arXiv:2305.01353v1 [math.NA] 2 May 2023

Cahn–Hilliard 方程自适应有限元方法的恢复型后验误差估计*

YaoYao Chen†、Yunqing Huang‡、Nianyu Yi§ 和 Peimeng Yin¶

Abstract. 本文推导了 Cahn–Hilliard 方程 Crank-Nicolson 有限元方法的一种新型恢复型后验误差估计。为此，我们结合采用椭圆重构技术和基于三个时间层近似的时间重构技术，从而得到一个最优后验误差估计子。我们提出了一种时空自适应算法，并将所推导的后验误差估计子用作误差指示子。本文还通过数值实验验证理论结果，其中包括与基于残量型后验误差估计子的自适应有限元方法进行比较。

1. 引言 Introduction

本文关注 Cahn–Hilliard 方程的自适应有限元方法

日期：2023年5月3日。2020 数学学科分类号。65N15, 65N30, 65N50。关键词和短语。Cahn–Hilliard 方程、后验误差估计、恢复型、时空自适应算法。

† 安徽师范大学数学与统计学院，中国安徽芜湖 241000，电子邮箱：cyy1012xtu@126.com（Y. Chen）。

‡ 教育部智能计算与信息处理重点实验室，湘潭大学数学与计算科学学院，中国湖南湘潭 411105，电子邮箱：huangyq@xtu.edu.cn（Y. Huang）。§ 湖南省科学与工程计算及仿真重点实验室，湘潭大学数学与计算科学学院，中国湖南湘潭 411105，电子邮箱：yini- anyu@xtu.edu.cn（N. Yi）。

¶ 多尺度方法与动力学组，橡树岭国家实验室计算机科学与数学部，美国田纳西州橡树岭 37831，电子邮箱：yinp@ornl.gov（P. Yin）。

*声明：本稿件部分由 UT-Battelle有限责任公司根据与美国能源部（DOE）签订的合同 DE-AC05-00OR22725 撰写。美国政府保留非独占、已付费、不可撤销、全球范围的许可；出版商接受本文发表即承认，美国政府有权发表或复制本稿件的已发表版本，或允许他人出于美国政府目的这样做。DOE 将根据美国能源部公共访问计划（http://energy.gov/downloads/doe-public-access- plan），向公众提供这些联邦资助研究成果。

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}\left(\varepsilon\mathcal{A}u + \dfrac{1}{\varepsilon}f(u)\right) = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T], \\ \partial_{\mathbf{n}} u \mid_{\partial\Omega} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [0,T], \\ \partial_{\mathbf{n}}\left(\varepsilon\mathcal{A}u + \dfrac{1}{\varepsilon}f(u)\right) \mid_{\partial\Omega} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0, & \text{in } \Omega \times \{t=0\}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\Omega \subset R^d(d = 2,3)$ 是具有利普希茨边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$\mathbf{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，算子 $\mathcal{A} := -\Delta$，界面宽度 $\varepsilon > 0$与实验室尺度的特征长度相比是一个小参数。非线性函数 $f(u) = F'(u) = u^3 - u$满足 $F(u) = \frac{1}{4}(u^2-1)^2,$，后者是双井势，并驱使解趋向两个纯态 $u = \pm 1$。

Cahn–Hilliard 方程由 Cahn 和 Hilliard 于 20 世纪 50 年代末提出，用于描述相分离过程 [6], ，现已成为工程和材料科学中的基础模型。它在许多其他领域也发挥着日益重要的作用[4, 13]。Cahn–Hilliard 方程可表示为 H^{-1}-梯度流，形式如下$u_t = \delta_u E(u)$，其中 $\delta_u E(u)$ 是总自由能泛函的变分导数

$$E(u) = \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}F(u)\right) dx.$$

众所周知，满足给定边界条件的 Cahn–Hilliard 方程 (1.1) 具有如下能量耗散定律：

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -(u_t, u_t) \le 0.$$

高效且易于实现的 Cahn–Hilliard 方程数值方法面临若干挑战，包括高阶导数、非线性反应项$f(u)$以及参数 ε 较小的问题。为克服这些挑战，人们研究了多种空间离散方法，包括有限差分方法 [10], 、有限元方法 [11, 16, 25, 33], 、间断伽辽金方法 [14, 15, 28], 和谱方法[12]。处理非线性的方法包括凸分裂方法 [18], 、稳定化方法 [32], 、不变能量正则化（IEQ）方法 [35, 28], 以及标量辅助变量（SAV）方法 [21, 30, 31]。Cahn–Hilliard 方程的数值近似已得到广泛研究，但高效且准确的方法仍是一个活跃的研究领域。

梯度流模型（包括 Cahn–Hilliard 方程和 Allen–Cahn方程）中的参数 ε 较小，会导致界面层现象。为了准确模拟这些方程所描述的宏观过程，必须采用自适应技术，根据界面宽度 ε调整空间网格尺寸和时间步长。近年来，已有一些关于后验误差估计子和自适应

方法被提出。Feng 和 Wu [17] 针对 Cahn–Hilliard 方程的协调有限元和混合有限元逼近，提出了残量型后验误差估计。文献 [8] 针对 Allen–Cahn方程提出了一种基于超收敛簇恢复（SCR）的后验误差估计方法，以及一种时空自适应有限元算法。SCR 方法可得到超收敛恢复梯度，从而构造出渐近精确的基于 SCR 的误差估计子。文献 [8] 主要致力于设计一种基于基于 SCR 的误差估计子的自适应算法，而时间自适应的误差指示子仅根据两个时间层上的近似解构造。

本文针对 Cahn–Hilliard 方程的 Crank-Nicolson 有限元方法，提出了一种新颖的基于 SCR 的恢复型后验误差估计器。该后验误差估计子利用椭圆重构技术和时间重构技术推导而得，因此构造出的后验误差估计子具有更高的精度和效率。椭圆重构技术将有限元近似与精确解之间的误差分为两类：椭圆型误差和抛物型误差。其核心思想是利用已有的椭圆型后验误差估计子估计椭圆型误差，同时通过抛物型能量估计控制抛物型误差。在 [9], 中，针对 Allen–Cahn方程引入了一种利用两个时间层近似值的时间重构技术，由此构造出时间离散的一阶后验误差估计子。本文采用涉及三个时间层近似值的时间重构技术 [29], ，从而构造出时间离散的二阶后验误差估计子。我们将推导出的后验误差估计子用作误差指示子，并提出一种高效的时空自适应算法来求解 Cahn–Hilliard 方程。数值结果表明，所提出的恢复型后验误差估计器比残差型误差估计子和仅空间自适应算法更有效。此外，结果还表明，采用时间步自适应对于获得 Cahn–Hilliard 方程的精确数值解至关重要。

本文结构安排如下：第 2 节介绍用于离散 Cahn–Hilliard 方程的 Crank-Nicolson 有限元方法，随后介绍针对非线性椭圆问题的椭圆重构及其性质。第 3 节基于椭圆重构和时间重构技术，推导 Cahn–Hilliard 方程的最优后验误差估计。基于所得误差估计器，我们提出一种时空自适应算法。第 4 节给出若干数值算例，以验证所提出的误差指示子及相应时空自适应算法的准确性和有效性。第 5 节给出总结性评论。最后，在附录 A 中，我们给出定理 3.2 的证明。

2. The discrete scheme and elliptic reconstruction

对于有界区域 $\Omega \subset R^d$，我们采用 Sobolev 空间$W^{m,\,p}(\Omega)$ 的标准记号，其配备范数 $\|\cdot\|_{m,\,p,\,\Omega}$ 和半范数$|\cdot|_{m,\,p,\,\Omega}$。若 $p=2$，则令$W^{m,\,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$，$\|\cdot\|_{m,\,p,\,\Omega} = \|\cdot\|_{m,\,\Omega}$ 且$|\cdot|_{m,\,p,\,\Omega} = |\cdot|_{m,\,\Omega}$。此外，若 $m=2$，则取$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,\,\Omega}$。

