arXiv:2305.01349v1 [math.CO] 2 May 2023

论 Bruen 链

约翰·BAMBERG[1], 杰西·LANSDOWN[1,2],和 Geertrui van de Voorde [2]

摘要。已知对于每个不超过 37 的奇素数幂 q （ $q = 29$ 除外），三维射影空间 PG(3, q) 中都存在 Bruen 链。Cardinali 等人（2005年）证明， $41 \leqslant q \leqslant 49$ 中不存在 Bruen 链。我们基于有限域构建了一个模型，使我们得以将这一结果推广至 $41 \leqslant q \leqslant 97$，从而为「 $q > 37$ 中不存在 Bruen 链」这一猜想增添了更多证据。此外，我们证明，Bruen 链恰好可以实现为两个相关但彼此不同的无向简单图中的 $(q+1)/2$-团。

1. 引言

在阶为 q^2、核的阶为q的平移平面与三维射影空间 PG(3, q) 的铺展之间，存在一种函子对应；按照这种对应，同构的平移平面对应于 PG(3, q) 中射影等价的铺展。PG(3, q) 的铺展是由构成点集划分的一组直线，而有限笛沙格射影平面 PG(2, q) 对应于 PG(3, q) 的正则铺展。在正则铺展中取一个直纹曲面，并用其对偶直纹曲面替换它，可得到霍尔平面；几何学家一直在研究直线替换，将其作为构造新射影平面的方法。Bruen [2] 引入了 PG(3, q) 的正则铺展中一串直纹曲面的概念， q 奇数；这是一组由 $(q+3)/2$ 个直纹曲面组成的集合，其中任意两个直纹曲面都相交于 2 条直线，并且 PG(3, q) 中的每条直线都属于这串直纹曲面中的 0 个或 2 个。Bruen 链本质上是部分铺展替换构造所需的最小直纹曲面集合，用于构造一个在其核上秩为 2 的非笛沙格平移平面，且该集合至少包含两个相交的直纹曲面。

对于每个奇素数幂 q，若其介于 5 和 37 之间且不等于 29，则存在 Bruen 链；总共有 17 条（在半相似意义下，见表1）。Cardinali 等人 [3]证明了对于 $41 \leqslant q \leqslant 49$，不存在例子。我们通过证明以下结论推广了他们的结果：

定理 1.1。对于 $41 \leqslant q \leqslant 97$，不存在 *Bruen* 链。

上述结果依赖于计算，我们在附录中提供了用于设置该计算的代码。我们的一个关键观察是，Bruen 链等价于某个无向简单图 Γ_X 中的一个 $(q+1)/2$-团，具体描述如下。给定 PG(3, q) 的一个椭圆二次曲面 E，在等距变换下，E 的外点分为两类，因此不失一般性，选择 $\mathbb{E}$ 为其中一类。令 $X \in \mathbb{E}$，并令 $\mathbb{V}$ 为 $\mathbb{E}$ 中不等于 X 且与 X 位于同一条外直线上的元素所成的集合。集合 $\mathbb{V}$ 是 Γ_X 的顶点；若直线 AB 不包含 X，且锥 cone(X)、cone(A)、cone(B) 的交集仅

[1]数学与统计学系，西澳大利亚大学，克劳利，西澳大利亚州6009，澳大利亚。[2]数学与统计学学院，坎特伯雷大学，基督城，新西兰电子邮箱： john.bamberg@uwa.edu.au、{jesse.lansdown,geertrui.vandevoorde}@canterbury.ac.nz。

于 E 的点，则将顶点 和 相连。这里，cone(A) 是 A 与满足直线AY为 E 的切线的点集 $Y \neq A$ 的并集。此外，我们通过去掉直线 AB 不包含 X这一条件，定义相关图 Δ_X。因此， Γ_X 是 Δ_X 的一个生成子图。

在本文中，我们证明如下结果：

定理 1.2. 大小为 $(q+1)/2$的 Γ_X 的团，以及大小为 $(q+1)/2$的 Δ_X 的团，与 *Bruen* 链一一对应。

我们将在定理 3.8 中进一步介绍规模较小的团。

定理 1.2 表明，寻找 Γ_X 或 Δ_X 的团数即可解决 Bruen 链是否存在的问题。本文基于有限域，为这两种图构建了一种高效模型。利用该模型，我们计算得到的数据表明，只有该族中的小图才达到团数的理论上界；而当图的阶超过某个阈值后，团数相对较低。

2. Bruen 链作为 PG(3, q) 中的点集

2.1. **利用对合**。设 q 为奇素数幂， $q \geqslant 5$，则考虑 PG(3, q) 中的椭圆二次曲面 E，可以得到 Bruen 链的另一种模型。回想一下，每个平面与 E 的交集要么是一个点，要么是某条（非退化）圆锥曲线的 $q+1$ 个点组成的集合；后一种集合称为 E 的圆锥曲线 。于是，*Bruen* 链 是 E 的 $(q+3)/2$ 条圆锥曲线组成的集合 C，满足

(i) C 中任意两个元素恰有两个交点，且
(ii) C 中任意三个元素的交集为空。

利用由 E 诱导的对合（记作 $\perp$），我们可以转而考虑 Bruen 链的“极”版本，本文将采用这一版本。

引理 2.1。 设$\mathcal{C}$ 是椭圆二次曲面$\mathcal{E}$的 *Bruen* 链。对$\mathcal{C}$中每个元素的张成平面应用由$\mathcal{E}$ 诱导的对合，得到$(q+3)/2$ 个外点$\mathcal{C}^\perp$。则$\mathcal{B} = \mathcal{C}^\perp$ 满足以下性质；反过来，任何满足这些性质的外点集都是某个 *Bruen* 链的极像。

(i) $\mathcal{B}$ 中的任意两个元素张成一条外直线；
(ii) $\mathcal{B}$ 中的任意三个元素张成一个割平面。

特别地，$\mathcal{B}$ 中的点集构成一个弧（即任意三点都不共线的点集）。

证明。 假设 E 中的两条圆锥曲线 C 和 C' 交于两点 A 和 B。那么，割平面 hCi 和 hC'i 的极像是外点 X 和 X'。直线 AB 是一条割线，因此它的极像 XX' 是一条外直线。因此，Bruen 链第一条性质的等价条件是，B 中的两个外点 X 和 X' 张成一条外直线。

如果 E 的一个切平面 $X^\perp$ 包含外点 hCi$^\perp$、hC'i$^\perp$、hC''i$^\perp$，那么点$X \in$ E 包含于 hCi ∩hC'i ∩hC''i 中，反之亦然。因此，条件 (ii)，即 Bruen 链 C 中任意三条圆锥曲线交集为空，转化为 E 的任一切平面都不包含 B 中三个点这一条件。最后，注意到切平面不包含 B 中三个点这一条件等价于引理中的条件 (ii)：如果 B 中三个元素共线，那么它们包含在 E 的两个切平面中。因此，如果这三个点不包含在同一个切平面中，它们张成的平面就是割平面。□

引理 2.1 表明，任何切平面中包含的 Bruen 链上的点（视为相对于$\mathcal{E}$的外点）不超过两个。以下引理进一步强化了这一结果。

引理 2.2。 $\mathcal{E}$ 的每个切平面与 *Bruen* 链（视为相对于$\mathcal{E}$的外点）相交于 *0* 个或 *2* 个元素。

证明。设 B 为一条 Bruen 链。首先，根据引理 2.1(ii)，每个切平面与 B 至多相交于 2 个点。设 $X \in$ B，并考虑与 X关联的切平面集合。这样的切平面有 $q+1$ 个；对于每个 $Y \in$ B\{X}，恰有两个切平面与 XY关联（因为 XY 是一条外直线）。由于 $|$B\{X}$| = (q+1)/2$，通过直接双重计数可知，每个经过 X 的切平面与 B\{X} 恰好相交于一个元素。结论由此得证。□

外点有两个等距类（分别取决于二次型的值是平方还是非平方元），Heden [5] 证明了，一条 Bruen 链完全包含在同一个外点等距类中。我们将在本节末尾给出这一事实的简短证明（见推论 2.11）。此外，在半相似变换全群作用下，两个等距类可以互换，因此存在一个群元素，将一个等距类中的外点上的 Bruen 链映射到另一个等距类中。由此，某一个外点等距类中存在 Bruen 链，当且仅当两个等距类中都存在 Bruen 链。

2.2. 有限域模型。我们将给出椭圆二次曲面的一个模型，它以类似于 [5] 的第 4 节的方式，为 Bruen 链提供另一种代数刻画。考虑有限域 $\mathbb{F}_{q^4}$，将其视为子域 $\mathbb{F}_q$ 上的向量空间。令 tr 表示从 $\mathbb{F}_{q^4}$ 到 $\mathbb{F}_q$ 的相对迹映射，即 $\mathbb{F}_q$-线性映射 $\mathrm{tr}(x) = x + x^q + x^{q^2} + x^{q^3}$。映射 $Q(x) = \mathrm{tr}(x^2)$ 是 $\mathbb{F}_{q^4}$ 上的一个椭圆型二次型[1]。椭圆二次曲面由 $\mathbb{F}_{q^4}^*$ 中满足 $Q(x) = 0$ 的元素确定，其中元素按 $\mathbb{F}_q$ 中的标量视为等价。我们将由元素 $x \in \mathbb{F}_{q^4}^*$ 在 PG(3, q) 中定义的点记为 hxi。稍作滥用记号，由 hδi、hϵi 张成的直线（分别由 hδi、hϵi、hγi 张成的平面）记为 hδ, ϵi（分别记为 hδ, ϵ, γi）。对于 Q，等距变换 g 是 $\mathbb{F}_{q^4}$ 上的可逆 $\mathbb{F}_q$-线性映射，并且对所有 $x \in \mathbb{F}_{q^4}$ 都满足 $Q(x^g) = Q(x)$。Q 的等距变换群在 PG(3, q) 的点 hxi 上有三个轨道：奇异点、“偶”外点和“奇”外点。因此，这些轨道可由 $Q(x)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 中分别为零、非零平方元或非平方元来刻画。注意，这一概念定义良好：由于 hxi = hyi 当且仅当存在某个 $\lambda \in \mathbb{F}_q$ 使得 $y = \lambda x$，因此 $Q(x)$ 是（非）平方元，当且仅当 $Q(y)$ 是（非）平方元。我们称同一轨道中的点具有相同的等距类型。

