arXiv:2305.01347v1 [math.DS] 2 May 2023

平面树作为 2-球面上具有汇的莫尔斯流的完全拓扑不变量

Oleksandr Pryshliak

2023年5月3日

摘要

为研究 2-球面上具有汇的莫尔斯流的拓扑结构，我们使用平面树作为该流的完全拓扑不变量。我们给出了所有至少有 7 条边的平面树的列表，并使用了有根平面树列表。

关键词和短语。莫尔斯流、平面图、球面图、拓扑不变量。

引言

0.1 主题的相关性

研究平面上嵌入树的拓扑结构是一个具有现实意义的研究课题，原因如下：

在各个科学领域的应用：平面上的拓扑树嵌入在多个科学领域中有着广泛应用，例如计算机图形学、计算机可视化、生物信息学、社交网络、交通网络等。研究平面上嵌套树所形成的拓扑结构，有助于理解不同情境下对象之间的相互作用，并将这些知识应用于各种科学和实践领域。

挑战与问题：在平面上嵌入树并非易事，因为这需要考虑诸多限制，例如边的相交限制、节点间距离限制等。理解平面上嵌套树的拓扑结构，有助于解决与开发高效嵌套算法、优化对象间相互作用以及改进数据可视化相关的复杂问题和挑战。

科学方法的发展：研究平面上嵌套树的拓扑结构，有助于发展科学方法和途径，例如图论、计算几何、优化方法等。

0.2 文献综述

在 [56] 中，作者定义了树在平面上的拓扑嵌套的基本概念和性质，例如“邻接”、“层级”、“可见性”和“外部面”等概念。作者提出了“规范嵌入”的概念，并确立了该概念与树的拓扑性质之间的联系。

在 [57], 中，研究了如何将树的顶点放置在平面上，使边成为直线段这一问题。作者引入了“直线可见边”的概念，并指出并非每棵树都能在平面上直接附着。

在 [58], 中，作者研究了平面上嵌套树的结构性质，特别是首次定义了“平面分隔集”（planar separators）的概念，并展示了如何利用它们在平面上构造树的平行嵌套。

在 [59], 中 作者提出了一种在平面上构造“优美”树嵌套的方法 e.
《图书》[61] 概述了图可视化算法，包括将树的顶点置于平面上的技术。

[62] 可视为一部参考文献，收录了图绘制与可视化领域顶尖研究者的文章。其中设有专门章节，探讨平面上嵌套树的拓扑性质及相应算法。

在 Graph Drawing 2016 会议上发表的论文集 [63] 中，作者展示了图绘制领域的最新研究成果，包括关于平面上嵌套树拓扑结构的研究。

该研究 [64] 致力于平面图相关理论与算法，包括将树的顶点放置在平面上。

In [60] 作者提出了在平面上放置图顶点的各种方法和模型。

利用嵌套树研究函数和动力系统的拓扑性质尤为有趣——这些性质不受坐标系选择、测量方法等因素的影响。对于典型系统而言，定义该系统的参数发生微小变化时，这些性质不会改变。

闭曲面上的流的拓扑分类见 [7, 19, 23, 24, 25, 43, 1, 32, 35, 48, 33,34, 41, 31], ，带边界曲面上的流的拓扑分类见 [5, 8, 21, 20, 35, 32, 28, 40, 25, 41, 44]。3-流形上 Morse-Smale 流的完全拓扑不变量在 [49, 51, 39, 27, 29, 13, 4, 3]中构造。

莫尔斯流是莫尔斯函数的梯度流。若固定函数在特殊点处的取值，则流的结构决定了函数 [22, 47] 的结构。因此，莫尔斯–斯梅尔流的分类与莫尔斯函数的分类有关。

定向曲面上函数的拓扑不变量见 [18] 和 [45] ；非定向曲面上的相关研究见 [22]；带边界曲面上的研究见 [10, 16, 17, 30]；非紧曲面上的研究见 [38] 。