通过引入化学势

$$w := \varepsilon \mathcal{A}u + \frac{1}{\varepsilon} f(u), \tag{2.1}$$

我们可以得到（1.1）的等价形式，

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}w = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T], \\ \partial_{\mathbf{n}} w\,|_{\partial\Omega} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [0,T], \\ \varepsilon \mathcal{A}u + \dfrac{1}{\varepsilon} f(u) - w = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T], \\ \partial_{\mathbf{n}} u\,|_{\partial\Omega} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0, & \text{in } \Omega \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.1. Crank-Nicolson 有限元格式。对于齐次 Neumann 边界条件，问题（2.2）理解为以下弱形式：求 $(u,\ w) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$，使得

$$\begin{cases} (u_t, v) + (\nabla w, \nabla v) = 0, & \forall v \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon(\nabla u, \nabla \varphi) + \dfrac{1}{\varepsilon}\big(f(u), \varphi\big) - (w, \varphi) = 0, & \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

设 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的形状正则三角剖分，V_h 是相应的有限元空间，其定义为

$$V_h := \left\{ v \in H^1(\Omega), v|_K \in P_1(K), \forall\ K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

其中，$P_1(K)$ 表示在 K 中定义的线性多项式集合。(2.2) 的半离散有限元格式如下：求 $(u_h, w_h) \in V_h \times V_h$，使得

$$\begin{cases} (u_{h,t}, v_h) + (\nabla w_h, \nabla v_h) = 0, & \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon(\nabla u_h, \nabla \varphi_h) + \dfrac{1}{\varepsilon}\big(f(u_h), \varphi_h\big) - (w_h, \varphi_h) = 0, & \forall \varphi_h \in V_h, \\ (u_h(x,0) - u_0, \phi_h) = 0, & \forall \phi_h \in V_h. \end{cases} \tag{2.4}$$

通常，我们将格式 (2.4) 改写为其逐点形式

$$\begin{cases} u_{h,t} + A w_h = 0, \\ \varepsilon A u_h + \dfrac{1}{\varepsilon} P f(u_h) - w_h = 0, \\ u_h(x,0) = u_h^0 := P u_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中，有限维空间算子 A: $V_h \to V_h$ 是通过 V_h 中的 Riesz 表示定义的离散拉普拉斯算子，定义为

$$\langle Av, \Phi \rangle = a(v, \Phi), \qquad \forall \Phi \in V_h,$$

且 P: $L^2(\Omega) \to V_h$ 是 $L^2(\Omega)$-投影算子，使得对于每个 $v \in L^2(\Omega)$，我们有 e

$$\langle Pv, \Phi \rangle = \langle v, \Phi \rangle, \qquad \forall \Phi \in V_h.$$

我们将时间区间 $[0,T]$ 划分为 N 个连续相邻的子区间，其端点记为 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$，第 n 个时间区间为$I_n := [t_{n-1}, t_n]$，相应的时间步定义为 $\tau_n := t_n - t_{n-1}$。Crank–Nicolson 有限元方法旨在求出函数序列 $(u_h^n,\ w_h^n) \in V_h^n \times V_h^n$，使得对于每个 $n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ N$,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n}, v_h\right) + \dfrac{1}{2}\left(\nabla w_h^n + \nabla w_h^{n-1}, \nabla v_h\right) = 0, & \forall v_h \in V_h^n, \\ \dfrac{\varepsilon}{2}\left(\nabla u_h^n + \nabla u_h^{n-1}, \nabla \varphi_h\right) + \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{f(u_h^n) + f(u_h^{n-1})}{2}, \varphi_h\right) & \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\left(w_h^n + w_h^{n-1}, \varphi_h\right) = 0, & \forall \varphi_h \in V_h^n, \\ u_h(x,0) = u_h^0. & \end{cases} \tag{2.6}$$

与半离散格式类似，完全离散格式可以写成如下逐点形式

$$\begin{cases} \dfrac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + \dfrac{1}{2}\left(A^n w_h^n + A^{n-1} w_h^{n-1}\right) = 0, \\ \dfrac{\varepsilon}{2}\left(A^n u_h^n + A^{n-1} u_h^{n-1}\right) + \dfrac{P^n f(u_h^n) + P^{n-1} f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon} & \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\left(w_h^n + w_h^{n-1}\right) = 0, & \\ u_h(x,0) = u_h^0, & \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 A^n: $V_h^n \to V_h^n$定义为离散拉普拉斯算子，P^n: $L^2(\Omega) \to V_h^n$表示 $L^2(\Omega)$-投影算子。

2.2. 椭圆重构。非线性演化方程 (1.1) 对应的稳态非线性椭圆问题如下：给定 $g \in L^2(\Omega)$、$r \in L^2(\Omega)$，求 $(\mu, \nu) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$，使得

$$\begin{cases} \mathcal{A}\nu + \nu = g, & \text{in } \Omega, \\ \varepsilon \mathcal{A}\mu + \dfrac{1}{\varepsilon} h(\mu) - \nu = r, & \text{in } \Omega, \\ \nabla \mu \cdot \mathbf{n} = 0,\ \nabla \nu \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

其中 $h(\mu) := \mu^3$。椭圆问题 (2.8) 的弱形式为：求 $(\mu, \nu) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$，使得

$$(\nabla\nu, \nabla v) + (\nu, v) = \langle g, v\rangle, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{2.9}$$

$$\varepsilon(\nabla\mu, \nabla\varphi) + \frac{1}{\varepsilon}(h(\mu), \varphi) - (\nu, \varphi) = \langle r, \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{2.10}$$

注2.1。 变分问题 (2.9)-(2.10) 的适定性可推导如下。由于变分问题 (2.9) 是泛函的 Euler-Lagrange 方程

$$J(\nu) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\nu|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \nu^2 - \int_\Omega g\nu, \tag{2.11}$$

对泛函 $J(\nu)$ 求导，可得

$$\left(\frac{\delta J(\nu)}{\delta\nu}, v\right) = (\nabla\nu, \nabla v) + (\nu, v) - (g, v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.12}$$

注意到 $J(\nu)$ 是凸泛函，因此得证格式 (2.9) 的解唯一。至于变分问题 (2.10)，它是泛函的 Euler-Lagrange 方程

$$H(\mu) = \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla\mu|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega \mu^4 - \int_\Omega s\mu, \tag{2.13}$$

其中 $\int_\Omega s\mu := (\nu, \mu) + \langle r, \mu\rangle$。类似地，对泛函 $H(\mu)$ 求导，可得

$$\left(\frac{\delta H(\mu)}{\delta\mu}, \varphi\right) = \varepsilon(\nabla\mu, \nabla\varphi) + \frac{1}{\varepsilon}(h(\mu), \varphi) - (s, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{2.14}$$

由于 $H(\mu)$ 是凸泛函，因此得证格式 (2.10) 的解唯一。

椭圆问题 (2.8) 的有限元离散形式为：求 $(\mu_h, \nu_h) \in V_h \times V_h$，使得

$$\begin{cases} (\nabla\nu_h, \nabla v_h) + (\nu_h, v_h) = \langle g_h, v_h\rangle, & \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon(\nabla\mu_h, \nabla\varphi_h) + \frac{1}{\varepsilon}(h(\mu_h), \varphi_h) - (\nu_h, \varphi_h) = \langle r_h, \varphi_h\rangle, & \forall \varphi_h \in V_h. \end{cases} \tag{2.15}$$

定义 2.1. （梯度恢复后验估计函数）对于非线性椭圆问题 (2.8)，定义梯度恢复后验估计泛函

$$\mathcal{E}_v := \mathcal{E}[v, H^1(\Omega), V_h] := \|Gv - \nabla v\|, \qquad \forall v \in V_h, \tag{2.16}$$

其中 G是一个梯度恢复算子。

注释 2.2. 与 [26], 中一样，我们利用 $H^1(\Omega)$估计梯度恢复后验误差估计子泛函 $\mathcal{E}_v$的椭圆型后验误差。不过，值得注意的是，也可以采用其他方法在不同的函数空间中计算误差的上界和下界，例如 $L^2(\Omega)$和 $L^\infty(\Omega)$。

梯度恢复是一种后处理技术，因其作为后验误差估计子的稳健性、恢复导数的超收敛性以及实现上的高效性，在工程领域广受欢迎。该技术通过从有限元解重构梯度近似，以获得更精确的解。恢复技术不仅可用于提高近似质量，也可用于自适应计算中的后验误差估计。拉格朗日元有限元近似的梯度对真实梯度给出了不连续近似。已有多种梯度恢复技术，包括平均 [5, 22], 局部或全局投影 [20, 23], 后处理插值 [27, 34], 超收敛补丁恢复（SPR） [37], 多项式保持恢复（PPR） [38] 以及超收敛簇恢复（SCR） [24]。

