k+k \cdot (n+2m)$ 条边，因此至多还能删除 $k(d-k+1)$ 条边。此外，由于每个顶点在 G 中的度为 d，我们必须删除与每个顶点 $v_i \in C$ 相 incident 的 $d-x$ 条边，其中 x 是 v_i 在 C 中的邻居数。注意，由于 C 中只有 k 个顶点，需删除的边数至少为 $d-k+1$，且只有当 v_i 与 C 中所有其他顶点相连时才能达到此下界。由于我们假设存在一个只删除 ℓ 条边的解，因此可以推断 C 中的每对顶点都两两相邻，即 C 是一个多色团。证明至此完成。

□

6 应用

本节将展示如何利用我们的结果推广文献中的两个已知结果。我们还补充了关于NP 困难性的结果，与固定参数可解时间算法相对应。首先，我们证明，带有多个桥的网络改道问题的推广版本，在以桥的数量为参数时，可以在（随机化）固定参数可解时间内求解。Generalized Network Diversion问题定义如下。[4]

6.1 Generalized Network Diversion

Generalized Network Diversion

输入：一个图 G、两个顶点 s 和 t、G的一组边 B，以及一个整数 $k \geq 0$。任务：判定是否存在 G的一个极小 s-t-割 (U, W)，使得 $|\text{cut}(U)| \leq k$且 $B \subseteq \text{cut}(U)$。

作为定理 1的一个简单推论，我们还得到了一个用于Generalized NetworkDiversion的固定参数可解时间算法。我们在本文附录的NP完全性证明中表明，该问题确实是命题3。

推论 2. 在平面图上，*Generalized Network Diversion* 可通过单侧错误的随机化算法在 $8^{|B|} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解。

证明。设 (G, s, t, B, k) 是 Generalized Network Diversion 的一个实例。我们考虑终端的所有可能集合 S，并通过猜测 B 中每条边的哪个端点与 s 位于解割的同一侧来确定 T。初始时，$S := \{s\}$ 且 $T := \{t\}$。于是有 $2^{|B|}$ 种可能性：将每条边 $e \in B$ 的一个端点纳入 S，另一个端点纳入 T。对于 S 和 T 的每种选择，我们运行定理 1 中的算法。由于 $|S| + |T| \leq 2|B| + 2$，总运行时间为 $8^{|B|} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$。 □

作为对上述算法的补充，我们在本文附录的固定参数可解运行时间可能无法改进为多项式运行时间这一点，将在命题3中证明。

[4]顺带一提，关于这样一个问题：只需移除一定数量的边，以确保每条剩余的 s-t-路径至少包含一条属于 B 的边。此前已有研究考虑过这个问题。不过，Cintron–Arias 等人指出 [8]，该问题可归约为仅含一座桥的情形（带权情形亦然）。因此，我们认为，更合理的要求是让 B 中的每条边都成为桥，也就是说，要求 B 包含于极小割中。

6.2 位置约束最短路径

我们的第二个应用涉及位置约束最短路径问题，该问题由 Duan 和 Xu 研究 [18]。

、面上的两个顶点 s 和 t 以及一个内面 F任务：

寻找一条最短的内面 s-t 路径 位于 F。

内部路径是指只有端点可以位于外面的路径。给定一条内部 s-t-路径 P，我们可以通过附加从 t 到 s 且位于图下侧的外面上的路径，将其扩展为一个简单环 C。这是一个简单环，因为 P 除 s和 t 之外不使用任何外部顶点。现在，如果面 F 位于 C内部，则称其为 F 的下方 P。Duan 和 Xu [18] 为位置约束最短路径给出了一种多项式时间算法。