引理 2.3. 在$\mathrm{PG}(3, q)$ 中的两个外点$\langle\alpha\rangle$ 和$\langle\beta\rangle$ 张成一条外直线，当且仅当$\mathrm{tr}(\alpha\beta)^2 - \mathrm{tr}(\alpha^2)\mathrm{tr}(\beta^2)$ 是非平方元。它们张成一条切线，当且仅当$\mathrm{tr}(\alpha\beta)^2 - \mathrm{tr}(\alpha^2)\mathrm{tr}(\beta^2) = 0$。

证明。 在由 hαi 和 hβi 张成的直线上，且不同于 hβi 的点可写成 h$\alpha + \lambda\beta$i 的形式，其中 $\lambda \in \mathbb{F}_q$。当且仅当 tr $((\alpha + \lambda\beta)^2) = 0$ 时，该点位于二次曲面上。等价地，$\mathrm{tr}(\alpha^2) + 2\lambda\mathrm{tr}(\alpha\beta) + \lambda^2\mathrm{tr}(\beta^2) = 0$，这是关于 λ 的二次方程。由于 q 为奇数，若判别式 $\mathrm{tr}(\alpha\beta)^2 - \mathrm{tr}(\alpha^2)\mathrm{tr}(\beta^2)$ 是非平方元，则该方程没有解；若判别式为零，则恰有一个解。结论得证。□

推论 2.4. 位于切线 ℓ 上的两个外点 $\langle\alpha\rangle$ 和 $\langle\beta\rangle$，具有相同的等距类型。

[1]判断该形式属于椭圆型的一种方法，是注意到 Q 是从 $\mathbb{F}_{q^4}$ 到 $\mathbb{F}_{q^4}$ 的二次型$x \mapsto x^2$的“域约化”。后一个形式没有非零奇异向量，因此是椭圆型。

证明。 </style}点 hαi 和 hβi 张成一条切线，当且仅当 tr($\alpha\beta$)^2 =tr(α^2)tr(β^2)。因此，tr(α^2) 和 tr(β^2) 要么都是平方数，要么都是非平方数。□

引理 2.5. 设 γ, δ, ϵ 是 $\mathbb{F}_{q^4}$ 的元素，使得 γ, δ, ϵ 线性无关，并且$\mathrm{tr}(\gamma^2)\mathrm{tr}(\delta^2)\mathrm{tr}(\epsilon^2) \neq 0$. 那么 $\langle\gamma\rangle$、$\langle\delta\rangle$、$\langle\epsilon\rangle$ 确定 E 的一个切平面，当且仅当

$$\mathrm{tr}(\gamma^2)\mathrm{tr}(\delta^2)\mathrm{tr}(\epsilon^2) - \mathrm{tr}(\gamma^2)\mathrm{tr}(\delta\epsilon)^2 - \mathrm{tr}(\delta^2)\mathrm{tr}(\epsilon\gamma)^2 - \mathrm{tr}(\epsilon^2)\mathrm{tr}(\gamma\delta)^2 + 2\mathrm{tr}(\gamma\delta)\mathrm{tr}(\delta\epsilon)\mathrm{tr}(\epsilon\gamma) = 0.$$

证明。 假设 hγi, hδi, hϵi 确定了 E 的一个切平面 π。不失一般性（必要时重新标记 δ, ϵ, γ），可假设切点 $\pi \cap$ E 不在直线 hδ, ϵi 上，因此它具有 h$\gamma + \lambda_1\delta + \lambda_2\epsilon$i 的形式，其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}_q$。该点属于 E，当且仅当 tr $((\gamma + \lambda_1\delta + \lambda_2\epsilon)^2) = 0$。等价地，

$$\mathrm{tr}(\gamma^2) + 2\mathrm{tr}(\delta\gamma)\lambda_1 + \mathrm{tr}(\delta^2)\lambda_1^2 + 2\mathrm{tr}(\epsilon\gamma)\lambda_2 + 2\mathrm{tr}(\delta\epsilon)\lambda_1\lambda_2 + \mathrm{tr}(\epsilon^2)\lambda_2^2 = 0$$

这是关于 λ_1 的二次方程，因为 tr(δ^2) $\neq 0$。判别式为

$$D := 4\left(-\mathrm{tr}(\delta^2)\left(\lambda_2^2\mathrm{tr}(\epsilon^2) + 2\lambda_2\mathrm{tr}(\epsilon\gamma) + \mathrm{tr}(\gamma^2)\right) + 2\lambda_2\mathrm{tr}(\delta\epsilon)\mathrm{tr}(\delta\gamma) + \lambda_2^2\mathrm{tr}(\delta\epsilon)^2 + \mathrm{tr}(\delta\gamma)^2\right).$$

为了使 λ_1 有唯一解，我们要求 D 为 0。由此得到关于 λ_2 的二次方程，因为 tr(ϵ^2) $\neq 0$，其判别式为

64迹(δ^2) $\left(-$迹(δ^2)迹(ϵ^2)tr$(\gamma^2) + \mathrm{tr}(\epsilon^2)\mathrm{tr}(\delta\gamma)^2 + \mathrm{tr}(\gamma^2)\mathrm{tr}(\delta\epsilon)^2 + \mathrm{tr}(\delta^2)\mathrm{tr}(\epsilon\gamma)^2 - 2\mathrm{tr}(\delta\epsilon)\mathrm{tr}(\delta\gamma)\mathrm{tr}(\epsilon\gamma)\right)$.

此判别式也必须为零；由于 tr(δ^2) $\neq 0$，这等价于定理中的结论。反过来，我们看到，如果定理中的条件成立，则 E 中恰有一个点 $\cap\pi$ 不在由 δ 和 ϵ 张成的直线上。由于 π 与 E 的交集要么是一个圆锥曲线，要么是一个点，并且 $q > 2$，因此 $|\pi \cap \mathrm{E}| = 1$。□

记与 E 相关的对合为 $\perp$，可知 cone(A) 是以 A 为顶点、以圆锥曲线 $A^\perp \cap$ E 为底的锥。我们也将 cone(A) 称为由 定义的 A。令 $\mathbb{E}$ 为偶点集，并回忆等距群在 $\mathbb{E}$的点上具有传递性。由于 tr(1^2) $= 4$ 是一个平方元，$1 \in \mathbb{E}$，在下文中，我们将取 $X =$h1i。

引理 2.6。 设 $X = \langle 1\rangle$，并设 δ、ϵ 是 $\mathbb{F}_{q^4}$ 中的元素，使得 1、δ、ϵ 线性无关，且$\mathrm{tr}(\delta)\mathrm{tr}(\epsilon) \neq 0$。令

$$f(x, y) = \mathrm{tr}(y)x - \mathrm{tr}(x)y.$$

令 Ω 为不包含于$\mathcal{E}$且包含于由 X 定义的锥与平面 $\langle\delta\rangle^\perp : \mathrm{tr}(\delta x) = 0$ 和 $\langle\epsilon\rangle^\perp : \mathrm{tr}(\epsilon x) = 0$的交集中的点集。则当 $-\mathrm{tr}(f(\delta, \epsilon)^2)$为零或非平方元时，$|\Omega| \geqslant 1$。更具体地说：

(i) 若 *h1, δ, ϵi* 不是 *E* 的切平面，则当 *$-$tr(f(δ, ϵ)^2)* 为非平方元时，$|\Omega| = 2$；当 *tr(f(δ, ϵ)^2)* $= 0$ 时，$|\Omega| = 1$；当 *$-$tr(f(δ, ϵ)^2)* 为非零平方时，$|\Omega| = 0$。*(ii)* 若 *h1, δ, ϵi* 是 *E* 的切平面，则 $|\Omega| = 1$。

证明。 由于 δ 和 ϵ 是 $\mathbb{F}_q$-无关的，满足 x tr(δx) $= 0 = \mathrm{tr}(\epsilon x)$ 的点确定了 PG(3, q) 中的一条直线。由 X 定义的锥与由 tr(δx) $= 0$ 和 tr(ϵx) $= 0$ 确定的两个平面的交点，恰好是 ℓ 中包含于 X的锥内的点。由引理 2.3 可知，由 X 定义的锥的方程为

$$\mathrm{tr}(x)^2 - 4\mathrm{tr}(x^2) = 0.$$

由于 $\mathrm{tr}(\delta)\mathrm{tr}(\epsilon) \neq 0$, ℓ 不包含 X。此外， ℓ 不在 $X^\perp$ 中：假设 $\ell \subseteq X^\perp$，则 X 位于 $\ell^\perp$ 中，即由 $\langle\delta\rangle$ 和 $\langle\epsilon\rangle$ 张成的直线上。但这将意味着 $1, \delta, \epsilon$ 是 $\mathbb{F}_q$-相关的。令 m 为直线 ℓ 从 X 到平面 $X^\perp$ 上的投影，并令 C 为圆锥曲线 $X^\perp \cap \mathsf{E}$；我们刚刚证明了 m 是一条不同于 ℓ 的直线。

首先注意，平面 $\langle 1, \delta, \epsilon\rangle$ 是 E 的切平面，当且仅当点 $\ell \cap X^\perp \in \mathsf{C}$：设 $Y \in \ell \cap X^\perp \cap \mathsf{C}$。由于 ℓ 包含 Y、 $Y^\perp$ 包含 $\ell^\perp$，且 $Y \in X^\perp$, $X \in Y^\perp$。由于 $1, \delta, \epsilon$ 线性无关，我们可得 $Y^\perp$，即 E 上点 Y 处的切平面，由 $\langle 1\rangle, \langle\delta\rangle, \langle\epsilon\rangle$ 张成。反之，若平面 $\langle 1, \delta, \epsilon\rangle$ 是与 E 交于点 P 的切平面，则 $P^\perp = \langle X, \ell^\perp\rangle$，这意味着 $P \in X^\perp$ 和 $P \in \ell$，因此确有 $P = \ell \cap X^\perp \in \mathsf{C}$。

我们区分 $\langle 1, \delta, \epsilon\rangle$ 是割平面还是切平面的情形。首先假设 $\langle 1, \delta, \epsilon\rangle$ 是割平面，因此等价地，假设 ℓ 与 $X^\perp$ 不在 C 上的某个点相交。