假设 2.1. （椭圆型后验误差估计子）设 (μ, ν) 和 (μ_h, ν_h) 分别是非线性椭圆问题 (2.8) 的精确解和数值解， $\mathcal{E}$如定义 *2.1* 所定义，则存在常数 C_0 和 C_1，使得以下界成立

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mu_h - \mu)\| &\leq C_0 \mathcal{E}_\mu, \\ \|\nabla(\nu_h - \nu)\| &\leq C_1 \mathcal{E}_\nu. \end{aligned} \tag{2.17}$$

在 [19], 中，He 和 Zhou 推导了以下半线性椭圆问题的先验和后验有限元误差估计

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x,u) = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T], \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \times [0,T], \end{cases} \tag{2.18}$$

且如果非线性项 b 满足

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}} \left| b(x,y) - b(x,y_0) + \frac{\partial b}{\partial y}(x,y_0)(y_0 - y) \right| \lesssim (1 + \max\{|y|^s, |y_0|^s\})|y - y_0|^q, \ \forall y, \ y_0 \in R \tag{2.19}$$

with $q \in (1, 2]$, $s \in [0, 5-q]$, 则它具有以下 L^2 提升性质 .

引理 2.1. [19] （L^2 提升性质）若 $h_0 \ll 1$, $h \in (0, h_0]$, 则

$$\begin{aligned} \|\mu_h - \mu\| &\leq C_0 h \|\mu_h - \mu\|_{1,\Omega}, \\ \|\nu_h - \nu\| &\leq C_1 h \|\nu_h - \nu\|_{1,\Omega}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

其中 C_0、C_1 为常数，且 $h =$最大值$\{h_K, K \in \mathcal{T}_h\}$。

注2.3. 本文中，对于非线性椭圆问题 (2.8)，非线性项 $b(u) := h(u) = u^3$ 满足

$$b(y) - b(y_0) - b'(y_0)(y - y_0) = (2y_0 + y)(y - y_0)^2,$$

它是一致的 t，并满足条件 (2.19)，其中 $q=2$。因此，根据引理 2.1，我们有 e

$$\begin{aligned}\|\mu_h-\mu\|^2{}_{1,\Omega}&=\|\mu_h-\mu\|^2+\|\nabla(\mu_h-\mu)\|^2\\&\le C_0^2h^2\|\mu_h-\mu\|_{1,\Omega}^2+\|\nabla(\mu_h-\mu)\|^2,\\\|\nu_h-\nu\|^2{}_{1,\Omega}&=\|\nu_h-\nu\|^2+\|\nabla(\nu_h-\nu)\|^2\\&\le C_1^2h^2\|\nu_h-\nu\|_{1,\Omega}^2+\|\nabla(\nu_h-\nu)\|^2,\end{aligned}\tag{2.21}$$

因此，如果 h 足够小，则有

$$\begin{aligned}\|\mu_h-\mu\|_{1,\Omega}\le C_0\|\nabla(\mu_h-\mu)\|\le C_0\mathcal{E}_\mu,\\\|\nu_h-\nu\|_{1,\Omega}\le C_1\|\nabla(\nu_h-\nu)\|\le C_1\mathcal{E}_\nu.\end{aligned}\tag{2.22}$$

为了联系 Cahn–Hilliard 方程与椭圆重构梯度估计，我们采用椭圆重构技术。

定义 2.2.（椭圆重构）对于 $1\le n\le N$，给定离散椭圆算子A^n，其定义见 (2.7)，对每个 $(\chi、\ \vartheta)\in V_h^n\times V_h^n$，通过求解椭圆问题来定义相应的椭圆重构算子 $R^n:\ V_h^n\to H^1(\Omega)$，

$$\begin{cases}\mathcal{A}R^n\vartheta+R^n\vartheta=A^n\vartheta+\vartheta,\\\varepsilon\mathcal{A}R^n\chi+\dfrac{1}{\varepsilon}h(R^n\chi)-R^n\vartheta=\varepsilon A^n\chi+\dfrac{1}{\varepsilon}P^nh(\chi)-\vartheta,\end{cases}\tag{2.23}$$

它可写成弱形式:

$$\begin{cases}a(R^n\vartheta,v)+(R^n\vartheta,v)=\langle A^n\vartheta,v\rangle+(\vartheta,v),\ \forall v\in H^1(\Omega),\\\varepsilon a(R^n\chi,\varphi)+\dfrac{1}{\varepsilon}\left(h(R^n\chi),\varphi\right)-(R^n\vartheta,\varphi)=\varepsilon\langle A^n\chi,\varphi\rangle+\dfrac{1}{\varepsilon}\langle h(\chi),\varphi\rangle\\\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-\langle\vartheta,\varphi\rangle,\ \forall\varphi\in H^1(\Omega).\end{cases}\tag{2.24}$$

根据定义 2.2，显然，$(R^nu_h^n,R^nw_h^n)$ 和 (u_h^n,w_h^n) 分别是 (2.23) 的精确解和数值解。由假设 2.1 可得

$$\|\nabla(u_h^n-R^nu_h^n)\|\le C_0\mathcal{E}_u^n,\tag{2.25}$$

$$\|\nabla(w_h^n-R^nw_h^n)\|\le C_1\mathcal{E}_w^n,\tag{2.26}$$

其中 $\mathcal{E}_u^n,\ \mathcal{E}_w^n$ 分别按照定义 2.1 定义如下:

$$\mathcal{E}_u^n:=\|G^nu_h^n-\nabla u_h^n\|,\qquad\forall u_h^n\in V_h^n,\tag{2.27}$$

$$\mathcal{E}_w^n:=\|G^nw_h^n-\nabla w_h^n\|,\qquad\forall w_h^n\in V_h^n,\tag{2.28}$$

其中 $G^n:=G^{V_h^n}$。

3. A posteriori error estimation and adaptive algorithm

本节基于椭圆重构和时间重构技术，为 Cahn–Hilliard 方程推导恢复型后验误差估计，并基于所提出的后验误差估计进一步开发时空自适应算法。

3.1. 后验误差估计。离散解是一列有限元函数 $u_h^n \in V_h^n$，定义在每个离散时刻 t_n，$1 \le n \le N$。定义分片二次延拓 [29]

$$\begin{aligned} u_h(t) &:= \frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}u_h^n + \frac{t_n-t}{\tau_n}u_h^{n-1} + \frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\partial_n^2 u_h,\ t\in I_n,\ 1\le n\le N,\\ w_h(t) &:= \frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}w_h^n + \frac{t_n-t}{\tau_n}w_h^{n-1} + \frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\partial_n^2 w_h,\ t\in I_n,\ 1\le n\le N, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，项 $\partial_n^2\nu_h$ 定义为

$$\partial_n^2\nu_h := \frac{\frac{\nu_h^n-\nu_h^{n-1}}{\tau_n} - \frac{\nu_h^{n-1}-\nu_h^{n-2}}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}} \tag{3.2}$$

其中 $\nu_h^{-1}=\nu_h^0$ 为 $n=1$。

接下来，我们还定义

$$p^n := R^n u_h^n, \qquad q^n := R^n w_h^n, \qquad n=0,1,2,\dots,N, \tag{3.3}$$

并将该序列在时间上的分片二次重构记为 $p(t)$ 和 $q(t)$，即

$$\begin{aligned} p(t) &:= \frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}p^n + \frac{t_n-t}{\tau_n}p^{n-1} + \frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\partial_n^2 p, \quad t\in I_n,\ 1\le n\le N,\\ q(t) &:= \frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}q^n + \frac{t_n-t}{\tau_n}q^{n-1} + \frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\partial_n^2 q, \quad t\in I_n,\ 1\le n\le N. \end{aligned} \tag{3.4}$$

相应的全离散误差定义为

$$\begin{aligned} e_u &:= u_h(t) - u(t),\\ e_w &:= w_h(t) - w(t), \end{aligned} \tag{3.5}$$