我们考虑位置约束最短路径的一种推广，称为广义位置约束最短路径。给定一个平面图 G 和两个面集合 $\mathcal{F}_A = F_1^A, F_2^A, \ldots\ldots, F_{p_A}^A$ 以及 $\mathcal{F}_B = F_1^B, F_2^B, \ldots\ldots, F_{p_B}^B$，任务是找到一条最短的内部 s-t-路径 P，使得 $\mathcal{F}_A$ 中的所有面都位于上方 P，而 $\mathcal{F}_B$ 中的所有面都位于下方 P。

t 位于外面，内面$\mathcal{F}_A$和$\mathcal{F}_B$任务：

求一条最短的内 s-t 路径 P，使得$\mathcal{F}_A$ 位于 P 上方，并且$\mathcal{F}_B$ 位于 P下方。

我们通过证明广义位置约束最短路径在以 $|\mathcal{F}_A| + |\mathcal{F}_B|$ 为参数时是固定参数可解的，推广了 Duan 和 Xu 的结果。

命题2。广义位置约束最短路径可以在随机化 $2^{|\mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}^B|} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解，且具有单侧错误。

证明。我们证明广义位置约束最短路径是双集合割-不割的一个特例。设 $(G, s, t, \mathrm{F}_A, \mathrm{F}_B)$ 为广义位置约束最短路径的输入，其中 O 是外面上除 s 和 t 之外的顶点。注意，在图 $G - \mathrm{O}$ 中，s 和 t 必须属于同一个连通分量，否则这是一个平凡的否实例。令 G' 为图 $G - \mathrm{O} + \{s, t\}$，即在 s 和 t 之间添加一条额外的边所得的图，并在嵌入中将这条边画在图的其余部分上方。我们将新的（非外面）面称为 A，将新的外面称为 B。现在，令 $S' = \mathrm{F}_A \cup \{A\}$ 和 $T' = \mathrm{F}_B \cup \{B\}$，并令 G^* 为 G' 的对偶图。令 S 为对应于 S' 的面的顶点，令 T 为对应于 T' 的顶点。接下来证明，(G^*, S, T, k) 是双集合割-不割的一个是实例，当且仅当 $(G, s, t, \mathrm{F}_A, \mathrm{F}_B)$ 存在一条长度为 $k - 1$ 的内 s-t 路径。

由于双集合割-不割算法会在 G^* 中找到大小至多为 k 的极小割，这对应于 G' 中长度至多为 k 的简单环。注意，两个面 A 和 B 彼此相邻，因此 G^* 中对应这两个顶点的边必须属于该割。这意味着新边 $\{s, t\}$ 属于该环，也就是说，环的其余部分是一条长度至多为 $k - 1$ 的内部s-t路径。

□

广义位置约束最短路径的 NP 完全性证明留待附录给出。

这两个问题——Generalized Network Diversion 和 广义位置约束最短路径 ——只是两个可以直接通过我们的 双集合割-不割 算法根据定理 1解决的应用。我们认为还有更多此类应用。

7 结论

本文证明了，以终端数量为参数时，平面图上的双集合割-不割问题属于固定参数可解。我们还证明了一个更一般的结果：以所需覆盖终端的最少面数为参数时，该问题仍然属于固定参数可解

。我们的结果意味着，存在一个多项式时间算法，可在平面图上求解网络改道问题。作为补充，我们证明了在一般图中，即使 $|S| = 1$，以终端数量 $(|S| + |T|)$ 为参数的双集合割-不割问题仍是 W[1]-困难的。

首先，我们指出定理 1中关于双集合割-不割的算法以面数为参数，针对平面嵌入图给出，因为覆盖终端所需的最少面数取决于嵌入。不过，基于 SPQR 树的标准技术 [26, 27]可用于证明，对于给定的平面图 G、顶点集 X和整数$r \geq 1$，判断 G 是否存在一种平面嵌入，使得 X 可由至多 r 个面覆盖，是固定参数可解的。因此，该结果可以扩展到那些存在某种嵌入、使终端可由至多 r 个面覆盖的平面图（但运行时间会更长）。

