arXiv:2305.01340v1 [math.NA] 2 May 2023

双曲守恒律系统的后验误差估计*

JAN GIESSELMANN† 和 ALEKSEY SIKSTEL‡

摘要。 我们为一维空间中非线性双曲守恒律系统的一阶有限体积近似提供严格且可计算的后验误差估计。我们的误差估计器依赖于 Bressan、Chiri 和 Shen 最近得到的稳定性结果，以及一种计算残差负阶范数的新方法。数值实验表明，误差估计器以先验误差估计所预测的速率收敛。

关键词。 双曲守恒律系统、后验误差估计、有限体积格式、熵解

AMS 分类号。 35L40,65M08, 65M15

1. 引言。 我们研究由下式定义的一维双曲守恒律系统柯西问题解的数值近似误差分析

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t(t,x) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t,x))_x &= 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ \boldsymbol{u}(0,x) &= \boldsymbol{u}_0(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

这里， $\boldsymbol{u}: \ [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^m$ 表示守恒量， $\boldsymbol{f} \in C^2(\mathbb{D}, \mathbb{R}^m)$表示通量函数， $\boldsymbol{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{D})$是初始条件。我们假设该系统是严格双曲的，即通量的雅可比矩阵 $\mathrm{D}\boldsymbol{f}$ 具有 m 个互异实特征值$\lambda_1(\boldsymbol{u}) < \cdots < \lambda_m(\boldsymbol{u})$，且相应特征向量构成一组标准正交基。此外，我们假设每个特征场要么是真非线性的，要么是线性退化的。最后，我们假设该系统具有严格凸熵 e 及相应的熵通量 q，即一对函数$e: \ \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ 和 $q: \ \mathbb{D} \to \mathbb{R}$，满足 $\mathrm{D}e \cdot \mathrm{D}\boldsymbol{f} = \mathrm{D}q$，参见经典教材 [4] 和 [1]。

我们的目标是为数值格式提供严格的后验误差估计。为简化技术细节并阐述思路，我们仅考虑一阶有限体积格式。将我们的方法推广到高阶格式是未来的研究课题。一般而言，后验误差估计要求解具有唯一性，并依赖于底层偏微分方程的适当稳定性理论。事实上，众所周知，对于上述一维双曲系统以及具有小总变差的数据，存在一个由熵解构成的 Lipschitz连续半群。更确切地说，我们依赖 Bressan、Chiri 和 Shen [2] 提供的稳定性结果。在 [2]中，这些结果被用于证明一大类数值格式的收敛性，前提是数值解满足一个可通过后验方式验证的判据，即全变差有界且振荡有界。相比之下，我们旨在提供完全后验的误差估计，因为这能带来更精确的界，并可作为自适应数值格式的基础。

*提交给编辑的日期：2023年5月3日。**资助：** 本研究由德国研究联合会（DFG）资助，资助项目为合作研究中心 CRC/Transregio 154“以天然气网络为例的数学建模、仿真与优化”，项目 C05。

†达姆施塔特工业大学数学系，Dolivostraße 15，64293 达姆施塔特，（giesselmann@mathematik.tu-darmstadt.de）。

‡科隆大学数学系，Weyertal 86 – 90，50931 K¨oln，德国，a.sikstel@uni-koeln.de）。

本文考虑柯西问题的解（1.1），这些解在某个时空柱 Ω_T之外为常数：$= [0,T]\times\Omega$，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 是某个非空区间。为定义有限体积格式，令 Ω_T 由网格点（t^n, $x_{j-\frac{1}{2}}$）离散，其中 $n \in \{0,\dots,N\}$ 且 $j \in \{0,\dots,J\}$。我们将相应的时间步长记为 $\Delta t^{n+\frac{1}{2}} := t^{n+1} - t^n$ 并将单元宽度记为 $\Delta x_j := x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$。有限体积格式用空间平均值近似每个单元中的解

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n \approx \frac{1}{\Delta x_j}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \boldsymbol{u}(t^n,x)\,dx,$$

其中，$\widehat{\boldsymbol{u}}^0$ 由初始条件 $\boldsymbol{u}_0$ 的分片平均值构成，而这些空间平均值的离散演化由下式给出

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_j^{n+1} = \widehat{\boldsymbol{u}}_j^n - \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_j}\left(\widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_{j+1}^n\right) - \widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_{j-1}^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n\right)\right). \tag{1.2}$$

数值通量 $\widehat{\boldsymbol{f}}\colon \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{R}^m$ 在单元边界 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处近似 $\boldsymbol{f}$。由于我们考虑显式时间积分，因此需要通过 CFL 条件限制时间步，以保证格式的稳定性。关于有限体积格式的详情，可参阅已有文献，例如 [10], [23]。

通过以下方式将有限体积解视为 $L^\infty(\Omega_T)$中的函数：

$$\widehat{\boldsymbol{u}}(t,x) = \boldsymbol{u}_j^n \text{ if } (t,x)\in K_j^n := [t^n,t^{n+1})\times(x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}),$$

也就是说，这些函数在矩形时空单元上分片常数。我们将这类分片常数函数构成的空间定义为

$$\mathbf{P}_0(\Omega_T) := \Bigg\{ v\colon [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon v\Big|_{K_j^n} \equiv const\ \forall n\in\{0,\dots,N\},\, j\in\{0,\dots,J\},\\ v\Big|_{[0,T]\times\left(-\infty,\,x_{-\frac{1}{2}}\right)} \equiv const,\ v\Big|_{[0,T]\times\left(x_{J+\frac{1}{2}},\,\infty\right)} \equiv const \Bigg\}. \tag{1.3}$$

对于 [2], 由一阶有限体积格式求解柯西问题所产生的解，其 $L^\infty([0,T)\ L^1(\mathbb{R}))$-误差的估计 $\widehat{\boldsymbol{u}}\in\mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$。这些估计依赖于适当的相容性和稳定性结果。中给出的误差估计依赖于一个较为抽象的相容性判据，即下文的方程（1.4）和（1.5）。文献证明，某些数值格式产生的解满足这一判据，且随着网格细化，ε 趋于零。

事实上，当且仅当首先存在一个 $\varepsilon>0$，使得数值解的弱残差可以被界定，即，[2] 误差估计得以给出。

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\widehat{\boldsymbol{u}}(t^1,x)\varphi(t^1,x)\,dx - \int_{\mathbb{R}}\widehat{\boldsymbol{u}}(t^2,x)\varphi(t^2,x)\,dx + \int_{t^1}^{t^2}\int_{\mathbb{R}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}\varphi_t + \boldsymbol{f}(\widehat{\boldsymbol{u}})\varphi_x\right)dx\,dt\right| \\ \leq C\varepsilon\|\varphi\|_{W^{1,\infty}}(t^2-t^1)\sup_{t\in[t^1,t^2]} TV[\widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot)] \quad \forall\varphi\in C_c^1(\mathbb{R}^2),\quad \forall\, 0\leq t^1<t^2\leq T, \tag{1.4}$$

其中， $C > 0$ 是一个常数， φ 表示一个标量紧支集测试函数，并且 $t^1 < t^2$ 满足 t^1, $t^2 \in [0, T]$ （参见 ε 中的条件 (P [2]) 。此外，同一个 $\varepsilon > 0$还需要界定熵不等式的违反程度，即

(1.5)
$$\int_{\mathbb{R}} e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}(t^2, x)\right) \varphi(t^2, x)\, dx - \int_{\mathbb{R}} e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}(t^1, x)\right) \varphi(t^1, x)\, dx - \int_{t^1}^{t^2} \int_{\mathbb{R}} \left(e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}\right) \varphi_t + q(\widehat{\boldsymbol{u}}) \varphi_x\right)\, dx\, dt \leq C\varepsilon \|\varphi\|_{W^{1,\infty}} (t^2 - t^1) \sup_{t \in [t^1, t^2]} TV[\widehat{\boldsymbol{u}}(t, \cdot)] \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2),\ \varphi \geq 0,\ \forall\, 0 \leq t^1 < t^2 \leq T.$$

这些相容性结果与稳定性估计相结合；这些稳定性估计是通过在 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 光滑的区域内，将 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 与线性化偏微分方程的解进行比较而得到的，而在存在大跳跃的区域内，则将 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 与黎曼问题的解进行比较。数值解要满足的关键条件是全变差一致有界且振荡一致有界，只有如此，才能应用 [2] 的结果。这两项性质均可后验验证。目前这项工作与 [2] 的概念性区别在于，我们旨在直接根据数值解计算 ε 的值，而不是证明先验收敛率。这使得 ε 的值更小。

我们工作的出发点是观察到，估计式 (1.4) 和 (1.5) 在 $W^{-1,1}$-范数中度量残差。这里，“残差”指将数值解代入偏微分方程弱形式及熵不等式后得到的量。需要指出的是，根据残差的定义，即式 (1.4) 和 (1.5) 的左端项，这种方法只能为满足 $\widehat{\boldsymbol{u}}(t, x) \in \mathbb{D}$ 几乎处处成立的 (t, x) 数值解提供误差估计。

[2] 中的一致性估计在时间上已经是局部的，但为了获得可作为网格自适应基础的结果，我们还需要将其在空间上局部化。此外，使用无限维测试函数空间并不实际，因此我们需要证明可以用有限维空间（实际上是三维空间）来替代它。

让我们将我们的结果与文献中已有的双曲守恒律后验误差估计进行比较。关于波前追踪和 Glimm 格式的早期结果归功于 [18, 14, 19]。对于标量问题，已有强稳定性结果： L^1基于 Kruˇzhkov 变量倍增法的压缩性 [17] 被用于 [15]中的后验估计。 [21], 中的稳定性结果为 [13], 所提供的一维标量问题结果提供了依据；这些结果在概念上与我们的结果有些相似，因为它们用对偶范数度量残差。不过，我们通过引入适当的投影，能够为这些对偶范数提供严格的上界。

基于相对熵的双曲守恒律系统误差估计见 [12, 9, 6]。如果精确解不连续，这些估计无法提供有参考价值的界，因为经典相对熵无法保证不连续解的稳定性。在一维空间中，移位理论和 a-收缩可以缓解相对熵方法的局限性，参见 [16]和 [3]。这为改进基于相对熵的误差估计器开辟了道路，参见即将发表的论文 [8]。

最后， [11] 研究了目标导向误差估计，但这需要求解伴随问题，而对于系统而言，即使在一维空间中，当原始解不连续时，其适定性也不明确。

在一个空间维度中，如果原始解是不连续的。

本文结构如下。第二节说明如何将残差界局部化并使其可计算。第3节讨论如何高效计算误差估计中涉及的振荡界。我们还将说明如何结合残差界与振荡界，从而得到后验误差估计。最后一节将给出数值实验，展示误差界的缩放方式与 [2]中的后验分析预测一致。

