arXiv:2305.01328v1 [math.CO] 2 May 2023

向量和交定理

´ ´ ´ ´BALAZS PATKOS、ZSOLT TUZA 和 MATE VIZER

Abstract. 我们通过特征向量引入以下集合交的一般化：对于 $n, q, s, t \geq 1$，若族 $\mathcal{F} \subseteq \{0, 1, \ldots, q\}^n$ 中任意不同的 x,y $\in \mathcal{F}$ 至少存在 t 个坐标，使得 x 和 y 在这些坐标上的分量之和至少为 s，即 $|\{i : x_i + y_i \geq s\}| \geq t$，则称该族为 s-和 t-交的。原始的集合交对应于 $q = 1, s = 2$ 的情形。

我们将讨论这一背景下几个经典结果变体的类似结论：Erd˝os–Ko– Rado 定理，以及 Bollob´as 关于相交集合对的定理。

1. 引言

极值有限集理论中的许多问题，旨在求满足某种交性质的集合族的最大大小。当所考察的族中的成员是$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$的子集时，集合 F与其长度为 n的 0-1 特征向量 $\mathbf{x}_F$之间存在一一对应关系；当且仅当 $i \in F$时，该向量的第 i个坐标为 1，其中 $i \in [n]$。因此，若两个集合 F 和 G 的特征向量之和（视为 $\mathbb{Z}^n$中的向量）至少有一个坐标为 2，就可以说它们相交。本文旨在引入一种交的概念，将集合交（转化为特征向量之和）推广为 q元向量之间的一种交。

对于 $q, n \geq 1$，我们引入记号 $Q = Q(q) = \{0, 1, \ldots, q\}$，以及 $Q^n := \{0, 1, \ldots, q\}^n$。我们用粗体字母表示向量，向量 x 的第 i个坐标记作 x_i。

人们研究了向量/整数序列的交问题，并对交的大小采用了几种可能的定义：x,y $\in \{0, 1, \ldots, q\}^n$的排列型交大小 |为 $\cap_{\text{perm}}\mathbf{x}| = |\{i\,\mathbf{y}\ x_i = y_i\}|$: |；多重集型交大小定义为 $\cap_{\text{multi}}\mathbf{x}| = \sum_i \mathbf{y}\{x_i, y_i\}\min$ [10, 11],。采用前一种定义的结果包括 [12, 13]，而采用多重集型定义的结果则可见于例如。本文的主要定义如下。

定义 1.1. 对于整数 n、q、$s \geq 1$，以及两个向量 x、y $\in Q^n$，我们将它们的 s-和交的大小定义为 $|\mathbf{x} \cap_s \mathbf{y}| = |\{i : x_i + y_i \geq s\}|$。

Patk´os 的研究部分得到 NKFIH 资助项目 SNN 129364 和 FK 132060 的支持。Tuza 的研究部分得到 NKFIH 资助项目 SNN 129364 的支持。Vizer 的研究部分得到 NKFIH 资助项目 SNN 129364、FK 132060 和 KH130371，以及 J´anos´Bolyai 研究奖学金和新国家卓越计划项目的支持，项目编号为 UNKP-21-5-BME-361。

对于 $t \geq 1$，若 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in Q^n$ 满足 $|\mathbf{x} \cap_s \mathbf{y}| \geq t$，则称它们为 s-和 t-相交。更一般地，$\mathcal{F} \subset Q^n$ 是 s- 和 t- 相交的，当且仅当任意两个向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathcal{F}$ 都是 s- 和 t- 相交的。

对于 $t = 1$，我们只简单地写作 s-和相交，而不写作 s-和 1-相交。

请注意，$q = 1$ 和 $s = 2$ 的情况对应于普通集合交。

我们将考虑埃尔德什–柯–拉多定理以及关于博洛巴什相交集合对系统的定理的类比。为了陈述我们的结果，首先需要定义向量族的均匀性。有几种选择：与多重集以及许多其他类型的问题一样，我们可以使用 $\mathbf{x}$ 的权重/秩 $r := \sum_{i=1}^{n} x_i$，并称对于整数 $r \geq 0$，族 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$ 是 r-秩均匀的，如果对所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ 都有 $r(\mathbf{x}) = r$。另一种可能是使用 $\mathbf{x}$ 的支撑 $S_{\mathbf{x}} = \{i : x_i \neq 0\}$ 的大小。若对于每个 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ 都有 $|S_{\mathbf{x}}| = r$，则称 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$ 是r-支撑均匀的。

我们使用标准记号。对于任意集合 X，我们用 $\binom{X}{r}$ 表示其所有 r-子集构成的族，而 2^X 表示 X 的幂集。对于集合 $F \subset [n]$，我们用 $\overline{F}$ 表示其补集 $[n] \setminus F$；对于 $[n]$ 的子集族 $\mathcal{F}$，我们引入记号 $\overline{\mathcal{F}} := \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$。

作为向量类比，对于任意 $\mathbf{x} \in Q^n$，我们定义其“补集” $\mathbf{x}$ 为 $\overline{x}_i := \overline{q} - x_i$，其中对所有 $i \in [n]$ 都成立；对于 Q^n 中的向量族 $\mathcal{F}$，我们记作 $\overline{\mathcal{F}} := \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{F}\}$。

本文结构如下。第 1.1 小节陈述关于s-和相交向量族的若干结果，第 1.2 小节则列出关于相交向量对的结果。在第 2 节和第 3 节中，我们分别证明关于相交向量和相交向量对的结果。在第 4 节中，作为总结性结果，我们给出一种新的交定义，以提供一些无法适用于s-和交的结果的类比。

1.1. 相交向量族的结果。首先陈述 Erd˝os、Ko 和 Rado [6] 的开创性结果。

定理 1.2（Erd˝os、Ko、Rado [6]）。对于 $n, r \geq 1$，若 $2r \leq n$，且 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{r}$ 是一个相交族，则 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{r-1}$。此外，若 $2r < n$ 且 $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{r-1}$，则 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i := \{F : i \in F \in \binom{[n]}{r}\}$ 对某个 $i \in [n]$ 成立。

此外，对于任意 $1 \leq t < r$，存在 $n_0 = n_0(r, t)$，使得若 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{r}$ 是 t-相交的，则 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-t}{r-t}$；当且仅当 $\mathcal{F} = \{F$ 时等号成立：对某个 $T \in \binom{[n]}{t}$，$T \subset F \in \binom{[n]}{r}\}$。

最小可能的 $n_0(r, t)$ 的确切值由 Frankl [8] 和 Wilson [23] 得出。对于所有 $n, t, r \geq 1$，r-均匀的 t-相交族的最大可能规模由 Ahlswede 和 Khachatrian [2] 确定。

我们的第一个结果是关于 r-支撑均匀族的 Erd˝os–Ko–Rado（EKR）定理的推广。若 s为偶数，则与定理 1.2 的 $\mathcal{F}_i$ 对应的向量族为$\{\mathbf{x} \in Q^n : x_i \geq \frac{s}{2}, |S_{\mathbf{x}}| = r\}$。若 s为奇数，则对于族 $\{\mathbf{x} \in Q^n : x_i \geq \lceil \frac{s}{2} \rceil, |S_{\mathbf{x}}| = r\}$，还可以加入满足 $y_i = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ 的向量 $\mathbf{y}$，使得它们两两在某个其他坐标上 s-和相交。

注意，若 $s \le q$ 成立，则任何至少有一个条目不小于 s 的向量都可以加入任意 s-和相交族中，因此只需考虑 $q < s$的情形。

定理 1.3。对于任意 $2 \le q < s$ 和整数 $r \ge 1$，如果 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$ 是 r-支撑均匀的 s-和相交族，且满足 $n \ge qr^2$，那么

$$|\mathcal{F}| \le \begin{cases} (q - \frac{s}{2} + 1)q^{r-1}\binom{n-1}{r-1} & \text{if } s \text{ is even,} \\ 1 + (q - \lceil \frac{s}{2} \rceil + 1)\sum_{i=1}^{r}\binom{n-i}{r-i}q^{r-i} & \text{if } s \text{ is odd,} \end{cases} \tag{1}$$

并且这些界是最佳可能的。

定理 1.3 的陈述和证明也可以调整到 r-秩均匀情形。相反，我们在特殊情形 $s = q+1$ 下给出另一种证明，该证明对所有有意义的 n值都适用。在陈述定理之前，注意到如果 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in Q^n$ 的秩都小于$\frac{q+1}{2}$，那么它们不可能 $(q+1)$-和相交；而如果二者的秩都大于 $\frac{qn}{2}$，那么它们总是 $(q+1)$-和相交。我们用 $Q(n,r)$ 表示 Q^n 中所有秩为 r的向量组成的集合。与定理 1.3 一样，如果 $q+1$ 是偶数，那么极值族是星族（在某个固定坐标上的分量至少为 $\frac{q+1}{2}$ 的所有向量）；而如果 $q+1$ 是奇数，则可以向星族中加入更多向量。

定理 1.4. 设 n、q、$r \ge 1$ 和 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$ 是一个具有 $\frac{q+1}{2} \le r \le \frac{qn}{2}$ 的 r-秩均匀（$q+1$）和相交族。那么

$$|\mathcal{F}| \le \begin{cases} \sum_{j=\frac{q+1}{2}}^{q} |Q(n-1, r-j)| & \text{if } q+1 \text{ is even,} \\ 1 + \sum_{j=\lceil \frac{q+1}{2} \rceil}^{q} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{2(r-1)}{q} \rfloor} |Q(n-i, r-j-\frac{(i-1)q}{2})| & \text{if } q+1 \text{ is odd,} \end{cases} \tag{2}$$

并且这些界是最佳可能的。

现在我们继续讨论具有 $t \ge 2$ 的 s-和 t-相交族。若 s 是偶数，则同样可以考虑一个 t 子集 $T \subset [n]$ 及其对应的族

$$\mathcal{F}_{n,q,s,r,T} := \left\{ \mathbf{x} \in Q^n : \ x_i \ge \frac{s}{2} \text{ for all } i \in T, \ |S_{\mathbf{x}}| = r \right\}.$$

在第 2 节中，我们将证明，当 n 足够大时，这些族在所有 s-和 t-相交族中包含最多的向量。我们还将确定 s 为奇数时的极值族；但由于这种情况下它们的定义更为复杂，我们将推迟到第 2 节再介绍。

1.2. 关于相交向量对的结果。接下来我们陈述 Bollobˊas 关于相交集合对系统的经典定理，并将证明其和相交类比。为此，我们回顾一下，若 $\mathcal{S} = \{(A_i, B_i) : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ 且对所有 $1 \le i \le n$ 都有 $A_i \cap B_i = \emptyset$，那么

- $\mathcal{S}$ 称为强 ISP 系统（相交集合对系统的简称），如果对所有 $1 \le i \ne j \le n$，$A_i \cap B_j \ne \emptyset$；
- $\mathcal{S}$ 称为弱 ISP 系统，如果对所有 $1 \le i \ne j \le n$，$A_i \cap B_j \ne \emptyset$ 和 $B_i \cap A_j \ne \emptyset$ 中至少有一个成立。

如果还有 $a = \max_{1 \le i \le n} |A_i|$ 和 $b = \max_{1 \le i \le n} |B_i|$，那么 $\mathcal{S}$ 是一个强或弱 (a,b)-系统。