最后，我们提出几个开放问题。

1. 首先，我们重申这个由来已久的开放问题：网络改道问题在一般图上是否存在多项式时间算法？即使对于可嵌入环面的图，这个问题同样成立。2. 双集合割-不割的一种自然推广，是将其扩展到更多集合。由于三路割在一般图上是 NP 完全的 [14], 即使所有集合的大小均为 1，三集合割-非割也同样是 NP 完全的。然而，对于平面图，当 k [14, 33, 39] 固定时， k-路割可在多项式时间内求解。作为一个非常具体的开放问题，我们想知道：当三个集合中有两个大小为 1、另一个大小为 2 时，三集合割-非割能否在平面图上于多项式时间内求解？3. 我们的算法是随机化的，且仅适用于无权图；能否去除其中任一限制？

参考文献

[1] G. Agnarsson 和 R. Greenlaw，《图论：建模、应用与算法》，Prentice-Hall, Inc.，2006年。5 [2] J. Alber、H. L. Bodlaender、H. Fernau、T. Kloks 和 R. Niedermeier，《平面图上支配集及相关问题的固定参数算法》，Algorithmica，33（2002年），第461–493页。5, 10[3] M. Bern，《平面网络中施泰纳树的更快精确算法》，Networks，20（1990年），第109–120页。3[4] I. Bezáková 和 Z. Langley，《具有连通性先验的平面多汇点最小割》，载于《第39届数学基础国际研讨会论文集》（MFCS '14），Springer，2014年，第94–105页。2, 11[5] A. Björklund、T. Husfeldt、P. Kaski 和 M. Koivisto，《参数化路径与打包的窄筛法》，J. Comput. Syst. Sci.，87 （2017 年），第 119–139页。3, 4[6] A. Björklund、T. Husfeldt 和 N. Taslaman，《经过指定元素的最短圈》，载于《ACM-SIAM 离散算法年会论文集》（SODA '12），工业与应用数学学会，2012年，第1747–1753页。3, 4, 5[7] R. Chitnis、M. Cygan、M. Hajiaghayi、M. Pilipczuk 和 M. Pilipczuk，《使用随机收缩设计割问题的 FPT 算法》，SIAM J. Comput.，45（2016年），第1171–1229页。3[8] A. Cintron-Arias、N. Curet、L. Denogean、R. Ellis、C. Gonzalez、S. Oruganti 和 P. Quillen，《网络分流脆弱性问题》，2001年。1, 16[9] T. H. Cormen、C. E. Leiserson、R. L. Rivest 和 C. Stein，《算法导论》，MIT Press，2009年。13