2. 弱残差。 如前所述，(1.4) 和 (1.5) 衡量的是残差的对偶范数。本章将空间全局对偶范数替换为空间局部对偶范数，并说明如何计算它们。

2.1. 弱残差的局部化。 我们在每个时空单元上定义一个弱残差，并将它们的 $W^{-1,\,1}$-范数之和作为第3节误差估计器的关键组成部分。

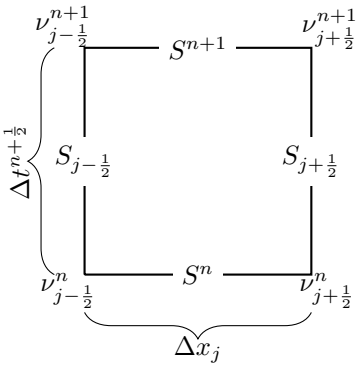

FIG. 2.1。 *Space-time element K_j^n with corresponding edges S.*

首先，我们为时空单元引入一些记号。设单元 K_j^n的节点集合记为$\mathbf{N}\left(K_j^n\right)$，即

$$\mathbf{N}\left(K_j^n\right) := \left\{\nu^n_{j-\frac{1}{2}},\, \nu^n_{j+\frac{1}{2}},\, \nu^{n+1}_{j+\frac{1}{2}},\, \nu^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}\right\},\ \text{with } \nu^\alpha_\beta := (t^\alpha,\, x_\beta)^T$$

而 K_j^n的边集合记为 $\mathbf{E}\left(K_j^n\right)$，如图 2.1所示，其中

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(K_j^n\right) := \{S_{j-\frac{1}{2}},\, S_{j+\frac{1}{2}},\, S^n,\, S^{n+1}\},\\
&S_{j-\frac{1}{2}} := \overline{\nu^n_{j-\frac{1}{2}}\nu^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}}, \quad S_{j+\frac{1}{2}} := \overline{\nu^n_{j+\frac{1}{2}}\nu^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}},\\
&S^n := \overline{\nu^n_{j-\frac{1}{2}}\nu^n_{j+\frac{1}{2}}}, \quad S^{n+1} := \overline{\nu^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}\nu^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

给定一个分片常数函数， $\widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$，它在 $x \notin \Omega$上为常数，我们旨在求出满足以下两个不等式（ ε **1.4**）和（1.4）和（1.5）的最小值。弱残差（1.4）和弱熵耗散残差（1.5）都不应直接拆分到单个单元中，即不应拆分积分区域。这样的简单局部化并不一致，因为对空间变量进行分部积分会产生边界项。下文我们先处理弱残差（1.4），再对熵耗散残差（1.5）采用相同的步骤。

在时空单元 K_j^n 上局部化弱残差，需要在边 $S_{j-\frac{1}{2}}$ 和 $S_{j+\frac{1}{2}}$ 处定义通量。一种自然的选择是采用一阶有限体积格式的数值通量 $\boldsymbol{f}$。请注意，数值通量函数不必与生成 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 时所用的通量函数相同，但为提高效率，我们实际上会使用该通量函数，见注释2.2

DEFINITION 2.1. 设时空区域划分为 $\Omega_T = \bigcup_{j,n} K_j^n$ 并给定某个数值通量函数 $\boldsymbol{f}$ 以及 $\widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$。则，$K_j^n$ 上的线性局部弱残差算子定义为

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\colon\ W^{1,\infty}(K_j^n) \to \mathbb{R}^m,\\
&\varphi \mapsto \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \widehat{\boldsymbol{u}}_j^n \varphi(t^n, x)\,dx - \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \widehat{\boldsymbol{u}}_j^{n+1} \varphi(t^{n+1}, x)\,dx\\
&\qquad + \int_{K_j^n} \widehat{\boldsymbol{u}}_j^n \varphi_t(t,x) + \boldsymbol{f}(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n)\varphi_x(t,x)\,dx\,dt\\
&\qquad + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_{j-1}^n, \widehat{\boldsymbol{u}}_j^n\right)\varphi(t, x_{j-\frac{1}{2}})\,dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n, \widehat{\boldsymbol{u}}_{j+1}^n\right)\varphi(t, x_{j+\frac{1}{2}})\,dt.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

出于相容性的考虑，我们将左右边界上的常数值，即 $[0,T]\times(-\infty, x_{-\frac{1}{2}})$ 和 $[0,T]\times(x_{J+\frac{1}{2}}, \infty)$ 上的常数值，分别记为 $\widehat{\boldsymbol{u}}_{-1}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{u}}_{J+1}$。

注 2.2. 局部化弱残差的局部性与有限体积格式相同，即模板仅包含三个单元。因此，诸如采用空间区域分解的分布式内存并行化等成熟实现技术，也可用于计算 $\mathcal{B}_j^n$。此外，该格式的数值通量可以保存并重复用于计算 $\mathcal{B}_j^n$，从而大幅提高计算效率。

我们将充分正则函数 $g\colon\ K_j^n \to \mathbb{R}$ 限制在边 $S_{j\pm\frac{1}{2}}$ 和 $S^{n,\,n+1}$ 上的平均值 $\fint_E g\,dS$ 在 $\mathbf{E}\left(K_j^n\right)$ 中记为

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_\zeta &:= \fint_{t^n}^{t^{n+1}} \lim_{x\to x_\zeta} g(t,x)\,dt = \frac{1}{\Delta t^{n+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \lim_{x\to x_\zeta} g(t,x)\,dt,\\
\overline{g}^\mu &:= \fint_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \lim_{t\to t^\mu} g(t,x)\,dx = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \lim_{t\to t^\mu} g(t,x)\,dx,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

其中 $\zeta \in \{j-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\}$ 和 $\mu \in \{n, n+1\}$ 分别为。由于数值解在时空单元 K_j^n 内部为常数，对（2.2）中的时空积分应用高斯定理，可将 $\mathcal{B}_j^n$ 重写如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\varphi) = \Delta x_j \left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n - \widehat{\boldsymbol{u}}_j^{n+1}\right)\overline{\varphi}^{n+1} + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{f}(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n)\left(\overline{\varphi}_{j+\frac{1}{2}} - \overline{\varphi}_{j-\frac{1}{2}}\right)\\
+ \Delta t^{n+\frac{1}{2}}\left(\widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_{j-1}^n, \widehat{\boldsymbol{u}}_j^n\right)\overline{\varphi}_{j-\frac{1}{2}} - \widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n, \widehat{\boldsymbol{u}}_{j+1}^n\right)\overline{\varphi}_{j+\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

其中该项 $\Delta x_j \widehat{\boldsymbol{u}}_j^n \varphi^n$ 相互抵消。从现在起，我们将 (2.4) 作为$\mathcal{B}_j^n$的定义。$\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\varphi)$ 的取值由 $\widehat{\boldsymbol{u}}_j^{n+1}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n$ 的取值、通向相邻时空单元的数值通量，以及测试函数沿着 φ的三条边的平均值决定。K_j^n

2.2. 局部弱残差的可计算界。 计算 (1.4) 和 (1.5) 中的界似乎需要对无限多个测试函数进行测试，这并不实际。我们设计了一种合适的投影算子，将 Lipschitz连续测试函数映射到一个有限维空间，从而可以用弱残差在该有限维空间上的算子范数来界定其 $W^{-1,1}$-范数。我们针对 (1.4) 详细说明这一过程；(1.5) 可用类似方法处理。

方程（2.4）表明，$\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\varphi)$ 的取值取决于少数几个标量值，这促使我们寻找一个低维测试空间，其元素由$\mathbf{E}'\left(K_j^n\right) := \left\{S_{j-\frac{1}{2}},\ S^{n+1},\ S_{j+\frac{1}{2}}\right\}$中的边上的平均值刻画；也就是说，这些边是 K_j^n中出现在（2.4）里的边。仿射线性函数在 K_j^n上构成了这样的空间，即

$$\mathbf{V}(K_j^n) := \left\{ v :\ K_j^n \to \mathbb{R},\ v = \alpha_1 + \frac{(t^{n+1}-t)}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}\alpha_2 + \frac{(x_{j+\frac{1}{2}}-x)}{\Delta x_j}\alpha_3, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,2,3\} \right\}, \tag{2.5}$$

我们赋予其 $W^{1,\infty}$ 范数。我们定义一个从测试函数到 $\mathbf{V}(K_j^n)$ 的投影，该投影保持 $\mathbf{E}'\left(K_j^n\right)$ 上的平均值：

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_j^n :\ W^{1,\infty}(K_j^n) \to \mathbf{V}(K_j^n), \\ &\varphi \mapsto \mathcal{P}_j^n\varphi \text{ with } \fint_S \mathcal{P}_j^n\varphi\, dS = \fint_S \varphi\, dS,\ S \in \mathbf{E}'\left(K_j^n\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

这样，只要给定一个分片常数函数 $\widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$，我们就能高效地计算出 $\|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(W^{1,\infty}(K_j^n)\ \mathbb{R}^m)}$ 的估计值。

PROPOSITION 2.3. 算子 $\mathcal{P}_j^n$ 是良定义的线性算子，并且对任意 $\varphi \in W^{1,\infty}(K_j^n)$

$$\|\mathcal{P}_j^n\varphi\|_{W^{1,\infty}(K_j^n)} \le \max\left\{3,\ \sqrt{8+8(c_j^n)^2}\right\}\|\varphi\|_{W^{1,\infty}(K_j^n)}, \tag{2.7}$$

其中 $c_j^n := \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_j}$。

注2.4. 请注意，实际应用中应使用满足 CFL 条件的（1.2），这意味着 $c_j^n > 0$ 有最大波速的上界。

证明。 由于单元 K_j^n 是一个具有 Lipschitz 边界的区域，任意$\varphi \in W^{1,\infty}(K_j^n)$在每条边上的迹都有定义。

给定测试函数 $\boldsymbol{\varphi} = \left(\varphi_{j-\frac{1}{2}}, \varphi^{n+1}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}\right)^T$的平均值，$\mathcal{P}_j^n\varphi \in \mathbf{V}(K_j^n)$的系数 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)^T$ 由线性系统的解确定

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} = \overline{\boldsymbol{\varphi}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\overline{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{2.8}$$

描述从平均值到系数映射的矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$，如（2.8）中所定义，是可逆的。因此，指定各边上的平均值即可得到一个定义良好的算子 $\mathcal{P}_j^n$。

$W^{1,\infty}$-范数 $\mathcal{P}_j^n\varphi$ 可估计如下。

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_j^n\varphi\|_{W^{1,\infty}(K_j^n)} &= \max\left\{\|\mathcal{P}_j^n\varphi\|_{L^\infty(K_j^n)}, \|\mathrm{D}(\mathcal{P}_j^n\varphi)\|_{L^\infty(K_j^n)}\right\} \\ &\overset{(2.5)}{=} \left\{\max\{(\mathcal{P}_j^n\varphi)(\nu):\ \nu\in\mathbf{N}(K_j^n)\}, \max\left\{\frac{|\alpha_2|}{\Delta t^{n+\frac12}}, \frac{|\alpha_3|}{\Delta x_j}\right\}\right\}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

我们首先估计 $\|\mathcal{P}_j^n\varphi\|_{L^\infty(K_j^n)}$:

$$\begin{aligned}&\max\{(\mathcal{P}_j^n\varphi)(\nu):\ \ \nu\in\mathbf{N}(K_j^n)\} \\ &\qquad = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_1+\alpha_2|, |\alpha_1+\alpha_3|, |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3|\} \overset{(2.8)}{\le} 3\|\varphi\|_{W^{1,\infty}}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