光滑函数的拓扑不变量也在 [6, 9, 17, 16, 38, 37, 42, 22, 27, 55, 50, 2, 46], 中针对带极限的流形进行了研究，在 [14, 17, 15], 中针对 3 维和 4 维流形进行了研究。

关于函数与动力系统拓扑理论的入门介绍，我们推荐阅读 [30, 52, 53, 54, 55]。

0.3 论文的目的

本研究的主要目标是描述所有顶点数不超过 8 的非同构平面树，并将其用于对 S^2 上具有一个汇的莫尔斯流进行拓扑分类。

0.4 研究方法

为解决主要问题，我们将采用已知的平面有根树分类算法。我们将树中到价为 1 的顶点距离最大的那个顶点称为树的中心。树的中心将其划分为若干根树。我们的研究方法是将这些根树的根粘合起来。

1 平面有根树

平面有根树是一种特殊类型的树，其顶点位于平面上，且边彼此不相交。在这类树中，会指定一个特殊顶点，称为树的根，所有边都从该顶点发出。每个顶点都可以有多个子顶点，这些子顶点在平面上的位置低于其父顶点。

平面有根树是许多领域中使用的重要数据结构，例如计算机科学、平面设计、数据可视化、数据处理算法等。它们是表示数据的层次组织的基本数据结构之一，其中一个元素（根）相对于其他元素具有特殊地位。

1.1 具有 0、1 和 2 条边的有根树

我们将使用文献 [44] 中给出的根树列表。图 1 列出了边数不超过 2 的所有可能的有根树（1+1+2树）。

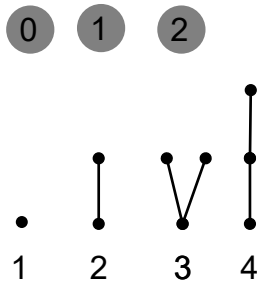

图1：含有0、1、2和3条边的有根树

1.2 含有3条边的有根树

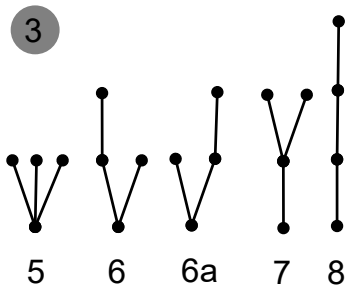

图2：含有3条边的有根树

图 2 给出了所有可能的 5 个含 32 条边的有根树。图 6 和图 6a 在平面上同构，但在半平面上不同构（根位于半平面的边界上）。

1.3 含有4条边的有根树

具有 4 条边的根树如图3所示。

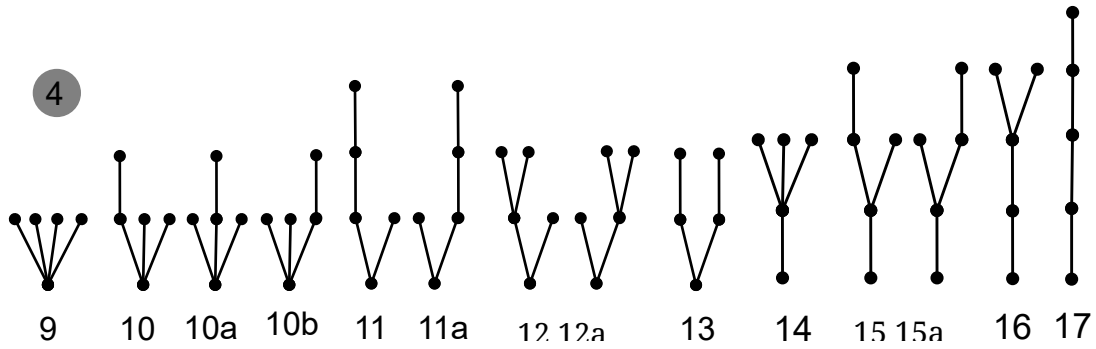

图3：具有 4 条边的有根树

树 4、4a、4b 是同构的平面图，但不是同构的有根树。图 11、11a；12、12a；15、15a 这些树对也同样如此。因此，具有 4 条边的非同构有根树共有 14 棵。