定理 1.5（Bollob´as [3]）。如果 $\mathcal{S}=\{(A_j,B_j):\ j=1,2,\dots,m\}$ 是一个强 ISP 系统，那么不等式

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\binom{|A_j|+|B_j|}{|A_j|}}\le 1$$

成立。特别是，如果 $\mathcal{S}$ 是一个强 (a,b)-系统，那么 $m\le\binom{a+b}{a}$。

以下一般不等式对弱 ISP-系统成立。

定理 1.6（Tuza [19]）。设 $0<p<1$ 为任意实数，且 $q=1-p$。若 $\{(A_j,B_j):j=1,2,\dots,m\}$ 是一个弱 ISP-系统，则不等式

$$\sum_{j=1}^{m}p^{|A_j|}\,q^{|B_j|}\le 1$$

成立。此外，对每个 $a,b\in\mathbb{N}$，都存在一个弱 (a,b)-系统，使得对所有 $0<p<1$ 和 $q=1-p$，等号均成立。

关于 ISP-系统及其在极值组合学中的应用的综合概述，可参见综述的两部分 [20, 21]。定理 1.6 给出了弱 (a,b)-系统的上界 $m\le{}_{(a+b)_{a^a\,b^b}}^{\,a+b}$。关于弱 (a,b)-系统最大大小~~的最佳~~下界由 Kir´aly、Nagy、P´alv¨olgyi 和 Visontai [17], 以及 Wagner [22]给出。

现在我们希望将这些概念推广到 s-和相交情形下的向量对。注意，对 ISP 系统的基集大小没有任何假设。我们用 $Q^{<\mathbb{N}}$ $(\subset\mathbb{Z}^{<\mathbb{N}})$ 表示所有具有有限支撑 $S_{\mathbf{x}}=\{i$ 的 $\mathbf{x}\in Q^{\mathbb{N}}$ 的集合：$x_i>0\}$。

假设对于 $\mathcal{F}=\{(\mathbf{x}^j,\mathbf{y}^j)\in Q^{<\mathbb{N}}\times Q^{<\mathbb{N}}:\ j=1,2,\dots,m\}$，有 $|\mathbf{x}^j\cap_s\mathbf{y}^j|=0$，对所有 $j=1,2,\dots,m$ 均成立。若 $|\mathbf{x}^i\cap_s\mathbf{y}^j|\neq 0$ 对所有 $1\le i\neq j\le m$ 均成立，我们称其为 $Q^{<\mathbb{N}}$ 中的强 s-和 IVP 系统；若对于所有 $1\le i\neq j\le m$，$\mathbf{x}^i,\mathbf{y}^j$ 与 $\mathbf{x}^j,\mathbf{y}^i$ 中至少有一对是 s-和相交的，则称其为 $Q^{<\mathbb{N}}$ 中的弱 s-和 IVP 系统。若所有 $\mathbf{x}^j$ 的支撑集大小至多为 a，且所有 $\mathbf{y}^j$ 的支撑集大小至多为 b，则称其为强、弱 s-和 (a,b)-系统。

接下来的观察表明，只需处理 $Q^{<\mathbb{N}}$ 中的 $(q+1)$-和 IVP 系统 .

观察 1.7。

(i) 若 $\mathcal{F}$ 是强/弱 s-和 (a,b)-系统，则对所有 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathcal{F}$ 以及所有 $i\le m$，都有 $x_i,y_i<s$。

(ii) 若 $\mathcal{F}\subset Q^{<\mathbb{N}}\times Q^{<\mathbb{N}}$ 是满足 $t>1$ 的强/弱 $(q+t)$-和 (a,b)-系统，则存在一个满足 $|\mathcal{F}|=|\mathcal{F}'|$ 的 $(q-t+2)$- 和强 / 弱 (a,b)- 系统 $\mathcal{F}'\subset(\{0,1,\dots,q-t+1\}^{<\mathbb{N}})^2$。

Pro。若对于某个 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathcal{F}$ 有 $x_i\ge s$ 或 $y_j\ge s$，则 $|\mathbf{x}\cap_s\mathbf{y}|>0$。这就推出 (i)。

要证明（ii），对于任意 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathcal{F}$，引入 $(\mathbf{x}',\mathbf{y}')$，使得 $x'_i=\max\{x_i-t+1,0\}$，$y'_i=\max\{y_i-t+1,0\}$ 对所有指标 i都成立。显然，对于任意 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathcal{F}$和指标 j，有 $x'_j+y'_j<q+t-2(t-1)=q-t+2$。此外，若 $|\mathbf{x}^{h_1}\cap_{q+t}\mathbf{y}^{h_2}|>0$，则存在一个指标 j满足 $q+t\le x_j^{h_1}+y_j^{h_2}$。因此 $x_j^{h_1\prime}+y_j^{h_2\prime}\ge q+t-2(t-1)=q-t+2$，故该系统

$\mathcal{F}' = \{(x', y') : (x, y) \in \mathcal{F}\} \subset (\{0, 1, \ldots, q - t + 1\}^{<\mathbb{N}})^2$是一个 $(q - t + 2)$-和强/弱 (a, b)-系统。□

为了获得 $(q + 1)$-和 IVP 系统大小的界，我们用 $m(q, k)$ 和 $m'(q, k)$ 表示强/弱 $(q + 1)$-和 (k, k)-系统中向量对的最大数量。特别地，对于 $q = 2$ 和 $s = 3$，令 $m(k) := m(2, k)$。

为了估计 $m(k)$，令

$$f(k) := \max \frac{(x + y + z)!}{x!\, y!\, z!},$$

其中，最大值取遍所有满足 $x + z \le k$ 和$y + z \le k$的非负整数 x、y、z。下面的不等式给出了 $m(k)$ 的近乎紧确界，其乘法误差仅为关于 k的线性量级，而该函数是指数级的。

定理 1.8. 对每个 $k \ge 1$，我们都有

$$f(k) \le m(k) \le k \cdot f(k).$$

最后，我们确定了 $Q^{<\mathbb{N}}$ 中强、弱 $(q + 1)$-和 IVP 系统最大大小的数量级，误差至多为一个多项式因子。

Theo注 1.9. 对于任意 $q \ge 1$，$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{m(q, k)} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{m'(q, k)} = (\sqrt{q} + 1)^2$。

标准计算表明，在 $f(k)$ 的定义中，当$z = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})k + O(1)$ 且 $x = y = k - z$ 时可取得最大值。将这些值代入，我们得到 $f(k) = (c + o(1)) \frac{1}{k}(3 + 2\sqrt{2})^k$，其中某个实数 $c < 1$。定理 1.8 对强 3-和 (k, k)-系统给出的上界，比定理 1.9 对弱 3-和 (k, k)-系统给出的上界小一个常数因子。

2. Sum-intersecting families of vectors

本节包含定理 1.3、定理 1.4 和定理 2.11 的证明，但我们首先考虑非一致的 $(q + 1)$-和相交向量族。

命题 2.1. 对于 n，$q \ge 1$，若 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$是（$q + 1$）-和相交的，则 $|\mathcal{F}| \le \lceil \frac{(q+1)^n}{2} \rceil$，且此界是最佳可能的。

证明. 注意，x 和 x 不可能同时属于 $\mathcal{F}$。此外，存在一个向量 x，使得 x = x，当且仅当 q 是偶数。这证明了上界。对于下界，考虑所有秩大于 $\frac{qn}{2}$ 的向量所构成的族，再加上每一对秩为 $\frac{qn}{2}$ 的向量（这些向量不一定不同）x、x 中的一个向量（如果存在这样的向量对）。□

推论 2.2. 对于 n，q，$s \ge 1$，若 $q \ge s$，且 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$是 s-和相交的，则 $|\mathcal{F}| \le (q + 1)^n - s^n + \lceil \frac{s^n}{2} \rceil$，且此界是最佳可能的。

证明。如果一个向量包含一个不小于 s 的元素，那么它与每个其他向量都存在 s-和交集。此类向量的数量为 $(q + 1)^n - s^n$，接着我们对所有其他向量组成的集合应用命题 2.1。□

现在我们将注意力转向（秩均匀或支撑均匀的）向量族。我们先证明定理 1.4，但需要一些定义以及文献中的若干结果。

定义 2.3。集合 F 的影子 $\Delta(F)$ 为：$\{G : |G| = |F| - 1\}$ $\{G \subset F$；集合族 $\mathcal{F}$ 的影子 $\Delta(\mathcal{F})$ 为 $\cup_{F\in\mathcal{F}}\Delta$ (F)。如果 $\mathcal{F}$ 是 r-均匀的且 $0 \le \ell < r$，那么 $\Delta_\ell(\mathcal{F})$:=$\{G : |G| = \ell$ 和 $\exists F \in \mathcal{F}$ s.t. $G \subset F\}$。

我们引入记号 $<_{\text{colex}}$，表示所有正整数有限子集的 colex序。按照此序，对于两个有限集 A 和 B，当且仅当 A 与 B 的对称差（$A \setminus B$）$\cup$（$B \setminus A$）中的最大元素属于 B 时，才有 $A <_{\text{colex}} B$。

Kruskal 和 Katona 独立证明了以下基本定理。

定理 2.4（Kruskal $[18]$, Katona $[16]$）。设 $n, r, m \ge 1$ 和 $L_{r,m}$ 是按照 colex序从 $\binom{[n]}{r}$ 中取出的大小为 m 的初始段。对于任意大小为 m的 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{r}$，有$|\Delta(\mathcal{F})| \ge |\Delta(L_{r,m})|$。

我们也可以为向量引入影子的概念。

定义 2.5。向量 x 的影子 Δ(x) 是 $\{$y $<$ x : r(y) $= r$(x) $- 1\}$，其中$<$ 表示逐坐标序，即对于两个向量 x 和 y，当且仅当 $y_i \le x_i$ 对所有 $1 \le i \le n$ 成立，且 $y_i < x_i$ 对至少一个 i成立时，有 y $<$x。于是，对于 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$，我们将 $\mathcal{F}$的影子 $\Delta(\mathcal{F})$ 定义为 $\cup_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}}\Delta$ (x)；对于 r-秩均匀的 $\mathcal{F}$和 $\ell < r$，我们令$\Delta_\ell(\mathcal{F}) = \{$y : r(y) $= \ell$ 且 $\exists$x $\in \mathcal{F}$，使得 y $<$ x$\}$。我们将用 x 6 y 表示 x $<$ y 或 x $=$y。

与集合情形类似，我们可以引入 Q^n 的 colex序，即对于 x、y $\in Q^n$，有 x $<_{\text{colex}}$ y 当且仅当 $x_i < y_i$，其中 i 是 x 和 y 不同的最大坐标。

Clements 和 Lindstr¨om 证明了 Kruskal-Katona 定理的一个推广，该推广适用于定义 2.5 中引入的向量的影子。

定理 2.6（Clements, Lindstr¨om $[4]$）。设 q、r、m、$n \ge 1$，并设 $L_{q,r,m}$ 是 $Q(n, r)$ 中相对于 colex序 的大小为 m 的初始段。对于任意大小为m 的 $\mathcal{F} \subseteq Q(n, r)$，有 $|\Delta(\mathcal{F})| \ge |\Delta(L_{r,m})|$。