接下来，我们估计 $\|\mathrm{D}(\mathcal{P}_j^n\varphi)\|_{L^\infty(K_j^n)}$。$x$ 方向的偏导数满足

$$|\alpha_3| = |\overline{\varphi}_3 - \overline{\varphi}_1| = \frac{1}{\Delta t^{n+\frac12}}\left|\int_{t^n}^{t^{n+1}} \varphi(t, x_{j+\frac12}) - \varphi(t, x_{j-\frac12})\,dt\right| \le \Delta x_j\|\varphi\|_{W^{1,\infty}}.$$

沿 t 方向的偏导数估计如下。存在 $\xi_1\in S_{j-\frac12}$、$\xi_2\in S^{n+1}$ 和 $\xi_3\in S_{j+\frac12}$，如图 2.1所示，使得

$$|\alpha_2| = |\overline{\varphi}_1 - 2\overline{\varphi}_2 + \overline{\varphi}_3| = |\varphi(\xi_1) - 2\varphi(\xi_2) + \varphi(\xi_3)|\,. \tag{2.11}$$

由于， $\|\varphi\|_{W^{1,\infty}}$ 是 φ的 Lipschitz 常数

$$\begin{aligned}|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2) - (\varphi(\xi_3) - \varphi(\xi_2))| &\le \|\varphi\|_{W^{1,\infty}}(|\xi_1-\xi_2| + |\xi_3-\xi_2|) \\ &\le 2\sqrt{2}\|\varphi\|_{W^{1,\infty}}\left|\left(\Delta t^{n+\frac12}, \Delta x_j\right)^T\right|.\end{aligned} \tag{2.12}$$

因此，利用关系式 $\Delta t^{n+\frac12} = c_j^n\Delta x_j$，我们有 $|\alpha_2| \le \sqrt{8+8(c_j^n)^2}\,\Delta t^{n+\frac12}\|\varphi\|_{W^{1,\infty}}$。

总结上述结果，我们得到

$$\|\mathcal{P}_j^n\varphi\|_{W^{1,\infty}(K_j^n)} \le \max\left\{3, \sqrt{8+8(c_j^n)^2}\right\}\|\varphi\|_{W^{1,\infty}(K_j^n)}$$

并注意到，若 CFL 比值 $\frac{\Delta t^{n+\frac12}}{\Delta x_j}$ 在每个时间步中均一致有界，则该估计。 □

回顾一下， $\mathcal{P}$ 保持平均值，即

$$\left(\overline{\mathcal{P}_j^n\varphi}\right)_{j\pm\frac12} = \overline{\varphi}_{j\pm\frac12} \text{ and } \left(\overline{\mathcal{P}_j^{n,\pm}\varphi}\right)^{n+1} = \overline{\varphi}^{n+1} \tag{2.13}$$

因此，当 $\mathcal{P}_j^n$作用于测试函数时， $\mathcal{B}_j^n$保持不变。

Proposition 2.5. 设 $\widehat{\boldsymbol{u}}\in\mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$ 是时空单元 $K_j^n\subset\Omega_T$上的分片常数函数，并且 $\varphi\in W^{1,\infty}(K_j^n)$。则

$$\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\varphi) = \mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\mathcal{P}_j^n\varphi). \tag{2.14}$$

命题2.5 意味着，对于任意 $\widehat{\boldsymbol{u}}\in\mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$ 在所有测试函数集合上的算子范数可通过 $\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]$ 的算子范数按以下方式估计： $\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\big|_{\mathbf{V}}$

PROPOSITION 2.6. 对于任意分片常数函数 $\widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$

$$\|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(W^{1,\infty}(K_n^j),\mathbb{R}^m)} \le \max\left\{3,\ \sqrt{8+8(c_j^n)^2}\right\} \|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}(K_n^j),\mathbb{R}^m)}, \tag{2.15}$$

其中 c_j^n 与命题2.3相同

证明。 利用线性算子范数的定义并应用前面的结果，可得:

(2.16)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(W^{1,\infty}(K_n^j),\mathbb{R}^m)} &= \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,\infty}\left(K_j^n\right)}\neq 0} \frac{\left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\varphi)\right|}{\|\varphi\|_{W^{1,\infty}\left(K_j^n\right)}} \\
&\overset{(2.14)}{=} \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,\infty}\left(K_j^n\right)}\neq 0} \frac{\left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\mathcal{P}_j^n\varphi)\right|}{\|\varphi\|_{W^{1,\infty}\left(K_j^n\right)}} \\
&\overset{(2.7)}{\le} \max\left\{3,\ \sqrt{8+8(c_j^n)^2}\right\} \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,\infty}\left(K_j^n\right)}\neq 0} \frac{\left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\mathcal{P}_j^n\varphi)\right|}{\|\mathcal{P}_j^n\varphi\|_{\mathbf{V}\left(K_j^n\right)}} \\
&= \max\left\{3,\ \sqrt{8+8(c_j^n)^2}\right\} \sup_{\phi\in\mathbf{V}(K_j^n),\ \|\phi\|_{W^{1,\infty}\left(K_j^n\right)}=1} \left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\phi)\right| \\
&= \max\left\{3,\ \sqrt{8+8(c_j^n)^2}\right\} \|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}(K_n^j),\mathbb{R}^m)}.
\end{aligned}$$

□

下一步，我们证明 $[t^n, t^{n+1}]\times\Omega$ 上的弱残差可以由各局部残差之和估计。为此，我们定义

$$\mathcal{B}^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]:\ W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)\to\mathbb{R}^m,\quad \mathcal{B}^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\varphi)=\sum_{j=0}^{J}\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\left(\varphi|_{K_j^n}\right), \tag{2.17}$$

其中，Ω 边界上的数值通量通过某些常数（在时间和空间上均恒定）的外部状态 $\widehat{\boldsymbol{u}}_{-1}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{u}}_{J+1}$ 获得。将仿射线性函数的局部空间汇集起来，定义分片线性函数空间 $\mathbf{V}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega) := \bigoplus_j \mathbf{V}(K_j^n)$，其对应范数为： $v\in\mathbf{V}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)$ $\|v\|_{\mathbf{V}} := \max_j\left\{\left\|v|_{K_j^n}\right\|_{W^{1,\infty}(K_j^n)}\right\}$。

回忆一下， $\mathcal{B}_j^n$ 在（2.4）中的定义对应于弱残差，即不等式（1.4）左端的 K_j^n，但我们加入了数值通量。通过繁琐但直接的计算可以证明，求和时数值通量会相互抵消，且 $\mathcal{B}^n$ 与弱残差一致。

因此， $\mathcal{B}^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]$ 的算子范数可以通过累加 $\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]$ 的算子范数的局部贡献来界定。

PROPOSITION 2.7. 对于任意分片常数函数 $\widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$

$$\|\mathcal{B}^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega),\mathbb{R}^m)} \le C^n \sum_{j=0}^{J} \left\|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}(K_j^n)\mathbb{R}^m)} \tag{2.18}$$

成立，其中 $C^n := $ 最大值 $\left\{3,\ \text{最大值}_{j=1,\ \ldots\ldots,\ J}\sqrt{8+8\left(c_j^n\right)^2}\right\}$。

证明。

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega),\mathbb{R}^m)} &= \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)}=1} |\mathcal{B}^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\varphi)| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)}=1} \left|\sum_{j=0}^{J} \mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\left(\varphi|_{K_j^n}\right)\right| \\ &\overset{\Delta\text{-ineq., (2.14)}}{\leq} \sup_{\|\varphi\|_{W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)}=1} \sum_{j=0}^{J} \left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\left(\mathcal{P}_j^n\varphi|_{K_j^n}\right)\right| \\ &\overset{(2.15)}{\leq} C\sum_{j=0}^{J} \sup_{\|\phi\|_{\mathbf{V}\left(K_j^n\right)}=1} \left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\phi)\right|.\end{aligned}$$

□

由于空间 $\mathbf{V}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)$ 是有限维的，因此界（2.18）与 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 的全变差相结合，可以计算出 ε，使其满足弱残差不等式（1.4）。接下来，我们将以类似的方式对弱熵耗散残差（1.5）进行局部化。为此，我们首先像处理弱残差时那样，重写（1.5）的左端，参见公式（2.4）。

Definition 2.8. 设 $\psi\in W^{1,\infty}(K_j^n)$ 是一个非负测试函数，$\widehat{q}$ 是一个数值熵通量，且 $\widehat{\boldsymbol{u}}\in\mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$ 是一个分片常数函数。我们将线性局部弱熵耗散算子定义为

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]:\ W^{1,\infty}(K_j^n)\to\mathbb{R},\\ &\psi\mapsto \Delta x_j\left(e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^{\,n}\right)-e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^{\,n+1}\right)\right)\overline{\psi}^{\,n+1}\\ &\qquad+\Delta t^{n+\frac{1}{2}}\left(\widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{u}}_{j-1}^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n)\overline{\psi}_{j-\frac{1}{2}}-\widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_{j+1}^n)\overline{\psi}_{j+\frac{1}{2}}\right)\\ &\qquad+\Delta t^{n+\frac{1}{2}}q\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^{\,n}\right)\left(\overline{\psi}_{j+\frac{1}{2}}-\overline{\psi}_{j-\frac{1}{2}}\right),\end{aligned}\tag{2.19}$$

以及全局弱熵耗散 $\mathcal{E}^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]:\ W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)\to\mathbb{R}$ 其定义方式与 Ω 上的弱残差相同，Ω_T 定义见方程（2.17）。

与命题2.5 类似，我们得到

$$\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\psi)=\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\mathcal{P}_j^n\psi).\tag{2.20}$$

为简化记号，我们将边平均值非负的仿射线性函数锥定义为$\mathbf{V}^+(K_j^n):=\{v\in\mathbf{V}(K_j^n):\ \fint_S v\,dS\geq 0\quad\forall S\in\mathbf{E}\left(K_j^n\right)\}$。下文只需考虑满足 $\phi\in\mathbf{V}^+(K_j^n$的情形，其中 $\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\phi)<0$。采用与命题2.6 和2.7相同的记号，并应用推导弱残差时使用的方法，可得以下界：

$$\inf_{\psi\in W^{1,\infty}(K_j^n),\,\psi\geq 0}\frac{\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\psi)}{\|\psi\|_{W^{1,\infty}(K_j^n)}}\geq C^n\inf_{\phi\in\mathbf{V}^+(K_j^n)}\frac{\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\phi)}{\|\phi\|_{\mathbf{V}(K_j^n)}},\tag{2.21}$$

其中 C^n 如命题 2.7所示，以及其全局版本

$$\inf_{\|\psi\|_{W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)}=1,\,\psi\geq 0}\mathcal{E}^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\psi)\geq C^n\sum_{j=0}^{J}\inf_{\phi\in\mathbf{V}^+(K_j^n),\,\|\phi\|_{W^{1,\infty}(K_j^n)}=1}\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\phi).\tag{2.22}$$

接下来，我们给出一个示例，以便直观理解弱残差的尺度变化：

注记 2.9（弱残差的局部尺度）。首先，我们考虑标量 Burgers 方程中一个定常激波的特定定常近似，即$f(u) = \frac{1}{2}u^2$，

$$\widehat{u}_j^n := \begin{cases} 1 & , \quad j < 0, \\ 0 & , \quad j = 0, \\ -1 & , \quad j > 0. \end{cases}$$