利用椭圆重构 $p(t)$ 和 $q(t)$，可将其分解如下

$$\begin{aligned} e_u &= (p(t)-u(t)) - (p(t)-u_h(t)) := \rho_u - \epsilon_u,\\ e_w &= (q(t)-w(t)) - (q(t)-w_h(t)) := \rho_w - \epsilon_w. \end{aligned} \tag{3.6}$$

对于 (3.6) 中的各项，以下结果成立。

定理 3.1. *(*抛物误差恒等式*)* 对每个 $n = 1$、2、.. . 、 N 以及每个 $t \in (t_{n-1}$、 $t_n]$，都有

$$\begin{aligned}
\partial_t e_u + \mathcal{A}\rho_w &= \frac{A^n w_h^n - A^{n-1} w_h^{n-1}}{2} + \mathcal{A}(q(t) - q^n) + w_h^n - R^n w_h^n + (t - t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2 u_h, \\
\varepsilon\mathcal{A}\rho_u - \rho_w &= \varepsilon\frac{A^n u_h^n - A^{n-1} u_h^{n-1}}{2} + \frac{P^n f(u_h^n) - P^{n-1} f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon} - \frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{2} \\
&\quad + \varepsilon\mathcal{A}(p(t) - p^n) - (q(t) - q^n) + \frac{f(u) - f(p^n)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\left(u_h^n - p^n\right),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中， A^n 和 P^n 分别在 *(2.7)* 中定义。

证明。 对于 $n = 1$，2，...， N和 $t \in (t_{n-1}$， $t_n]$，根据 u_h^n 的定义，我们有

$$\partial_t u_h = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + (t - t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2 u_h,$$

利用全离散格式 (2.7)，可得

$$\begin{aligned}
\partial_t u_h + \mathcal{A}q^n + q^n =& \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + A^n w_h^n + w_h^n + (t - t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2 u_h \\
=& \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + \frac{A^n w_h^n + A^{n-1} w_h^{n-1}}{2} + \frac{A^n w_h^n - A^{n-1} w_h^{n-1}}{2} + w_h^n + (t - t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2 u_h \\
=& \frac{A^n w_h^n - A^{n-1} w_h^{n-1}}{2} + w_h^n + (t - t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2 u_h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\mathcal{A}p^n + \frac{1}{\varepsilon}h(p^n) - q^n &= \varepsilon A^n u_h^n + \frac{1}{\varepsilon}P^n h(u_h^n) - w_h^n \\
&= \varepsilon\frac{A^n u_h^n + A^{n-1} u_h^{n-1}}{2} + \varepsilon\frac{A^n u_h^n - A^{n-1} u_h^{n-1}}{2} + \frac{P^n h(u_h^n) + P^{n-1} f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon} \\
&\quad + \frac{P^n h(u_h^n) - P^{n-1} f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon} - \frac{w_h^n + w_h^{n-1}}{2} - \frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{2} \\
&= \varepsilon\frac{A^n u_h^n - A^{n-1} u_h^{n-1}}{2} + \frac{P^n f(u_h^n) - P^{n-1} f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon} - \frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{2} + \frac{1}{\varepsilon}u_h^n.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\partial_t u_h + \mathcal{A}q(t) &= \frac{A^n w_h^n - A^{n-1} w_h^{n-1}}{2} + \mathcal{A}(q(t) - q^n) + w_h^n - R^n w_h^n + (t - t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2 u_h, \\
\varepsilon\mathcal{A}p(t) + \frac{1}{\varepsilon}h(p^n) - q(t) &= \varepsilon\frac{A^n u_h^n - A^{n-1} u_h^{n-1}}{2} + \frac{P^n f(u_h^n) - P^{n-1} f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon} - \frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{2} \\
&\quad + \varepsilon\mathcal{A}(p(t) - p^n) - (q(t) - q^n) + \frac{1}{\varepsilon}u_h^n,
\end{aligned}$$

并从上述公式中减去（2.2），得到

$$\begin{aligned}\partial_t e_u + \mathcal{A}\rho_w &= \frac{A^n w_h^n - A^{n-1}w_h^{n-1}}{2} + \mathcal{A}(q(t)-q^n) + w_h^n - R^n w_h^n + (t-t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2 u_h,\\ \varepsilon\mathcal{A}\rho_u - \rho_w &= \varepsilon\frac{A^n u_h^n - A^{n-1}u_h^{n-1}}{2} + \frac{P^n f(u_h^n) - P^{n-1}f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon} - \frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{2}\\ &\quad + \varepsilon\mathcal{A}(p(t)-p^n) - (q(t)-q^n) + \frac{f(u)-f(p^n)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\left(u_h^n - p^n\right).\end{aligned}$$

□

于是我们得到以下结果。

定理 3.2。 设$(u_h^n, w_h^n)^{n\in[0:N]}$ 为全离散解，在每个离散时刻t_n定义，其分段线性延拓 u_h，w_h 定义为 (3.1)，并设 u，w 为模型问题(2.2)的精确解。假设$\Lambda_{CH} \in L^1(0,T)$ 是一个函数，使得对于几乎所有的 $t\in(0,T)$，我们有

$$-\overline{\Lambda}_{CH}(t) \le -\Lambda_{CH}(t) := \inf_{v\in\dot{V}\setminus\{0\}} \frac{\varepsilon\|\nabla v\|^2 + \varepsilon^{-1}(f'(u_h)v, v)}{\|\nabla\Delta^{-1}v\|^2},$$

并令

$$\begin{aligned}a(t) &:= \left(1 + \frac{5}{2\varepsilon^2} + 2\left(1-\varepsilon\right)\overline{\Lambda}_{CH}(t)\right),\\ \mu_g &:= \sup_{t\in(0,T)} \|\tilde{f}(u_h)\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

定义

$$\eta^2 := \|\nabla\Delta^{-1}e_u^0\|^2 + \sum_{n=1}^N 4\widetilde{\mathcal{E}_u^n}^2 + \sum_{n=1}^N \left(\eta_0^2 + \eta_1^2\right)\tau_n,$$

并假设

$$\eta^2 \le \frac{\varepsilon^{2/\sigma}}{(2\mu_g C_S(1+T))^{1/\sigma}}\left(8\exp\left(\int_0^T a(t)dt\right)\right)^{-1-\frac{1}{\sigma}},$$