[10] C. A. Cullenbine、R. K. Wood 和 A. M. Newman，《网络改道的理论与计算进展》，Networks，62（2013年），第225–242页。1, 2[11] N. D. Curet，《网络改道问题》，Military Operations Research，6（2001年），第35–44页。1[12] M. Cygan、P. Komosa、D. Lokshtanov、M. Pilipczuk、M. Pilipczuk、S. Saurabh 和 M. Wahlström，《随机收缩与精简分解相结合》，ACM 算法汇刊，17（2021年），第6:1–6:30页。3[13] M. Cygan、M. Pilipczuk、M. Pilipczuk 和 J. O. Wojtaszczyk，《比 2^n 更快地求解 2-不相交连通子图问题》，Algorithmica，70（2014年），第195–207页。1[14] E. Dahlhaus、D. S. Johnson、C. H. Papadimitriou、P. D. Seymour 和 M. Yannakakis，《多终端割的复杂性》，SIAM J. Comput.，23（1994年），第864–894页。3, 18[15] U. Derigs，《计算最短奇/偶路径的高效类 Dijkstra 标号方法》，Information Processing Letters，21（1985年），第253–258页。3[16] R. Diestel，《图论》，Springer，2012年。5, 10[17] Q. Duan、H. Jafarian、E. Al-Shaer 和 J. Xu，《关于 DDoS 攻击相关的最小割问题》，2015年。2[18] Q. Duan 和 J. Xu，《关于保持连通性的最小割问题》，Journal of Computer and System Sciences，80（2014年），第837–848页。1, 2, 17[19] R. E. Erickson、C. L. Monma 和 A. F. J. Veinott，《最小凹成本网络流的发送-分裂方法》，Mathematics of Operations Research，12（1987年），第634–664页。出版方：INFORMS。3[20] O. Erken，《网络改道问题的分支定界算法》，美国海军研究生院硕士论文 ADA411769，蒙特雷，加利福尼亚州，2002 年 12 月。栏目：技术报告。1[21] A. Filtser，《从面覆盖角度看 ℓ_1 平面图的嵌入》，载于《2020年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》（SODA），论文集，工业与应用数学学会，2019年12月，第1945–1954页。3[22] F. V. Fomin、P. A. Golovach、T. Korhonen、K. Simonov 和 G. Stamoulis，《最大彩色路径及更多问题的固定参数可解性》，载于《2023年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA 2023，意大利佛罗伦萨，2023年1月22日至25日，N. Bansal 和 V. Nagarajan 编，SIAM，2023年，第3700–3712页。3, 4[23] M. R. Garey 和 D. S. Johnson，《计算机与难解性：NP 完全性理论指南》，W.H. Freeman and Company，纽约，1979年。21[24] C. Gray、F. Kammer、M. Löffler 和 R. I. Silveira，《从不精确地形中移除局部极值》，Comput. Geom.，45（2012年），第334–349页。1, 15[25] M. Grötschel 和 W. R. Pulleyblank，《弱二分图与最大割问题》，Operations Research Letters，1（1981年），第23–27页。3[26] C. Gutwenger 和 P. Mutzel，《SPQR 树的线性时间实现》，载于《图绘制：第八届国际研讨会，GD 2000》，美国弗吉尼亚州殖民地威廉斯堡，2000年9月20日至23日，论文集，J. Marks 编，《计算机科学讲义》第1984卷，Springer，2000年，第77–90页。18[27] J. E. Hopcroft 和 R. E. Tarjan，《将图划分为三连通分量》，SIAM J. Comput.，2（1973年），第135–158页。18[28] ，《高效的平面性测试》，Journal of the ACM，21（1974年），第549–568页。5, 15[29] Y. Iwata 和 Y. Yamaguchi，《在群标记图中寻找最短非零路径》，Combinatorica，42（2022年），第1253–1282页。3