1.4 具有 5 条边的有根树

具有5条边的根树如图4、5所示。此处每个平面树类别仅给出一棵根树。

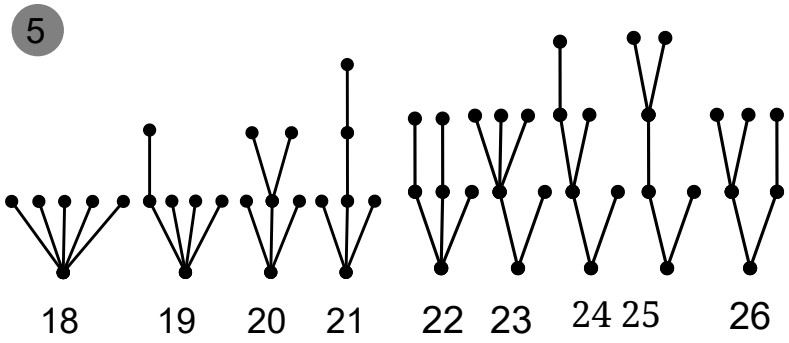

图4：有5条边的有根树（第1部分）

对于树19，有4棵非同构有根树；对于20，有3棵有根树；对于21，也有3棵有根树。

对于树22，有3棵非同构根树；对于23，有2棵根树；对于24，有4棵；对于25，有2棵；对于26，有2棵根树。

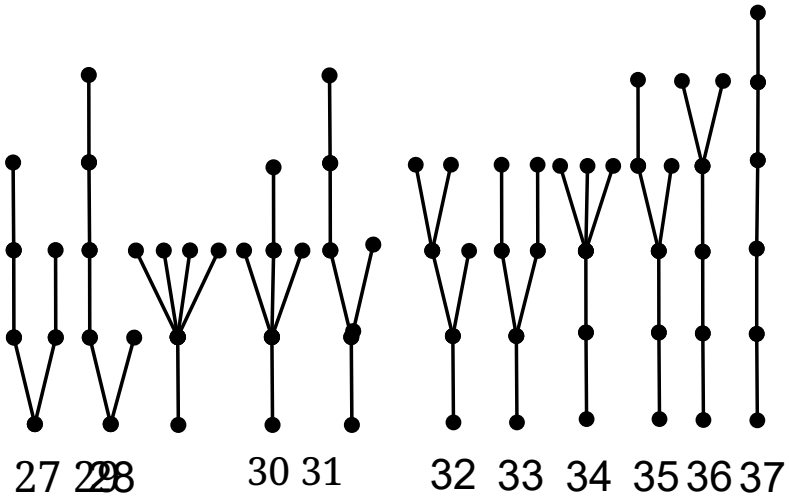

图5：具有5条边的有根树（第2部分）

对于树27，有2棵非同构根树；对于树28，有2棵根树；树29有1棵；树30有3棵；树31有2棵根树。

对于树32，有2棵非同构根树；树33有1棵根树；树34有1棵；树35有2棵；树36和树37各有1棵根树。

因此，具有5条边的非同构有根树总共有51棵。

2 平面树

由于有根树源自平面树，若在这些树上选取一个顶点，那么顶点数较少的平面树可以用有根树编号来表示。

2.1 不超过 6 个顶点的平面树

我们将得到以下列表：

1. 一个顶点的平面树 – 1。

2. 两个顶点的平面树 – 2。 3. 三个顶点的平面树 – 3=4。 4. 四个顶点的两棵平面树 – 5=7, 6=6a=8。
5. 五个顶点的三棵平面树 – 9=14, 10= 10a= 10b= 12= 12a= 15= 15a= 16, 11= 11a= 13=17。 6. 六个顶点的六棵平面树 – 18=29, 19=23=30=34, 20=32, 21 =25=26=31=36, 22=24=33=35,27=28=37。