then

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^2 + \int_0^T \frac{\varepsilon^2}{2}\|\nabla e_u\|^2 dt \le 8\eta^2\exp\left(\int_0^T a(t)dt\right), \tag{3.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\eta_0 :=& \gamma_w^n + \delta_w^n + \eta_w^n + \beta_u^n;\\ \eta_1 :=& \gamma_u^n + \xi_u^n + \beta_w^n + \theta_u^n + \delta_u^n + \alpha_u^n + \zeta_u^n;\\ \widetilde{\mathcal{E}_u^n}^2 :=& \frac{C_0^2}{3}\tau_n\left((\mathcal{E}_u^n)^2 + (\mathcal{E}_u^{n-1})^2 + \mathcal{E}_u^n\mathcal{E}_u^{n-1}\right)\\ &+ C_0^2\frac{\tau_n^2\tau_{n-1}\left(\mathcal{E}_u^n + \mathcal{E}_u^{n-1}\right) + \tau_n^3\left(\mathcal{E}_{u-1}^n + \mathcal{E}_u^{n-2}\right)}{6\tau_{n-1}(\tau_n+\tau_{n-1})}\left(\mathcal{E}_u^n + \mathcal{E}_u^{n-1}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C_0^2\tau_n^3\frac{\Big(\tau_{n-1}\Big(\mathcal{E}_u^n+\mathcal{E}_u^{n-1}\Big)+\tau_n\Big(\mathcal{E}_{u-1}^n+\mathcal{E}_u^{n-2}\Big)\Big)^2}{30\tau_{n-1}^2(\tau_n+\tau_{n-1})^2};\\
\gamma_w^n :=&\left\|\frac{A^nw_h^n-A^{n-1}w_h^{n-1}}{2}\right\|_{-1};\\
\beta_u^n :=&\left\|\frac{\tau_n^2}{8}\cdot\partial_n^2u_h\right\|_{-1};\\
\eta_w^n :=&\left\|(A^{n-1}w_h^{n-1}+w_h^{n-1})-(A^nw_h^n+w_h^n)\right\|_{-1}+\left\|\frac{\tau_n^2}{8}\partial_n^2(Aw_h+w_h)\right\|_{-1};\\
\delta_w^n :=&\left\|w_h^n-w_h^{n-1}\right\|_{-1}+\left\|\frac{\tau_n^2}{8}\partial_n^2w_h\right\|_{-1};\\
\delta_u^n :=&\left\|\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\varepsilon}\right\|;\\
\gamma_u^n :=&\varepsilon\left\|\frac{A^nu_h^n-A^{n-1}u_h^{n-1}}{2}\right\|;\\
\xi_u^n :=&\left\|\frac{P^nf(u_h^n)-P^{n-1}f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon}\right\|;\\
\beta_w^n :=&\left\|\frac{w_h^n-w_h^{n-1}}{2}\right\|;\\
\theta_u^n :=&2\left\|\left(\varepsilon A^{n-1}u_h^{n-1}+\frac{1}{\varepsilon}h(u_h^{n-1})-w_h^{n-1}\right)-\left(\varepsilon A^nu_h^n+\frac{1}{\varepsilon}h(u_h^n)-w_h^n\right)\right\|\\
&+\left\|\left(\varepsilon A^{n-1}u_h^{n-1}+\frac{1}{\varepsilon}h(u_h^{n-1})-w_h^{n-1}\right)-\left(\varepsilon A^{n-2}u_h^{n-2}+\frac{1}{\varepsilon}h(u_h^{n-2})-w_h^{n-2}\right)\right\|;\\
\alpha_u^n :=&\frac{1}{\varepsilon}C\left(\mathcal{E}_u^n+\mathcal{E}_u^{n-1}+\mathcal{E}_u^{n-2}\right);\\
\zeta_u^n :=&\left\|\frac{3(u_h^n)^2u_h^{n-1}-2(u_h^n)^3-(u_h^{n-1})^3}{\varepsilon}\right\|+\left\|\frac{3u_h^n(u_h^{n-1})^2-2(u_h^{n-1})^3-(u_h^n)^3}{\varepsilon}\right\|\\
&+\left\|\frac{\big(3(u_h^n)^2\partial_n^2u_h-3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h\big)\tau_n^2}{8\varepsilon}\right\|+\left\|\frac{\big(3(u_h^{n-1})^2\partial_n^2u_h-3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h\big)\tau_n^2}{8\varepsilon}\right\|\\
&+\left\|\frac{\Big(3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h-\frac{\frac{(u_h^n)^3-(u_h^{n-1})^3}{\tau_n}-\frac{(u_h^{n-1})^3-(u_h^{n-2})^3}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\Big)\tau_n^2}{8\varepsilon}\right\|\\
&+\left\|\frac{\big(3u_h^n(\partial_n^2u_h)^2-3u_h^{n-1}(\partial_n^2u_h)^2\big)\tau_n^4}{64\varepsilon}\right\|+\left\|\frac{\big(3u_h^{n-1}(\partial_n^2u_h)^2\big)\tau_n^4}{64\varepsilon}\right\|+\left\|\frac{(\partial_n^2u_h)^3\tau_n^6}{512\varepsilon}\right\|,
\end{aligned}
$$

这里， C_S、C 为与网格尺寸无关的常数， $\mathcal{E}_u^n:=\mathcal{E}[u_h^n]$ 按(2.27)定义。

该定理的证明见附录 A。

注 3.1. 定理 3.2 中的后验误差估计子可分为两类。项 $\gamma_w^n,\ \beta_u^n,\ \eta_w^n,\ \delta_w^n,\ \delta_u^n,\ \gamma_u^n,\ \xi_u^n,\ \beta_w^n,\ \theta_u^n,\ \zeta_u^n$视为时间离散的后验误差指示子，项 $\mathcal{E}_u^n$ 和 α_u^n 则为空间离散误差指示子。

3.2. **自适应算法**。 鉴于定理 3.2 的后验误差估计子，本节设计了时间步长控制和空间自适应算法。

我们依据误差均分策略调整时间步长，这意味着时间离散误差应均匀分配到各个时间区间（$t_{n-1}, t_n],\ n =1, 2, \ldots, N$。设 TOL_{time}为后验误差估计子中与时间离散相关部分（3.8）所允许的误差容限，即,

$$\sum_{n=1}^{N} \tau_n(\gamma_w^n + \beta_u^n + \eta_w^n + \delta_w^n + \delta_u^n + \gamma_u^n + \xi_u^n + \beta_w^n + \theta_u^n + \zeta_u^n)^2 \leq TOL_{time}. \tag{3.9}$$

通常，我们可以通过调整时间步长 τ_n ，使其满足以下关系，从而实现 (3.9)

$$\eta_{time}^n := \gamma_w^n + \beta_u^n + \eta_w^n + \delta_w^n + \delta_u^n + \gamma_u^n + \xi_u^n + \beta_w^n + \theta_u^n + \zeta_u^n \leq \sqrt{TOL_{time}/T} := TOL_t. \tag{3.10}$$

我们在算法 1 中总结了时间步长控制的步骤。

算法 1 时间步长控制

1: 给定容差 TOL_t**,** $TOL_{t,m} := \sqrt{TOL_{time,min}/T}$**，参数** $\delta_1 \in$**(0, 1),** $\delta_2 > 1$**；2: 设定** $\tau_n := \tau_{n-1}$**,** $t_n := t_{n-1} + \tau_n$**；3: 求解离散问题并计算时间误差估计量** η_{time}^n**；4: 当** $\eta_{time}^n > TOL_t$ **或** $\eta_{time}^n < TOL_{t,m}$**时，执行 5: 如果** $\eta_{time}^n > TOL_t$ **，则 6: 设定** $\tau_n := \delta_1 \cdot \tau_n$ **和** $t_n := t_{n-1} + \tau_n$**；7: 否则 8: 设定** $\tau_n := \delta_2 \cdot \tau_n$ **和** $t_n := t_{n-1} + \tau_n$**；9: 结束如果 10: 求解离散问题并计算时间误差估计量** η_{time}^n**；11: 结束循环**

令 TOL_{space} 为（3.8）中与空间离散相关的后验误差估计子部分所允许的容差。对于恢复型误差估计子，我们采用基于 SCR 的误差估计子。Huang 和 Yi 在 [24, 36], 提出了 SCR 梯度恢复法，该方法能够产生超收敛恢复梯度，进而提供渐近精确的基于 SCR 的误差估计子。与时间离散类似,

我们旨在使每个时间步 n满足以下关系，

$$\eta_{space}^{n} := \widetilde{\mathcal{E}_u^n} + \alpha_u^n \le \sqrt{TOL_{space}/T} := TOL_s. \tag{3.11}$$

给定加密参数和粗化参数 TOL_r、 TOL_c，我们分别采用以下最大标记策略，标记需要加密或粗化的单元。令

$$\eta_K^n := \|G^n u_h^n - \nabla u_h^n\|_K\,,\ \eta_{\max}^n := \max\{\eta_K^n, K \in \mathcal{T}_h^n\}, \tag{3.12}$$

选择单元 $\{K:\ \eta_K^n > TOL_r \times \eta_{\max}^n\}$ 进行加密，并选择单元$\{K:\ \eta_K^n < TOL_c \times \eta_{\max}^n\}$ 进行粗化。

根据上述误差指示子，我们为 Cahn–Hilliard 方程设计了以下时空自适应算法，详见算法 2。

4. 数值例子

本节给出三个算例，以展示基于定理 3.2 后验误差估计子的自适应算法的可靠性和有效性。在例4.1中，我们通过数值计算考察空间和时间离散误差指示子的主要部分。在例 4.2 中，我们重点说明基于恢复型后验误差估计子的效率，以及时空自适应的必要性，并分别将其与残差型方法和仅空间自适应进行比较。我们提供相应的数值结果，包括离散能量历史、节点数和时间步长的变化、数值解、自适应网格及 CPU 时间，以支持我们的结论。在最后一个算例中，我们将所提出的时空自适应算法应用于三维 Cahn–Hilliard 方程。