现在我们区分 m（即直线 $\langle X, \ell\rangle \cap X^\perp$）位于 C 外部、与 C 相切或与 C 相割的情形。显然，直线 ℓ 与由 X 确定的锥的交点数分别为 0、1 或 2。我们先证明，如果直线 m 与 C 相切，那么 $\mathrm{tr}(f(\delta, \epsilon)^2) = 0$。因此，设 m 是 C 在点 $P_0 = \langle x_0\rangle$ 处的切线。由于 P_0 包含于 $X^\perp$，且 $X \in P_0^\perp$ 和 $P_0^\perp$ 是由 X 与 m 张成的平面。因此 $\ell \in P_0^\perp$，这意味着 P_0 在 $\ell^\perp$ 中。由于 $\ell^\perp$ 由 $\langle\delta\rangle$ 和 $\langle\epsilon\rangle$ 张成，因此存在某个 $\nu \in \mathbb{F}_q$，使得 $x_0 = \delta + \nu\epsilon$。我们有 $\mathrm{tr}(x_0) = \mathrm{tr}(\delta) + \nu\mathrm{tr}(\epsilon) = 0$，所以 $\nu = -\frac{\mathrm{tr}(\delta)}{\mathrm{tr}(\epsilon)}$。由此可得 $x_0 = \delta - \mathrm{tr}(\delta)\,\mathrm{tr}(\epsilon)\,\epsilon$。现在 $f(\delta, \epsilon) = \mathrm{tr}(\epsilon)\delta - \mathrm{tr}(\delta)\epsilon = \mathrm{tr}(\epsilon)x_0$。 ——

由于 $P_0 \in \mathsf{E}$，我们有 $\mathrm{tr}(x_0^2) = 0$，因此，由于 $\mathrm{tr}(\epsilon) \neq 0$， $-\mathrm{tr}(f(\delta, \epsilon)^2) = -\mathrm{tr}(\epsilon)^2\mathrm{tr}(x_0^2) = 0$。当 m 是 E 的一条割线时，包含于 $X^\perp$ 中的直线 m 是 C 的割线。当且仅当 $m^\perp$ 是 E 的一条外直线时，这种情况才会发生。直线 m 是平面 $X^\perp$ 与由 X 和 ℓ 张成的平面的交线，这意味着直线 $m^\perp$ 恰好是由 X 和点（记作 K）张成的空间，而该点是 $X^\perp$ 与 $\ell^\perp$的交点。由于 ℓ 由 $\mathrm{tr}(\delta x) = 0$ 和 $\mathrm{tr}(\epsilon x) = 0$给出，直线$\ell^\perp$ 由 δ和 ϵ张成。这意味着 K 是一个点 $\langle\kappa\rangle$，其中 $\kappa = \lambda\delta + \mu\epsilon$ 满足 $\mathrm{tr}(\kappa) = 0$。由此可知，我们可以取 $\kappa = \mathrm{tr}(\epsilon)\delta - \mathrm{tr}(\delta)\epsilon$。注意，由于 δ、 ϵ 是 $\mathbb{F}_q$-线性无关的，且X 不在 ℓ上，因此 $\kappa \neq 0$， $\mathrm{tr}(\delta)$和 $\mathrm{tr}(\epsilon)$不可能同时为零。

由此可知， $m^\perp$（ X 与 κ的张成空间）上的点可表示为 $\mu + \kappa$， 其中 $\mu \in \mathbb{F}_q$取某个值；并且， $m^\perp$ 是 E 的外直线，当且仅当方程 $= 0\ ^2(\mu + \kappa)$ 无解（对于 μ）。利用 $\mathrm{tr}(\kappa) = 0$，该方程等价于 $4\mu^2 + \mathrm{tr}(\kappa^2) = 0$；此方程无解当且仅当 $-\mathrm{tr}(\kappa^2)$ 是非平方元。由此得出，若 $-\mathrm{tr}(\kappa^2)$ 是非平方元，则直线 ℓ 与由 X 确定的锥有两个交点。用相同的推理并交换割线与外直线的角色可知，若 $-\mathrm{tr}(\kappa^2)$ 是非零平方，则由 X 确定的锥与直线 ℓ之间不存在符合条件的交点。

现在假设 $\langle 1, \delta, \epsilon\rangle$ 是切平面，因此等价地， ℓ与 $X^\perp$相交于 C 上一点，记为 Y。若 $\langle 1, \delta, \epsilon\rangle$ 是切平面，则 $\mathrm{tr}(\delta^2) \neq 0$：若 $\mathrm{tr}(\delta^2) = 0$，则 $\langle\delta\rangle \in \mathsf{E}$，且 $\langle 1, \delta, \epsilon\rangle$ 将是切平面 $\langle\delta\rangle^\perp$；这与 $\mathrm{tr}(\delta) \neq 0$ 矛盾，因为这意味着 $1 \notin \langle\delta\rangle^\perp$。因此，我们可以应用引理 2.5，得出 $\langle 1, \delta, \epsilon\rangle$ 是切平面的条件等价于

$$4\mathrm{tr}(\delta^2)\mathrm{tr}(\epsilon^2) - 4\mathrm{tr}(\delta\epsilon)^2 - \mathrm{tr}(\delta^2)\mathrm{tr}(\epsilon)^2 - \mathrm{tr}(\epsilon^2)\mathrm{tr}(\delta)^2 + 2\mathrm{tr}(\delta)\mathrm{tr}(\delta\epsilon)\mathrm{tr}(\epsilon) = 0.$$

现在我们可以将其简化为 $4(\text{迹}(\delta^2)\text{迹}(\epsilon^2) - \text{迹}(\delta\epsilon)^2) - \text{迹}(f(\delta, \epsilon)^2) = 0$ 等等

$$-\mathrm{tr}(f(\delta, \epsilon)^2) = 4(\mathrm{tr}(\delta\epsilon)^2 - \mathrm{tr}(\delta^2)\mathrm{tr}(\epsilon^2)).$$

由于平面 $\langle 1, \delta, \epsilon\rangle$ 是一个切平面，直线 $\ell^\perp$ 位于 $\mathcal{E}$之外，因此根据引理 2.3,$\mathrm{tr}(\delta\epsilon)^2 - \mathrm{tr}(\delta^2)\mathrm{tr}(\epsilon^2)$ 是一个非平方元。由此可得 $-\mathrm{tr}(f(\delta, \epsilon)^2)$ 是一个非平方元。特别地，它

表明 $-\mathrm{tr}(f(\delta,\epsilon)^2) \neq 0$。现在我们证明，这也意味着直线 m 是 C 的割线。回想一下， m 至少包含 C 上的一个点，即 $\ell \cap X^\perp$。因此反设m 是 C 在 $\ell \cap X^\perp$ 处的切线，那么 $Y^\perp$ 包含 ℓ，此时 $\ell \cap \ell^\perp = Y$，从而，$\ell^\perp \cap X^\perp$ 在 π中。与 (i) 部分一样，表达 Y位于 $\ell^\perp$ 上可得 $Y = \mathrm{h}f(\delta,\epsilon)\mathrm{i}$，且 $Y \in \mathrm{E}$ 当且仅当 $-\mathrm{tr}(f(\delta,\epsilon)^2) = 0$，矛盾。我们得出结论， m 是 C 的割线，因此，由于 $\ell \cap X^\perp = m \cap X^\perp = Y$， ℓ 恰好与由 X 定义的锥相交于一点，该点不包含在 $X^\perp$中。□

命题 2.7 （锥条件）。设 $X = \mathrm{h}1\mathrm{i}$， $A = \mathrm{h}\alpha\mathrm{i}$， $B = \mathrm{h}\beta\mathrm{i}$ 满足$\mathrm{tr}(\alpha^2) = a^2$ 且$\mathrm{tr}(\beta^2) = b^2$，并设

$$f(x,y) = \mathrm{tr}(y)x - \mathrm{tr}(x)y.$$

假设 XA和 XB是 E 的外直线。若 X、A、B不共线，且对于某个 $(x,y) \in \{(2\alpha+a, 2\beta+b), (2\alpha-a, 2\beta+b), (2\alpha+a, 2\beta-b), (2\alpha-a, 2\beta-b)\}$， $-tr(f(x,y)^2)$ 为零或非平方元，则由 X、A、B定义的锥有一个公共（外）点。

证明。由引理2.3 可知，由 X 确定的锥由满足$\langle x\rangle$ $\mathrm{tr}(x)^2 - 4\mathrm{tr}(x^2) = 0$的点组成；类似地，由 $A = \langle \alpha\rangle$ 确定的锥由满足$\langle x\rangle$ $\mathrm{tr}(\alpha x)^2 - \mathrm{tr}(\alpha^2)\mathrm{tr}(x^2) = 0$的点组成。现在考虑由这两个方程确定的方程组：

$$\mathrm{tr}(x)^2 - 4\mathrm{tr}(x^2) = 0 \tag{2.1}$$
$$\mathrm{tr}(\alpha x)^2 - \mathrm{tr}(\alpha^2)\mathrm{tr}(x^2) = 0 \tag{2.2}$$

代入迹$(x^2) = \frac{\text{迹}(x^2)}{4}$由（2.1）代入（2.2），并利用迹$(\alpha^2) = a^2$，可得该方程组等价于

$$\mathrm{tr}(x)^2 - 4\mathrm{tr}(x^2) = 0$$
$$4\mathrm{tr}(\alpha x)^2 - a^2\mathrm{tr}(x)^2 = 0$$

从而，有

$$\mathrm{tr}(x)^2 - 4\mathrm{tr}(x^2) = 0$$
$$\mathrm{tr}((2\alpha+a)x)\mathrm{tr}((2\alpha-a)x) = 0.$$

对由 B 确定的锥重复相同的论证，我们得到由 X, A 和 B 确定的锥所定义的方程组为

$$\mathrm{tr}(x)^2 - 4\mathrm{tr}(x^2) = 0 \tag{2.3}$$
$$\mathrm{tr}((2\alpha+a)x)\mathrm{tr}(2\alpha-a)x) = 0 \tag{2.4}$$
$$\mathrm{tr}((2\beta+b)x)\mathrm{tr}(2\beta-b)x) = 0, \tag{2.5}$$

其分成四个不同的方程组，这些方程组由锥决定，该锥由 X 与形如 $\mathrm{tr}(\delta x) = 0 = \mathrm{tr}(\epsilon x) = 0$ 的直线相交确定，其中 $(\delta,\epsilon) \in \{(2\alpha+a, 2\beta+b), (2\alpha-a, 2\beta+b), (2\alpha+a, 2\beta-b), (2\alpha-a, 2\beta-b)\}$。注意，由于 X, A, B 不共线，$1, 2\alpha \pm a, 2\beta \pm b$ 是 $\mathbb{F}_q$-线性无关的。此外，如果 $\mathrm{tr}(2\alpha \pm a) = 0$，则 $4\mathrm{tr}(\alpha)^2 = a^2 = \mathrm{tr}(\alpha^2)$。但是根据引理 2.3，这意味着 XA 是 E 的一条切线，矛盾。同理，$\mathrm{tr}(2\beta \pm b) \neq 0$。因此，我们可以应用引理 2.6，结论得证。□