使用 Engquist-Osher 通量或 Godunov 通量时，该数值解是定常的。如果在弱残差的定义中也使用该格式的数值通量，则后者满足：

$$\left\| \mathcal{B}_j^n[\widehat{u}] \right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}(K_j^n),\mathbb{R})} = \begin{cases} 0 & , \quad j < 0, \\ \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \Delta x_0 & , \quad j = 0, \\ 0 & , \quad j > 0. \end{cases}$$

残差集中在单个单元中，且时间层（2.18）上的残差满足$\|\mathcal{B}^n[\widehat{u}]\|_{\mathcal{L}(W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)\ \mathbb{R}^m)} = O(\Delta x_0 \cdot \Delta t^{n+\frac{1}{2}})$。进而，这意味着由此得到的 ε 在不等式（1.4）中，其尺度为 $\varepsilon = O(\Delta x_0)$。这似乎是合理的，因为可以认为，残差收敛至零的速度不可能快于近似误差。

值得注意的是，数值近似

$$\widehat{u}_j^n := \begin{cases} 1 & , \quad j \leq 0, \\ -1 & , \quad j > 0, \end{cases}$$

对于 Godunov 通量和 Engquist-Osher 通量同样是定常的，并且满足$\|\mathcal{B}^n[\widehat{u}]\|_{\mathcal{L}(W^{1,\infty}([t^n,t^{n+1}]\times\Omega)\ \mathbb{R}^m)} = 0$对所有 n均成立。

其次，对于采用 Lipschitz连续且相容的数值通量、网格尺寸为 $\Delta x := \max\{\Delta x_{j-1}, \Delta x_j, \Delta x_{j+1}\}$所得的任意数值解，可以证明

$$\left\| \mathcal{B}_j^n[\widehat{u}] \right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}(K_j^n),\mathbb{R})} \leq L\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \left(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta x \right) \left(\left| \widehat{u}_{j-1}^n - \widehat{u}_j^n \right| + \left| \widehat{u}_j^n - \widehat{u}_{j+1}^n \right| \right), \tag{2.23}$$

其中， L 是数值通量的 Lipschitz常数，因此

$$\sum_j \left\| \mathcal{B}_j^n[\widehat{u}] \right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}(K_j^n),\mathbb{R})} \leq 2L\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \left(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta x \right) TV[\widehat{u}].$$

在这种情况下，我们得到 ε 按 $\varepsilon = O(\Delta x)$缩放，即关于网格尺寸为一阶，与数值格式相同。从（2.23）可以看出，弱残差集中在 $\widehat{u}$的显著跳跃相邻的单元中。

现在，我们可以为同时满足 $[0,t]\times\Omega$ 中两个不等式的 ε 求得一个界，如下所示。首先，对所有满足 $K_j^n \cap ([0,t]\times\Omega)$ 和 $(\{t\}\times\Omega)\cap K_j^{N'} \neq \emptyset$ 的单元（即 N' 是 $[0,t]\times\Omega$ 中时间层最大的单元）上的 $(\|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|)_{(j,n)}$ 取 $\ell^\infty\ell^1$-范数，可得到弱残差和熵耗散

$[0,t]\times\Omega$ 中的残差，记为

$$\beta := \max_{n\in\{1,\dots,N'\}} \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{J} \|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}(K_j^n),\mathbb{R}^m)}, \tag{2.24}$$

$$\eta := \max_{n\in\{1,\dots,N'\}} \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{J} \left| \inf_{\phi\in\mathbf{V}^+(K_j^n),\,\|\phi\|_{W^{1,\infty}}=1} \mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\phi) \right| \tag{2.25}$$

其中我们使用 ℓ^∞-范数于 $\mathbb{R}^m$。然后，我们可以确定 ε，使其满足（1.4）和（1.5），如下所示

$$\varepsilon := \begin{cases} 0 & \text{if } \widehat{\boldsymbol{u}} \equiv const, \\ \dfrac{C\max\{\beta,\eta\}}{\sup_{s\in[0,t]} TV[\widehat{\boldsymbol{u}}(s,\cdot)]} & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.26}$$

其中 $C = \max\left\{3,\ \max_{j\in\{0,\dots,J\},\ n\in\{0,\dots,N'\}} \sqrt{8+8(c_j^n)^2}\right\}$。

注意，当 $\widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot)\equiv const$ 时，（2.26）中的全变差为零。然而，在这种情况下，不等式（1.4）和（1.5）都显然成立，因为弱残差 β 同样为零，且熵为常数。

2.3. 计算局部弱残差界的算法。 本节介绍一种算法，用于计算前文所给出的弱残差和弱熵耗散残差的上界（2.18）。

我们注意到，如果在 $\mathcal{B}_j^n$ 的定义中使用的通量与有限体积格式（1.2）中使用的通量相同，那么对于任意常数 $c\in\mathbb{R}$，$\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]((t,x)\mapsto c)=0$。因此，为了估计算子范数 $\|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}(K_n^j)\,\mathbb{R}^m)}$，我们将 (2.5) 中定义的测试函数 $\phi\in\mathbf{V}(K_j^n)$ 归一化为 $\phi(t,x)=\alpha_1+\frac{(t^{n+1}-t)}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}\alpha_2+\frac{(x_{j+\frac{1}{2}}-x)}{\Delta x_j}\alpha_3$，令其满足 ~~$\alpha_1=0$~~。注意，$\|\mathrm{D}\phi\|_{L^\infty}\le 1$ 蕴含 $|\alpha_2|\le\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $|\alpha_3|\le\Delta x_j$。由于 $\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]$ 是线性的，其范数可估计如下

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}(K_n^j),\mathbb{R}^m)} &= \sup_{\|\phi\|_{W^{1,\infty}}=1} \left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}](\phi)\right| \\ &\overset{\|\mathrm{D}(\phi)\|_{L^\infty}\le 1}{\le} \left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]((t,x)\mapsto t)\right| + \left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]((t,x)\mapsto x)\right| \\ &\le \frac{1}{2}\left(\Delta t^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 \left|\widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_{j-1}^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n\right) - \widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_{j+1}^n\right)\right| \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta x_j \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \left|\widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_{j-1}^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n\right) + \widehat{\boldsymbol{f}}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_{j+1}^n\right) - 2\boldsymbol{f}(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n)\right|. \end{aligned} \tag{2.27}$$

我们对熵耗散残差算子 $\mathcal{E}_j^n$ 进行类似的估计，同时注意到测试函数属于 $\mathbf{V}^+(K_j^n)$，即它们的平均值非负。我们定义

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &:= \mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\left((t,x)\mapsto 1\right) \\ &= \Delta x_j\left(e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^{\,n}\right) - e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^{\,n+1}\right)\right) + \Delta t^{n+\frac{1}{2}}\left(\widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{u}}_{j-1}^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n) - \widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_{j+1}^n)\right), \\ \mathcal{E}_2 &:= \mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\left((t,x)\mapsto t^{n+1}-t\right) = \frac{1}{2}\left(\Delta t^{n+\frac{1}{2}}\right)^2\left(\widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{u}}_{j-1}^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n) - \widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_{j+1}^n)\right), \\ \mathcal{E}_3 &:= \mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\left((t,x)\mapsto x_{j+\frac{1}{2}}-x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\Delta x_j\right)^2\left(e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^{\,n}\right) - e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^{\,n+1}\right)\right) + \Delta t^{n+\frac{1}{2}}\Delta x_j\left(\widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{u}}_{j-1}^n,\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n) - q(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^n)\right). \end{aligned} \tag{2.28}$$

由于 $\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]$ 的线性性，我们得到

(2.29)

$$\begin{aligned}\inf_{\phi\in\mathbf{V}^+(K_j^n),\,\|\phi\|_{W^{1,\infty}}=1}\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}] &= \inf_{\phi\in\mathbf{V}^+(K_j^n),\,\|\phi\|_{W^{1,\infty}}=1}\left(\alpha_1\mathcal{E}_1+\frac{\alpha_2}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}\mathcal{E}_2+\frac{\alpha_3}{\Delta x_j}\mathcal{E}_3\right).\\ &\geq \min\{0,\mathcal{E}_1\}+\min\{0,\mathcal{E}_2\}+\min\{0,\mathcal{E}_3\}.\end{aligned}$$

最后一个估计成立，因为 $\|\phi\|_{L^\infty}=1$ 蕴含 $|\alpha_1|\leq 1$。

这些估计为算法 2.1 提供了计算 ε所需的最后几个要素。诸如 t 和 x 的平均值等各种量都可以预先计算。该算法

算法 2.1弱残差与熵耗散估计

函数 EPSILON($\widehat{\boldsymbol{u}}\in\mathbf{P}_0(\Omega_T)^m$)

$\beta\leftarrow 0$, $\eta\leftarrow 0$

$\mathsf{c}\leftarrow\max_{n=0}^N\max_{j=0}^J\Delta t^{n+\frac{1}{2}}/\Delta x_j$, $\mathsf{C}\leftarrow$最大值$\{3,\sqrt{8+8\mathsf{c}^2}\}$ ▷ cf. (2.18)

对所有 $n\in 0,\dots,N-1$ **do** ▷ cf. (2.27) and (2.29)

$$\beta\leftarrow\max\left\{\beta,\ \left\|\sum_{j=0}^J\left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]((t,\ x)\mapsto t)\right|+\left|\mathcal{B}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]((t,\ x)\mapsto x)\right|\right\|_\infty\right\}$$

$$\begin{aligned}\eta\leftarrow\max\Bigg\{\eta,\ \Bigg\|\sum_{j=0}^J\Big|&\min\{0,\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\,((t,x)\mapsto 1)\}\\ &+\min\{0,\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]\,\big((t,x)\mapsto t^{n+1}-t\big)\}\\ &+\min\{0,\mathcal{E}_j^n[\widehat{\boldsymbol{u}}]((t,x)\mapsto x_{j+\frac{1}{2}}-x)\}\Big|\Bigg\|_\infty\Bigg\}\end{aligned}$$

结束 for 返回 $\mathsf{C}\cdot\max\{\beta,\eta\}\,/\max_{n=0}^N\mathrm{TV}(\widehat{\boldsymbol{u}}(t^n,\cdot))$**结束函数**

需要对所有单元进行一次遍历 K_j^n，即 $O(J\cdot N)$ 次操作。

到目前为止，我们已经对弱残差和弱熵耗散残差进行了局部化；然而，仅凭这些结果还无法得到任何误差界。在下一节中，我们将这些结果与 [2] 中的稳定性分析相结合，以获得所需的结果。此外，我们还给出一种算法，用于计算 $\mathcal{B}^n$ 和 $\mathcal{E}^n$ 的估计值，从而得到分片常数解的 $L^\infty L^1$-误差界。

3. $L^\infty L^1$ 误差估计。本节第一部分将说明如何 $L^\infty L^1$-分片常数近似解的误差，能够根据第2节推导出的弱残差和熵耗散残差的可计算上界来进行估计。这一方法基于 [2] 中的稳定性估计，这些估计取决于若干与数值解振荡有关的量。本节第二部分将给出一种算法，用于计算这些量以及整体的后验误差估计器。

3.1. 计算振荡界。 [2, 定理 3.1 和定理 4.1] 的陈述分别为解光滑或具有孤立间断的区域提供误差估计。为了使用 Bressan 的稳定性结果，需要计算 中尺度时间片 $[0,\tau]\times\Omega$ 中的振荡。我们可以选择