2.2 含 7 个顶点的平面树

为得到平面树列表，我们将根树粘合起来，使各根粘合到同一个顶点上。同时，应考虑到同一棵树可能由不同的根树粘合而成。为消除这种歧义，我们假设所得顶点是中心顶点。我们将距价为 1 的顶点最远的顶点称为中心顶点（中心顶点可能不止一个）。

图 6、7 展示了所有可能的含 7 个顶点的非同构平面树。

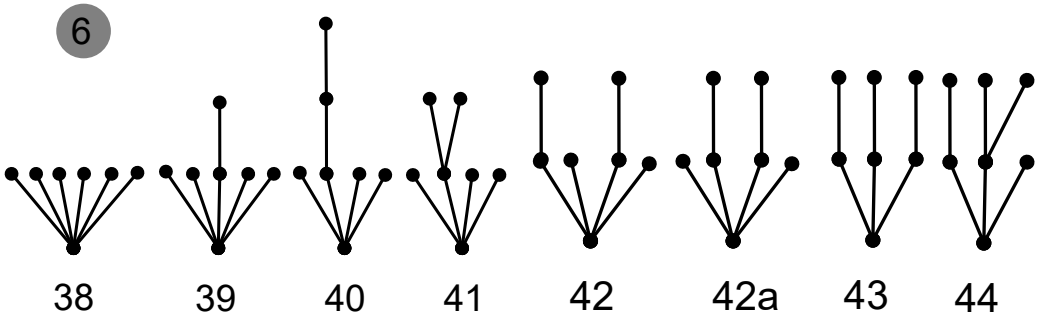

图 6：含 7 个顶点的平面树（第 1 部分）

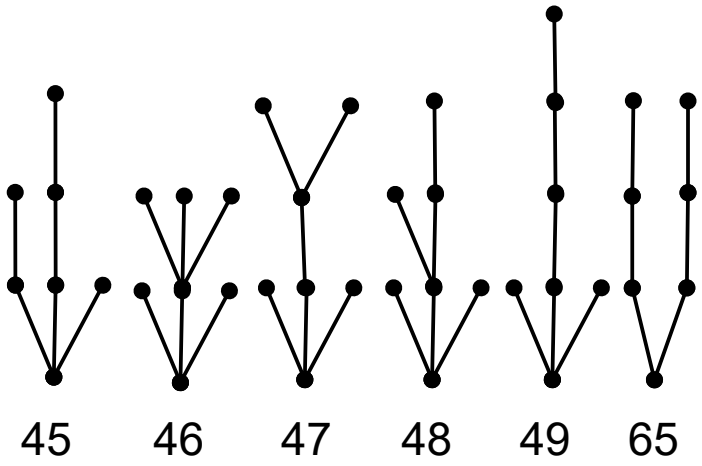

图 7：含 7 个顶点的平面树（第 2 部分）

因此，有 14 棵含 7 个顶点的平面树。

2.3 有8个顶点的平面树

我们将按照上一节中的相同方法对这些树进行匹配和列举。图 8、9、10 展示了所有可能的含 8 个顶点的非同构平面树。

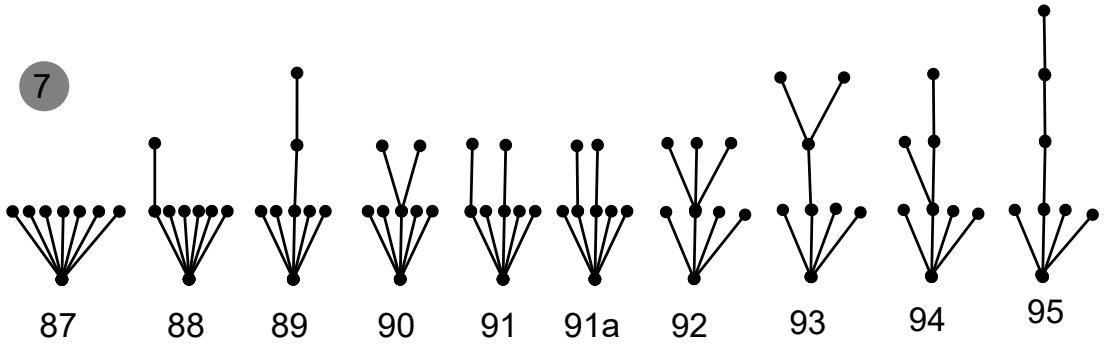

图8：有6个顶点的平面树（第1部分）

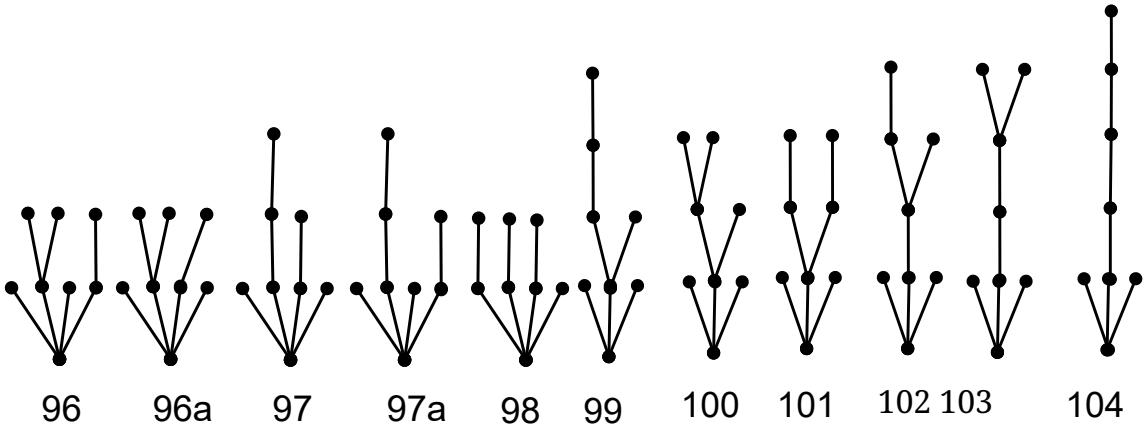

图9：有6个顶点的平面树（第2部分）