容易验证集合和向量的 colex序具有以下性质，因此我们省略其证明。

命题 2.7。假设 $n \ge r \ge 1$。

(i) 在 $\binom{[n]}{r}$ 和 $Q(n, r)$ 中，初始段的影子都是初始段，因此可以反复应用定理 2.4 和定理 2.6，得出初始段使任意较低秩影子的大小最小。

(ii) 如果 $\mathcal{F}$ 是关于 colex序的 $\binom{[n]}{r}$ 中最大的 m 集组成的族，那么$\overline{\mathcal{F}} = L_{n-r,\ m}$。

(iii) 如果 $\mathcal{F}$ 是关于 colex序的 $Q(n,r)$ 中最大的 m 个向量组成的族，那么 $\overline{\mathcal{F}} = L_{q,\ qn-r,\ m}$。

在证明定理 1.4 之前，我们先简要回顾定理 1.2 中上界的证明。该证明使用了 Kruskal–Katona影子定理（定理 2.4），由 Daykin [5]给出，我们希望仿效这一证明。

反设定理 1.2 的结论不成立，即存在一个相交族$\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{r}$，其大小大于 $\binom{n-1}{r-1}$。考虑族 $\overline{\mathcal{F}} = \{[n] \setminus F\colon\ \ F \in \mathcal{F}\}$，并注意到，由于 $\mathcal{F}$ 是相交族且 $n \geq 2r$，必有 $\mathcal{F} \cap \Delta_r(\overline{\mathcal{F}}) = \emptyset$。显然，$|\overline{\mathcal{F}}| = |\mathcal{F}| > \binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r}$。应用定理 2.4，任何大小大于 $\binom{y}{n-r}$ 的 $(n-r)$-均匀族，其 r影子都大于 $\binom{y}{r}$。因此 $\binom{n}{r} = |\binom{[n]}{r}| \geq |\mathcal{F}| + |\Delta_r(\overline{\mathcal{F}})| > \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$。这一矛盾证明了定理 1.2 中的上界。

这个证明似乎非常幸运，因为其中包含了奇妙的等式 $\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r}$ and $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$，所以我们不妨不做任何计算，重述一遍。按照 colex 序，依次贪心地选取最大的 $\binom{[n]}{r}$ 集，直到它们构成一个相交族为止。设$\mathcal{F}_0$ 为必须停止时得到的族。若 $\mathcal{F}_0 \cup \Delta_r(\overline{\mathcal{F}_0}) = \binom{[n]}{r}$，则 $\mathcal{F}_0$ 是可能的最大相交族。事实上，若 $|\mathcal{F}| > |\mathcal{F}_0|$，由于 $\overline{\mathcal{F}_0}$ 是一个初始段，根据命题 2.7 (i) 和 (ii)，我们有 $|\mathcal{F}| + |\Delta_r(\overline{\mathcal{F}})| > |\mathcal{F}_0| + |\Delta_r(\overline{\mathcal{F}_0})| = \binom{n}{r}$，因此 $\mathcal{F}$ 不可能是相交的。为了得到定理 1.2 关于相交族的结果，我们只需注意到$\mathcal{F}_0 = \{F \in \binom{[n]}{r}\colon\ n \in F\}$ 且 $\Delta_r(\overline{\mathcal{F}_0}) = \{F \in \binom{[n]}{r}\colon\ \ n \notin F\}$。

在证明定理 1.4 之前，我们先重述该定理。

定理 1.4. 设 n、q、$r \geq 1$ 和 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$ 是一个具有 $\frac{q+1}{2} \leq r \leq \frac{qn}{2}$ 的 r-秩均匀（$q+1$）-和相交族。则

$$|\mathcal{F}| \leq \begin{cases} \sum_{j=\frac{q+1}{2}}^{q} |Q(n-1, r-j)| & \text{if } q+1 \text{ is even,} \\ 1 + \sum_{j=\lceil \frac{q+1}{2} \rceil}^{q} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{2(r-1)}{q} \rfloor} |Q(n-i, r-j-\frac{(i-1)q}{2})| & \text{if } q+1 \text{ is odd,} \end{cases} \tag{3}$$

且这些界是最佳可能的。

证明。显然，$\mathbf{x} \in Q^n$ 不与向量 $\mathbf{y} \in Q^n$ $(q+1)$-和相交，当且仅当 $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$。此外，$\mathcal{F} \subseteq Q(n,r)$ 是一个$(q+1)$-和相交族，当且仅当 $\mathcal{F} \cap \Delta_r(\overline{\mathcal{F}})$ 至多包含一个向量，因为 $\mathcal{F}$ 可能包含一个不与自身 $(q+1)$-和相交的向量 $\mathbf{x}$。事实上，若 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ 且 $|\mathbf{x} \cap_{q+1} \mathbf{y}| = 0$，则 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F} \cap \Delta_r(\overline{\mathcal{F}})$。另一方面，若 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F} \cap \Delta_r(\overline{\mathcal{F}})$ 且 $\mathcal{F}$ 是相交的，则根据上述结论，我们不能有 $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$。因此，我们必有 $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}$ 且 $\mathbf{y} \leq \mathbf{y}$。但由于 $|\mathbf{x} \cap_{q+1} \mathbf{y}| > 0$，必存在一个指标 i 使得 $x_i + y_i \geq q+1$，所以 x_i 或 y_i（不妨设为 x_i）至少为 $\frac{q+1}{2}$。但于是 $x_i > q - x_i = \overline{x}_i$，矛盾。

如果由相对于 colex序而言的最大向量组成的极大 $(q+1)$-和相交族 $\mathcal{F}_0 \subseteq Q(n,r)$ 同时满足 $\mathcal{F}_0 \cup \Delta_r(\overline{\mathcal{F}_0}) = Q(n,r)$ 和 $|\Delta_r(\overline{\mathcal{F}_0})| < |\Delta_r(\overline{\mathcal{F}_0^+})|$，那么只需稍作修改，Daykin 的推理仍然成立，其中 $\overline{\mathcal{F}_0^+}$ 是

$Q(n, qn-r)$ 的 colex序 初始段，其大小比 $\overline{\mathcal{F}}_0$ 大 1。事实上，如果 $\mathcal{F}$ 是一个比 $\mathcal{F}_0$ 大的 r-秩均匀 $(q+1)$-和相交族，那么以下一系列不等式就会导出矛盾：

$$|\mathcal{F} \cup \Delta_r(\overline{\mathcal{F}})| \geq |\mathcal{F}| + |\Delta_r(\overline{\mathcal{F}})| - 1 \geq |\mathcal{F}_0| + 1 + |\Delta_r(\overline{\mathcal{F}}_0)| + 1 - 1 = |Q(n,r)| + 1.$$

而这恰好就是这种情况：对于由关于 colex序 的最大向量组成的极大（$q+1$）-和相交族 $\mathcal{F}_0 \subseteq Q(n,r)$，我们证明有 $\mathcal{F}_0 \cup \Delta_r(\overline{\mathcal{F}_0}) = Q(n,r)$ 以及 $|\Delta(\overline{\mathcal{F}}_0)| < |\Delta(\overline{\mathcal{F}_0^+})|$，其中 $\overline{\mathcal{F}_0^+}$ 是 colex序 中比 $\overline{\mathcal{F}}_0$ 更大的、$Q(n, qn-r)$ 的初始段。

首先假设 $q+1 = 2k$。那么 $\mathcal{F}_0 = \{\mathbf{x} \in Q(n,r) : x_n \geq k\}$, $\overline{\mathcal{F}}_0 = \{\mathbf{x} \in Q(n, qn-r) : x_n < k\}$，显然 $\Delta_r(\overline{\mathcal{F}}_0) = \{\mathbf{x} \in Q(n,r) : x_n < k\} = Q(n,r) \setminus \mathcal{F}_0$；又由于 $\overline{\mathcal{F}_0^+}$ 包含一个满足 $x_n = k$ 的向量 $\mathbf{x}$，其 r-影子严格大于 $\overline{\mathcal{F}}_0$ 的影子。

接下来假设 $q+1 = 2k+1$。于是

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{j=0}^{\lfloor \frac{r-1}{k} \rfloor} \{\mathbf{x} \in Q(n,r) : x_n = x_{n-1} = \cdots = x_{n-j+1} = k,\ x_{n-j} > k\} \cup \{\mathbf{x}^*\},$$

其中 $x_n^* = x_{n-1}^* = \cdots = x_{n-\lfloor \frac{r-1}{k} \rfloor}^* = k$、$x_{n-\lfloor \frac{r-1}{k} \rfloor - 1}^* \equiv r$（模 k），其余所有项均为 0。注意，$\mathbf{x}^*$ 不与自身进行（$q+1$）-和交。要证明 $\mathcal{F}_0 \cup \Delta_r(\overline{\mathcal{F}}_0) = Q$（$n$、$r$）成立，只需注意，任意满足 $y_n = y_{n-1} = \cdots = y_{n-\lfloor \frac{r-1}{k} \rfloor} = k$ 的向量 $\mathbf{y} \in Q$（n、r）$\setminus \mathcal{F}_0$ 都属于 $\Delta_r(\mathbf{x}^*)$。此外，任意满足 $\mathbf{x}^* <_{\text{colex}} \mathbf{y}$ 的向量 $\mathbf{y} \in Q$（n、r）在最后 $\lfloor \frac{r-1}{k} \rfloor$ 个坐标中都有一个大于 k 的项，因此 $|\Delta_r(\overline{\mathcal{F}_0^+})| > |\Delta_r(\overline{\mathcal{F}}_0)|$。

至此，定理 1.4 的证明完成。 □

我们继续证明定理 1.3。在此之前，我们先引用两个著名的稳定性结果，这些结果将在定理 1.3 和定理 2.11 的证明中用到。

定理 2.8（Hilton，Milner [14]）。若 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{r}$ 是一个相交族，且满足 $n \geq 2r+1$ 和 $\cap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$，则 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{r-1} - \binom{n-r-1}{r-1} + 1$。

定理 2.9（Frankl [7]）。设 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{r}$ 是一个 t-相交族，且满足 $|\cap_{F \in \mathcal{F}} F| < t$。若 n 足够大，则 $|\mathcal{F}| \leq \max\{|\mathcal{F}_1|, |\mathcal{F}_2|\}$，其中

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ F \in \binom{[n]}{r} : [t] \subset F, F \cap [t+1, r+1] \neq \emptyset \right\} \cup \binom{[r+1]}{r}$$

and

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ F \in \binom{[n]}{r} : |F \cap [t+2]| \geq t+1 \right\}.$$

现在我们重新表述定理 1.3。

定理 1.3。对于任意的 $s > q \geq 2$ 和整数 $r \geq 1$，如果 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$ 是具有 $n \geq qr^2$ 的 r-支撑均匀 s-和相交的，那么

$$|\mathcal{F}| \leq \begin{cases} (q - \frac{s}{2} + 1)q^{r-1}\binom{n-1}{r-1} & \text{if } s \text{ is even,} \\ 1 + (q - \lceil \frac{s}{2} \rceil + 1)\sum_{i=1}^{r}\binom{n-i}{r-i}q^{r-i} & \text{if } s \text{ is odd,} \end{cases} \tag{4}$$