中尺度时间片的长度，且 [2] 中的论证表明 $\tau \approx \Delta t^{\frac{1}{3}}$ 将带来良好的误差估计。特别地，我们预计 $\tau \gg \Delta t$。

如 [2], 中所述，我们的任务是将条带 $[0,\tau]\times\Omega$ 划分为梯形区域 S_k，这些区域围住具有一定强度的孤立间断；并划分为梯形区域 G_k，覆盖中尺度时间片的其余部分，在这些区域中，解主要是“光滑”的。下文将区分数值解中的两类不连续点：一类是由于采用有限体积近似来近似光滑函数而产生的不连续点；另一类是我们认为近似了精确解中不连续点的显著不连续点。

这种划分的思路是：在“光滑”区域中，将 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 与线性化双曲偏微分方程的解进行比较；而在显著不连续点附近的区域中$\widehat{\boldsymbol{u}}$ 则与黎曼问题的解进行比较。只有当显著不连续点彼此充分孤立时，才能进行后一种比较。由于上述彼此孤立的显著不连续点可能对应不同的波型（激波或接触间断），我们将它们称为激波。要求激波彼此充分孤立，即激波之间的距离足够大，使得中尺度时间片内不会发生波相互作用；这意味着 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 中的某些显著不连续点最终可能落入“光滑”梯形区域。如果发生这种情况，估计的精度会降低，但不会影响估计量的标度。详情见备注3.6 。

为了将激波与“光滑”区域区分开来，例如稀疏波的分片常数近似，需要为激波强度设定一个下阈值 $\sigma > 0$ ，即守恒变量绝对差的最大值。按照 [2, 第 4], 节中的构造，激波被围在一个窄条带 $\{(t,\ x):\ t\in[0,\tau],\ \ |x-\gamma(t)|<\delta\}$ 内，该窄条带围绕近似激波曲线$\gamma(t) = x_0+\lambda t$ 展开，起点为某个足点 $x_0\in\Omega$。我们选择宽度为δ阶的条带宽度 $\delta = O(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$，以确保之后的渐近行为正确。该窄条带包含在一个宽度至少为 $2\left(\delta+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$ 的梯形中。假设我们已在一个中尺度时间片内定位了 J_S 个激波（详情将在算法 3.1 中给出）。那么，我们将围绕从$x_{0,\ k}$ 出发的第 k 个激波的梯形定义为一个凸包

$$
\begin{aligned}
&S_k := \operatorname{conv}\{(0,a_k'),\,(0,b_k'),\,(\tau,a_k),\,(\tau,b_k)\},\ \text{where:}\\
&a_k = x_{0,k}+\lambda^-\tau-\delta_k-\varepsilon^{\frac{1}{3}},\quad b_k = x_{0,k}+\lambda^+\tau+\delta_k+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\\
&a_k' = a_k-\lambda^+\tau,\quad b_k' = b_k-\lambda^-\tau,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

对于 $k\in\{0,\dots,J_S\}$。令 λ^+和 λ^- 分别表示 $[0,\tau]\times\Omega$ 中特征线的最大速度和最小速度。根据 [2,式 (3.1)–(3.5)],，中尺度时间片的其余部分$[0,\tau]\times\Omega\ \setminus\ \bigcup_{k=0}^{J_S} S_k$由以下部分覆盖

$$
G_k := \operatorname{conv}\left\{(0,a_k'),\,(0,b_k'),\,(\tau,\,a_k'+\tau\lambda^+ +\varepsilon^{\frac{2}{3}}),\,(\tau,\,b_k'+\tau\lambda^- -\varepsilon^{\frac{2}{3}})\right\},
\tag{3.2}
$$

其中，对所有 $k\in\{0,\dots,J_G\}$，选择 $a_k'<a_{k+1}'<b_k'<b_{k+1}'$，使得 $b_k'-a_k'>2\tau($ $\lambda^+-\lambda^-)$。最后一个条件确保中尺度时间片中的每个点最多包含在两个光滑梯形区域内；如果精确解中只有有限个激波，则激波梯形区域的数量应在 Δx 中一致有界（由精确解中的激波数量决定）。梯形区域的斜率 G_k由最大和最小特征速度经 $\varepsilon^{\frac{2}{3}}/\tau\approx\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ 调整后给出，并且有 $[0,\tau]\times\Omega\ =\bigcup_{k=0}^{J_S} S_k\cup\bigcup_{k=0}^{J_G} G_k$。

在覆盖“光滑”区域的梯形区域中，振荡的上确界定义为

$$\boldsymbol{\kappa} := \max_{k\in\{0,\dots,J_G\}} \sup_{(t,x),\,(s,y)\in G_k} \left|\widehat{\boldsymbol{u}}(t,x) - \widehat{\boldsymbol{u}}(s,y)\right|. \tag{3.3}$$

构造 $L^\infty L^1$-误差估计器所需的最后一个要素，是解在激波附近的振荡。对于激波梯形区域 S_k，我们预期，围绕第 k 条激波曲线、宽度为 δ_k 的窄条带之外的振荡，与“光滑”区域内的振荡处于同一量级。因此，我们将 S_k 中排除第 k 条激波曲线周围条带后的左、右子梯形区域定义为

$$\begin{aligned} S_k^l &:= \left\{(t,x)\in S_k :\ a_k' + \lambda^+ t \le x \le x_{0,k} - \delta_k + \lambda t\right\}, \\ S_k^r &:= \left\{(t,x)\in S_k :\ x_{0,k} + \delta_k + \lambda t \le x \le b_k' + \lambda^- t\right\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

参见 [2, 公式 (4.5)-(4.6)],以及 S_k 中的振荡

$$\boldsymbol{\kappa}_k' := \max\left\{ \sup_{(t,x),\,(s,y)\in S_k^l} \left|\widehat{\boldsymbol{u}}(t,x) - \widehat{\boldsymbol{u}}(s,y)\right|, \sup_{(t,x),\,(s,y)\in S_k^r} \left|\widehat{\boldsymbol{u}}(t,x) - \widehat{\boldsymbol{u}}(s,y)\right| \right\}. \tag{3.5}$$

注 3.1. 请注意，我们不要求激波曲线精确无误。实际上，在计算激波梯形区域 S_k 中的振荡时，我们会排除近似激波曲线 γ_k 周围宽度为 $\delta_k = O(\varepsilon^{2/3})$ 的条带。这样既能处理数值耗散导致的激波位置不确定性，也能应对激波曲线通常并非以恒定速度传播这一事实。在下一小节中，我们将介绍激波检测算法，以及确定激波周围条带宽度的方法 δ_k。

上述定义使我们能够陈述以下局部时间后验误差估计，概括 [2,定理 3。1]和 [2, 定理 4。1]。

THEOREM 3.2. 令 $\mathcal{S}: \ [0,\infty)\times\Xi\to\Xi$ 定义双曲守恒律 *(1.1)* 的熵弱解 *Lipschitz* 半群，其半群定义域为$\Xi\subset L^1(\mathbb{R};\ \mathbb{R}^m)$ 即具有小总变差的函数区域。给定激波强度的阈值，$\sigma_0>0$ 我们定义

$$C_0 := \frac{\sigma_0}{\min_{k\in\{0,\dots,J_S\}}\left(\varepsilon/\delta_k + \delta_k/\varepsilon^{\frac{1}{3}} + 2\boldsymbol{\kappa}_k'\right)^{\frac{1}{3}}}. \tag{3.6}$$

将中尺度时间片 $[0,\tau]\times\Omega$ 按照 *(3.1)* 和 *(3.2)* 划分为梯形区域。于是，存在常数 C_S 和 C_G，它们取决于 C_0，使得解在时刻 τ 的误差估计为

$$\max_{0\le t\le\tau} \left\|\widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot) - \mathcal{S}_t\boldsymbol{u}_0\right\|_{L^1(\Omega)} \le C_S\mathfrak{E}_S + C_G\mathfrak{E}_G \tag{3.7}$$

其中

$$\mathfrak{E}_S := \tau\sum_{k=0}^{J_S}\left(\frac{\varepsilon}{\delta_k} + \frac{\delta_k}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} + 2\boldsymbol{\kappa}_k'\right), \quad \mathfrak{E}_G := (\tau+\boldsymbol{\kappa}) \sup_{t\in[0,\tau]} TV[\widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot)]\,\varepsilon^{\frac{1}{3}}. \tag{3.8}$$

该定理为时间推进格式的自适应网格加密方法构造提供了依据；更重要的是，在几条备注之后紧接着给出的整个时空区域 Ω_T 上的误差估计也以此定理为基础。

注3.3。

1. [2, 注释 5.1]中的讨论揭示了误差界（3.8）预期的渐近行为。构造稳定性估计时有多种选择，因此难以对其渐近行为进行严格分析。然而，这些选择的多样性也使我们能够以启发式方式调整估计，以期获得更精确的误差界。基于这一考虑，我们选择了定理 3.2 陈述中所采用的参数，并预期这些参数能给出随 $\varepsilon^{\frac{2}{3}}|\log\varepsilon|$趋于零的误差界。下一节将通过数值实验考察误差界的渐近行为。2. 计算误差估计器时有多种选择，例如梯形域分解的具体方式或 δ_k的具体取值，都会影响定理 3.2 中估计的精确程度。不过，只要这些选择的尺度关系恰当，例如只要 δ_k 按 $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$的尺度变化，这些选择就不会影响整体的渐近行为。3. 规定激波强度的阈值 σ，即可在 [2,定理 4.1]中选取更精确的误差界。4. 定理 3.2 给出的估计在时间上是局部的，因为它量化的是一个中尺度时间片上的误差。隐含地，误差界还具有更强的局部性：减小某个时空单元的局部残差贡献（例如在自适应网格设置下对其进行细化），会降低整体误差界。然而，由于非线性双曲守恒律的性质，尤其是强制性缺失，要获得特定单元的误差界或证明后验误差估计的效率似乎都难以实现。

我们通过估计整个时空区域 Ω_T 上有限体积解的 $L^\infty L^1$-误差，总结本文的解析结果。为此，我们按照（2.26）定义 ε_T，但将 Ω_T 中的所有单元都纳入其中。我们将1区域划分为大小为 $\tau\approx\varepsilon_T^3$ 的时间片，并用上标 $^\mu$ 表示第 μ 个时间片中的量。因此，我们将第 μ 个时间片中的“光滑”振荡记为$\boldsymbol{\kappa}^\mu$，将第 k 个浪涌梯形中的振荡记为（$\boldsymbol{\kappa}_k'$）$^\mu$，分别如（3.3）和（3.5）所示。此外，所有浪涌梯形的最大振荡记为 $\boldsymbol{\kappa}'_{\max}:=\max_{k,\mu}(\boldsymbol{\kappa}_k')^\mu$，类似地，激波周围条带的最大宽度记为 $\delta_{\max}:=\max_{k,\mu}(\delta_k)^\mu$。将估计式 $\mathfrak{E}_S$ 和 $\mathfrak{E}_G$ 相加，并将$\boldsymbol{\kappa}'_{\max}$ 和 $\delta_{\max}$ 提出求和号外，即得主定理。