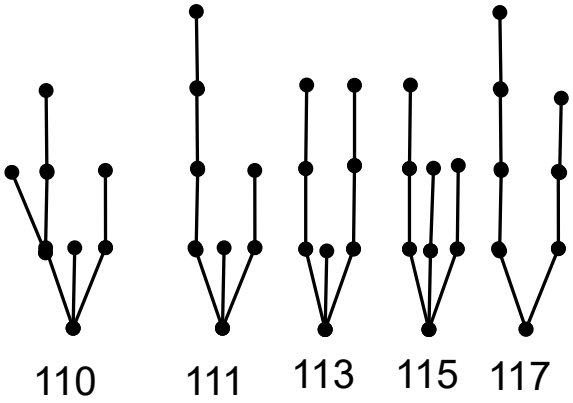

图10：有6个顶点的平面树（第3部分）

因此，有26棵有8个顶点的平面树。

3 2-球面上的莫尔斯流

考虑球面上具有一个汇的莫尔斯流。这类流是具有一个局部极大值的莫尔斯函数的梯度流。我们构造一个图 G，其顶点为源点，边为鞍点的稳定流形。

定理 1 以这种方式构造的图 G 是该莫尔斯流的完全拓扑不变量。此外，该图是一棵平面树。

证明。 图是完全拓扑不变量这一事实由 [19, 24, 25, 35] 得出。反过来，假设该图包含一个圈。那么这个圈会将球面分成两个区域。每个区域至少有一个汇点。因此，汇的总数至少为两个，这与定理的条件矛盾。由此得出的矛盾完成了证明。

注意，由于球面的欧拉示性数等于 2，根据庞加莱–霍普夫定理，具有一个汇的莫尔斯流的源点数比鞍点数多一个。

推论。 在 2- 上，具有一个汇的拓扑不等价莫尔斯流的数量如下：

具有一个鞍点的流有 1 个，具有两个鞍点的流有 1 个，具有三个鞍点的流有 2 个，具有四个鞍点的流有 3 个，具有五个鞍点的流有 6 个，具有六个鞍点的流有 14 个，具有七个鞍点的流有 26 个。