在所有示例中，我们取参数

$$\delta_1 = \frac{1}{2}, \qquad \delta_2 = 2,$$

其余参数将在各示例中给出。

示例 4.1. 考虑带有如下初始条件的 *Cahn–Hilliard* 方程 (2.2)

$$u_0(x,y) = \tanh\Big(\big((x-0.3)^2 + y^2 - 0.25^2\big)/\varepsilon\Big)\tanh\Big(\big((x+0.3)^2 + y^2 - 0.3^2\big)/\varepsilon\Big),$$

其中 $\Omega = [-1,1]^2$，参数为 $\varepsilon = 0.01$、 $TOL_t = 50$、 $TOL_{t,m} = 5$、 $TOL_s = 10$、$TOL_i = 0.002$。

我们应用所提出的时空自适应算法求解 Cahn–Hilliard 方程。 u 的数值解及其对应的自适应网格分别如图 1 所示。从图中可以看出，随着 u 移动，网格会跟随其零水平集。

算法 2 Cahn–Hilliard 方程的时空自适应算法

给定 TOL_t, $TOL_{t,m}$, TOL_s, TOL_i, $\delta_1 \in (0,1)$, $\delta_2 > 1$;
给定初始时间步 τ_0、初始网格 $\mathcal{T}_h^0$ 和初始解 u_h^0;
设 $n = 0$, $t_0 = 0$, $E(u_h^{-1}) = 0$;
计算初始误差估计器 $\eta^0_{\quad initial} = \|u_0 - u_h^0\|$;
细化 $\mathcal{T}_h^0$，得到满足 $\eta^0_{initial} \le TOL_i$ 的网格;
计算能量 $E(u_h^0)$;
当 $E(u_h^n) - E(u_h^{n-1}) > TOL_e$ **时**
  设定 $n := n+1$, $\mathcal{T}_h^n := \mathcal{T}_h^{n-1}$, $\tau_n := \tau_{n-1}$, $t_n := t_{n-1} + \tau_n$;
  求解离散问题并计算时间误差估计量 η^n_{time};
  当 $\eta^n_{time} > TOL_t$ 或 $\eta^n_{time} < TOL_{t,\ m}$ **时**
    如果 $\eta^n_{time} > TOL_t$，**则**
      令 $\tau_n := \delta_1 \cdot \tau_n$ 和 $t_n := t_{n-1} + \tau_n$;
    else
      令 $\tau_n := \delta_2 \cdot \tau_n$ 和 $t_n := t_{n-1} + \tau_n$;
    结束如果
    求解离散问题并计算时间误差估计量 η^n_{time};
  结束循环
  计算空间误差估计量 η^n_{space}, η^n_K 和 $\eta^n_{\max}$;
  当 $\eta^n_{\quad space} > TOL_s$ **执行**
    标记需要加密的单元;
    加密网格 $\mathcal{T}_h^n$ 以生成新网格 $\mathcal{T}_h^n$;
    在新网格 $\mathcal{T}_h^n$ 上使用数据 u_h^{n-1} 求解 u_h^n 的离散问题;
    计算时间误差估计量 η^n_{time};
    当 $\eta^n_{time} > TOL_t$ 或 $\eta^n_{time} < TOL_{t,\ m}$ **时**
      如果 $\eta^n_{time} > TOL_t$，**则**
        设置 $\tau_n := \delta_1 \cdot \tau_n$ 和 $t_n := t_{n-1} + \tau_n$;
      else
        设置 $\tau_n := \delta_2 \cdot \tau_n$ 和 $t_n := t_{n-1} + \tau_n$;
      结束条件判断
      求解离散问题并计算时间误差估计量 η^n_{time};
    结束循环
    计算空间误差估计量 η^n_{space}、η^n_K 和 $\eta^n_{\max}$;
  结束循环
  计算能量 $E(u_h^n)$;
  标记需要粗化的单元并进行粗化 $\mathcal{T}_h^n$，生成修改后的网格 $\mathcal{T}_h^n$;
结束 while

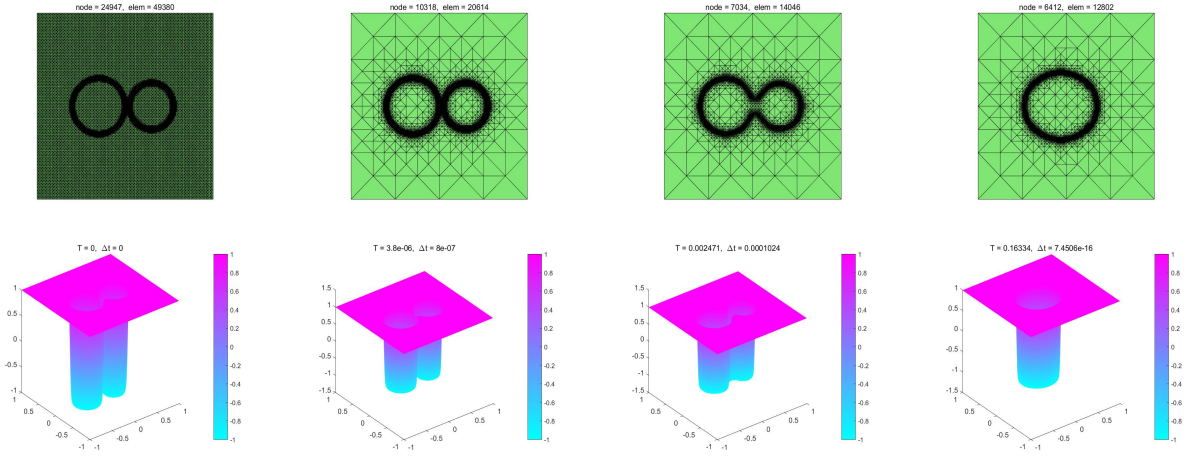

FIGURE 1. 例4.1，第一行：自适应网格；第二行： u的数值解快照。

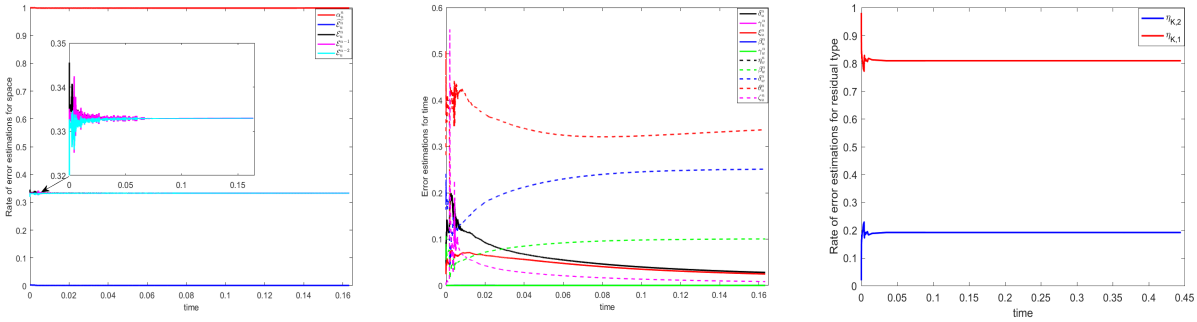

FIGURE 2. 例4.1。左：恢复型空间离散的误差指示子；中：恢复型时间离散的误差指示子；右：残差型空间离散的误差指示子。

根据定理 3.2，所提出的误差估计器包含十二项 ，

$$\eta_{time}^{n} = \gamma_{w}^{n} + \beta_{u}^{n} + \eta_{w}^{n} + \delta_{w}^{n} + \delta_{u}^{n} + \gamma_{u}^{n} + \xi_{u}^{n} + \beta_{w}^{n} + \theta_{u}^{n} + \zeta_{u}^{n},$$
$$\eta_{space}^{n} = \widetilde{\mathcal{E}_{u}^{n}} + \alpha_{u}^{n}.$$

我们通过数值方法研究哪些项是时空离散误差指示子的主要组成部分。同时，我们还测试了 [17], 中所给出的残差型误差估计子的性能，其中局部误差估计子定义为

$$\eta_{K,j}(t) = h_K \|R_{K,j}\|_{L^2(K)} + \sum_{\tau \in \partial K} \left(\frac{1}{2} h_\tau \|J_{\tau,j}\|_{L^2(\tau)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \tag{4.1}$$

其中单元残差为

$$
\begin{aligned}
R_{K,1} &= u_{h,t}|_K + \mathcal{A}(w_h(t)|_K), \\
R_{K,2} &= \mathcal{A}(u_h(t)|_K) + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u_h(t)|_K) - \frac{1}{\varepsilon} w_h(t)|_K,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