THEOREM 3.4. 设 $\mathcal{S}$ 定义了双曲守恒律 *(1.1)* 的熵弱解 *Lipschitz* 半群，且 $\sigma>0$ 是激波强度的一个下阈值。将时空区域 Ω_T 均匀划分为 $M+1$ 个大小为 $\tau\approx\varepsilon_T^{\frac{1}{3}}$的时间片，即 $[0,T]=\bigcup_{\mu=0}^{M}[\mu\tau,(\mu+1)\tau]$。设第 μ 个时间片包含 J_S^μ 个激波，并按 *(3.1)* 和 *(3.2)* 中的定义分别划分为梯形区域 S_k^μ 和 G_k^μ。那么，存在依赖于 C_0 的常数 C_S 和 C_G（参见 *(3.6)*），使得分片常数解 $\widehat{\boldsymbol{u}}\in P_0(\Omega_T)$ 在时刻 T 的$L^\infty L^1$-误差满足以下估计：

$$\max_{0\le t\le T}\|\widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot)-\mathcal{S}_t\boldsymbol{u}_0\|_{L^1(\Omega)}\le C_S\mathfrak{E}_S^T+C_G\mathfrak{E}_G^T \tag{3.9}$$

其中

$$\mathfrak{E}_S^T := \left(\varepsilon_T^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{\kappa}'_{\max} + \delta_{\max}\right)\sum_{\mu=0}^{M} J_S^\mu, \quad \mathfrak{E}_G^T := \varepsilon_T^{\frac{1}{3}}\left(T + \sum_{\mu=0}^{M}\kappa^\mu\right). \tag{3.10}$$

备注 3.5. 遗憾的是，无法计算这两个常数C_S 和 C_G ，因为它们除了取决于其他量之外，还取决于半群 $\mathcal{S}$ 的 Lipschitz 常数，以及用于估计跃变强度的隐函数定理所产生的常数。

备注 3.6（误差估计器的缩放）。

1. [2, 注 5。1] 中的论证断言：如果数值解逼近一个分段 Lipschitz 连续且只有有限个不连续点的精确解，那么包含激波的梯形区域中的振荡满足$\boldsymbol{\kappa}'_k = C'\tau$ 对于某个常数 $C' > 0$。这是因为 $\boldsymbol{\kappa}'_k$ 度量的是不包括激波曲线在内的振荡，而假设解在该处是 Lipschitz连续的。如果不存在波相互作用，那么 $\mathfrak{E}_G$ 的表现为 $\varepsilon^{\frac{1}{3}}|$对数 $\varepsilon|$，如备注 3.3中所述；并且由于我们假设 $\delta_k = O(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$，对误差估计器整体行为的启发式预期为 (3.11)

$$C_S\mathfrak{E}_S^T + C_G\mathfrak{E}_G^T = O(1)\cdot\varepsilon^{\frac{1}{3}}|\log\varepsilon| = O(1)\cdot(\max_n \Delta t^{n+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\left|\log\max_n \Delta t^{n+\frac{1}{2}}\right|.$$

2. 如果数值解中的激波被过度弥散，以至于未被检测到，那么它对某个“光滑”梯形区域内振荡的贡献就会很小（与其他光滑梯形区域的振荡相似）。因此，这会增加误差估计器高估误差的程度，但不会降低误差估计器的收敛阶。

3. 所提出的区域梯形划分规定激波之间的距离为 $O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$，因此，时空区域内激波相互作用的点必然由光滑梯形区域 G_k 覆盖。这意味着这些 G_k 中的振荡会很大。 [2, Rem. 5.1] 中的讨论表明，如果精确解只有有限个激波，那么未检测到激波相互作用的时间片长度之和为

$$O(1)\cdot\varepsilon^{\frac{1}{3}}\cdot[\text{total nr. of surge interactions}] = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}).$$

因此，未检测到的激波相互作用不会影响右端项的渐近行为(3.9)。

3.2. 适当梯形的计算算法。 为了使误差估计器（3.9）完全可计算，还需制定一种算法，将中尺度时间片分解为包含“光滑”部分的梯形区域和包含激波的梯形区域。

在本节介绍的算法中，我们采用以下数据结构。链表通过类似集合的表示法初始化；如果未提供参数，则初始化为空列表。列表 L 的第 k 个元素记作 L_k。梯形区域通过 trpz(I_1, I_2) 结构表示，其中 $I_1 = [a', b']$ 和 $I_2 = [a, b]$ 分别是梯形区域的底部区间和上部区间。trpz 对象 T 的角点记作 T.a'、T.b'、T.a 和 T.b。包含强不连续性的梯形区域通过 surgetrpz(S^l, S^r) 存储，其中 S^l 和 S^r 是梯形区域中远离激波的部分，定义见 (3.4)。这两个梯形区域...

这些区域足以定义一个包围激波的梯形区域。此外，我们仅关注 S^l 和 S^r 中的振荡。进一步地，我们定义一个函数 inb(x)，该函数将 x 投影到区域 Ω 上，以避免梯形区域超出该区域。

函数 SURGE-TRPZS 会在每个中尺度时间片的最低时间层中搜索足够孤立的激波足点。随后，扫描从每个潜在激波足点发出的极端特征速度锥与该中尺度时间片最高时间层的交集，寻找对应的激波。

为了可靠地标记包含跳跃的单元，函数 DETECT-JUMPS 采用基于小波的多分辨率分析技术 [5, 20]。原则上，可以使用任何合适的不连续性指示器，例如 [22]中介绍的基于熵的指示器。

为了确定区域 Ω 的梯形分解$_T$（定理 3.4所要求的），我们逐一遍历大小为 $\tau \approx \varepsilon^{\frac{1}{3}}$的中尺度时间片。在每个时间片中，$\underline{\ }$标记包含激波的、宽度为 $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$的条带。如果在该锥内的最高时间层上没有找到跳跃区域，或找到多于一个跳跃区域，则不会创建激波曲线。这可能意味着某些重要的不连续点未被标记为激波，从而导致轻微的高估；第二点和第三点已在注释3.6中讨论了这一问题。

由于激波足点 x_0、$_k$ 的确切位置未知，我们将 x_0、$_k$ 设为中尺度时间片最低时间层中所找到的激波区域的中心。因此，如果检测到激波，下一步就是确定第 k 个激波 δ_k 周围条带的宽度。为此，我们将宽度为 δ_k 的条带分成两部分：激波左侧一部分，右侧一部分，宽度分别为 δ_k^l 和 δ_k^r。每个初始宽度 δ^l、$_k{}^r$ 均设为略小于子梯形区域 S_k^l 和 S_k^r 的宽度，即 δ^l、$_k{}^r = \varepsilon^{\frac{1}{3}} - \varepsilon^{\frac{2}{3}}$。我们记录（较窄）梯形区域 S^l、$_k{}^r$ 中解的最大值和最小值。随后，我们将每个 δ^l、$_k{}^r$ 缩小 $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$（从而扩大 S^l、$_k{}^r$ 的面积），直到由 (3.5) 计算出的振荡 S^l、$_k{}^r$ 达到或超过 τ，或者 δ_k 达到 $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$。这里，我们将所有与梯形区域有非空交集的单元中 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 的振荡都纳入计算。每一步只需在 S^l、$_k{}^r$ 新增的区域内计算最大值和最小值。$\bar{\ }$因此，该过程的计算开销与计算 S^l、$_k{}^r$ 中振荡的开销相同。算法 3.1 对这一过程作了详细描述；该过程确保较大的振荡集中在宽度为 δ_k 的尽可能窄的条带内，同时使 S^l、$_k{}^r$ 中的振荡保持较小。

中尺度时间片中剩余的“光滑”区域由梯形区域覆盖，使得每个单元至少包含在一个、至多包含在两个梯形区域中。中尺度时间片的区域划分算法总结于算法A.1。

该算法沿解的空间方向进行两次扫描，即对每个中尺度时间片划分，需要 $O(J)$ 次操作。算法A.1 返回S 和G 的梯形角点，表示为区域 Ω 中的点$_T$，据此我们可以获取各个单元，以及每个激波梯形区域对应的振荡列表 $\boldsymbol{\kappa}'_k$。此信息用于函数 OSC，该函数根据式（3.3）计算振荡。这里同样将 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 在与梯形区域有非空交集的所有单元中的振荡纳入计算。其输出用于最终的算法3.2，该算法计算误差界（3.9）。该算法的复杂度上界为 $O(J \cdot N)$，即为时空单元总数，因为每个单元最多出现在两个梯形区域中。

算法 3.1激波检测

函数 CSTR-SURGE-TRPZ(τ,激波 δ^l, δ^r, λ^-, λ^+) ▷ 参见 (3.1) 和 (3.4)
  $[j_1, j_2, k_1, k_2] \leftarrow$ 激波
  $x_0 \leftarrow \frac{1}{x}\frac{2}{}(\underline{\quad}_{j_1-\frac{1}{2}} + x_{j_2+\frac{1}{2}})$
  $a \leftarrow \text{INB}(x_0 + \lambda^-\tau - \delta^l - \varepsilon^{\frac{1}{3}})$, $\quad b \leftarrow \text{INB}(x_0 + \lambda^+\tau + \delta^r + \varepsilon^{\frac{1}{3}})$
  $a' \leftarrow \text{INB}(a - \lambda^+\tau)$, $\quad b' \leftarrow \text{INB}(b - \lambda^-\tau)$
  $\lambda \leftarrow \left(\frac{1}{2}(\underline{x}_{k_1-\frac{1}{2}} + \underline{x}_{k_2+\frac{1}{2}}) - x_0\right)/\tau$
  $S^l \leftarrow$ 梯形 $\left([a', x_0 - \delta^l], \quad [a, x_0 - \delta^l + \lambda\tau]\right)$
  $S^r \leftarrow$ trpz $([x_0 + \delta^r, b'], \quad [x_0 + \delta^r + \lambda\tau, b])$
  返回 surgetrpz(S^l, S^r)
结束函数
函数 SURGE-TRPZS(t^n, t^{n+l}, $\widehat{\boldsymbol{u}}$, σ_0, λ^-, λ^+)
  激波 $\leftarrow$ 列表（），增量 $\leftarrow$ 列表（），振荡 $\leftarrow$ 列表（），S $\leftarrow$ 列表（）
  $\tau \leftarrow t^{n+l} - t^n$, $\quad$ sd $\leftarrow (\lambda^+ - \lambda^-)\tau$ ▷ 激波梯形区域之间的最小距离
  跳跃$^{\text{b}} \leftarrow$ DETECT-JUMPS(t^n, Ω $\widehat{\boldsymbol{u}}$, σ_0)
  FILTER(跳跃^{b}, DIST(跳跃$^{\text{b}}_k$, 跳跃$^{\text{b}}_{k\ +1}$) $<$ sd 对于 $k \in 0, \ldots,$ 跳跃$^{\text{b}}.size() - 2$)
  对于 $(j_1, \quad j_2) \in$跳跃^{b} **做**
    跳跃$^{\text{t}} \leftarrow$ DETECT-JUMPS(t^{n+l}, $[x_{j_1} + \lambda^-\tau, x_{j_2} + \lambda^+\tau]$, $\widehat{\boldsymbol{u}}$)
    如果 跳跃$^{\text{t}}.size() = 1$ **则**
      $(k_1, k_2) \leftarrow$ 跳跃$^{\text{t}}_0$, $\quad$ 激波$.append([(j_1, j_2), (k_1, k_2)])$
      增量 $\leftarrow \text{MAX}(x_{j_2} - x_{j_1}, x_{k_2} - x_{k_1})$
    结束如果
  结束循环
  对 s $\in$激波 **执行**
    $\delta \leftarrow 2(\varepsilon^{\frac{1}{3}} - \varepsilon^{\frac{2}{3}})$, $\quad \delta^l \leftarrow \frac{1}{2}\delta$, $\quad \delta^r \leftarrow \frac{1}{2}\delta$
    $S_{old} \leftarrow$ CSTR-SURGE-TRPZ $(\tau,$ s $\delta^l, \delta^r, \lambda^-, \lambda^+)$
    $\boldsymbol{m}^{l,\ r} \leftarrow \text{MIN}\ (\widehat{\boldsymbol{u}}|_{S^{l,r}_{old}})$, $\quad \boldsymbol{M}^{l,r} \leftarrow \text{MAX}(\widehat{\boldsymbol{u}}|_{S^{l,\ r}_{old}})$
    当 $|\boldsymbol{M}^{l,r} - \boldsymbol{m}^{l,r}| \le \tau$和 $\delta^l + \delta^r \ge \varepsilon^{\frac{2}{3}}$**时** ▷ 确定最小的 δ
      $\delta^{l,r} \leftarrow \delta^{l,r} - 2\varepsilon^{\frac{2}{3}}$
      $S_{new} \leftarrow$ CSTR-SURGE-TRPZ(τ, s δ^l, δ^r, λ^-, λ^+)
      $\boldsymbol{m}^{l,r} \leftarrow \text{MIN}(\boldsymbol{m}^{l,\ r}, \ \text{MIN}(\widehat{\boldsymbol{u}}|_{S^{l,\ r}_{new} \setminus S^{l,\ r}_{old}}))$
      $\boldsymbol{M}^{l,\ r} \leftarrow \text{MAX}(\boldsymbol{M}^{l,\ r}, \ \text{MAX}(\widehat{\boldsymbol{u}}|_{S^{l,\ r}_{new} \setminus S^{l,\ r}_{old}}))$
      $S^{old} \leftarrow S^{new}$
    结束 while 循环
    S$.append$ (激波trpz $(S^l, \quad S^r)$), $\quad$ oscs$.append(\max\{|\boldsymbol{M}^l - \boldsymbol{m}^l|, |\boldsymbol{M}^r - \boldsymbol{m}^r|\})$
  结束 for 循环
  返回 S , oscs
函数结束