[30] B. S. Kallemyn，《网络阻断任务建模》，博士论文，美国空军大学空军技术学院，赖特-帕特森空军基地，俄亥俄州，2015年。1[31] F. Kammer 和 T. Tholey，《最小凸着色的复杂性》，《离散应用数学》，160（2012年），第 810–833 页。1[32] S. Kisfaludi-Bak、J. Nederlof 和 E. J. v. Leeuwen，《具有位于少数面上的终端的平面斯坦纳树的近 ETH 紧致算法》，《ACM 算法汇刊》，16（2020年），第 1–30 页。3[33] P. N. Klein 和 D. Marx，《在 $O(n^{c\sqrt{k}})$ 时间内求解平面 k-终端割》，载于第 39 届自动机、语言与编程国际学术讨论会（ICALP）论文集，《计算机科学讲义》第 7391 卷，Springer，2012年，第 569–580 页。3, 18[34] Y. Kobayashi 和 S. Toyooka，《通过积和式计算在群标记图中寻找最短非零路径》，Algorithmica，77（2017年），第 1128–1142 页。3[35] I. Koutis，《路径与打包问题的更快代数算法》，载于自动机、语言与编程：第 35 届国际学术讨论会，ICALP 2008，冰岛雷克雅未克，2008年7月7日至11日，论文集，第一部分：专题 A：算法、自动机、复杂性与博弈，2008年，第 575–586 页。3, 4[36] R. Krauthgamer、J. R. Lee 和 H. I. Rika，《平面图中的流割间隙与面覆盖》，载于 2019 年 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA）论文集，工业与应用数学学会，2019年1月，第 525–534 页。3[37] C. Lee、D. Cho 和 S. Park，《有向多流网络转向问题的组合式 Benders 分解算法》，Military Operations Research，24（2019年），第 23–40 页。1[38] D. Marx，《具有固定数量终端的平面多路割的紧致下界》，载于第 39 届自动机、语言与编程国际学术讨论会（ICALP）论文集，《计算机科学讲义》第 7391 卷，Springer，2012年，第 677–688 页。3[39] S. Pandey 和 E. J. van Leeuwen，《具有位于少数面上的终端的平面多路割》，载于 2022 年 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA）论文集，工业与应用数学学会，2022年1月，第 2032–2063 页。3, 18[40] D. Paulusma 和 J. M. M. van Rooij，《关于将图划分为两个连通子图》，Theor. Comput. Sci.，412（2011年），第 6761–6769 页。1[41] A. Rai、M. S. Ramanujan 和 S. Saurabh，《混合割的参数化算法》，载于第 12 届拉丁美洲研讨会（LATIN）论文集，《计算机科学讲义》第 9644 卷，Springer，2016年，第 672–685 页。3[42] J. T. Schwartz，《用于多项式恒等式验证的快速概率算法》，Journal of the ACM，27（1980年），第 701–717 页。4, 7[43] R. E. Tarjan，《深度优先搜索与线性图算法》，SIAM 计算杂志，1（1972年），第 146–160 页。11[44] J. A. Telle 和 Y. Villanger，《连接终端与 2-不相交连通子图》，载于《计算机科学中的图论概念》——第 39 届国际研讨会，WG 2013，德国吕贝克，2013年6月19日至21日，修订论文，《计算机科学讲义》第 8165 卷，Springer，2013年，第 418–428 页。1[45] P. van ’t Hof、D. Paulusma 和 G. J. Woeginger，《将图划分为连通部分》，Theor. Comput. Sci.，410（2009年），第 4834–4843 页。1, 15[46] R. Williams，《在 $O^*(2^k)$ 时间内寻找长度为 k 的路径》，Inf. Process. Lett.，109（2009年），第 315–318 页。3, 4[47] R. Zippel，《稀疏多项式的概率算法》，载于国际符号与代数计算研讨会（EUROSAM ’79）论文集，Springer，1979年，第 216–226 页。4, 7

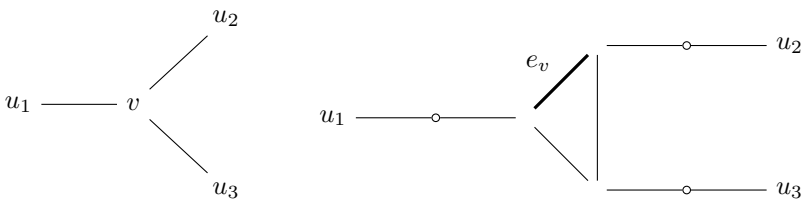


图4：从三次平面图上的哈密顿环规约到 Generalized Network Diversion。左侧描绘了输入图中的一个顶点 v 及其三个邻点。右侧展示了与 v 对应的 Net图。注意， v 的任意一对邻点之间都存在一条经过该构件中边 e_v 的路径。

A 应用部分的证明

A.1 Generalized Network Diversion 是 NP完全问题

我们在本节开头回顾问题的定义：

输入：一个图 G、两个顶点 s 和 t、一个 B 的边集 G以及一个整数 $k \geq 0$。任务：判断是否存在一个极小的 s-t-割 (U, W)，它属于 G，且满足 $|$割$(U)| \leq k$以及 $B \subseteq$ 割(U)。