以及跨越 τ 的残差跳跃

$$
\begin{aligned}
J_{\tau,1}(t) &= \Big(\nabla w_h(t)|_{K_1} - \nabla w_h(t)|_{K_2} \Big) \cdot \mathbf{n}, \\
J_{\tau,2}(t) &= \Big(\nabla u_h(t)|_{K_1} - \nabla u_h(t)|_{K_2} \Big) \cdot \mathbf{n},
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

其中 $\mathbf{n}$ 是指向 K_1 到 K_2、垂直于 τ 的单位法向量。相应的总空间离散误差估计器取为

$$
\eta(t) = \Big(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big(\eta_{K,1}^2(t) + \eta_{K,2}^2(t) \big) \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4}
$$

图2展示了误差指示子的各个组成部分。结果表明：i）对于恢复型误差指示子，时间离散误差估计器 η_{time}^n 由 θ_u^n 主导，空间离散误差估计器 η_{space}^n 由 $\mathcal{E}_u^n$ 主导；ii）$\eta_{K,\,1}(t^n)$ 是残差型误差指示子 $\eta(t^n)$ 的主要部分。在以下示例中，我们分别采用 θ_u^n 作为时间离散误差指示子，采用 $\mathcal{E}_u^n$ 或 $\eta_{K,\,1}(t^n)$ 作为空间离散误差指示子。

例 4.2。 考虑模型方程 (2.2)，其参数为 $\Omega = [-1,1]^2$, $\varepsilon = 0.01$,$TOL_t = 50$, $TOL_{t,m} = 5$, $TOL_s = 4$, $TOL_i = 0.002$，初始条件为

$$
\begin{aligned}
u_0(x,y) = &\tanh\Big(\big((x-0.3)^2 + y^2 - 0.2^2 \big)/\varepsilon \Big) \tanh\Big(\big((x+0.3)^2 + y^2 - 0.2^2 \big)/\varepsilon \Big) \times \\
&\tanh\Big(\big(x^2 + (y-0.3)^2 - 0.2^2 \big)/\varepsilon \Big) \tanh\Big(\big(x^2 + (y+0.3)^2 - 0.2^2 \big)/\varepsilon \Big).
\end{aligned}
$$

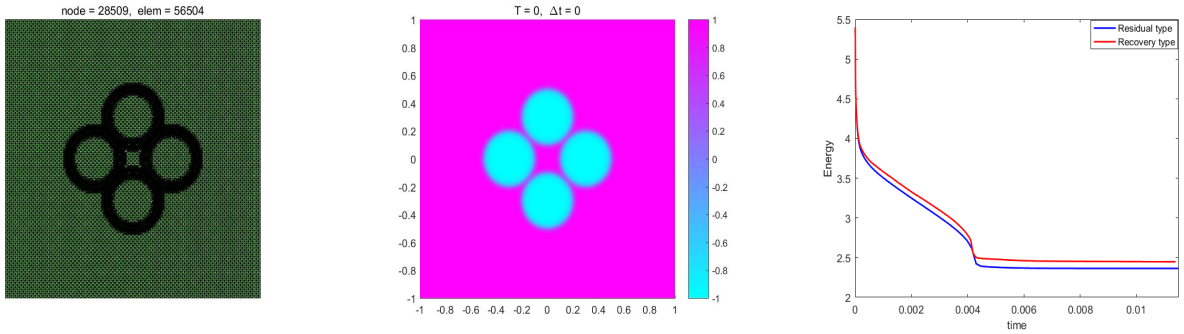

FIGURE 3. **示例 4.2**，左：初始网格；中：u_0 的等高线图；右：离散能量。

在本例中，我们比较恢复型后验误差估计子与残差型后验误差估计子。图3展示了初始网格、初始数值解的等值线图，以及

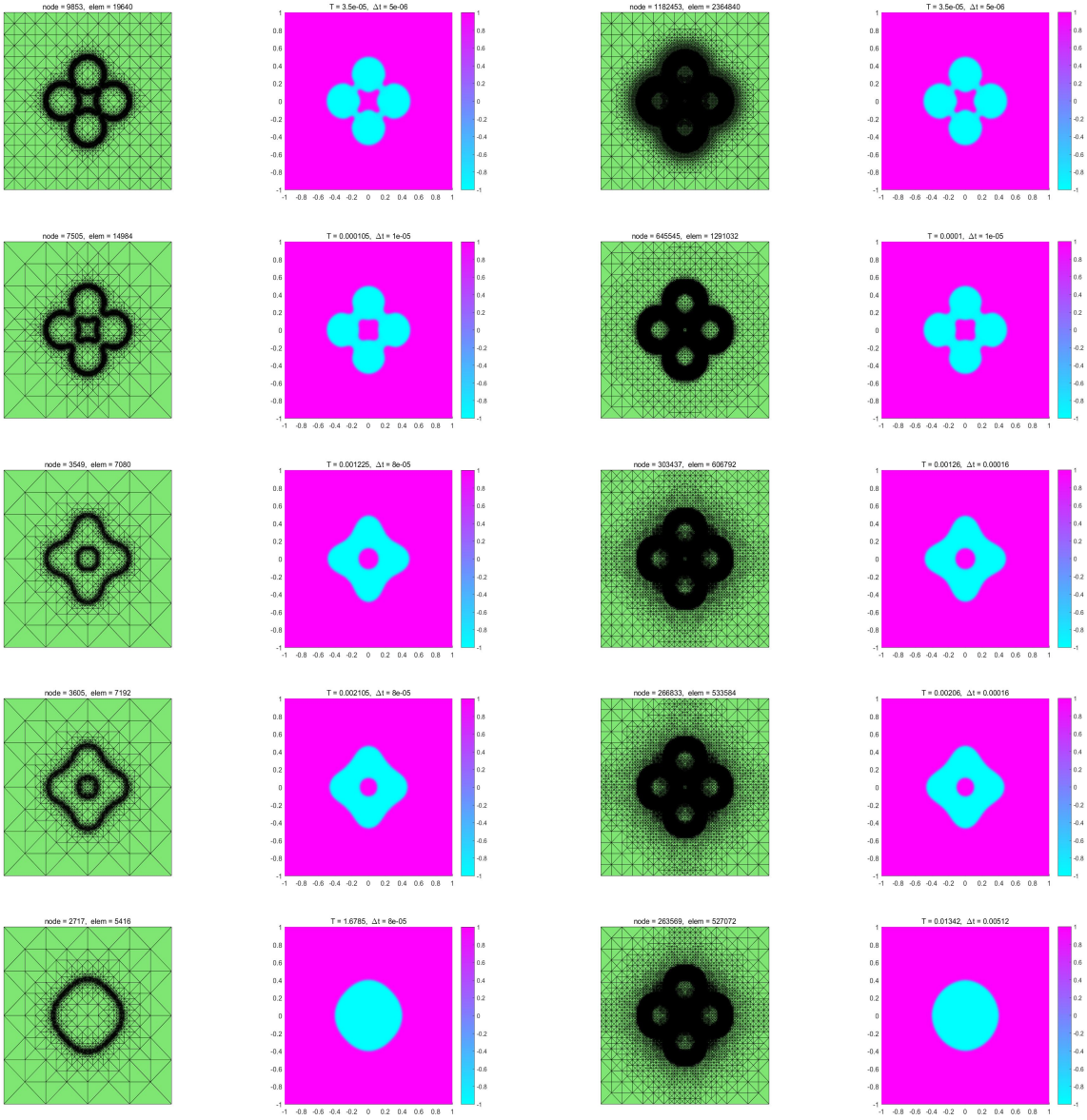

FIGURE 4. 例 4.2、自适应网格和数值解的快照；第一列和第二列：恢复型；第三列和第四列：残差型。

基于所提出的时空自适应算法得到的两种空间误差估计器对应的离散能量历史。我们可以清楚地看到，能量随时间递减。图4展示了时空自适应算法分别由空间离散的恢复型和残差型误差指示子引导所生成的自适应网格序列，以及相应近似解的等值线图。与残差型误差指示子相比，恢复型误差指示子引导的自适应网格与算法 2 的数值解更为吻合。相应的时间步长和节点数也显示在