2.3. **重新阐述 Heden 的结果**。 为使论述自洽，我们对 Heden 关于 Bruen 链的一些结果，利用我们的有限域模型给出新的证明 [5]。我们略去了 Heden 的部分论证，并简要证明了他的主要结果：Bruen 链中的元素具有相同的等距类型。

命题 2.8 ([5, 命题 3.3])。 设 X 和 X' 是张成一条外直线的两个外点，且 π 是一个既不经过 X 也不经过 X'的切平面。那么

(i) X 和 X' 属于同一个等距类，当且仅当 $|\text{锥}(X)\cap\text{锥}(X')\cap\pi|=2$。*(ii)* 若 X 和 X' 属于不同的等距类，则 $|\text{锥}(X)\cap\text{锥}(X')|=0$。

证明。 (i) 不失一般性，可设 $X=\mathrm{h1i}$ 且 $X'=\mathrm{h}\alpha\mathrm{i}$，$\mathrm{tr}(\alpha^2)=a^2$，并且满足 $\mathrm{tr}(\alpha)^2-4\mathrm{tr}(\alpha^2)$ 是一个非平方元。我们可将切平面 π 写成方程 $\mathrm{tr}(\gamma x)=0$ 的零点集，其中 x 为变量，γ 是 $\mathbb{F}_{q^4}$ 中的一个固定元素，满足 $\mathrm{tr}(\gamma^2)=0$。由于$X\notin\pi$，$\mathrm{tr}(\gamma)\neq 0$，且由于 $X'\notin\pi$，$\mathrm{tr}(\alpha\gamma)\neq 0$。

与命题 2.7 中一样，我们可以将由 X 定义的锥与由 X' 定义的锥的交集，改写为由 X 定义的锥与集合 $\mathrm{tr}((2\alpha+a)x)\mathrm{tr}((2\alpha-a)x)=0$ 的交集，其中 $\mathrm{tr}(2\alpha\pm a)\neq 0$，因为 XX' 是一条外直线。若 1、$2\alpha\pm a$、γ 线性无关，则 X、X'、$\mathrm{h}\gamma\mathrm{i}$ 共线，这与 $\mathrm{h}\gamma\mathrm{i}$ 是 E 中的一个点矛盾。此外，点 X、X'、$\mathrm{h}\gamma\mathrm{i}$ 不张成切平面，因为经过 $\mathrm{h}\gamma\mathrm{i}$ 的唯一切平面是 π，且 $X\notin\pi$。因此，$\delta=2\alpha\pm a$ 和 $\epsilon=\gamma$ 满足引理 2.6(i) 的条件。$|\mathrm{cone}(X)\cap\mathrm{cone}(X')\cap\pi|$ 的交点恰好是 $|\mathrm{cone}(X)\cap\mathrm{h}(2\alpha+a)\mathrm{i}^{\perp}\cap\mathrm{h}\gamma\mathrm{i}^{\perp}|$ 和 $|\mathrm{cone}(X)\cap\mathrm{h}(2\alpha-a)\mathrm{i}^{\perp}\cap\mathrm{h}\gamma\mathrm{i}^{\perp}|$ 中的交点。现在，$f(2\alpha+a,\gamma)$ 等于 $\mathrm{tr}(\gamma)(2\alpha+a)-\mathrm{tr}(2\alpha+a)\gamma$，由此可得 $-\mathrm{tr}(f(2\alpha+a,\gamma)^2)=8\mathrm{tr}(\alpha\gamma)\mathrm{tr}(\gamma)(\mathrm{tr}(\alpha)+2a)$，且 $\mathrm{tr}(f(2\alpha-a,\gamma)^2)=8\mathrm{tr}(\alpha\gamma)\mathrm{tr}(\gamma)(\mathrm{tr}(\alpha)-2a)$。乘积 $\mathrm{tr}(f(2\alpha+a,\gamma)^2)\mathrm{tr}(f(2\alpha-a,\gamma)^2)$ 等于

$$64\mathrm{tr}(\alpha\gamma)^2\mathrm{tr}(\gamma)^2(\mathrm{tr}(\alpha)^2-4a^2).$$

由于 XX' 是外直线，$\mathrm{tr}(\alpha)^2-4a^2$ 是非平方元。此外，$\mathrm{tr}(\gamma)\neq 0$ 且 $\mathrm{tr}(\alpha\gamma)\neq 0$，因此乘积非零。由此可知，$-\mathrm{tr}(f(\alpha+2a,\gamma)^2)$ 和 $-\mathrm{tr}(f(\alpha-2a,\gamma)^2)$ 中恰有一个是非平方元，另一个是平方元，因此由引理 2.6 可知，$|\mathrm{cone}(X)\cap\mathrm{cone}(X')\cap\pi|$中恰有 2 个点。

(ii) 若 Y是 $\mathrm{cone}(X)\cap\mathrm{cone}(X')$ 中的一个点，则直线 XY和 $X'Y$都是 E 的切线。由推论 2.4 可知，X,Y和 Y'具有相同的等距类型，这就产生了矛盾。□

引理 2.9 ([5,引理 3。1])。 设 P 是一个不属于 *Bruen* 链的外点 $\mathcal{B}$。则以 P 为顶点的锥与 相交于偶数个元素。

证明。设 S 为由形如 (π,A) 的数对构成的集合，其中 π 是 P 上的一个切平面，A 是 B 中与 π 关联的一个点。经过 P 的切平面有 $q+1$ 个，根据引理 2.2，每个切平面与 B 相交于 0 个或 2 个元素。因此，$|\mathrm{S}|$ 为偶数。一个点 A 位于 P 上的 0、1 或 2 个切平面中，因此设 C_i 为位于 P 上的 i 个切平面上的 B 中点的数量。因此，$|\mathrm{S}|=0\cdot C_0+1\cdot C_1+2\cdot C_2$ 为偶数。因此，C_1 为偶数。□

命题 2.10 ([5, 命题 3.4(b)]). 设 P 是一个不在 *Bruen* 链中的外点$\mathcal{B}$。则以 P 为锥的锥与 $\mathcal{B}$ 恰好相交于两个元素。反过来，给定两个元素A，$B\in\mathcal{B}$，恰好存在两个包含它们的锥。

证明。 令 R 为 Bruen 链 B 上的一点，并令 π 为一个不经过 R的切平面。令 T 为 π 中位于锥(R)内的外点集合。因此 $|T|=q+1$。我们将统计满足以下条件的点对 (R',t)：$R'\in\mathrm{B}\backslash\{R\}$，且 $t\in T$，并且 t 位于锥(R')内。

首先，给定 R'，满足 $t \in$ 锥$(R) \cap$锥$(R') \cap \pi$的 t 元素有 0 个或 2 个，根据命题2.8(i)。由于 R' 的可能取值数为 $(q+1)/2$，点对 $(R',\ t)$ 的数量至多为 $2(q+1)/2 = q+1$。

反过来，给定 $t \in T$，由引理 2.9 可知，至少存在一个 $R' \in$ B\{R}，使得 R' 落在由 T确定的锥内。因此，数对 (t, R') 的数量至少为 $q+1$。综上，我们证明了数对 (R', t) 数量的上下界相等，因此得到两个推论：(i) 给定 R'，恰有 2 个元素 t 使得 $t \in$ cone$(R) \cap$cone$(R') \cap \pi$；(ii) 给定 $t \in T$，Bruen 链中恰有两个元素（包括 R）位于 t 的锥内。□

推论 2.11 ([5, 命题 3.1]). *Bruen* 链的每个元素都具有相同的等距类型。

证明。 命题 2.10 表明，Bruen 链中的两个元素，例如 A 和 B，包含于两个锥中。若由 C 定义的锥包含 A 和 B，则直线 AC 和 BC 与$\mathcal{E}$相切。根据推论 2.4， A 和 C，以及 B 和 C 具有相同的等距类型；因此 A 和 B 具有相同的类型。□

以下结果是新的，它将 Bruen 链与图 Γ_X 联系起来 .

推论 2.12。 设 X、 A、 B 是 *Bruen* 链中的三个元素。那么，$\text{cone}(X) \cap \text{cone}(A) \cap \text{cone}(B)$ 的交点中没有位于 $\mathcal{E}$ 之外的点。

证明。 若交于三个锥的交点中存在这样的点 R，由R确定的锥将包含这三个点 X、 A、 B，这与命题 2.10矛盾。□

3. 作为图子集的 Bruen 链

如引言所述，令 $\mathbb{V}$ 为等距类 $\mathbb{E}$中的外点集合，且这些外点不等于 X，并且位于某条与 X 相交的外直线上。我们在 $\mathbb{V}$上有下文所述的两个图，并将锥的交解释为取这些锥的公共外点（即公共点，而非包含在 E 中的点）。

图	邻接关系
Δ_X	$A \sim B \Longleftrightarrow$ 锥$(X) \cap$锥$(A) \cap$ 锥$(B) = \varnothing$
Γ_X	$A \sim B \Longleftrightarrow$ 锥$(X) \cap$锥$(A) \cap$ 锥$(B) = \varnothing$ 以及 $X \notin AB$

显然， Γ_X 是 Δ_X的一个生成子图。我们还指出，条件 $A \sim B \Longleftrightarrow$锥$(X) \cap$ 锥$(A) \cap$锥$(B) = \varnothing$ 意味着 AB 张成一条外直线（见引理3.4）。这两个图与[3, §3], 所给出的图截然不同，因为在此语境下，它们的邻接关系仅为‘A 且 B张成一条外直线且 $X \notin AB$’。

对于 $q = 1$ （模 4）， $\mathbb{V}$ 中不存在与 X正交的点，因为如果我们取一个有限域元素 a，使得 tr$(a^2) \in \square$ 与 1 正交，那么 tr$(a \cdot 1)^2 -$ tr(a^2)tr$(1^2) = -4$tr$(a^2) \in \square$。因此，hai 不会与 $X =$ h1i 张成一条外直线。这是我们所定义的图 Γ_X 在 $q = 1$ （模 4）时为正则图、但在 $q = 3$（模 4 ）时具有两个不同顶点度的主要原因。