结论

本文构造了一个顶点数不超过 8 的平面图完整列表。构造时，我们使用了有根树，并将其作为平面图检验同构性。

参考文献

[1] O. Akchurin、S. Bilun 和 A. Prishlyak。三色图作为 2-球面三角剖分的 1-骨架。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.05737*，2022年。doi:10.48550/ARXIV.2209.05737。[2] S. Bilun 和 A. Prishlyak。闭曲面上的闭莫尔斯 1-形式。*Visn., Mat. Mekh., Kyv. Univ.Im. Tarasa Shevchenka*，2002(8):77–81，2002年。[3] S. Bilun 和 A. Prishlyak。3-球面图中具有两个鞍点的莫尔斯流的可视化。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.12174*，2022年。doi:10.48550/ARXIV.2209.12174。[4] S. Bilun、A. Prishlyak 和 A. Prus。3-流形边界上具有不动点的莫尔斯流。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.04019*，2022年。doi:10.48550/arXiv.2209.04019。[5] S. Bilun、M. Hrechko、O. Myshnova、A. Prishlyak。具有一个或两个临界胞腔的曲面上最优离散梯度向量场的结构。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.07258*，2023年。doi:10.48550/arXiv. 2303.07258。[6] S. Bilun、A. Prishlyak、S. Stas、A. Vlasenko。射影平面上莫尔斯函数的拓扑结构。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.03850*，2023年。doi:10.48550/arXiv.2303.03850。[7] S. Bilun、B. Hladysh、A. Prishlyak、V. Sinitsyn。2-球面上具有至多十个奇异点的余维一梯度向量场。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.10929*，2023年。doi:10.48550/arXiv.2303. 10929。

[8] S. Bilun、M. Loseva、O. Myshnova、A. Prishlyak。带孔2-球面上具有至多六个奇异点的梯度流的典型的一参数分岔。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.14975*，2023年。doi:10.48550/arXiv.2303.14975。[9] S. Bilun、B. Hladysh、A. Prishlyak、M. Roman。浸入二维球面上的具有四个临界点的莫尔斯函数。*arXiv* 预印本 *arXiv:2304.04392*，2023年。doi:10.48550/arXiv.2304.04392。[10] A.V. Bolsinov 和 A.T. Fomenko。可积*Hamilton*系统。几何、拓扑与分类。CRC出版社公司，博卡拉顿、伦敦、纽约、华盛顿特区，2004年。724页。[11] M. Borodzik、A. N´emethi 和 A. Ranicki。带边界流形的Morse理论。代数几何拓扑，16(2):971–1023，2016年。doi:10.2140/agt.2016.16.971。[12]M. Goresky 和 R. MacPherson。分层*Morse*理论。施普林格出版社，1988年。doi:10.1007/ 978-3-642-71714-7。[13]C. Hatamian 和 A. Prishlyak。亏格1和亏格2的不可定向3-流形上的Heegaard图与最优莫尔斯流。国际几何中心学报，13(3):33–48，2020年。doi:10.15673/tmgc.v13i3.1779。[14] B. I. Hladysh 和 A. O. Pryshlyak。曲面边界上具有非退化临界点的函数。乌克兰数学杂志，68(1):29–41，2016年。doi:10.1007/s11253-016-1206-5。[15] B. I. Hladysh 和 A. O. Pryshlyak。带边界定向曲面上的最优函数的一般位置变形。乌克兰数学杂志，71(8):1173–1185，2020年。doi: 10.1007/s11253-019-01706-8。[16] B.I. Hladysh 和 A.O. Prishlyak。二维流形边界上具有孤立临界点的函数的拓扑。*SIGMA*. 对称性、可积性与几何：方法与应用，13:050，2017年。doi:0.3842/SIGMA.2017.050。[17] B.I. Hladysh 和 A.O. Prishlyak。带边界定向曲面上的简单Morse函数。数学物理、分析与几何杂志，15(3):354–368，2019年。doi:10.15407/mag15.03.354。[18] A.S. Kronrod。二元函数。俄罗斯数学调查，5:24–134，1950年。[19] Z. Kybalko、A. Prishlyak 和 R. Shchurko。闭曲面上最优Morse流的轨道等价。*Proc. Int. Geom. Cent.*，11(1):12–26，2018年。doi:10.15673/tmgc.v11i1.916。[20] M. Loseva、A. Prishlyak。女孩曲面上最优流的拓扑结构。国际几何中心学报，15(3-4):184–202，2022年。doi:10.15673/tmgc.v15i3-4.2338。[21] M. Losieva 和 A. Prishlyak。二维圆盘边界上具有奇点的Morse–Smale流的拓扑。*Pr. Mizhnar. Heometr. Tsentr*，9(2):32–41，2016年。doi:10.15673/tmgc.v9i2.279。[22] D.P. Lychak 和 A.O. Prishlyak。不可定向曲面上的莫尔斯函数与流。泛函分析与拓扑方法，15(03):251–258，2009年。[23] A.A. Oshemkov 和 V.V. Sharko。二维流形上Morse-Smale流的分类。*Matem. Sbornik*，189(8):93–140，1998年。[24] M.M. Peixoto。关于2-流形上的流的分类。动力系统（巴伊亚萨尔瓦多巴西大学专题讨论会论文集，*1971*年），第389–419页，1973年。[25] A.O. Prishlyak。关于嵌入曲面的图。俄罗斯数学调查，52(4):844，1997年。doi:10.1070/RM1997v052n04ABEH002074。[26] A.O. Prishlyak。四维流形上莫尔斯函数的共轭。俄罗斯数学调查，56(1):170，2001年。