命题3。 即使将问题限制在次三平面图上，*Generalized Network Diversion* 仍是NP完全问题。

首先注意，平面图上的 Generalized Network Diversion 等价于在对偶图中寻找一条最短简单环，使其经过 B^* 中边所对应的 B ，且面 s^*和 t^* 位于该环所分隔的不同面内。我们将这个问题称为 f_s-f_t-分离农村邮递员问题，简称RPP。我们通过从三次平面图上的哈密顿环规约，证明 [23]其为RPP 是NP困难的。属于 NP显然成立，因此我们只讨论其困难性。

命题3的证明。设 G 是哈密顿环的一个实例，其中 G 是一个三次平面图。我们将按如下方式构造 RPP 的一个等价实例（G'、f_s、f_t、B'、$k' = n$）。为了构造 G'，我们从 G 开始，将每个顶点替换为一个 Net图，并分别将其三个邻居连接到三个悬挂顶点。图4展示了 Net图以及上述构造的一个示例。然后，我们任取 Net图三角形中的一条边，使其包含于 B' 中。接着任取一条边 $b \in B'$ ，并令 f_s 和 f_t 为 b 两侧的两个不同的面（无论采用何种嵌入，这些面都存在）。注意，在任何穿过 C 的圈 b 中，面 f_s 和 f_t 将位于 C 的不同面中。

设 C 是三次平面图中的一个哈密顿环。如果 u， v， w 是 C 的一条子路径，那么我们可以通过从 u 经过 e_v （对应于 v 的 Net图中三角形的选定边），再到 w，来构造 G' 中相应的子路径。由于 C 是一个哈密顿环，因此 G' 中相应的 C' 显然是最短的（简单）圈。

设 C' 是一条遍历 B' 中所有边的圈。由于 $e_v \in B^*$ 是 Net 的三角形中的一条边，因此该路径必须从 Net 的一个悬挂顶点进入，并从 Net 的另一个不同悬挂顶点离开。构造圈 C ：对于 C' 中遍历的每条边 e_v ，选取 v 到 C。

断言 3。 C 是 G 中的一条哈密顿环，即：*1.* C 是一条闭游走；*2.* C 跨越 V（G）；*3.* C 不包含重复顶点。

断言的证明。

1. 假设 uv 是 C 中的一条边。那么，这是因为在 C' 中我们访问了 e_u ，然后访问了 e_v，从而构造了该边。但是， e_u 和 e_v 随后成为相邻的 Net图，因此 uv 是 G 中的一条边。

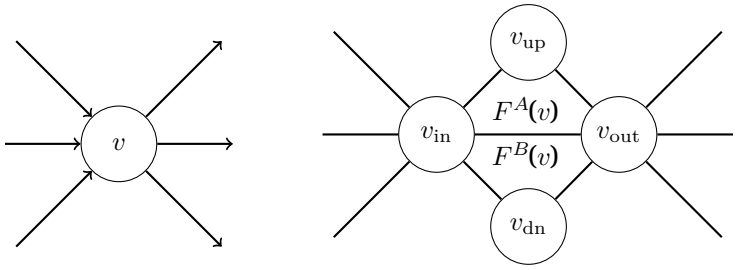


图5：从有向平面哈密顿 s-t-路径到广义位置约束最短路径的归约。

2. 每个顶点都会被遍历（因为对于每个顶点，我们都会选取一条三角形边进入 B'）

3. 由于 C' 是一个简单环，我们不会重复经过任何边 e_v ，因此在 C中，没有顶点会重复出现。

最后，我们只需指出，由于Net图是次三次平面图，构造出的图 G' 也是次三次平面图（两个Net图通过合并两个悬挂顶点连接，从而得到一个度为2的顶点）。

□

A.2 广义位置约束最短路径是NP-完全问题

我们证明广义位置约束最短路径问题是 NP 完全的 .