现在，位于 X上的一条外直线上的 $\mathbb{E}$中的点，在 Δ_X中产生一个 $(q-1)/2$团；而同一个点集则是 Γ_X的一个独立集。我们证明， Δ_X 总是有一个大小为 $\binom{q}{2}$的独立集。

引理 3.1。 取 X上的某条切线 ℓ 上的一个外点 Y。在 Y上有 q 条不同于 ℓ的切线与$\mathcal{E}$ 相切。每条切线都与 $\mathbb{V}$ 的顶点中的$(q-1)/2$ 个关联。位于这 q 条切线上的 $\mathbb{V}$ 的顶点的并集，是 Δ_X 的一个大小为 $q(q-1)/2$的独立集。

证明。注意，由于 X 是一个偶点（即 $X \in \mathbb{E}$），且 Y 位于经过 X 的 E 的一条切线上，根据引理 2.4，点 Y 也是偶点。这意味着，由 Y 定义的锥上所有不包含于 E 中的点也都是偶点。此外，直线 XY 不包含 Δ_X 的任何顶点。设 m 是经过 Y 的 q 条切线中不同于 XY 的一条。那么 hℓ, m i 与 E 相交于一条圆锥曲线 C。由于 X 恰好位于通向 C 的 $(q-1)/2$ 条外线上，因此 m 恰好包含 $(q-1)/2$ 个点 P，使得 PX 是 C 的一条外线。因此， |S| $= q^{(q-1)}$ 2。由构造显然可知，对于 S 中的两个点 Z_1、Z_2，由 X、Z_1、Z_2 定义的锥至少有点 Y 这一公共点。因此， Z_1 与 Z_2 在 Δ_X 中不相邻。□

命题 3.2. Δ_X 的团数至多为 $(q+1)/2$。

证明。考虑引理 3.1 所描述的 Δ_X 的所有独立集组成的集合 S；其中 ℓ 是 X 上的一条可变切线，Y 是 X 上的一个可变外点，而该独立集由 $\mathbb{V}$ 上 cone(Y) 的所有点组成。S 中共有 $(q+1)(q-1) = q^2-1$ 个独立集。首先证明：若 X 和 X' 是属于同一等距类的两个外点，且 XX' 是 E 的一条外直线，则 cone(X) ∩ cone(X') 中恰有 $2(q-1)$ 个点 Y。由引理 2.8 可知，对于每个不包含 X 和 X' 且与 E 相切的切平面 π， $|\text{cone}(X) \cap \text{cone}(X') \cap \pi| = 2$。对关联点对 (P, π) 进行双重计数，其中 P 是 cone(X) ∩ cone(X') 中的一个外点， π 是一个包含 P 且不经过 X 和 X' 的切平面。cone(X) ∩ cone(X') 中的点不在经过直线 XX' 的切平面上，因此恰位于 $q-1$ 个不经过 X 和 X' 的切平面上。这说明这样的点对共有 |cone(X) ∩ cone(X')|$(q-1)$ 个。另一方面，有 $q^2+1-2(q-1) - 2 = (q-1)^2$ 个与 E 相切且不包含 X 和 X' 的切平面，其中每个切平面恰包含 cone(X) ∩ cone(X') 中的 2 个点。因此，|cone(X) ∩ cone(X')|$(q-1) = 2(q-1)^2$，结论得证。

现在考虑 K 中的一个团，并统计关联对 (P, C) 的数量，其中 $P \in K$，且 $C \in$ S 是包含 P 的独立集。一方面，这个数量至多为 |S|，因为每个独立集 $C \in$ S 至多包含 K 中的一个点。经过 P 点的 $\mathbb{V}$ 中独立集的数量，等于在经过 X 的切线上选择一点 Y，使得 YP 是一条切线的选择数。换言之，这等于锥(X) ∩ 锥(P) 中点的数量，而我们已证明该数量为 $2(q-1)$。因此

$$2(q-1)|K| \leqslant q^2-1,$$

因此， $|K| \leqslant (q+1)/2$。 □

由于 Γ_X 是 Δ_X 的子图，我们得到以下推论。

推论 3.3。 Γ_X 的团数至多为 $(q+1)/2$。

引理 3.4。 设 X、A、B 是不共线的偶外点，且 XA 和 XB 是外线。若 锥(X) ∩锥(A) ∩锥(B) 没有外点，则 AB 是一条外线。

证明。设 $X = \langle 1 \rangle$， $A = \langle \alpha \rangle$， $B = \langle \beta \rangle$。根据引理 2.3 和命题 2.7，我们有以下事实：

(1) tr(α^2) $= a^2$ 对于某个 $a \in \mathbb{F}_q$。
(2) tr(β^2) $= b^2$ 对于某个 $b \in \mathbb{F}_q$。

(3) $\mathrm{tr}(\alpha)^2 - 4a^2$ 是非平方元。(4) $\mathrm{tr}(\beta)^2 - 4b^2$ 是非平方元。(5) $-$
对于所有 $(x,\ y) = (2\alpha \pm a,\ 2\beta \pm b)$，$\mathrm{tr}(f(x,\ y)^2)$ 都是平方。

我们需要证明 $\mathrm{tr}(\alpha\beta)^2 - a^2b^2$ 是非平方元。现在，对于 $x = 2\alpha + a$ 和 $y = 2\beta + b$，我们有：

$$\mathrm{tr}(x) = 2\mathrm{tr}(\alpha) + 4a, \qquad \mathrm{tr}(y) = 2\mathrm{tr}(\beta) + 4b,$$
$$\mathrm{tr}(x^2) = 2a\mathrm{tr}(x), \qquad \mathrm{tr}(y^2) = 2b\mathrm{tr}(y).$$

So

$$\begin{aligned} -\mathrm{tr}(f(x,y)^2) &= 2\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)\mathrm{tr}(xy) - \mathrm{tr}(x^2)\mathrm{tr}(y)^2 - \mathrm{tr}(y^2)\mathrm{tr}(x)^2, \\ &= 2\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)(\mathrm{tr}(xy) - a\mathrm{tr}(y) - b\mathrm{tr}(x)), \end{aligned}$$

利用 $\mathrm{tr}(xy) = 4\mathrm{tr}(\alpha\beta) + 2b\mathrm{tr}(\alpha) + 2a\mathrm{tr}(\beta) + 4ab$，我们得到

$$\begin{aligned} -\mathrm{tr}(f(x,y)^2) &= 2\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)(4\mathrm{tr}(\alpha\beta) + 2b\mathrm{tr}(\alpha) + 2a\mathrm{tr}(\beta) + 4ab - a\mathrm{tr}(y) - b\mathrm{tr}(x)) \\ &= 2\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)(4\mathrm{tr}(\alpha\beta) + 2b\mathrm{tr}(\alpha) + 2a\mathrm{tr}(\beta) + 4ab - a(2\mathrm{tr}(\beta) + 4b) - b(2\mathrm{tr}(\alpha) + 4a)) \\ &= 2\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)(4\mathrm{tr}(\alpha\beta) - 4ab) \\ &= 8\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ab) \\ &= 32(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ab). \end{aligned}$$

由此论证可得

$$2(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ab) \in \square. \tag{3.1}$$

对 $x = 2\alpha + a$、$y = 2\beta - b$ 重复上述论证，可得

$$2(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) - 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) + ab) \in \square.$$

将这两个等式相乘，得到 $(\mathrm{tr}(\beta)^2 - 4b^2)(\mathrm{tr}(\alpha\beta)^2 - a^2b^2) \in \square$，因此 $\mathrm{tr}(\alpha\beta)^2 - a^2b^2$ 是非平方元，因为 $\mathrm{tr}(\beta)^2 - 4b^2$ 是非平方元。□

推论 3.5. 设 $X = \langle 1 \rangle$、$A = \langle \alpha \rangle$、$B = \langle \beta \rangle$ 满足 $\mathrm{tr}(\alpha^2) = a^2$ 且 $\mathrm{tr}(\beta^2) = b^2$。设 XA、XB 和 AB 是 $\mathcal{E}$ 的外直线。那么，由 X、A、B 定义的锥有公共（外部）点，当且仅当 X、A、B 不共线且

$$2(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ab) \in \square.$$

证明。在引理 3.4 的证明中，由 X、A、B 定义的锥有公共（外部）点，当且仅当 X、A、B 不共线，且以下四个表达式成立：

$$\begin{aligned} 2(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ab) &\in \square, \\ 2(\mathrm{tr}(\alpha) - 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) + ab) &\in \square, \\ 2(\mathrm{tr}(\alpha) - 2a)(\mathrm{tr}(\beta) - 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ab) &\in \square, \\ 2(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) - 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) + ab) &\in \square. \end{aligned}$$

（见方程 3.1。）现在 AB 是外部的，因此 $\mathrm{tr}(\alpha\beta)^2 - a^2b^2$ 是非平方元（由引理 2.3）。同理，$\mathrm{tr}(\alpha)^2 - 4a^2$ 和 $\mathrm{tr}(\beta)^2 - 4b^2$ 也是非平方元，因为 XA 和 XB 是外部的。上面前两项的乘积为

$$4(\mathrm{tr}(\alpha)^2 - 4a^2)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)^2(\mathrm{tr}(\alpha\beta)^2 - a^2b^2)$$

它是一个平方、一个非平方元、一个平方和一个非平方元的乘积。因此它是平方元，所以第一个表达式是平方元当且仅当第二个表达式是平方元。对这四个表达式中的任意一对，都可以作类似论证。因此，如果其中一个是平方元，它们就全都是平方元；如果其中一个是非平方元，它们就全都是非平方元。因此，我们可以将这四个表达式归结为其中一个。□

引理*3.6.* 设 A, B, C 是 $\mathbb{E}$上的共线点，位于一条不经过 X的外直线上，并且 XA, XB, XC 是外线。那么，*cone(*X*)* ∩ *cone(*A*)* ∩*cone(*B*)*、*cone(*X*)* ∩ *cone(*B*)* ∩ *cone(*C*)*或*cone(*X*)* ∩ *cone(*C*)* ∩ *cone(*A*)*中至少有一个非空。

证明。 记 $X = \mathrm{h}1\mathrm{i}$、 $A = \mathrm{h}\alpha\mathrm{i}$、 $B = \mathrm{h}\beta\mathrm{i}$、 $C = \mathrm{h}\alpha + \lambda\beta\mathrm{i}$，其中 $\lambda \in \mathbb{F}_q$。存在 $a, b, c \in \mathbb{F}_q$，使得tr(α^2) $= a^2$、tr(β^2) $= b^2$、tr(($\alpha+\lambda\beta$)^2) $= c^2$。我们假设cone(X)∩cone(A)∩cone(B)、cone(X) ∩cone(B) ∩ cone(C)或cone(X) ∩cone(C) ∩ cone(A)均为空。