[27] A.O. Prishlyak. 无闭轨道流形上的 Morse–Smale向量场。《数学札记》，71(1-2):230–235，2002年。doi:10.1023/A:1013963315626。[28] A.O. Prishlyak. 分层集合上具有孤立不动点的流的指标和。《数学物理、分析与几何杂志》 /数学物理、分析与几何杂志/,10(1):106–115，2003年。[29] A.O. Prishlyak. 莫尔斯–斯梅尔流的完全拓扑不变量与3-流形的把手分解。《数学科学杂志》，144:4492–4499，2007年。[30] A.O. Prishlyak. 二维与三维流形上函数的拓扑性质。Palmarium Academic Pablishing，2012年。[31] A. Prishlyak and L. Di Beo. 博伊曲面上奇点数最少的流。《国际几何中心学报》，15(1):32–49，2020年。[32] A. Prishlyak and M. Loseva. 女孩曲面上最优流的拓扑结构。《国际几何中心学报》，15(3-4):184–202，2022。[33] A. Prishlyak, A. Prus, and S. Huraka. 球面上的集体动力学流。《国际几何中心学报》，14(1):61–80，2021年。doi:10.15673/tmgc.v14i1.1902。[34] A. Prishlyak and M. Loseva. 闭可定向曲面上具有集体动力学的最优流的拓扑。《国际几何中心学报》，13(2):50–67，2020年。doi:10.15673/tmgc. v13i2.1731。[35] A. Prishlyak and A. Prus. 带孔环面上的Morse-Smale流。《国际几何中心学报》，10(1):47–58，2017年。doi:10.15673/tmgc.v1i10.549。[36] A.O. Prishlyak. 3-流形上Morse函数的等价性。《泛函分析与拓扑方法》，5(3):49–53，1999年。[37] A.O. Prishlyak. 取值于直线和圆的曲面上Morse函数的共轭。《乌克兰数学杂志》，52(10):1623–1627，2000年。doi:10.1023/A:1010461319703。[38] A.O. Prishlyak. 平面上具有有限个奇点的Morse函数。《泛函分析与拓扑方法》，8:75–78，2002。[39] A.O. Prishlyak. 三维流形上具有beh2的Morse–Smale向量场的拓扑等价性。《乌克兰数学杂志》，54(4):603–612，2002。[40]A.O. Prishlyak. 带边界的二维和三维流形上m-场的拓扑分类。《乌克兰数学杂志》，55(6):966–973，2003年。[41] A.O. Prishlyak and M.V. Loseva. 曲面边界上具有奇点的最优Morse–Smale流。《数学科学杂志》，243:279–286，2019年。[42] A.O. Prishlyak and K.I. Mischenko. 带边界非紧曲面的分类。《泛函分析与拓扑方法》，13(01):62–66，2007年。[43] A.O. Prishlyak and A.A. Prus. 带边界紧曲面上莫尔斯流的三色图。《数学科学杂志》，249(4):661–672，2020年。doi:10.1007/s10958-020-04964-1。[44] A. Prishlyak and S. Stas. 二维圆盘上具有唯一奇点的流的结构。arXiv预印本 arXiv:2304.00751，2023年。doi:10.48550/ARXIV.2304.00751。[45] G. Reeb. 关于完全可积的 Pfaff 形式或数值函数的奇点。巴黎科学院院报，222:847—849，1946年。[46] V.V. Sharko. 流形上的函数：代数与拓扑方面。《美国数学会数学专著译丛》第131卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1993年。