算法 3.2误差估计

函数 ERROR-ESTIMATOR($\widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{P}_0([0, T] \times \Omega)^m$, σ_0)
  $\varepsilon \leftarrow \text{EPSILON}(\widehat{\boldsymbol{u}})$, $\kappa \leftarrow 0$, $\kappa' \leftarrow 0$, $J_S \leftarrow 0$, $\delta_{max} \leftarrow 0$
  taus $\leftarrow$ CONCATENATE(0, 列表(t^n: $t^{n-1} < \mu\varepsilon \le t^n \le T$, $\mu = 1, 2, \ldots$))
  对于 $\mu \in 0, \ldots,$ taus$.size() - 1$ **执行**
    S, Sosc, G $\leftarrow$ MESO-SLAB-PARTITION($\widehat{\boldsymbol{u}}([t^\mu, t^{\mu+1}], \ \cdot)$ ε, σ_0)
    $\kappa \leftarrow \kappa +$最大值$_{g\in\text{G}}$ OSC(g), $\kappa' \leftarrow$最大值 $\{\kappa'$,max(Sosc)$\}$
    $J_S \leftarrow J_S +$ S$.size()$, $\delta_{max} \leftarrow \max(\delta_{max}, \ \delta(\text{S}))$
  返回 $J_S = \left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\underline{\boldsymbol{\kappa}}'_{\max} + \delta_{\max}\right) J_S$, $\mathfrak{E}_G = \varepsilon^{\frac{1}{3}}(\underline{T} + \kappa)$
函数结束

4. 数值结果。我们进行了三次数值实验，以考察前几章推导的后验误差估计量的标度行为。前两次实验针对 p-系统

$$\begin{aligned} &\rho_t + q_x = 0, \\ &q_t + \left(\frac{q^2}{\rho} + p(\rho)\right)_x = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中，ρ 表示密度，$q = \rho v$ 表示动量，$p(\rho) = C\rho^\gamma$ 表示压力，其中 $C = 1$ 且 $\gamma = \frac{7}{5}$。我们考虑两个黎曼问题：一个问题的解由两个稀疏波组成，另一个问题的解包含一个稀疏波和一个激波。第三个测试案例考虑 Burgers 方程的一个解

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \tag{4.2}$$

其中包含一个速度快速变化的单个激波。对于每种情况，我们研究ε，它来自（2.26），以及 $\mathfrak{E}_S$ 和 $\mathfrak{E}_G$，它们来自（3.10），并改变网格分辨率。这些量通过算法 3.2计算。

在全部三个测试案例中，我们均采用局部 Lax-Friedrichs 数值通量，即

$$\widehat{f}(\widehat{\boldsymbol{u}}_L, \widehat{\boldsymbol{u}}_R) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{f}(\widehat{\boldsymbol{u}}_L) + \boldsymbol{f}(\widehat{\boldsymbol{u}}_R)\right) - \frac{1}{2}\lambda_{\max}\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_R - \widehat{\boldsymbol{u}}_L\right)$$

其中 $\lambda_{\max} = \max\{\|\lambda(\widehat{\boldsymbol{u}}_L)\|_\infty, \ \|\lambda(\widehat{\boldsymbol{u}}_R)\|_\infty\}$，其中 $\lambda(\boldsymbol{u})$ 表示 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 的特征值集合，以及相应的数值熵通量

$$\widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{u}}_L, \widehat{\boldsymbol{u}}_R) = \frac{1}{2}\left(q(\widehat{\boldsymbol{u}}_L) + q(\widehat{\boldsymbol{u}}_R)\right) - \frac{1}{2}\lambda_{\max}\left(e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_R\right) - e\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_L\right)\right).$$

CFL 数设为 0.9，空间网格由 $2 \cdot 2^L$ 个单元组成，并对 $\Omega = (-5, 5)$ 进行均匀离散。这里，L 表示细化层级，因此对于 $L = 0$，可能的最粗网格包含两个单元。所有情况下的边界虚单元均设为其各自相邻单元值的常数延拓。我们监测若干量关于层级 L 的标度关系，并且对于一般量 e，用经验收敛阶 EoC 补充数据集 e_L：$= -\log_2(e_{L+1}/e_L)$。

对于激波检测，我们采用 Daubechies 小波，并将最小激波强度设为 $\sigma = 0.1$。误差估计器在 MULTIWAVE-框架 [7] 中实现。

该 p-系统：两道稀疏波。对于第一种情况，我们从$t = 0.5$ 开始该格式，并采用初始数据对应的黎曼问题的精确解

$$\boldsymbol{u}(0, x) = \begin{cases} (1, -2)^T & \text{if } x \le 0, \\ (1, 2)^T & \text{if } x > 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Riemann问题（RP）的解可以通过求解一个标量函数的根来计算，参见 [23]。在这种情况下，解由一个左行稀疏波和一个右行稀疏波组成。我们从 $t = 0.5$ 计算到 $t = 1.0$。在这一时间区间内，精确解包含两个充分发展的稀疏波，即它是连续的，但由于稀疏波处存在折点而不光滑。

L	ε	EoC	$\varepsilon^{\frac{1}{3}}$	$\mathfrak{E}_G$	EoC	$L^\infty L^1$-误差	EoC
7	0.19297		0.57787	0.87028		0.49868	
8	0.09584	1.01	0.45764	0.78796	0.14	0.31273	0.67
9	0.04780	1.00	0.36291	0.66305	0.25	0.19232	0.70
10	0.02388	1.00	0.28797	0.56602	0.23	0.11582	0.73
11	0.01194	1.00	0.22857	0.47899	0.24	0.06852	0.76
12	0.00597	1.00	0.18144	0.38769	0.31	0.03987	0.78

TABLE 4.1
Error estimator results for the two-rarefactions-RP for the p-system.

表 4.1 总结了算法2.1和3.2的结果。由于数值解不含任何激波，因此激波部分的误差估计器被省略，并且对于所有层级 L， $\mathfrak{E}_S = 0$ 。 ε 的收敛经验阶在整个细化层级中几乎始终恰好为**1**。解的光滑部分的误差估计器 $\mathfrak{E}_G$趋近于理论预测的$1\ 3$阶。

p系统的黎曼问题：稀疏与激波。我们考虑黎曼初始数据

$$\boldsymbol{u}(0,\, x) = \begin{cases} (0.15,\, 0)^T & \text{if } x \leq 0, \\ (0.1,\, 0)^T & \text{if } x > 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

由此得到的解由一个向左传播的稀疏波和一个向右传播的激波组成，分别从 $x = 0$处发出。我们模拟从 $t = 0$ 到 $t = 1.5$的解，时空图以及梯形分解如图4.1所示。注意，图4.1 表明，算法3.1检测到了

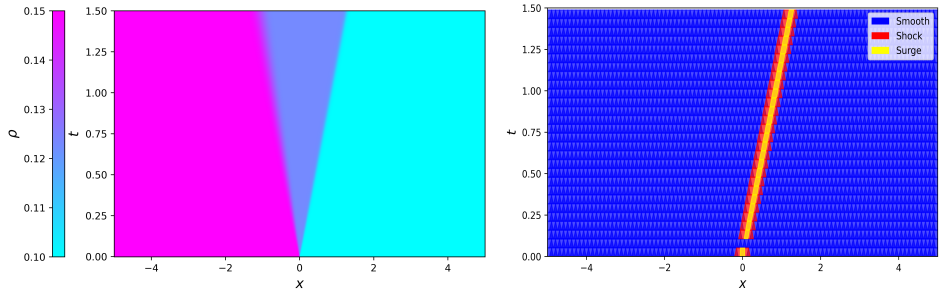

FIG. 4.1。 *Rarefaction-shock RP for the p-system at $L = 10$. 左: density ρ in space-time. 右: surge areas and the trapezoidal decomposition.*

在第一个中尺度时间片中出现了激波，即此时波尚未充分形成。在接下来的中尺度时间片中未检测到激波，因为波之间的距离太小。提高分辨率后，初始中尺度时间片中的激波将不再能够被检测到，因为波会更早形成，而未检测到激波的中尺度时间片数量会减少。因此，该算法的实现表现符合预期。

稀疏波—激波黎曼问题的误差估计器结果列于表4.2中。光滑情形的数值测试表明，误差估计器的实验收敛阶为$1\ 3$，这正是 Bressan [2] 在后验可验证条件下证明的阶数。在不连续解的测试中，我们看到

L	ε	EoC	$\varepsilon^{\frac{1}{3}}$	$\mathfrak{E}_S$	EoC	$\mathfrak{E}_G$	EoC	$L^\infty L^1$-误差收敛经验阶	
7	0.06268		0.39724	2.85997		0.84665		0.00661	
8	0.03134	1.00	0.31529	2.21944	0.37	0.69120	0.29	0.00421	0.65
9	0.01567	1.00	0.25024	1.74306	0.35	0.55701	0.31	0.00258	0.71
10	0.00784	1.00	0.19862	1.39272	0.32	0.45395	0.30	0.00153	0.76
11	0.00392	1.00	0.15764	1.06811	0.38	0.37343	0.28	0.00088	0.79
12	0.00196	1.00	0.12512	0.80363	0.41	0.30651	0.28	0.00050	0.81

TABLE 4.2
Error estimator results for the rarefaction-shock-RP for the p-system.