根据推论 3.5，我们知道 cone(X) ∩cone(A) ∩ cone(B) 没有外部公共点，当且仅当‘2(tr(α) $+ 2a$)(tr(β) $+ 2b$)(tr($\alpha\beta$) $- ab$) $\in \square$’，其中我们取了 $(x, y) = (2\alpha + a, 2\beta + b)$。对于 cone($X$) ∩ cone($B$) ∩cone($C$) 和 cone($X$) ∩ cone($C$) ∩ cone($A$)，我们将采用与点对 $(2\alpha + a, 2(\alpha + \lambda\beta) + c)$ 和 $(2\beta + b, 2(\alpha + \lambda\beta) - c)$ 对应的方程。（注意，第二个方程中选择 $-c$ 是经过审慎考虑的；这是可行的，因为四个方程中的任意一个都可以用来给出锥条件。）因此，

$$2(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\alpha) + \lambda\mathrm{tr}(\beta) + 2c)(a^2 + \lambda\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ac) \in \square, \tag{3.2}$$

$$2(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)(\mathrm{tr}(\alpha) + \lambda\mathrm{tr}(\beta) - 2c)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) + \lambda b^2 + bc) \in \square, \tag{3.3}$$

$$2(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ab) \in \square. \tag{3.4}$$

设 $\gamma = \mathrm{tr}(\alpha\beta) - ab$。由于 $a^2 + 2\lambda\mathrm{tr}(\alpha\beta) + \lambda^2 b^2 = c^2$，由此可得 $2\lambda\gamma = c^2 - (a + \lambda b)^2 = (c - a - \lambda b)($ $c + a + \lambda b$)。表达式 (3.4) 就是 2(tr(α) $+ 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)\gamma \in \square$。现在将 (3.2) 与 (3.3) 相乘，得到

$$4(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)((\mathrm{tr}(\alpha) + \lambda\mathrm{tr}(\beta))^2 - 4c^2)(a^2 + \lambda\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ac)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) + \lambda b^2 + bc) \in \square.$$

Now

$$\begin{aligned}
&(a^2 + \lambda\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ac)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) + \lambda b^2 + bc)\\
=&ab(a + \lambda b - c + \gamma\lambda a^{-1})(a + \lambda b + c + \gamma b^{-1})\\
=&ab((a + \lambda b)^2 - c^2 + \gamma b^{-1}(a + \lambda b - c) + \gamma\lambda a^{-1}(a + \lambda b + c) + \lambda\gamma^2 a^{-1}b^{-1})\\
=&ab(-2\lambda\gamma + \gamma b^{-1}(a + \lambda b - c) + \gamma\lambda a^{-1}(a + \lambda b + c) + \lambda\gamma^2 a^{-1}b^{-1})\\
=&\gamma\left(-2\lambda ab + a(a + \lambda b - c) + \lambda b(a + \lambda b + c) + \lambda\gamma\right)\\
=&\gamma\left(a(a - c) + \lambda b(\lambda b + c) + \lambda\gamma\right)\\
=&\gamma\left(a(a - c) + \lambda b(\lambda b + c) + \tfrac{1}{2}(c^2 - (a + \lambda b)^2)\right)\\
=&\frac{1}{2}\gamma(c - a + \lambda b)^2.
\end{aligned}$$

因此，

$$2(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)\gamma \cdot ((\mathrm{tr}(\alpha) + \lambda\mathrm{tr}(\beta))^2 - 4c^2) \in \square$$

因此 (tr(α) $+ \lambda$tr(β))$^2 - 4c^2 \in \square$，这与 XC 是外直线矛盾。 □

引理*3.7.* 设 A、B、C 是 $\mathbb{E}$ 中三个不共线点，且 XA、XB、XC 是外直线。若由 A、B、C 张成的平面是一个切平面，则 *cone*$(X)\cap$*cone*$(A)\cap$*cone*(B)、*cone*$(X)\cap$*cone*$(B)\cap$*cone*(C) 或 *cone*$(X)\cap$*cone*$(C)\cap$*cone*(A) 中至少有一个非空。

证明。设 $X=\mathsf{h1i}$、$A=\mathsf{h}\alpha\mathsf{i}$、$B=\mathsf{h}\beta\mathsf{i}$、$C=\mathsf{h}\gamma\mathsf{i}$。由引理 2.3，存在 a、b、$c\in\mathbb{F}_q$，使得 $\mathsf{tr}(\alpha^2)=a^2$、$\mathsf{tr}(\beta^2)=b^2$、$\mathsf{tr}(\gamma^2)=c^2$。我们假设 $\mathsf{cone}(X)\cap\mathsf{cone}(A)\cap\mathsf{cone}(B)$、$\mathsf{cone}(X)\cap\mathsf{cone}(B)\cap\mathsf{cone}(C)$，或 $\mathsf{cone}(X)\cap\mathsf{cone}(C)\cap\mathsf{cone}(A)$ 均为空。因此（由命题 2.7 和推论 3.5），我们有：

$$2(\mathrm{tr}(\alpha)+2a)(\mathrm{tr}(\beta)+2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta)-ab)\in\square,$$
$$2(\mathrm{tr}(\beta)-2b)(\mathrm{tr}(\gamma)-2c)(\mathrm{tr}(\beta\gamma)-bc)\in\square,$$
$$2(\mathrm{tr}(\gamma)+2c)(\mathrm{tr}(\alpha)-2a)(\mathrm{tr}(\alpha\gamma)+ac)\in\square.$$

这三个表达式的乘积除以 4 后也是一个平方：

$$2(\mathrm{tr}(\alpha)^2-4a^2)(\mathrm{tr}(\beta)^2-4b^2)(\mathrm{tr}(\gamma)^2-4c^2)(\mathrm{tr}(\alpha\beta)-ab)(\mathrm{tr}(\beta\gamma)-bc)(\mathrm{tr}(\alpha\gamma)+ac)\in\square. \tag{3.5}$$

由于 ABC 是一个切平面，根据引理 2.5，我们还有：

$$2\mathrm{tr}(\alpha\beta)\mathrm{tr}(\beta\gamma)\mathrm{tr}(\gamma\alpha)=-a^2b^2c^2+a^2\mathrm{tr}(\beta\gamma)^2+b^2\mathrm{tr}(\alpha\gamma)^2+c^2\mathrm{tr}(\alpha\beta)^2. \tag{3.6}$$

将式（3.6）中表示的 $2\mathsf{tr}(\alpha\beta)\mathrm{tr}(\beta\gamma)\mathrm{tr}(\gamma\alpha)$代入式（3.5），得到

$$(\mathrm{tr}(\alpha)^2-4a^2)(\mathrm{tr}(\beta)^2-4b^2)(\mathrm{tr}(\gamma)^2-4c^2)(abc-a\mathrm{tr}(\beta\gamma)+b\mathrm{tr}(\gamma\alpha)-c\mathrm{tr}(\alpha\beta))^2\in\square$$

因此

$$(\mathrm{tr}(\alpha)^2-4a^2)(\mathrm{tr}(\beta)^2-4b^2)(\mathrm{tr}(\gamma)^2-4c^2)$$

是一个平方元——这与引理 2.3矛盾，因为根据引理，该三项均为非平方元。 □

现在我们证明定理 1.2：Bruen 链可以等价地表述为 $q+1)/2$-团，其中 Γ_X 和 Δ_X。下述定理还进一步说明了包含在 Γ_X 和 Δ_X中的较小团。

定理 3.8. Γ_X 的所有团都定义弧。此外，Γ_X 中大小为 $(q+1)/2$ 的团与 *Bruen* 链一一对应。Δ_X 的所有团都定义弧或位于经过 X的直线上的共线点集。此外，Δ_X 中大小为 $(q+1)/2$ 的团与 *Bruen* 链一一对应。

证明。对于图中的两个顶点，我们将用符号 $\sim$ 和 $\not\sim$ 分别表示“相邻”和“不相邻”，具体含义将由上下文显明。我们首先证明 Bruen 链会产生 Δ_X和 Γ_X的团。设 B 是一条 Bruen 链（视为 E 外部的点集）。根据推论 2.11，B 中所有点都具有相同的等距类型，不妨设所有点都在 $\mathbb{E}$中，且 $X=\mathsf{h1i}$ 属于 B。集合 $\mathsf{B}\setminus\{X\}$ 的大小为 $\frac{q+1}{2}$，根据引理 2.1，它由满足 XY 为一条外直线的点 Y 组成。因此，B 中所有点都在$\mathbb{V}$中，即它们是 Γ_X和 Δ_X的顶点。由引理 2.1(ii)可知，若 $A,B\in\mathsf{B}$，则AB 不与 X关联。此外，根据推论 2.12，对所有 $A,B\in\mathsf{K}\setminus\{X\}$，$\mathsf{cone}(A)\cap\mathsf{cone}(B)\cap\mathsf{cone}(X)=\varnothing$，所以 $\mathsf{B}\setminus\{X\}$ 中的点在 Γ_X和 Δ_X中构成一个团。

现在设 K 是 Δ_X 的一个团，且 A、B、C 是 K 中位于 PG(3, q) 的直线 ℓ 上的共线点，其中 X 不在 ℓ 上。由于 A、B 是 Δ_X 的顶点，因此 XA、XB 是外线。此外，由于 且 $A\sim B$，我们于是有 $\mathsf{cone}(X)\cap\mathsf{cone}(A)\cap\mathsf{cone}(B)=\varnothing$，故根据引理 3.4，$\ell=AB$ 是一条外线。然而，根据引理 3.6，我们有 $A\not\sim B$，或 $A\not\sim C$ 或 $B\not\sim C$，