且这些界是最佳可能的。

定理 1.3 的证明。首先，假设 s 是偶数。表明该界是最佳可能的构造为 $\mathcal{F}_{n,q,s,r,i} = \{\mathbf{x} \in Q^n : \frac{s}{2} \leq x_i\}$。为了证明上界，设 $\mathcal{F}$ 是一个 r-支撑均匀 s-和相交族，并令 $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中的支撑族。对于一个固定的支撑 S，以 S 为支撑的向量数量有一个常数上界（该常数取决于 r 和 q）。因此，根据定理 2.8，除非 $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ 中的所有支撑都具有一个公共元素 i，否则当 $n \geq qr^2$时，我们有 $|\mathcal{F}| \leq q^r r\binom{n-2}{r-2} < (q - \frac{s}{2} + 1)q^{r-1}\binom{n-1}{r-1}$。因此，我们可以假设存在一个属于所有支撑的指标 i。接下来，假设存在 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$，使得 $x_i < \frac{s}{2}$。那么，考虑子族 $\mathcal{F}' = \{\mathbf{y} \in \mathcal{F} : y_i \leq \frac{s}{2}\}$。由于$\mathcal{F}'$ 中的向量必须都与 $\mathbf{x}$ s-和相交，但它们在坐标 i处并未与其 s-和相交，因此，它们的支撑必须在 i以外的某个坐标处与 $\mathbf{x}$ 的支撑相交。因此，我们得到 $|\mathcal{S}_{\mathcal{F}'}| \leq (r-1)\binom{n-2}{r-2}$，进而有 $|\mathcal{F}'| \leq \frac{s}{2}q^{r-1}(r-1)\binom{n-2}{r-2}$。但是，接下来

$$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}'| + (q - \frac{s}{2})q^{r-1}\binom{n-1}{r-1} < (q - \frac{s}{2} + 1)q^{r-1}\binom{n-1}{r-1}$$

如果 $n \geq r^2\frac{s}{2}$。我们得出，要么 $\mathcal{F}$小于所声称的界，要么对于某个指标 i，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{n,\ q,\ s,\ r,\ i}$。

接下来，假设 s 是奇数。极值族通过以下方式由有序的 r-元组（i_1，i_2，…，i_r）定义：

$$\mathcal{F}_{n,q,s,(i_1,i_2,\ldots,i_r)} = \{\mathbf{x}\} \cup \bigcup_{j=1}^{r}\{\mathbf{y} \in Q^n : y_{i_1} = y_{i_2} \cdots = y_{i_{j-1}} = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor,\ y_{i_j} \geq \frac{s}{2}\},$$

其中 $\mathbf{x}$ 是满足 $x_{i_j} = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ 的向量，当 $1 \leq j \leq r$ 时如此，而在其他情况下满足 $x_i = 0$。为证明上界，我们对 r 使用归纳法。若 $r = 1$，则 r-支撑均匀 s-和相交族 $\mathcal{F}$ 的所有支撑都必须是同一个单元素集合 $\{i\}$。若 m 是 $\mathcal{F}$ 中所有向量在坐标 i 处的最小分量，那么所有其他分量都必须至少为 $s-m$，因此向量的数量至多为 $\min\{q-m+1, q-(s-m)\}$。当 $m = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ 时，该值最大，所述界由此得证。令 $r > 1$，且 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$ 是一个 r-支撑、均匀、 s-和相交族。那么，与偶数 s 的情形一样，利用定理 2.8，我们得到 $|\mathcal{F}| \leq q^r r\binom{n-2}{r-2} < q^{r-1}\binom{n-1}{r-1}$，除非 $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ 中的所有集合都含有公共元素 i_1 或 $n \leq qr^2$。若存在向量 $\mathbf{z} \in \mathcal{F}$ 满足 $z_{i_1} < \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$，那么同样与偶数 s 的情形一样，我们得到 $\mathcal{F}' = \{\mathbf{y} \in \mathcal{F} : y_{i_1} \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil\}$ 的大小至多为 $\lceil \frac{s}{2} \rceil q^{r-1}(r-1)\binom{n-2}{r-2}$，因此若 $n \geq sr^2$，则 $\mathcal{F}$ 小于所述界。所以可以假设，对所有向量 $\mathbf{z} \in \mathcal{F}$，都有 $z_{i_1} \geq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$。满足 $z_{i_1} \geq \lceil \frac{s}{2} \rceil$ 的那些向量 $\mathbf{z}$ 的数量为 $(q - \lceil \frac{s}{2} \rceil + 1)q^{r-1}\binom{n-1}{r-1}$，而族 $\mathcal{F}^* = \{\mathbf{z}' \in \mathcal{F} : z_{i_1} = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor\}$ 是 $(r-1)$-支撑均匀、 s-和相交的，其中 $\mathbf{z}'$ 是从 $\mathbf{z}$ 中移除其

i_1 个分量。由于根据归纳法 $n-1 \geq qr^2-1 \geq q(r-1)^2,$，我们得到

$$|\mathcal{F}^*| \leq 1+(q-\lceil\frac{s}{2}\rceil+1)\sum_{i=1}^{r-1} q^{r-1-i}\binom{n-1-i}{r-1-i}$$

因此

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}| &\leq |\mathcal{F}^*|+(q-\lceil\frac{s}{2}\rceil+1)q^{r-1}\binom{n-1}{r-1}\\ &\leq 1+(q-\lceil\frac{s}{2}\rceil+1)\sum_{i=1}^{r-1} q^{r-1-i}\binom{n-1-i}{r-1-i}+(q-\lceil\frac{s}{2}\rceil+1)q^{r-1}\binom{n-1}{r-1}\\ &= 1+(q-\lceil\frac{s}{2}\rceil+1)\sum_{i=1}^{r} q^{r-i}\binom{n-i}{r-i},\end{aligned}$$

如所述。 □

在本节余下部分，我们考虑满足 $t \geq 2$ 的 s-和 t-相交族。

构造 2.10。对于任意满足 $n \geq r \geq t$ 的 n、q、r、$t \geq 1$，以及满足 $q < s \leq 2q$ 的任意偶数 s，对于任意 $T \in \binom{[n]}{t}$，定义如下

$$\mathcal{F}_{n,q,s,r,T} := \left\{\mathbf{x} \in Q^n : \ x_i \geq \frac{s}{2} \text{ for all } i \in T, \ |S_{\mathbf{x}}| = r\right\}.$$

注意，$\mathcal{F}_{n、\ q、\ s、\ r、\ T}$ 的大小为 $(q-\frac{s}{2}+1)^t q^{r-t}\binom{n-t}{r-t}$。

对于 $n, r, q, t \geq 1$ 满足 $n \geq r \geq t$ 且 s 为奇数并满足 $q < s < 2q$，我们定义如下r-支撑均匀族：对于任意 $T' \in \binom{[r]}{t-1}$，我们取一个向量 $\mathbf{x}_{T'}$，满足 $S_{\mathbf{x}_{T'}} = [r]$，使得 $(x_{T'})_i > \frac{s}{2}$对所有 $i \in T'$成立，且 $(x_{T'})_i = \lfloor\frac{s}{2}\rfloor$对所有 $i \in [r] \setminus T'$成立。于是我们有

$$\mathcal{F}_{n,q,s,r,t} := \left\{\mathbf{x}_{T'} : T' \in \binom{[r]}{t-1}\right\} \cup$$

$$\bigcup_{T \in \binom{[r]}{t}} \left\{\mathbf{y} \in Q^n : (\forall i \in T)(y_i > \lfloor\frac{s}{2}\rfloor) \wedge (\forall i \in [\max T] \setminus T)(y_i = \lfloor\frac{s}{2}\rfloor) \wedge |S_{\mathbf{y}}| = r\right\}.$$

换言之，定义第二行中的向量至少有 t个指标$i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq r$，使其对应项的值严格大于$\lfloor s/2\rfloor$，并且所有指标小于 i_t 的项的值都至少为 $\lfloor s/2\rfloor$。

该族 $\mathcal{F}_{n,\ q,\ s,\ r,\ t}$ 是 s-和 t-相交的，因为对于任意一对 $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{F}_{n,\ q,\ s,\ r,\ t}$ 至少存在t个坐标 $i \in [r]$，其中一个 x_i, y_i至少为$\lfloor\frac{s}{2}\rfloor$，而另一个至少为 $\lceil\frac{s}{2}\rceil$。

令 $f(n,q,s,r,t)$ 表示 $\mathcal{F}_{n,q,s,r,t}$ 的大小。

定理 2.11. 对任意 $2 \le q < s \le 2q$ 和 $r \ge t \ge 1$，存在 $n(q,s,r,t)$，使得若 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$ 是 r-支撑均匀的 s-和 t-相交族，且 $n \ge n(q,s,r,t)$，则

$$|\mathcal{F}| \le \begin{cases} (q - \frac{s}{2} + 1)^t q^{r-t} \binom{n-t}{r-t} & \text{if } s \text{ is even,} \\ f(n,q,s,r,t) & \text{if } s \text{ is odd,} \end{cases} \tag{5}$$

这些界是最佳可能的，正如构造 2.10 中的向量族所示。

我们需要关于 $f(n,q,s,r,t)$ 的以下简单观察。

命题 2.12. 假设 n,q,s,r,t 是整数，并满足构造 2.10 中对它们所作的假设。

(i) If $r \ge 2t$, then

$$f(n,q,s,r,t) = \binom{n-t}{r-t} q^{r-t} (q - \lfloor \frac{s}{2} \rfloor)^t + \sum_{S \subsetneq [t]} (q - \lfloor \frac{s}{2} \rfloor)^{|S|} f(n-t, q, s, r-t, t-|S|).$$

(ii) 若 $t < r < 2t$，则

$$f(n,q,s,r,t) = \binom{n-t}{r-t} q^{r-t} (q - \lfloor \frac{s}{2} \rfloor)^t + \binom{t}{2t-r-1} + \sum_{S \subsetneq [t], |S| \ge 2t-r} (q - \lfloor \frac{s}{2} \rfloor)^{|S|} f(n-t, q, s, r-t, t-|S|).$$

(iii) If $r > t$, then $f(n,q,s,r,t) > (q - \lfloor s/2 \rfloor)^t q^{r-t} \binom{n-t}{r-t}$.