命题 4. 广义位置约束最短路径问题是NP完全的。

证明。 该问题的判定版本显然属于 NP。为证明其 NP 困难性，我们从有向平面哈密顿 s-t-路径问题进行归约。令 $(D=(V,A)\ s,t)$ 为输入实例。

我们的归约只需将每个顶点 $v \in V \setminus \{s,t\}$ 替换为以下构件。示意见图5 。顶点 v 对应的构件由四个顶点组成：v_{in}、 v_{out}、 v_{up}和 v_{dn} ，以及边集

$$E_G(v) = \{\{v_{\text{in}}, v_{\text{out}}\}, \{v_{\text{in}}, v_{\text{up}}\}, \{v_{\text{in}}, v_{\text{dn}}\}, \{v_{\text{up}}, v_{\text{out}}\}, \{v_{\text{dn}}, v_{\text{out}}\}\}.$$

我们用 $F^A(v)$ 表示与 v_{up} 相邻的新面，用 $F^B(v)$ 表示与 v_{dn} 相邻的新面。我们将所有构件嵌入平面，使得$\{v_{\text{in}}, v_{\text{out}}\}$ 构成一条水平线， v_{in} 位于左侧， $F^A(v)$ 位于$\{v_{\text{in}}, v_{\text{out}}\}$上方。为完成广义位置约束最短路径问题构造实例的图，我们将原图中的每条弧 (u,v) 替换为无向边$\{u_{\text{out}}, v_{\text{in}}\}$。最后，我们通过设置$\mathcal{F}_A = \bigcup_{v\in V} F^A(v)$ 和$\mathcal{F}_B = \bigcup_{v\in V} F^B(v)$ 完成构造。两个实例中的顶点 s 和 t 保持不变；不失一般性，我们假设原实例中 s 没有入弧，且 t 没有出弧。

由于该归约显然可以在多项式时间内计算，因此只需证明：当且仅当 (D,s,t) 是有向平面哈密顿 s-t-路径的一个是实例时，$(G,s,t,\mathcal{F}_A,\mathcal{F}_B)$ 是广义位置约束最短路径的一个是实例。为此，注意对于任意一条边 e ，若其相邻面为 F_1 和 F_2，且 $F_1 \in \mathcal{F}_A$ 和 $F_2 \in \mathcal{F}_B$，那么任何解都必须沿着 e经过，使得 F_1 位于左侧。

$\Rightarrow$：设 P 是 D 中的一条有向哈密顿 s-t-路径。我们通过将 P 中除 s 和 t 之外的每个顶点 v 替换为顶点 v_{in} 和 v_{out}，并添加边 $\{v_{\text{in}}, v_{\text{out}}\}$，从而构造 P'；再将 P 中的每条弧 (u,v) 替换为边 $\{u_{\text{out}}, v_{\text{in}}\}$。由于 P 是一条简单路径， P' 也同样如此。此外，根据 $\mathcal{F}_A$ 和 $\mathcal{F}_B$ 的构造，$F^A(v)$ 将始终位于 P' 的左侧，而 $F^B(v)$ 将始终位于 P' 的右侧。

$\Leftarrow$：设 P' 是构造出的图中的一条最短内部 s-t-路径。由于 P' 将每个 $F^A(v)$ 与其对应的 $F^B(v)$ 分隔开，边 $\{v_{\text{in}}, v_{\text{out}}\}$ 必须包含在 P' 中。由于 s 没有入弧， P' 中的第一条边必须连接 s 和某个顶点 v_{in}。由于边 $\{v_{\text{in}}, v_{\text{out}}\}$ 包含在 P' 中，且 P' 是一条简单路径，因此这条边必定是 P' 中的第二条边。容易通过归纳证明， P' 中的边现在会在 $\{v_{\text{out}}, u_{\text{in}}\}$ 与 $\{u_{\text{in}}, u_{\text{out}}\}$ 之间交替，其中 u、 $v \in V$ 是某些顶点。因此，我们可以通过将两条边及其关联的三个顶点替换为弧 (v,u) 和顶点 u，从 P' 构造出一条路径。由于路径 P' 包含每条边 $\{v_{\text{in}}, v_{\text{out}}\}$，始于 s，终于 t，且是一条简单路径，因此构造出的路径是 D 中一条有向哈密顿 s-t-路径。 □