这就产生矛盾。我们由此得出结论： A、B、C 这三个共线点不可能同时包含在 Δ_X 的一个团中，其中它们位于一条不经过 X 的直线上。由于 Γ_X 是 Δ_X 的子图，同样的结论也适用于 Γ_X： A、B、C 这三个共线点若位于一条不经过 X 的直线上，就不可能包含在 Γ_X 的一个团中。此外，由于 Γ_X 不包含与 X 共线的顶点 A、B，我们发现 Γ_X 的一个团必然是一个弧。现在假设 Δ_X 的一个团包含共线子集 A、B、C，它们位于经过 X 的直线 ℓ 上，且还包含某个点 $D \notin \ell$。由于 A 和 D 是 Δ_X 的顶点，我们有 $\ell = XA$ 和 XD 是外线。此外，由于 $A \sim D$、$B \sim D$、$C \sim D$，引理 3.4 表明 AD、BD、CD 是外线。然而，这又会根据引理 3.6 导致矛盾。这证明 Δ_X 的每个团要么是由一条经过 X 的直线上的共线点构成的点集，要么是一个弧。最后，设 K' 是 Δ_X 中大小为 $\frac{q+1}{2}$ 的一个团。K' 的所有点不可能都共线于经过 X 的直线 ℓ 上，因为 K' 的每个点都是 ℓ 上不同于 X 的偶点，而 ℓ 上此类点只有 $\frac{q-1}{2}$ 个（外线 ℓ 在 $\mathbb{E}$ 上恰好包含 $\frac{q+1}{2}$ 个点，其中一个是 X）。这说明团 K' 是一个弧，因此 K' 也是 Γ_X 的一个团。我们将证明 K' 是一条 Bruen 链，方法是证明 K' 中的点满足引理 2.1 的条件。首先，根据引理 3.4，对于每个 A、$B \in \mathsf{K}$，AB 都是一条外线，因此只需证明对于每个 A、B、$C \in \mathsf{K}$，ABC 是一个割平面。我们已经证明 K' 的点构成一个弧，因此 A、B、C 确实张成一个平面；根据引理 3.7，该平面不是切平面。因此，$\mathsf{K}' \cup \{X\}$ 是一条 Bruen 链。□

推论3.9。 *Bruen* 链在有限域 $\mathbb{F}_{q^4}$ 中有代数刻画。特别地，它等价于一个由 S 个 $\mathbb{F}_{q^4} \backslash \mathbb{F}_q$ 中的元素构成的集合，其大小为 $(q+1)/2$，并且对所有 $\alpha, \beta \in S$:

(i) $(\alpha^q - \alpha)/(\beta^q - \beta) \notin \mathbb{F}_q$; ***(ii)*** $\mathrm{tr}(\alpha)^2 - 4a^2$ 是非平方元；***(iii)*** $2(\mathrm{tr}(\alpha) + 2a)(\mathrm{tr}(\beta) + 2b)(\mathrm{tr}(\alpha\beta) - ab)$ 是非零平方；其中 a 和 b 是 $\mathbb{F}_q$ 的元素，满足 $\mathrm{tr}(\alpha^2) = a^2$ 和 $\mathrm{tr}(\beta^2) = b^2$。

证明。 在整个证明中，设 $A = \mathsf{h}\alpha\mathsf{i}$ 和 $B = \mathsf{h}\beta\mathsf{i}$，其中 $\alpha, \beta \in S$。

定理 3.8 表明，Bruen 链等价于大小为 $\frac{q+1}{2}$ 的 Γ_X 团。现在设 S 是 $\mathbb{F}_{q^4} \setminus \mathbb{F}_q$ 中由 $\frac{q+1}{2}$ 个域元素组成的集合，并假设 S 定义了 Γ_X 的一个团，那么 S 中的每个元素 α 都满足 (ii)：$\mathsf{tr}(\alpha^2) = a^2$，其中 $\mathsf{tr}(\alpha^2) - 4a^2$ 是非平方元，因为 A 必须是一个偶点，且 XA 是一条外直线。此外，若 $\alpha, \beta \in S$，则 A, B 和 $X = \mathsf{h1i}$ 必须不共线，这等价于 $1, \alpha, \beta$ 线性无关的条件，这正是 (i) 所表达的。若 $\alpha, \beta \in S$，则 $\mathsf{cone}(A) \cap \mathsf{cone}(B) \cap \mathsf{cone}(X)$ 没有 E 之外的点。由于对所有 A, B，其中 $A = \mathsf{h}\alpha\mathsf{i}$，$B = \mathsf{h}\beta\mathsf{i}$ 且 $\alpha, \beta \in S$，XA 和 XB 都是外直线，引理 3.4 表明 AB 是一条外直线；进而由引理 3.5，$\mathsf{cone}(A) \cap \mathsf{cone}(B) \cap \mathsf{cone}(X)$ 没有外点，说明 (iii) 成立。

反之，若 S 是一个满足 $(i) - (ii) - (iii)$ 的 $\frac{q+1}{2}$ 元素集合，那么显然，对于所有满足 α, β 属于 S 的点 $A = \mathsf{h}\alpha\mathsf{i}$、$B = \mathsf{h}\beta\mathsf{i}$，根据 (ii)，A, B 是偶点，它们张成一条经过 X 的外直线。根据 (i)，$1, A, B$ 不共线，由此根据推论 3.5 可知，(iii) 蕴含锥$(A) \cap$ 锥$(B) \cap$ 锥(X) 在 E 之外没有点。□

对于 $41 \leqslant q \leqslant 97$，$q-1$）/2-团 Δ_X 都包含在经过 X的某条外直线中，因此对于这些 q值，Bruen 链并不存在；这就是我们对定理1.1的表述。利用上述有限域模型，我们可以使用 Γ_X 在 GAP中通过Grape [12]软件包高效地构造图。（我们在附录 B 中提供了这段代码。）如果没有有限域模型，这一过程将耗费大量内存和时间。随后，我们确保该图配备了

通过取 X 在 E 的等距群中的稳定子所得到的自同构。我们能够使用下一节所述的方法计算团数。

4. 计算结果

首先，我们列出（见表1）已知的例子及其稳定子。若取等距群，则 $q \in \{9,\ 25\}$ 各有 2 个例子，但它们在半相似变换下等价。

q	Bruen 链的数量	稳定子	例子参考文献
5	1	$C_2 \times S_4$	[2]
7	2	$C_2 \times S_4$, S_5	[2, 10]
9	1	$C_2 \times S_4$	[1, 7]
11	2	D_{20}, $C_2 \times A_5$	[10]
13	2	S_4, $C_2 \times C_2 \times S_3$	[5]
17	2	D_{12}, D_{16}	[5]
19	2	D_{12}, S_4	[5]
23	1	D_8	[5]
25	1	D_{12}	[7]
27	1	$C_3 \times A_4$	[7]
31	1	S_4	[5]
37	1	$C_5 : C_4$	[6]

表1. 已知例子及其稳定子。

接下来，我们在表 Γ_X 中列出2的团数；该表还表明，对于$41 \leqslant q \leqslant 97$，不存在 Bruen 链。我们在图 Γ_X 中绘制了 q 关于 $5 \leqslant q \leqslant 97$ 的团数，见4.1。当 q 足够大时，最初明显的线性趋势便会改变，这为[6, 7] 关于不存在更多 Bruen 链的猜想提供了进一步证据，其中 $q > 37$。

为了确定每个 Γ_X 的团数，我们使用 GAP 及其软件包 Grape[12] 构造了该图。我们采用通过 GAP 软件包 images [8]中的 有序算法 [11] 实现的 *MinimalImage* 函数，为可能的团生成大小为 1 或 2 的起始集。我们将 Γ_X 的每个诱导子图导出为 DIMACS 格式的文本文件，然后运行一个 C++ 程序，该程序使用称为 `mcqd` [9] 的 *MaxCliqueDyn* 算法。对于 $89 \leqslant q \leqslant 97$，我们在一台配备 64 个核心的服务器上使用了并行实现[4] 。对于 $q = 89$，使用 [9] 耗时约两周，使用 [4]耗时约 8 天。使用 [4]完成$q = 97$ 耗时约 3 周。

对于较小的 q值，我们还能够使用 GRAPE 提供的团算法直接确定团数。在存在的情况下，结合起始集的 GRAPE 功能足以枚举 Bruen 链。

在引理3.1中，我们证明了 Δ_X 的独立集数为 $q\ (q-1)\ /2$，因此 Γ_X 的团数至少也有这么大，因为它是一个生成子图。对于 $q = 29$，我们计算了独立集数，并确定其恰好为 $q\ (q-1)\ /2 = 406$。我们原本希望它能超过这一数值，并且如果足够大，或许可以证明 Bruen 链不存在。鉴于这种方法似乎前景不大，而且计算 Γ_X的独立集数十分困难，我们没有尝试其他 q值。

q	$\omega(\Gamma_X)$	q	$\omega(\Gamma_X)$	q	$\omega(\Gamma_X)$	q	$\omega(\Gamma_X)$	q	$\omega(\Gamma_X)$	q	$\omega\ (\Gamma_X)$
29	9	41	13	49	13	61	15	73	15	83	15
31	16	43	12	53	13	67	14	79	16	89	15
37	19	47	12	59	15	71	15	81	15	97	17

表 2. Γ_X在 $29 \leqslant q \leqslant 97$时的团数。

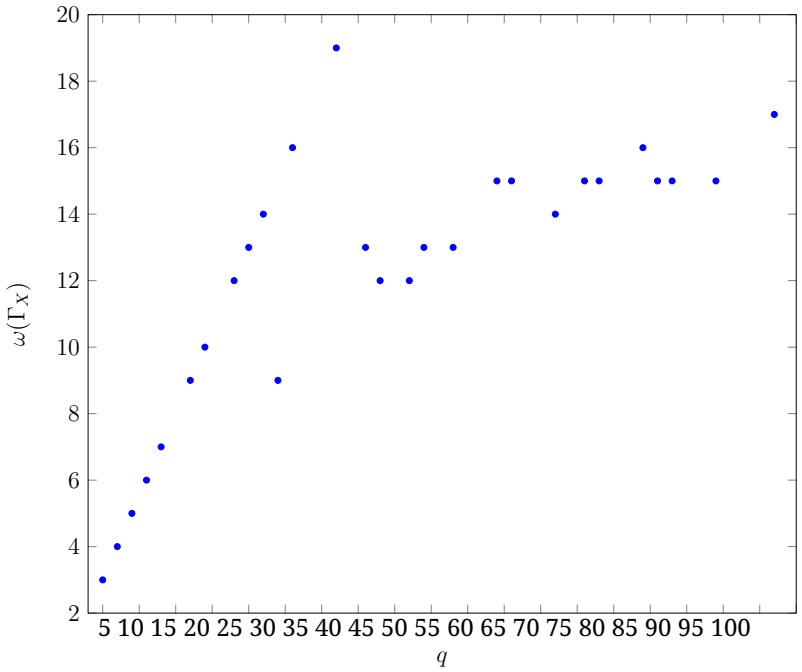

图 4.1. Γ_X 在 $5 \leqslant q \leqslant 97$时的团数。

致谢

我们感谢 Gordon Royle 提供的宝贵意见。第一和第二作者获得了澳大利亚研究理事会探索基金 DP200101951 的资助，第三作者则获得了由新西兰皇家学会管理的 Marsden 基金会理事会的资助。