证明. 在 (i)、(ii) 和 (iii) 中，右侧的第一项（在 (iii) 中是唯一一项）表示所有满足对任意 $1 \le i \le t$ 都有 $x_i > \frac{s}{2}$ 的向量。在 (i) 中，大求和根据前 t 个条目中哪些条目的值大于 $s/2$，将其余向量划分开来。

在 (ii) 中，大求和可以忽略 S 的小子集，因为如果 $|S| < 2t - r$，那么对于任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{n,\ q,\ s,\ r,\ t}$ 满足 $\{i \in [t] : x_i > s/2\} = S$，$[r]$ 中满足 $x_i > s/2$ 的指标 i 数量至多为 $|S| + r - t < t$。因此，如果 $|S| < 2t - r$，那么要达到至少 $t-1$ 个这样的指标（这是向量属于 $\mathcal{F}_{n,\ q,\ s,\ r,\ t}$ 时的最小值），我们需要恰好有 $[t]$ 中的 $2t-r-1$ 个指标。中间项表示那些满足 T' 恰好包含 $[t]$ 中 $2t-r-1$ 个元素的 $\mathbf{x}_{T'}$s。□

现在我们继续证明定理 2.11。

定理 2.11 的证明。首先假设 s 是偶数。为求得上界，令 $\mathcal{F}$ 为一个 r-支撑、均匀的 s-和 t-相交族，并令 $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中支撑的族。对于固定的支撑 S，以 S 为支撑的向量数量有一个常数界（取决于 r 和 q）；因此，根据定理 2.9，除非 $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ 中的所有支撑都包含 $[n]$ 的某个 t- 子集 T 的全部元素，否则当 n 足够大时，我们有 $|\mathcal{F}| = O(n^{r-t-1}) < \binom{n-t}{r-t}$。所以我们可以假设存在一个 t-子集 T，包含在所有支撑中。接下来，假设存在 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$，使得对于某个 $i \in T$，有 $x_i < \frac{s}{2}$。那么考虑子族 $\mathcal{F}' = \{\mathbf{y} \in \mathcal{F} \colon y_i \le \frac{s}{2}\}$。由于 $\mathcal{F}'$ 中的向量都必须与 $\mathbf{x}$ s-和 t-相交，但它们在坐标

i 处不与其 -和相交，因此它们的支撑必须在 T 之外的某个坐标上与 $\mathbf{x}$ 的支撑相交。因此，我们得到 $|\mathcal{F}'| = O(n^{r-t-1})$。但是

$$|\mathcal{F}| \le |\mathcal{F}'| + (q - \frac{s}{2})(q - \frac{s}{2} + 1)^{t-1} q^{r-t} \binom{n-t}{r-t} < (q - \frac{s}{2} + 1)^t q^{r-t} \binom{n-t}{r-t}$$

若 n 足够大。我们得出，要么 $\mathcal{F}$ 小于所声称的界，要么对于某个 t-子集 T， $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{n,\ q,\ s,\ r,\ T}$。

接下来假设 s 是奇数。我们对 $r+t$ 进行归纳，并注意到在所有情况下，支撑族必须是 t-相交的。 $t = 1$ 的情形由定理 1.3 涵盖。设 $\mathcal{F} \subseteq Q^n$ 是一个 s-和 t-相交的 r-支撑均匀族。根据 r 和 t 的关系，我们分三种情况讨论。

Case I: $r = t$.

假设 $r = t$ 意味着 $\mathcal{F}$ 中的所有支撑集都相同，设该支撑集为 S。因此，对于任意 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathcal{F}$ 和 $i \in S$，我们必须有 $x_i + y_i \ge s$。特别地，对于任意 $i \in S$，至多存在一个满足 $x_i < s/2$的 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$。因此

$$|\mathcal{F}| \le \binom{t}{t-1} + (q - \lfloor s/2 \rfloor)^t,$$

正如所声称的。

Case II: $t < r$

支撑集族 $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ 是 t-相交的，因此，除非所有 $\mathcal{F}$ 的支撑集都共享 t 个元素，否则根据定理 2.9，有 $|\mathcal{F}| = O(n^{r-t-1})$。令 T 为这些 t 个元素组成的集合；对任意 $S \subset T$，令 $\mathcal{F}_S$ 表示满足以下条件的向量 $\mathbf{x}$ 组成的族：对于所有 $i \in S$， $\in \mathcal{F}$，且对于所有 $i \in T \setminus S$， $x_i \ge s/2$，并且 $1 \le x_i \le s/2$。由于所有支撑集都包含 T，因此有 $\mathcal{F} = \cup_{S \subset T} \mathcal{F}_S$。显然，$|\mathcal{F}_T| \le q^{r-t}\binom{n-t}{r-t}(q - \lfloor s/2 \rfloor)^t$。

我们声称，若存在一个向量 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$，使得对某个 $i \in T$ 有 $x_i < \lfloor s/2 \rfloor$，则 $|\mathcal{F}| < f(n, q, s, r, t)$。事实上，满足 $y_i = \lceil s/2 \rceil$ s 的向量 $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_T$ 的 t-和与 $\mathbf{x}$ 相交，因此 $S_\mathbf{x} \cap S_\mathbf{y} \cap ([n] \setminus T) \neq \emptyset$。所以此类向量的数量为 $O(n^{r-t-1})$，从而 $|\mathcal{F}_T| \le (q - \lceil s/2 \rceil)(q - \lfloor s/2 \rfloor)^{t-1} q^{r-t}\binom{n-t}{r-t} + O(n^{r-t-1})$。此外，对任意 $j \in T$，满足 $z_j \le \lfloor s/2 \rfloor$ 的向量 $\mathbf{z} \in \mathcal{F}$ 至多有 $O(n^{r-t-1})$ 个，因为若两个这样的向量满足 $|\mathbf{z} \cap_s \mathbf{z}'| \ge t$，则 $S_\mathbf{z}$ 与 $S_{\mathbf{z}'}$ 必须在 T 之外相交。对所有 $j \in T$ 求和，得到

$$|\mathcal{F}| \le (q - \lceil s/2 \rceil)(q - \lfloor s/2 \rfloor)^{t-1} q^{r-t} \binom{n-t}{r-t} + O(n^{r-t-1}) + O(tn^{r-t-1}) < f(n, q, s, r, t)$$

如所声称的那样。这里最后一个不等式由命题 2.12 (iii) 得出（注意区分下取整和上取整符号！）。因此，我们可以假设对于所有 $i \in T$， $x_i \ge \lfloor s/2 \rfloor$，从而对于所有 $i \in T \setminus S$ 和 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_S$， $x_i = \lfloor s/2 \rfloor$。这意味着 $|\mathcal{F}_S| \le (q - \lfloor s/2 \rfloor)^{|S|} |\mathcal{F}'_S|$，其中 $\mathcal{F}'_S = \{\mathbf{x}' \colon \mathbf{x} \in \mathcal{F}_S\}$，这里 $\mathbf{x}'$ 是从 $\mathbf{x}$ 中删除属于 T 的坐标后得到的向量。

Case IIa: $t < r < 2t$.

考虑所有满足 $2t-r \le |S| < t$ 的子集 S 所组成的族 $\mathcal{F}_S$。注意到 $\mathcal{F}'_S$ 是 $(r-t)$-支撑均匀的 s-和 $(t-|S|)$-相交族，因此根据归纳法，我们有

$$|\mathcal{F}_S| \le (q-\lfloor s/2 \rfloor)^{|S|} |\mathcal{F}'_S| \le (q-\lfloor s/2 \rfloor)^{|S|} f(n-t, q, s, r-t, t-|S|).$$

最后，考虑所有满足 $|S| < 2t-r$ 的子集 $S \subset T$。对于两个向量 $\mathbf{x}'$ 和 $\mathbf{x}'' \in \mathcal{F}_S$，我们有 $|\mathbf{x}' \cap_s \mathbf{x}''| \le |S| + r - t < 2t - r + r - t = t$，因此对于所有这样的 S，必有 $|\mathcal{F}_S| \le 1$。注意，对于任意 $(r+1-t)$-子集 $Z \subset T$，至多存在一个满足 $Z \cap S = \emptyset$ 和 $\mathcal{F}_S \neq \emptyset$ 的子集 $S \subset T$。事实上，如果 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_S$、$\mathbf{y} \in \mathcal{F}_{S'}$，那么 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 在 T 外部至多只能在 $r-t$ 个坐标上进行 s-和相交，在 T 内部至多只能在 $r+1-t$ 个（$t-$）坐标上相交，因此 $|\mathbf{x} \cap_s \mathbf{y}| \le t-1$，矛盾。因此

$$\sum_{S \subset T, |S| < 2t-r} |\mathcal{F}_S| \le \binom{t}{r+1-t} = \binom{t}{2t-r-1}.$$

将这些界与关于 $|\mathcal{F}_T|$的界相加，我们得到所需的 $|\mathcal{F}|$ 界，这是由命题 2.12 (ii) 得出的。

Case IIb: $2t \le r$.

在这种情况下，对于任意 $S \subsetneq T,$，族 $\mathcal{F}'_S$ 是 $(r-t)$-支撑均匀的 s-和 $(t-|S|)$-相交族，因此由归纳法可得

$$|\mathcal{F}_S| \le (q-\lfloor s/2 \rfloor)^{|S|} |\mathcal{F}'_S| \le (q-\lfloor s/2 \rfloor)^{|S|} f(n-t, q, s, r-t, t-|S|).$$

将这些界对所有 $|\mathcal{F}_S|$ 相加，再加上对 $|\mathcal{F}_T|$ 的界，根据命题 2.12 (i)，即可得到所需的 $|\mathcal{F}|$ 界。□

我们并未详细说明阈值 $n(q,s,r,t)$ 的取值。Ahlswede 和 Khachatrian [1] 在较弱的条件 $n \ge (t+1)(k-t+1)+1$ 下证明了定理 2.9 的结论。通过进行与定理 1.3 的证明中类似的计算，可以得到选择 $n(q,s,r,t) = q^t r(r+t)$ 是可行的。

3. Intersecting vector pairs

本节我们给出定理 1.8 和定理 1.9 的证明。

我们先从一个一般性的构造开始。

构造 3.1。设 $c \le a \le b$和 $3 \le s < 2q$为整数，并固定一个大小为 $a+b-c$ 的集合 X。对于任意满足 $|A| = a-c$、$|B| = b-c$、$|C| = c$ 的三划分 $A \cup B \cup C = X$，我们定义数对 $\mathbf{x}^{A,B,C}$ 和 $\mathbf{y}^{A,B,C}$，其中

$$x_i^{A,B,C} = y_i^{A,B,C} = \lceil s/2 \rceil - 1 \text{ if } i \in C,$$
$$x_i^{A,B,C} = \lfloor s/2 \rfloor + 1,\ y_i^{A,B,C} = 0 \text{ if } i \in A$$

and

$$x_i^{A,B,C} = 0,\ y_i^{A,B,C} = \lfloor s/2 \rfloor + 1 \text{ if } i \in B.$$

注意， $\{(\mathbf{x}^{A,B,C}, \mathbf{y}^{A,B,C}) : A \cup B \cup C = X,\ |A| = a - c,\ |B| = b - c,\ |C| = c\}$ 是一个基数为 $\binom{a+b-c}{b-c}\binom{a}{c}$. 的强$s$-和初值问题系统

更一般地，设 α_0、α_1、……、α_q 为正整数，满足 $\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i \le a$ 和 $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \le b$。令 $N = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i \le a$，并定义

$$\{(\mathbf{x}^{A_0,A_1,\ldots,A_q}, \mathbf{y}^{A_0,A_1,\ldots,A_q}) : [N] = \bigsqcup_{i=0}^{q} A_i,\ |A_i| = \alpha_i\}\ ,$$

当且仅当 $x^{A_0,\ \ A_1\ \ A_q}_{j} = q - y^{A_0,\ldots,\ \ A_1\ \ A_q}_{j} = i$,...,时， $j \in A_i$。

注意，上述是一个强 (a, b)-系统。事实上，根据定义，对于任意 $j \in N$，我们有 $x^{A_0,\ \ A_1\ \ A_q}_{j} + y^{A_0,\ldots,\ \ A_1\ \ A_q}_{j} = q$,...，且 $A_0, A_1, \ldots, A_q$将 N划分为 $|A_i| = \alpha_i$，因此 $|\mathbf{x}^{A_0,A_1,\ldots,A_q} \cap_{q+1} \mathbf{y}^{A_0,A_1,\ldots,A_q}| = 0$。此外，若 $(A_0, A_1, \ldots, A_q) \neq (B_0, B_1, \ldots, B_q)$，则存在 j 使得 $A_j \neq B_j$。我们考虑使 $\min\{j, q-j\}$ 最小的此类 j，并且不失一般性地假设 $j \le q/2$。根据关于 j 的假设，存在 $i \in B_j \setminus A_j$ 和 $i' \in A_j \setminus B_j$。于是我们有 $x^{A_0,\ \ A_1\ \ A_q}_{i} + y^{B_0,\ldots,\ \ B_1\ \ B_q}_{i} > j+q-j$,...，因为 $y^{B_0,\ \ B_1\ \ B_q}_{i'} = j$,...，且它是极小的；$x^{B_0\ B_1\ \ B_q}_{i'} + y^{A_0,\ A_1\ \ A_q}_{i'} > q - j + j$

类似地，我们还可得 , ,..., , ,...。这证明我们确实定义了一个强 (a, b)-系统。

3.1. $\{0,1,2\}^{<\mathbb{N}}$中强 3-和 IVP 系统的上界。本小节将证明定理 1.8。设 $\{(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j) \mid 1 \le j \le m\}$ 是 $\{0,1,2\}^{<\mathbb{N}}$ 中一个强 3- 和 (k, k)- 系统。我们还引入以下关于 $j = 1, \ldots, m$ 的记号：

- $a_j = |S_{\mathbf{x}^j} \setminus S_{\mathbf{y}^j}|$,
- $b_j = |S_{\mathbf{y}^j} \setminus S_{\mathbf{x}^j}|$,
- $c_j = |S_{\mathbf{x}^j} \cap S_{\mathbf{y}^j}|$.