[47] S. Smale. 关于梯度动力系统。《数学年刊》，74:199–206，1961年。[48] В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, and О.О. Пришляк. 光滑流形。几何与拓扑方面。乌克兰国家科学院数学研究所学报.—*2013.—97.—500*页，2013年。[49]А.О. Пришляк. 三维流形上具有有限个奇异轨道的Morse–Smale向量场。《乌克兰国家科学院报告》，(6):43–47，1998年。[50]А.О. Пришляк. Morse函数的共轭性。现代数学若干问题。乌克兰科学院数学研究所，基辅，1998年。[51] А.О. Пришляк. 三维流形上函数与Morse—Smale向量场的拓扑等价性。拓扑学与几何学。《乌克兰数学大会论文集》，第29–38页，2001年。[52] О.О. Пришляк. Morse理论。基辅大学，2002。[53] О.О. Пришляк. 微分几何。基辅大学，2004年。[54] О.О. Пришляк. 现代拓扑学基础。基辅大学，2006年。[55] О.О. Пришляк. 流形拓扑学。基辅大学，2015年。[56] Maurice Fraysseix, Pavol Pach, Richard Pollack 平面嵌入 《组合理论杂志》*B*辑，45(3):105-126，1990年。[57] Hsueh-I Lu Chen 平面图的直线绘图 《*SIAM*计算杂志》，20(6):1048-1066，1991年。[58] Gary L. Miller, Joseph Naor 平面分隔集与并行多边形三角剖分 《*SIAM*计算杂志》，20(3):449-456，1991年。[59] Christoph Buchheim, Michael J¨unger, Sebastian Leipert 以线性面积绘制优美树形 《理论计算机科学》，281(1-2):21-48，2002年。[60] Sergey G. Kobourov 图绘制：方法与模型 *CRC*出版社，美国佛罗里达州博卡拉顿，2013年。498页。[61] Giuseppe Di Battista, Peter Eades, Roberto Tamassia, Ioannis G. Tollis 图绘制：图可视化算法 *Prentice Hall*出版社，美国新泽西州上萨德尔河，1999年。384页。[62] Roberto Tamassia 《图绘制与可视化手册》 *CRC*出版社，美国佛罗里达州博卡拉顿，2013年。862页。[63] Arikushi, Y., Speckmann, B.（编）（2017）。图绘制：第24届国际研讨会，GD 2016，希腊雅典，2016年9月19日至21日，修订精选论文。施普林格出版社。瑞士查姆。[64] Pach, J., Agarwal, P.K.（2001）。平面图：理论与算法。剑桥大学出版社。英国剑桥。[65] Tamassia, R., Di Battista, G.（1987）。以最少弯曲数将图嵌入网格。《SIAM计算杂志》，16(3)，421-444。