附录 A：已知 Bruen 链的代表

对于每个 $q \leqslant 37$取值，我们给出所有互不等价的 Bruen 链。我们将采用第 2.2 节介绍的有限域模型。每个整数列表（表 3）都是 $\mathbb{F}_q$中本原元的指数集合；用 GAP 记法表示，即为 `Z(q^4)`。一个 $\star$ 表示在完整共线群作用下，可以忽略这个额外的例子，因为它在半相似变换下与另一个例子等价。每个例子都以“0”开头；因此，对于较大的 q，表格中的某些行需要接续排版，据此即可区分各个例子。

q	Bruen 链（模等距变换）
5	0, 182, 305, 605
7	0, 234, 1397, 1640, 1818
	0, 774, 1126, 1818, 2282
9	0, 44, 114, 3669, 6035, 6222
	0, 77, 2613, 4396, 4447, 6035 ⋆
11	0, 666, 1091, 6507, 10658, 11079, 13791
	0, 1621, 4635, 5091, 8026, 8790, 9359
13	0, 1201, 3974, 9088, 9209, 20275, 25144, 26421
	0, 9088, 9209, 9712, 15691, 20275, 25061, 27005
17	0, 11064, 23365, 44028, 51732, 54288, 55375, 74434, 75024, 81544
	0, 8573, 17348, 40937, 42498, 44028, 65239, 69987, 72812, 76936
19	0, 2358, 17832, 30167, 50702, 53413, 57124, 63144, 81317, 103363, 126708
	0, 4998, 34061, 39278, 51323, 51469, 74971, 103689, 104039, 113312, 126708
23	0, 40351, 50476, 65922, 141369, 144680, 151517, 179361, 193641, 196170, 226383, 250126, 258931
25	0, 7765, 21365, 51750, 52028, 60937, 179761, 187904, 222287, 252075, 263033, 272801, 277793, 360244
	0, 44967, 119676, 125676, 169013, 178576, 187904, 276812, 292945, 305987, 356702, 370842, 380493, 384441 ⋆
27	0, 15789, 29254, 40015, 41748, 43717, 63057, 70717, 173045, 255719, 278951, 281658, 335753, 430538, 493601
31	0, 6510, 12459, 35613, 282883, 288878, 298214, 398628, 405647, 519521, 570613, 588163, 631263, 769878, 848886, 900936, 906588
37	0, 91942, 225190, 305966, 396584, 452161, 490392, 495825, 594231, 735337, 805164, 849785, 858281, 1137850, 1188868, 1259696, 1287313, 1325949, 1476150, 1846082

表3. 所有 Bruen 链均表示为 $\mathbb{F}_{q^4}$ 的元素，其中 $q \leqslant 37$。

附录 B：GAP 代码

```
LoadPackage("fining");

# Construct \Gamma_X for a given value of q
Gamma_X := function(q)

  local capcondition, conecondition, vec, basis, tr, gram, form, eq, squares,nonsquares, x,
   ext, ext_field, g, permgroup, permgroup1, good, gamma,permgroup2, perm, gens, aut;


  conecondition := function(alpha, beta, q)
    local tr, tra, trb, a, b, f, sq;
    if ForAny(GF(q), t -> beta - t * alpha in GF(q)) then
      return true;
    fi;
    tr := x -> x+x^q+x^(q^2)+x^(q^3);;
    tra := tr(alpha^2);
    trb := tr(beta^2);
    a := First(GF(q), t -> t^2 = tra);
    b := First(GF(q), t -> t^2 = trb);
    f := {x,y} -> tr(y) * x - tr(x) * y;
    sq := AsList(Group(Z(q)^2));;
```

```
    return ForAll(Cartesian([2*alpha+a,2*alpha-a],[2*beta+b,2*beta-b]), t ->
        -tr(f(t[1],t[2])^2) in sq );
  end;

  capcondition := {b,c} -> not
      (ext_field[b]^q-ext_field[b])/(ext_field[c]^q-ext_field[c]) in GF(q);

  vec := AsVectorSpace(GF(q), GF(q^4));;
  basis := Basis(vec);;
  tr := x -> x+x^q+x^(q^2)+x^(q^3);;
  gram := List(basis, t -> List(basis, u -> tr(t*u)));;
  ConvertToMatrixRep(gram,GF(q));
  form := BilinearFormByMatrix(gram,GF(q));;
  eq := PolarSpace(form);;
  squares := Union(AsList(Group(Z(q)^2)), [0*Z(q)]);;
  nonsquares := Difference(AsList(GF(q)),squares);;
  x := VectorSpaceToElement(PG(3,q),[1,0,0,0]*Z(q)^0);
  ext := AsList(FiningOrbit(IsometryGroup(eq),x));;
  ext_field := List(ext, t -> basis * Unpack(t!.obj));;
  g := IsometryGroup(eq);;
  permgroup := Action(g, ext);
  permgroup1 := Stabiliser(permgroup,1);
  good := Filtered([2..Size(ext)], t -> tr(ext_field[t])^2-4*tr(ext_field[t]^2) in
      nonsquares );;

  gamma:=Graph(permgroup1,good,OnPoints,{b,c} -> b<>c and capcondition(b,c) and
      conecondition(ext_field[b],ext_field[c],q));;

  permgroup2 := Action(permgroup1, good);
  perm:=PermListList(VertexNames(gamma), good);
  gens:=GeneratorsOfGroup(permgroup2);
  gens:=List(gens, t -> t^perm);
  aut:=Group(gens);
  gamma!.autGroup := aut;

  return gamma;
end;

# Construct \Delta_X for a given value of q
Delta_X := function(q)

  local conecondition, vec, basis, tr, gram, form, eq, squares, nonsquares, x, ext,ext_field,
   g, permgroup, permgroup1, good, gamma, permgroup2, perm, gens, aut;

  conecondition := function(alpha, beta, q)
    local tr, tra, trb, a, b, f, sq;
    if ForAny(GF(q), t -> beta - t * alpha in GF(q)) then
      return true;
```

```
    fi;
    tr := x -> x+x^q+x^(q^2)+x^(q^3);;
    tra := tr(alpha^2);
    trb := tr(beta^2);
    a := First(GF(q), t -> t^2 = tra);
    b := First(GF(q), t -> t^2 = trb);
    f := {x,y} -> tr(y) * x - tr(x) * y;
    sq := AsList(Group(Z(q)^2));;
    return ForAll(Cartesian([2*alpha+a,2*alpha-a],[2*beta+b,2*beta-b]), t ->
        -tr(f(t[1],t[2])^2) in sq );
  end;

  vec := AsVectorSpace(GF(q), GF(q^4));;
  basis := Basis(vec);;
  tr := x -> x+x^q+x^(q^2)+x^(q^3);;
  gram := List(basis, t -> List(basis, u -> tr(t*u)));;
  ConvertToMatrixRep(gram,GF(q));
  form := BilinearFormByMatrix(gram,GF(q));;
  eq := PolarSpace(form);;
  squares := Union(AsList(Group(Z(q)^2)), [0*Z(q)]);;
  nonsquares := Difference(AsList(GF(q)),squares);;
  x := VectorSpaceToElement(PG(3,q),[1,0,0,0]*Z(q)^0);
  ext := AsList(FiningOrbit(IsometryGroup(eq),x));;
  ext_field := List(ext, t -> basis * Unpack(t!.obj));;
  g := IsometryGroup(eq);;
  permgroup := Action(g, ext);
  permgroup1 := Stabiliser(permgroup,1);
  good := Filtered([2..Size(ext)], t -> tr(ext_field[t])^2-4*tr(ext_field[t]^2) in
      nonsquares );;

  gamma:=Graph(permgroup1,good,OnPoints,{b,c} -> b<>c and
      conecondition(ext_field[b],ext_field[c],q));;

  permgroup2 := Action(permgroup1, good);
  perm:=PermListList(VertexNames(gamma), good);
  gens:=GeneratorsOfGroup(permgroup2);
  gens:=List(gens, t -> t^perm);
  aut:=Group(gens);
  gamma!.autGroup := aut;

  return gamma;
end;
```

参考文献

[1] V. Abatangelo。一种阶 81 的平移平面及其完整共线群。澳大利亚数学会公报，29(1):19–34,1984。4[2] A. A. Bruen。反演几何与若干新的平移平面。I。几何专论，7:81–98, 1978。1，4

[3] I. Cardinali、N. Durante、T. Penttila 和 R. Trombetti。《小阶有限域上的 Bruen 链》。《离散数学》，282(1-3)：245–247，2004。1, 3[4] M. Depolli、J. Konc、K. Rozman、R. Trobec 和 D. Janežič。《通用图和蛋白质图的精确并行最大团算法》。《化学信息与建模杂志》，53(9)：2217–2228，2013。PMID：23965016。4[5] O. Heden。《论 Bruen 链》。《离散数学》，146(1-3)：69–96，1995。2.1, 2.2, 2.3, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 4[6] O. Heden。《另一条 Bruen 链》。《离散数学》，188(1-3)：267，1998。4, 4[7] O. Heden 和 M. Saggese。《PG(3, p^k) 中的 Bruen 链》， $k \geqslant 2$。《离散数学》，214(1-3)：251–253，2000。4, 4[8] C. Jefferson、M. Pfeiffer、R. Waldecker 和 E. Jonauskyte。《images、极小像与典范像》，版本 1.3.1。https://gap-packages.github.io/images/，2021年11月。GAP 软件包。4[9] J. Konc 和 D. Janˇziˇc。《最大团问题的改进分支定界算法》。《MATCH 数学与计算化学通讯》，58：569–590，2007。4[10] G. Korchmaros。《椭圆二次曲面 $PG(3, q)$ 上圆链的一个例子》， $q = 7$，11。《组合论杂志 A辑》，31：98–100，1981。4[11] R. C. Read。《人人都是赢家，或如何在编目组合构形时避免同构搜索》。《离散数学年刊》，2：107–120，1978。4[12] L. H. Soicher。《GAP 的 GRAPE 软件包》，版本 4.8.5。https://gap-packages.github.io/grape，2021。3, 4