首先，我们证明关于 3-和 (a, b)-系统的以下 LYM 型定理。

定理 3.2. 设 $a, b, m \ge 1$ 和 $\{(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j) \mid 1 \le j \le m\}$ 是 $\{0,1,2\}^{<\mathbb{N}}$ 中一个强 3-和 (a, b)-系统。那么

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{a_j!\, b_j!\, c_j!}{(a_j + b_j + c_j)!} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\binom{a_j+b_j+c_j}{a_j+b_j}\binom{a_j+b_j}{a_j}} \le \min(a, b). \tag{6}$$

证明。基本上，我们对 n 进行归纳，即对 $\{(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j) \mid 1 \le j \le m\}$ 中元素的支撑集的并集大小进行归纳。

(1) 首先注意，对于任意 $1 \le i \ne j \le m$， $a_i = 0$ 和 $b_j = 0$ 不可能同时成立。事实上，若 $S_{\mathbf{x}^i} \subset S_{\mathbf{y}^j}$ 且 $S_{\mathbf{y}^j} \subset S_{\mathbf{x}^j}$ ，则 $\mathbf{x}^i$ 中所有非零项都等于 **1**，$\mathbf{y}^j$ 中所有非零项也同样如此，因此 $\mathbf{x}^i \cap_3 \mathbf{y}^j = \emptyset$，这与假设矛盾。因此，要么对所有 j， $a_j > 0$ 成立；要么对所有 j， $b_j > 0$ 成立（也可能两者都成立）；否则恰有一个 j 满足 $a_j = b_j = 0$。

(2) 只要对所有 j， $S_{\mathbf{y}^j} \not\subseteq S_{\mathbf{x}^j}$ 成立：

对于每个 $t \in [n]$，考虑以下系统

$$\{(\mathbf{x}^j, (\mathbf{y}^j)') \mid 1 \le j \le m,\ t \notin S_{\mathbf{x}^j}\},$$

其中 $((y^j)')_i = (y^j)_i$ 对所有 $i \in [n] \setminus \{t\}$ 均成立，且 $((y^j)')_t = 0$。

这些系统保持了所需的交。记作 $b'_j = |S_{(\mathbf{y}^j)'} \setminus S_{\mathbf{x}^j}|$，我们有$b'_j = b_j - 1$ 恰好 $b_j > 0$ 次，而 $b'_j = b_j$ 恰好 $n - (a_j + b_j + c_j)$ 次。将 (6) 对所有 t求和，对于属于 j 的项，我们有

$$b_j \cdot \frac{a_j!\,(b_j-1)!\,c_j!}{(a_j+(b_j-1)+c_j)!} + (n - a_j - b_j - c_j) \cdot \frac{a_j!\,b_j!\,c_j!}{(a_j+b_j+c_j)!} = n \cdot \frac{a_j!\,b_j!\,c_j!}{(a_j+b_j+c_j)!},$$

因此，对所有 j 求得的总和是 (6) 左端的 n 倍。当然，右端也乘以 n，由归纳法可得该不等式。

除非对某个 j 有 $b_j = 0$ 成立，否则这一步均适用。因此，从现在起假设$S_{\mathbf{y}^j} \subseteq S_{\mathbf{x}^j}$。

(3) 只要对所有 j 都有 $S_{\mathbf{x}^j} \not\subseteq S_{\mathbf{y}^j}$，包括 $j = i$：

对每个 t，考虑以下系统

$$\{((\mathbf{x}^j)', \mathbf{y}^j) \mid 1 \le j \le m,\ t \notin S_{\mathbf{y}^j}\},$$

其中，对所有 $i \in [n] \setminus \{t\}$，有 $((x^j)')_i = (x^j)_i$，且 $((x^j)')_t = 0$。

与前一种情况类似的论证可得所需的不等式，除非对某个 j 有 $a_j = 0$。然而，此时我们有 $a_j = b_i = 0$，这意味着 $j = i$。

因此，在证明余下部分时，假设 $S_{\mathbf{x}^1} = S_{\mathbf{y}^1}$；不失一般性，我们可以选择 $i = 1$。回想一下，在这种情况下，对所有 $i \in S_{\mathbf{x}^1} = S_{\mathbf{y}^1}$，有 $(x^1)_i = (y^1)_i$。

(4) 如果从系统中省去 $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$，则 (6) 左边恰好减少 1，因为目前 $c_1 = |S_{\mathbf{x}^1}|$ 且 $a_1 = b_1 = 0$。对于剩余子系统中的每个 $j \neq 1$，我们有 $a_j, b_j > 0$，因为每个 $\mathbf{x}^j$ 都需要一个值为 2 的项才能与 $\mathbf{y}^1$，相交，而每个 $\mathbf{y}^j$ 都需要一个值为 2 的项才能与 $\mathbf{x}^1$，相交；这两个元素不能是同一个，因为 $\mathbf{x}^j$ 不能与 $\mathbf{y}^j$ 和交。

因此，当我们对剩余系统重复执行步骤（2）和（3）时，过程一旦终止，$S_{\mathbf{x}^j} \setminus S_{\mathbf{y}^j}$ 和 $S_{\mathbf{y}^j} \setminus S_{\mathbf{x}^j}$ 中的元素就不会留在那里；也就是说，当 $a_j = b_j = 0$时，相应的 c_j 的值至多为 $\min(a, b) - 1$。

(5) 当系统中仅剩一个向量对 $(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j)$，且满足 $a_j = b_j = 0$ 和 $c_j \ge 1$ 时，过程最后一次停止。至多执行上述过程 $\min(a, b) - c_j + 1 \le \min(a, b)$ 次后，即可达到这种情形。注意，若 $c_j = 1$，则交集条件排除了存在任何其他向量对的可能性。

□

我们再重申一下， $m(k)$ 表示强 3-和 (k,k)-系统中向量对的最大数量，并且

$$f(k) := \max \frac{(x+y+z)!}{x!\,y!\,z!},$$

其中，最大值取遍所有满足 $x+z \le k$ and$y+z \le k$ 的非负整数 x、 y、 z。现在我们可以证明

定理 1.8。对于每个 $k \ge 1$ ，都有

$$f(k) \le m(k) \le k \cdot f(k)\,.$$

定理 1.8 的证明。根据定理 3.2 可得上界，因为式 (6) 左侧的所有项都至少为 $(f(k))^{-1}$。为得到下界，我们选取使 $f(k)$ 取得的 x、 y、 z，并在构造 3.1 中选取 $a = x+z$、 $b = y+z$ 和 $c = z$。□

3.2. $\{0,1,\dots,q\}^{<\mathbb{N}}$ 中弱 $(q+1)$-和 IVP 系统的上界。设 $\{(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j) \mid 1 \le j \le m\}$ 是 $\{0,1,\dots,q\}^{<\mathbb{N}}$ 中的弱 $(q+1)$- 和 IVP 系统。

观察 3.3.

(i) 对于任意弱（$q+1$）-和（a,b）-系统 $\mathcal{F}$，存在另一个系统 $\mathcal{F}'$，满足 $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'|$，使得对于任意 $(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j) \in \mathcal{F}'$ 和 i，若 $x_i^j + y_i^j > 0$，则有 $x_i^j + y_i^j = q$。

(ii) 对于任意强 $(q+1)$-和 (a,b)-系统 $\mathcal{F}$，存在另一个 $\mathcal{F}'$，满足 $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'|$，使得对于任意 $(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j) \in \mathcal{F}'$ 及 i，只要 $x_i^j + y_i^j > 0$，就有 $x_i^j + y_i^j = q$。

证明。由于 $|\mathbf{x}^j \cap_{q+1} \mathbf{y}^j| = 0$ 意味着 $x_i^j + y_i^j \le q$，且增大一个坐标有助于与其他向量相交，因此我们可以将 $\mathbf{y}^j$ 替换为 $\mathbf{y}^{j'}$，使得 $y_i^{j'} = q - x_i^j$。□

若弱/强 $(q+1)$-和 (k,k)-系统满足观察 3.3 的性质，我们就称其为饱和的。对于这样的 $\mathcal{F} = \{(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j) : 1 \le j \le m\}$，记 A_i^j 表示$\{t : x_t^j = i\}$ ，并记 α_i^j 表示 $|A_i^j|$。

定理 3.4. 设 p_i for $i = 0, 1, \dots, q$ 为非负实数，且 $\sum_{i=0}^{q} p_i = 1.$。若 $\mathcal{F} =$$\{(\mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j) : 1 \le j \le m\}$ 是一个饱和的弱 $(q+1)$-和 IVP 系统，则 $\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=0}^{q} p_i^{\alpha_i^j} \le 1$成立。

证明。设 $(X_0, X_1, \dots, X_q)$ 是 $[n]$ 的一个划分，并按以下规则随机选取

$$\mathbb{P}(t \in X_0) = p_0\,, \quad \mathbb{P}(t \in X_1) = p_1\,, \quad \dots, \quad \mathbb{P}(t \in X_q) = p_q\,,$$

针对每个 $t \in [n] =$ 独立应用： $\bigcup_{j=1}^{m}(S(\mathbf{x}^j) \cup S(\mathbf{y}^j))$。对于 $j = 1, \dots, m$ ，考虑以下事件

$$E_j = \bigwedge_{i=0}^{q} (A_i^j \subseteq X_i)\ .$$

于是我们有

$$\mathbb{P}(E_j) = \prod_{i=0}^{q} p_i^{\alpha_i^j}\ .$$

注意到，对于所有 $1 \le j \ne j' \le m$， $\mathbb{P}(E_j \wedge E_{j'}) = 0$ 都成立。事实上，否则，对于所有 $i = 0, 1, \dots, q$， $A_i^j, A_i^{j'} \subseteq X_i$都成立。但这样，对于所有 $i = 0, 1, \dots, q$，我们有 $z \in X_i$，而 $\mathbf{x}_z^j = i$ 意味着 $\mathbf{y}_z^j = q - i$ 或 $\mathbf{y}_z^j = 0$；同理，$\mathbf{x}_z^{j'} = i$ 意味着 $\mathbf{y}_z^{j'} = q - i$ 或 $\mathbf{y}_z^{j'} = 0$。因此$|\mathbf{x}^j \cap_{q+1} \mathbf{y}^{j'}| = |\mathbf{x}^{j'} \cap_{q+1} \mathbf{y}^j| = 0$。这与向量是弱 $(q+1)$ 和 IVP 系统的元素相矛盾。