估计器的光滑部分收敛阶略低，这可能表明分辨率尚未达到渐近状态。值得注意的是，估计器的激波部分实际上比光滑部分收敛得更快。

弯曲激波位置下的 Burgers 方程。在最后一个测试案例中，我们考虑具有如下初始条件的 Burgers 方程

$$u(0,x)=\begin{cases}10 & \text{if } x\le -4,\\ -3x-2 & \text{if } -4<x\le 0,\\ -7 & \text{if } x>0.\end{cases} \tag{4.5}$$

初始条件由一条截断线性函数构成，该函数位于 $x=0$左侧，在 $x=0$ 处有一个跳跃，且 $x=0$右侧为常数状态。该问题的解始于一个向左传播的激波，并在 $t=0.3$ 附近（线性函数变陡为垂直线时）改变传播方向，如图4.2所示。此测试案例旨在检验算法 δ中的宽度搜索行为，见算法3.1。

图4.2 右侧展示了相应的梯形分解。最终时刻设为 $T=1.0$。在第二个中尺度时间片中，也就是激波曲线改变方向的时间片内，激增宽度约为其他中尺度时间片的三倍。因此，算法3.1 的实现能够正确捕捉弯曲激波位置。

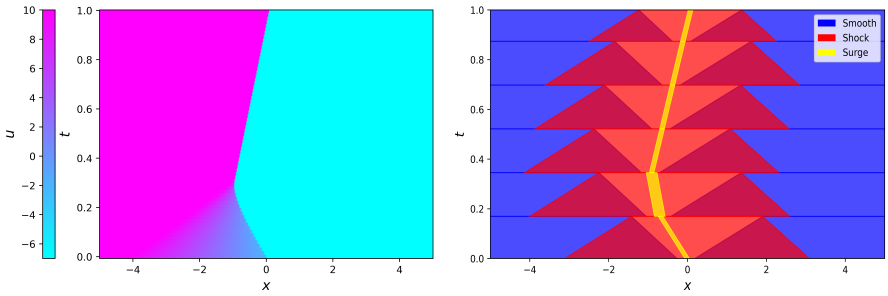

FIG. 4.2 *Left: Burgers space-time solution at $L=9$. Right: Corresponding trapezoidal decomposition of the domain.*

对于 $L^\infty L^1$-误差的计算，我们采用第 $L=14$ 层上的数值解，而非精确解，因为推导后者相当繁琐。表4.3 显示，除 $L=11$外，误差估计器的估计收敛阶符合预期的渐近行为。

L	ε	EoC	$\varepsilon^{\frac{1}{3}}$	$\mathfrak{E}_S$	EoC	$\mathfrak{E}_G$	EoC	$L^\infty L^1$-err 收敛经验阶	
8	0.21730		0.60120	6.73095		10.3601		0.22878	
9	0.10865	1.00	0.47717	5.61791	0.26	7.99104	0.37	0.08885	1.36
10	0.05432	1.00	0.37873	4.69667	0.26	5.97280	0.42	0.04693	0.92
11	0.02716	1.00	0.30060	4.05053	0.21	4.90897	0.28	0.02562	0.87
12	0.01358	1.00	0.23859	2.83435	0.52	3.82476	0.36	0.01411	0.86

TABLE 4.3
Error estimator results for the Burgers equation with a varying shock curve direction.

参考文献

[1] A. BRESSAN, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-dimensional Cauchy Problem*, 牛津数学讲座系列，牛津大学出版社，2000.

[2] A. BRESSAN, M. T. CHIRI, AND W. SHEN, *A Posteriori Error Estimates for Numerical Solutions*, 《理性力学与分析档案》, 241 (2021), pp. 357–402, https://doi.org/10.1007/s00205-021-01653-4.

[3] G. CHEN, S. J. G. KRUPA, AND A. F. VASSEUR, *Uniqueness and weak-BV stability for 2×2 conservation laws*, 《理性力学与分析档案》, 246 (2022), pp. 299–332, https://doi.org/10.1007/s00205-022-01813-0.

[4] C. M. DAFERMOS, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, 数学科学基础丛书，施普林格出版社，第四版，2016.

[5] W. DAHMEN, B. GOTTSCHLICH–MÜLLER, AND S. MÜLLER, *Multiresolution schemes for conservation laws*, 《数值数学》, 88 (2001), pp. 399–443, https://doi.org/10.1007/s211-001-8009-3.

[6] A. DEDNER AND J. GIESSELMANN, *A Posteriori Analysis of Fully Discrete Method of Lines Discontinuous Galerkin Schemes for Systems of Conservation Laws*, 《SIAM 数值分析杂志》, 54 (2016), pp. 3523–3549, https://doi.org/10.1137/15M1046265.

[7] N. GERHARD, S. MÜLLER, AND A. SIKSTEL, *A Wavelet-Free Approach for Multiresolution-Based Grid Adaptation for Conservation Laws*, 《应用数学与计算通讯》, 4 (2021), pp. 1–35, https://doi.org/10.1007/s42967-020-00101-6.

[8] J. GIESSELMANN AND S. G. KRUPA, *Theory of shifts, shocks, and the intimate connections to L^p-type a posteriori error analysis of discontinuous Galerkin and other numerical schemes for hyperbolic problems*, 即将出版。

[9] J. GIESSELMANN, C. MAKRIDAKIS, AND T. PRYER, *A Posteriori Analysis of Discontinuous Galerkin Schemes for Systems of Hyperbolic Conservation Laws*, 《SIAM 数值分析杂志》, 53 (2015), pp. 1280–1303, https://doi.org/10.1137/140970999.

[10] E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Ellipses 出版社，巴黎，1991.

[11] R. HARTMANN AND P. HOUSTON, *Adaptive Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for the Compressible Euler Equations*, 《计算物理学杂志》, 183 (2002), pp. 508–532, https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7206.

[12] V. JOVANOVIC AND C. ROHDE, *Error Estimates for Finite Volume Approximations of Classical Solutions for Nonlinear Systems of Hyperbolic Balance Laws*, 《SIAM 数值分析杂志》, 43 (2006), pp. 2423–2449, https://doi.org/10.1137/S0036142903438136.

[13] S. KARNI AND A. KURGANOV, *Local error analysis for approximate solutions of hyperbolic conservation laws*, 《计算数学进展》, 22 (2005), pp. 79–99, https: //doi.org/10.1007/s10444-005-7099-8.

[14] H. KIM, M. LAFOREST, AND D. YOON, *An adaptive version of Glimm's scheme*, Acta Mathematica Scientia, 30 (2010), pp. 428–446, https://doi.org/10.1016/S0252-9602(10)60057-4.

[15] D. KRÖNER AND M. OHLBERGER, *A posteriori error estimates for upwind finite volume schemes for nonlinear conservation laws in multi dimensions*, 《计算数学》, 69 (2000), pp. 25–39, https://doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01158-8.

[16] S. G. KRUPA AND A. F. VASSEUR, *On uniqueness of solutions to conservation laws verifying a single entropy condition*, 《双曲微分方程杂志》, 16 (2019), pp. 157 – 191, https://doi.org/10.1142/S0219891619500061.

[17] S. N. KRUŽKOV, *First order quasilinear equations in several independent variables*, 《苏联数学文集》, 10 (1970), p. 217, https://doi.org/10.1070/ SM1970v010n02ABEH002156.

[18] M. É. LAFOREST, *A Posteriori Error Estimate for Front-Tracking*, 博士论文，州立大学

纽约石溪分校，2001年。[19] M. É. Lafrest, *A Posteriori Error Estimate for Front-Tracking: Systems of Conservation Laws* 35 2004 1347 1370, ，《SIAM 数学分析杂志》，(), 第 – 页https://doi. org/10.1137/S0036141002416870。[20] S. Müller, *Adaptive multiscale schemes for conservation laws*，第27卷，施普林格科学与商业媒体，2002年。[21] H. Nessyahu, E. Tadmor, and T. Tassa, *The convergence rate of godunov type schemes*，《SIAM 数值分析杂志》，31 (1994)，第1–16页，https://doi.org/10.1137/0731001。[22] M. Semplice, A. Coco, and G. Russo, *Adaptive mesh refinement for hyperbolic systems based on third-order compact WENO reconstruction*，《科学计算杂志》，66 (2016)，第692–724页，https://doi.org/10.1007/s10915-015-0038-z。[23] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* 2009 ，施普林格，第三版，。

附录 A. 中尺度时间片的划分。

算法 A.1将一个中尺度时间片划分为激波和“光滑”梯形区域

函数 INB(x) ▷ 在 Ω 的范围内
  返回 最大值$\{x_{-\frac{1}{2}}$,最小值$\{x, x_{J+\frac{1}{2}}\}\}$
结束函数
函数 MESO-SLAB-PARTITION($\widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{P}_0([t^n, t^{n+l}] \times \Omega)^m$, ε, σ_0)
  G $\leftarrow$ 列表( ), $\tau \leftarrow t^{n+l} - t^n$
  $\lambda^- \leftarrow \min_{j\in\{0,\dots,J\},\ \nu\in\{n,\dots,n+l\}} \lambda(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^\nu)$, $\lambda^+ \leftarrow \max_{j\in\{0,\dots,J\},\ \nu\in\{n,\dots,n+l\}} \lambda(\widehat{\boldsymbol{u}}_j^\nu)$
  S, Sosc $\leftarrow$ SURGE-TRPZS(t^n, Ω $\widehat{\boldsymbol{u}}$, σ_0, λ^-, λ^+)
  如果 $|$激波$_{\texttt{bottom}}| = 0$ **则** ▷ 即 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 在 $[t^n, t^{n+l}]$中是“光滑的”
    G.*append*(trpz(Ω, Ω))
    返回 S , G
  结束如果
  如果 $(x_{-\frac{1}{2}} < \mathsf{S}_0.S^l.a)$ **则** ▷ 最外侧左端。“光滑”梯形
    G.*append* $\Big($梯形 $\Big([x_{-\frac{1}{2}}, \mathsf{S}_0.S^l.a - \tau\lambda^- - \varepsilon^{\frac{2}{3}}]_*, \ [x_{-\frac{1}{2}}, \mathsf{S}_0.S^l.a]\Big)\Big)$
  结束条件
  对于 $j \in 0, \dots,$ S.$size() - 1$ **执行**
    如果 $\mathsf{S}_j.S^r.b \geq x_{J+\frac{1}{2}}$ **则** 跳出 **结束如果** ▷ 即覆盖右端区域边界
    $a \leftarrow \mathsf{S}_j.S^r.b, \quad b \leftarrow \begin{cases} x_{J+\frac{1}{2}} & \textbf{if} \quad j = \mathsf{S}.size() - 1, \\ \mathsf{S}_{j+1}.S^l.a & \text{否则} \end{cases}$
    G.*append* $\Big($trpz $\Big([a - \tau\lambda^+ - \varepsilon^{\frac{2}{3}}, b - \tau\lambda^- - \varepsilon^{\frac{2}{3}}], [a, b]\Big)\Big)$
  结束循环
  返回 S , Sosc, G
结束函数