因此，事件 E_1、.....、E_m 彼此互斥，这意味着它们的概率之和至多为 1。□

现在我们证明

定理 1.9. 对于任意 $q \ge 1$，令 $m(q,k)$ 和 $m'(q,k)$ 分别表示强／弱 $(q+1)$ -和 (k,k) -系统的最大大小。则 $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{m(q,k)} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{m'(q,k)} = (\sqrt{q}+1)^2$。

证明. 我们先证明上界。根据观察 3.3，可以假设 $\mathcal{F}$ 是饱和的。然后应用定理 3.4，其中 $p_0 = p_q = \frac{\sqrt{q}-1}{q-1}$ 和 $p_1 = p_2 = \cdots = p_{q-1} = p_0^2 = \frac{q+1-2\sqrt{q}}{(q-1)^2}$。（注意，$2p_0 + (q-1)p_0^2 = 1$，符合要求。）由于该系统是饱和的，我们有$\alpha_0^j = k - \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i^j = \alpha_q^j$，因此得到

$$\prod_{i=0}^{q} p_i^{\alpha_i^j} = p_0^{\alpha_0^j + \alpha_q^j} p_0^{2(k - \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i^j)} = p_0^{2k}.$$

因此，定理 3.4 蕴含 $|\mathcal{F}| \le (p_0^{-2})^k = ((\frac{q-1}{\sqrt{q}-1})^2)^k = (\sqrt{q}+1)^{2k}$。

下界通过构造 3.1 得到。对于固定的 q 且不断增大的 N，我们令 $\alpha_i = p_i N$，其中 $i = 0$、1、...、q 取为下界证明中上述的 p_i，于是$k = \frac{p_0 + (q-1)\, p_0^2)() p_0^2}{2p_0 + q - 1} N = (p_0 + (q-1)p_0^2) N$。那么，该构造中的配对数量为$\prod_{i=0}^{q} \binom{(1 - \sum_{j=0}^{i-1} p_j) p_i N}{p_i N}$。利用斯特林公式并忽略多项式项，得到

$$\left[\frac{1}{p_0^{2p_0}(p_0^2)^{(q-1)p_0^2}}\right]^N = (p_0^{-2})^{(p_0+(q-1)p_0^2)N} = (p_0^{-2})^k = \left(\frac{q-1}{\sqrt{q}-1}\right)^{2k} = (\sqrt{q}+1)^{2k}.$$

取 k 次方根即可得到所声称的下界。 □

4. Concluding remarks

在和交集情形下，还有许多有待研究的交定理。我们只想指出其中一个。Katona交集定理 [15] 给出了非均匀 t-相交族 $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ 的最大大小。当 $n+t$ 为偶数时，极值族由所有大小至少为 $\frac{n+t}{2}$ 的集合组成；而当 $n+t$ 为奇数时，极值族则由所有大小至少为$\lceil \frac{n+t}{2} \rceil$ 的集合以及 $\binom{[n-1]}{\lfloor \frac{n+t}{2} \rfloor}$ 组成。我们希望在非均匀 s-和 t-相交族中也能得到类似的结果。也就是说，预期极值族由秩较大的向量组成。然而，这一结论并不成立，因为对于两个这样的向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$，它们可能存在一些坐标，使得它们在 s-和意义下发生“高度相交”（即 $x_i + y_i$ 大得多。

大于 s），但不会在其他任何地方相交，因此向量的支撑不一定很大。

为了解决这一问题，我们可以定义两个向量 x、y 的多重-s-和交的大小 $\in Q^n$ 为 $|\mathbf{x}\cap_{m,\ s}\mathbf{y}| = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i-s+1)^+$，其中对任意实数 z，我们定义$z^+ := \max\{0,z\}$。若族 $\mathcal{F}\subseteq Q^n$ 满足对任意 x、y $\in\mathcal{F}$都有$|\mathbf{x}\cap_{m,\ s}\mathbf{y}|\geq t$，则称其为 s-多重和 t-交的。下文将展示建立此类交定理的第一步。Katona 的工具是其交影子定理，而我们也需要一个类似的结果。

我们需要为向量情形定义广为人知的移位操作 $\tau_{i,\ j}$。对于长度为 n 的向量 x 以及整数 $1\leq i\neq j\leq n$，令 $\tau_{i,\ j}(\mathbf{x})$ 为由 x 交换其第 i 个和第 j 个坐标得到的向量，条件是 $x_i<x_j$；否则令 $\tau_{i,\ j}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$。对于由向量组成的族 $\mathcal{F}$，定义 $\tau_{i,\ j}(\mathcal{F})=\{\tau_{i,j}(\mathbf{x}):\mathbf{x}\in\mathcal{F},\tau_{i,\ j}(\mathbf{x})\notin\mathcal{F}\}\cup\{\mathbf{x}\in\mathcal{F}:\tau_{i,\ j}(\mathbf{x})\in\mathcal{F}\}$。

下一个引理给出了移位操作的两个基本性质，这些性质对于集合系统而言是众所周知的。

引理 4.1. 对任意 $\mathcal{F}\subseteq Q(n,r)$ 和 $1\leq i,j\leq n$，我们有 $|\Delta(\tau_{i,\ j}(\mathcal{F}))|\leq|\Delta(\mathcal{F})|$。此外，如果 $\mathcal{F}$ 是 s-多重和 t-相交的，那么 $\tau_{i,\ j}(\mathcal{F})$ 也具有此性质。

证明。我们先证明关于 t-交的断言。假设对于 x, y $\in\tau_{i,j}(\mathcal{F})$，有 $|\mathbf{x}\cap_{m,s}\mathbf{y}|<t$。x, y 不可能满足 $\in\mathcal{F}$，因为这与 $\mathcal{F}$ 的 s-多重和 t-相交性质矛盾。如果 x, y 满足$\in\tau_{i,j}(\mathcal{F})\setminus\mathcal{F}$，那么 $\tau_{j,i}(\mathbf{x})\,\tau_{j,i}(\mathbf{y})\in\mathcal{F}$且$t>|\mathbf{x}\cap_{m,s}\mathbf{y}|=|\tau_{j,i}(\mathbf{x})\cap_{m,s}\tau_{j,i}(\mathbf{y})|$，这与 $\mathcal{F}$ 的 s-多重和 t-相交性质矛盾。最后，如果 x $\in\mathcal{F}$ 且 y$\in\tau_{i,j}(\mathcal{F})\setminus\mathcal{F}$，那么 y′:= $\tau_{j,i}(\mathbf{y})\in\mathcal{F}\setminus\tau_{i,j}(\mathcal{F})$。因此，如果 x = $\tau_{i,j}(\mathbf{x})$，那么 $t>|\mathbf{x}\cap_{m,s}\mathbf{y}|=|\mathbf{x}\cap_{m,s}\mathbf{y}'|$，这与 $\mathcal{F}$ 的 s-多重和 t-相交性质矛盾。如果 x′:= $\tau_{i,j}(\mathbf{x})\neq$x，那么由于 x$\in\tau_{i,j}(\mathcal{F})$，我们必有 x′ $\in\mathcal{F}$，因而 $t>|\mathbf{x}\cap_{m,s}\mathbf{y}|=|\mathbf{x}'\cap_{m,s}\mathbf{y}'|$，这与 $\mathcal{F}$ 的 s-多重和 t-相交性质矛盾。至此，移位保持多重和相交性质的证明完成。

为了证明 $|\Delta(\tau_{i,j}(\mathcal{F}))|\leq|\Delta(\mathcal{F})|$，我们定义一个单射 ι: $\Delta(\tau_{i,j}(\mathcal{F}))\setminus\Delta(\mathcal{F})\to\Delta(\mathcal{F})\setminus\Delta(\tau_{i,j}(\mathcal{F}))$：令 $\iota(\mathbf{x})$ 为通过交换 x 的第 i 个和第 j 个坐标而得到的向量。这显然是一个单射，我们只需验证每个像都属于 $\Delta(\mathcal{F})\setminus\Delta(\tau_{i,j}(\mathcal{F}))$。因此，任取 x $\in\Delta(\tau_{i,j}(\mathcal{F}))\setminus\Delta(\mathcal{F})$。那么存在 y$\in\tau_{i,j}(\mathcal{F})\setminus\mathcal{F}$，使得 x $\in\Delta$(y)，且 y′:= $\tau_{j,i}(\mathbf{y})\in\mathcal{F}\setminus\tau_{i,j}(\mathcal{F})$。显然，$\iota(\mathbf{x})\in\Delta(\mathbf{y}')\subset\Delta(\mathcal{F})$。还需证明 $\iota(\mathbf{x})\notin\Delta(\tau_{i,j}(\mathcal{F}))$。首先我们断言 $x_i>x_j$。事实上，由于 y$\in\tau_{i,j}(\mathcal{F})\setminus\mathcal{F}$，我们有 $y_i>y_j$，这表明 $x_i\geq x_j$，而$x_i=x_j$则意味着 x $\in\Delta(\mathbf{y}')$ 且 x $\in\Delta(\mathcal{F})$，这与 x $\in\Delta(\tau_{i,j}(\mathcal{F}))\setminus\Delta(\mathcal{F})$ 矛盾。现在，$x_i>x_j$推出 $\iota(\mathbf{x})_i<\iota(\mathbf{x})_j$。反设存在 $\mathbf{y}^*\in\tau_{i,j}(\mathcal{F})$，使得$\iota$(x) $\in\Delta(\mathbf{y}^*)$。那么必有 $y_i^*\leq y_j^*$。这只有在 $\tau_{i,j}(\mathbf{y}^*)\in\mathcal{F}$ 时才可能。但这样一来，x $\in\Delta(\tau_{i,j}(\mathbf{y}^*))\subset\Delta(\mathcal{F})$，这与 x $\in\Delta(\tau_{i,j}(\mathcal{F}))\setminus\Delta(\mathcal{F})$ 矛盾。证明至此完成。□

请注意，对于一般的 t，将 s-多重和 t-交换成 s-和 t-交时，引理 4.1 并不成立。例如，族 {(3, 2), (1, 3)} 是 4-和 2-交的，而它的 (1, 2)-移位 {(3, 2), (3, 1)} 仅是 4-和 1-交的。

我们称 $\mathcal{F}$为左移位的，当对所有 $i<j$，$\tau_{i,j}(\mathcal{F})=\mathcal{F}$成立。每当对某个$i<j$，$\tau_{i,j}(\mathcal{F})\neq\mathcal{F}$成立时，$w(\mathcal{F})=\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}}\sum_{i=1}^{n}ix_i$ 会严格减小，因此从任意一个族 $\mathcal{F}$开始，经过有限次移位操作后，就能得到一个左移位的族。此外，根据引理 4.1,

影子的大小不会增加，且交性质得以保留。因此，在证明影子大小的下界时，可以假设 $\mathcal{F}$ 是左移位的。我们用记号 $2(n,r)$ 表示 $\{0,1,2\}^n$中秩为 r 的向量集合。

定理 4.2. 若 $\mathcal{F} \subseteq 2(n,r)$ 是 3-和相交的，则 $|\Delta(\mathcal{F})| \geq |\mathcal{F}|$。

证明。我们对 n 进行归纳。若 $n < r$，则对任意 $\mathbf{x} \in 2(n,r)$，有 $|\{i: x_i = 2\}| > |\{j: x_j = 0\}|$。因此，对于辅助二分图 B 中任意的 $\mathcal{F} \subseteq 2(n,r)$，其两部分为 $\mathcal{F}$ 和 $\Delta(\mathcal{F})$，且在满足 $\mathbf{y} \in \Delta(\mathbf{x})$ 的点对之间连边，我们有： $\mathcal{F}$ 中任意向量 $\mathbf{x}$ 的度至少与其任一邻点 $\mathbf{y} \in \Delta(\mathbf{x})$ 的度一样大。因此，$|\Delta(\mathcal{F})| \geq |\mathcal{F}|$，如欲证。

若 $n \geq r$，则根据引理 4.1，我们可以假设 $\mathcal{F}$ 是左移位的。对于 $a = 0$，1，2，我们定义 $\mathcal{F}_a := \{\mathbf{x} \in \mathcal{F}: x_n = a\}$ 和 $\mathcal{F}_a^- := \{\mathbf{x}^- : \mathbf{x} \in \mathcal{F}_a\}$，其中 $\mathbf{x}^-$ 是删去 $\mathbf{x}$ 的最后一个坐标后得到的向量。注意，若 $\mathbf{y} \in \Delta(\mathcal{F}_a^-)$，则 $\mathbf{y}^{+a} \in \Delta(\mathcal{F})$，其中 $\mathbf{y}^{+a}$ 是将 a 作为最后一个坐标拼接后得到的向量。因此，根据归纳法，$|\Delta(\mathcal{F})| \geq \sum_{a=0}^{2} |\Delta(\mathcal{F}_a^-)| \geq \sum_{a=0}^{2} |\mathcal{F}_a^-| = |\mathcal{F}|$；若要证明第二个不等式，只需证明对于所有 $a = 0$，1，2，$\mathcal{F}_a^-$ 是 3-和相交的。这对于 $a = 0$，1 显然成立：因为向量在 $\mathcal{F}_a$ 3-和下相交，且其最后一个坐标为 0 或 1，所以它们必在前 $n-1$ 个坐标上 3-和相交。

最后，考虑 $\mathcal{F}_2^-$。反设 $\mathbf{x}^-$、$\mathbf{y}^- \in \mathcal{F}_2^-$满足 $|\mathbf{x}^- \cap_3 \mathbf{y}^-| = 0$。若存在某个 $i \in [n-1]$ 使得 $x_i = 0$ 且 $y_i \leq 1$，则 $|\tau_{i,\,n}(\mathbf{x}) \cap_3 \mathbf{y}| = 0$ 成立，这与 $\mathcal{F}_2$ 的 3- 和相交性质矛盾。若 $x_i \leq 1$ 且 $y_i = 0$，也会得到同样的矛盾。但 $\mathbf{x}^-$、$\mathbf{y}^- \in 2(n-1, r-2)$，因此 $i \in [n-1]$ 中满足 x_i，$y_i \geq 1$的坐标至多有 $r-2$ 个，所以至少存在一个坐标 i，使得我们得到所需的矛盾。□

定理 4.3. 若 $\mathcal{F} \subseteq 2^n$ 是 3-多重和 2-相交的，则 $|\mathcal{F}| \leq |\cup_{r=n+1}^{2n} 2(n,r)|$。

证明。设 $\mathcal{F}$ 是一个具有最大大小的 3-多重和 2-相交族。显然， $\mathcal{F}$ 是向上封闭的，即 $\mathbf{y} > \mathbf{x} \in \mathcal{F}$ 蕴含 $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$。注意，写作 $\nabla(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} > \mathbf{x}: r(\mathbf{y}) = r(\mathbf{x}) + 1\}$，我们有，对于任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$，阴影 $\nabla(\mathbf{x})$ 与 $\mathcal{F}$ 不相交。设 r 为 $\mathcal{F}$ 中秩最小的向量的秩，并考虑 $\mathcal{F}_r = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F}: r(\mathbf{x}) = r\}$。注意， $\mathcal{F}' := (\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_r) \cup \nabla(\overline{\mathcal{F}_r})$ 是 3-多重和 2-相交的。事实上，来自 $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ 的向量的秩均为 $2n - r + 1$，而来自 $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ 的向量的秩均至少为 $r + 1$，因此它们必定是 3-多重和 2-相交的。由于 $|\nabla(\overline{\mathcal{F}})| = |\Delta(\mathcal{F})|$，根据定理 4.2， $|\mathcal{F}'| \geq |\mathcal{F}|$，并且只要 $r \leq n$ 成立，我们就可以重复这一过程，因此 $2n - r + 1 > r$。由此得到 $|\mathcal{F}| \leq |\cup_{r=n+1}^{2n} 2(n,r)|$。□

定理 4.4。若 $\mathcal{F} \subseteq 2^n$ 是 3-多重和 3-相交的，则 $|\mathcal{F}| \leq |\cup_{r=n+2}^{2n} 2(n,r)| + M(n)$，其中 $M(n)$ 表示 $2(n, n+1)$ 中 3-多重和 3-相交族的最大大小。

证明。该证明与定理 4.3 的证明几乎完全相同。设 $\mathcal{F}$ 是一个大小最大的 3-多重和 3-相交族。注意，写作 $\nabla_2(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} > \mathbf{x}: r(\mathbf{y}) = r(\mathbf{x}) + 2\}$ 时，对于任意 $x \in \mathcal{F}$，其 2-阴影 $\nabla_2(\mathbf{x})$ 与 $\mathcal{F}$ 不相交。设 r 为 $\mathcal{F}$ 中秩最小的向量的秩，并考虑 $\mathcal{F}_r = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F}: r(\mathbf{x}) = r\}$。注意， $\mathcal{F}' := (\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_r) \cup \nabla_2(\overline{\mathcal{F}_r})$ 是 3-多重和 2-相交的。事实上，来自 $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ 的向量秩都为

$2n-r+2$，而来自 $\mathcal{F}\cap\mathcal{F}'$ 的向量秩都至少为 $r+1$，因此它们必定 3-多重和 3-相交。注意，若 $\mathcal{G}$ 是 s-多重和 t-相交的，则 $\Delta(\mathcal{G})$ 是 s-多重和 $(t-2)$-相交的。因此，应用两次定理 4.2，并利用 $|\nabla_2(\overline{\mathcal{F}})| = |\Delta(\Delta(\mathcal{F}))|$，我们得到$|\mathcal{F}'|\geq|\mathcal{F}|$；只要 $r\leq n$成立，就可以重复这一过程，从而 $2n-r+2>r$。由此可得，存在一个大小最大的 3-多重和 2-相交族 $\mathcal{F}$，其中只包含秩至少为 $n+1$的向量。□

References

[1] R. Ahlswede、L.H. Khachatrian，《有限集系统的完全非平凡交定理》。组合理论杂志 A 辑，76(1) (1996), 121-138。[2] R. Ahlswede、L.H. Khachatrian。《有限集系统的完全交定理》。欧洲组合学杂志，18(2) (1997) 125–136。[3] B. Bollob´as。《关于广义图》。匈牙利科学院数学学报，16 (1965) 447–452。[4] G.F. Clements、B. Lindstr¨om。《Macaulay 组合定理的一般化》。组合理论杂志，7(3) (1969) 230–238。[5] D.E. Daykin。《由 Kruskal-Katona 得到 Erd˝os-Ko-Rado 定理》。组合理论杂志 A 辑，17(2) (1974) 254–255。[6] P. Erd˝os、C. Ko、R. Rado。《有限集系统的交定理》。数学季刊，12(1) (1961) 313–320。[7] P. Frankl。《有限集的相交族》。组合理论杂志 A 辑，24(2) (1978) 146–161。[8] P. Frankl。《Erd˝os-Ko-Rado 定理对 n=ckt 成立》。载于：组合学（匈牙利第五届学术讨论会论文集，凯斯特海伊，1976），第 1 卷，第 365–375 页，1978。[9] P. Frankl。《极值集合论中的移位技巧》。载于：组合学综述，123 (1987) 81–110。[10] P. Frankl、Z. F¨uredi。《整数序列的 Erd˝os-Ko-Rado 定理》。SIAM 代数与离散方法杂志，1(4) (1980) 376–381。[11] P. Frankl、N. Tokushige。《整数序列的 Erd˝os-Ko-Rado 定理》。Combinatorica，19(1) (1999) 55–63。[12] P. Frankl、N. Tokushige。《q 元立方体中的交问题》。组合理论杂志 A 辑，141 (2016) 90–126。[13] Z. F¨uredi、D. Gerbner、M. Vizer。《离散等直径结果：多重集的 Erd˝os-Ko-Rado 定理》。欧洲组合学杂志，48 (2015) 224–233。[14] A.J.W. Hilton、E.C. Milner。《有限集系统的一些交定理》。数学季刊，18(1) (1967) 369–384。[15] Gy. Katona。《有限集系统的交定理》。匈牙利科学院数学学报，15(3-4) (1964) 329–337。[16] G. Katona。《有限集的一个定理》。载于：图论，187–207，1968。[17] Z. Kir´aly、Z.L. Nagy、D. P´alv¨olgyi、M. Visontai。《关于弱交叉相交集对族》。Fundamenta Informaticae，117(1-4) (2012) 189–198。[18] J.B. Kruskal。《复形中的单纯形数量》。数学优化技术，10 (1963) 251–278。[19] Zs. Tuza。《具有指定交集的两个集合系统的不等式》。图与组合学，3 (1987) 75–80。

[20] Zs. Tuza。《集合对方法在极值超图论中的应用》。载于：有限集的极值问题（维谢格拉德 1991），Bolyai Society 数学研究第 3 卷，J´anos Bolyai 数学会，布达佩斯，第 479–514 页，1994。[21] Zs. Tuza。《集合对方法在极值问题中的应用，第二部分》。载于：组合学，保罗·Erd˝os 八十寿辰文集（凯斯特海伊 1993），Bolyai Society 数学研究第 2 卷，J´anos Bolyai 数学会，布达佩斯，第 459–490 页，1996。[22] A.Z. Wagner。《通过神经网络进行组合学中的构造》。arXiv 预印本，arXiv:2104.14516，2021。[23] R.M. Wilson。《Erd ˝os-Ko-Rado 定理中的精确界》。Combinatorica，4(2) (1984) 247–257。

Alfréd Rényi Institute of Mathematics电
子邮箱地址：patkos@renyi.hu

Alfréd Rényi Institute of Mathematics and University of Pannónia电
子邮箱地址：tuza.zsolt@mik.uni-pannon.hu

Alfréd Rényi Institute of Mathematics电
子邮箱地址：vizermate@gmail.com