图 5. 我们观察到，随着时间步长增大，恢复型方法所需的自由度远少于残差型方法，这表明恢复型后验误差估计明显优于残差型方法。

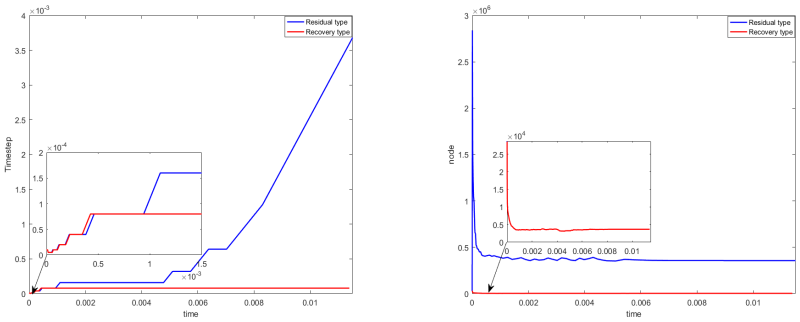

FIGURE 5. 例 4.2，左：时间步；右：节点数。

TABLE 1. 例 4.2（T=0.01），分别使用时空自适应算法和仅空间自适应时，两种方法所需的 CPU 时间（第 11 代 Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 @ 2.40GHz2.42GHz）。

CPU 时间	时空自适应	仅空间自适应
恢复型	389s	1095s
残差型	106975s	-

此外，我们评估了采用时空自适应的自适应算法的效率。表 1 报告了相应的 CPU 时间。我们观察到：i）基于所提出的恢复型误差估计子的时空自适应方法显著优于基于残差型误差指示子的自适应方法；ii）时空自适应比采用仅空间自适应的自适应方法更高效。

例 4.3。 在最后一个例子中，我们考虑三维 *Cahn–Hilliard* 方程(2.2)及以下初始条件

$$u_0(x,y,z) = \varepsilon \cos(1.5\pi x)\cos(1.5\pi y)\big(\sin(\pi z)+\sin(2\pi z)\big),$$

其中 $\Omega = [-1,1]^3$，参数为 $\varepsilon = 0.05$、$TOL_t = 20$、$TOL_{t,m} = 1$、$TOL_s = 1.5$、$TOL_i = 8e-5$。

图 6 展示了离散能量历史、时间步长以及节点数随时间变化的等值线图。显然，能量和节点数均随时间减少，而时间步长则随时间变化。图 7 展示了自适应网格序列及相应近似解的等值线图。我们观察到，网格会围绕零水平集进行自适应调整，这证实了

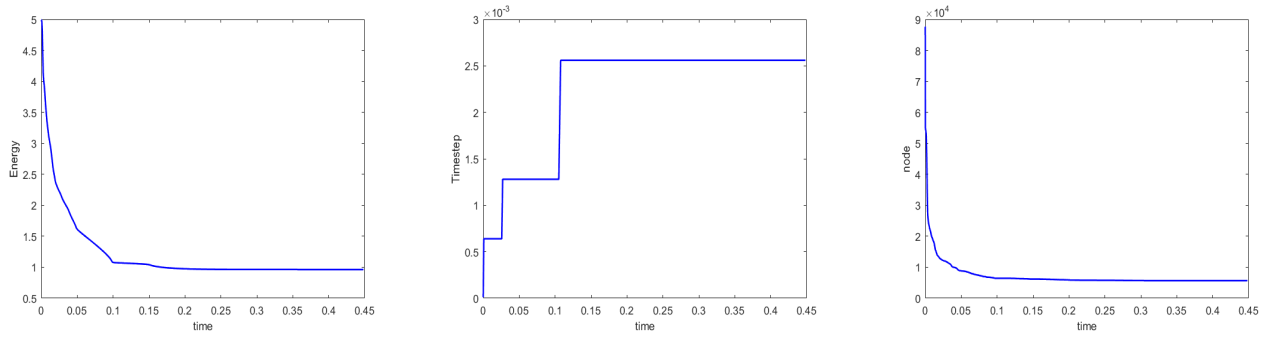

FIGURE 6. **例 4.3**，左：离散能量；中：时间步；右：节点数。

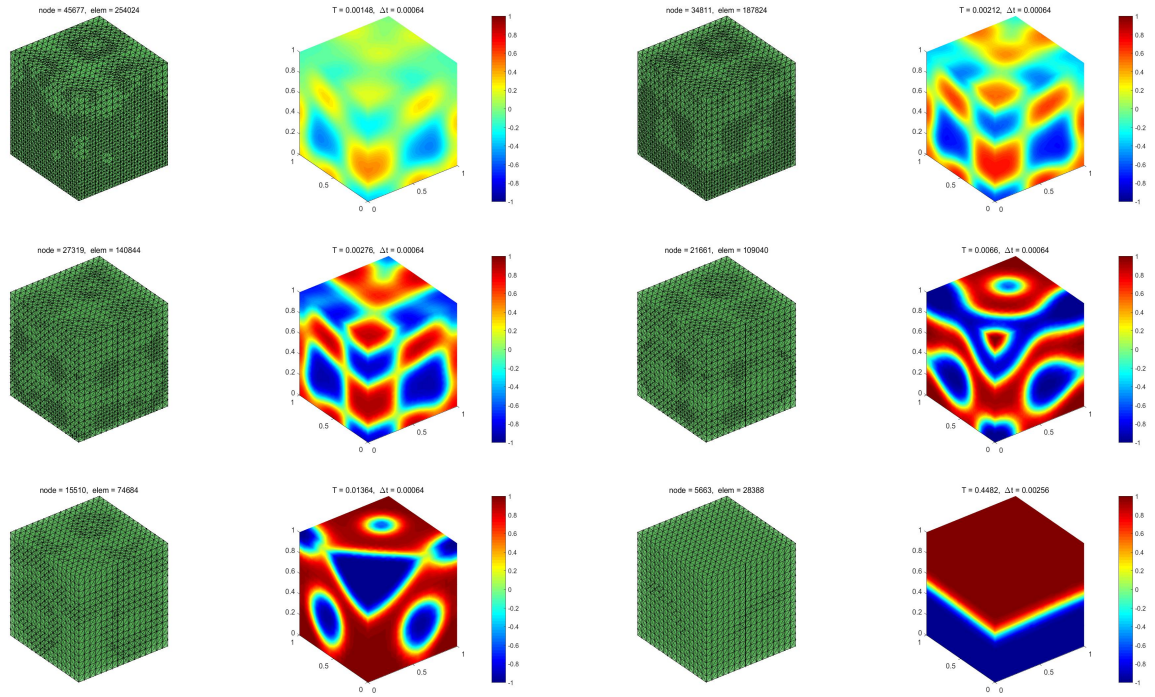

FIGURE 7. 例 4.3，数值解的自适应网格和快照。

针对三维 Cahn–Hilliard 方程所推导的后验误差估计和自适应算法的有效性。

5. CONCLUSIONS

本文为求解 Cahn–Hilliard 方程的 Crank-Nicolson 有限元方法推导了一种新颖的基于 SCR 的恢复型后验误差估计子。该误差估计子的推导采用了椭圆重构技术和时间

重构技术，该技术基于三个时间层上的近似，并得出了时间离散的二阶误差估计子。基于推导出的后验误差估计子，我们设计了一种高效的时空自适应算法。数值结果表明，恢复型后验误差估计子和时空自适应策略能够显著提高 Cahn–Hilliard 方程自适应算法的效率。值得注意的是，我们提出的时空自适应有限元方法优于基于残差型后验误差估计子的自适应有限元方法，也优于纯空间自适应有限元方法。这些结果证明，该方法在准确求解所研究的 Cahn–Hilliard 方程方面具有更高的效率。

Appendix A. Proof of Theorem 3.2

本节给出定理 3.2 的证明。首先，我们回顾以下结果。

引理 A.1. [2] 设 $\dot{V}:=\left\{\phi\in H^1(\Omega)\ \bar{\phi}:=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \phi dx=0\right\}$，则存在 $C_I>0$ 使得

对所有 $\phi\in V$，若 $d=\overline{2}$ 且对所有 $\phi\in V\cap L^\infty(\Omega)$，若 $d=3$，则有

$$\|\phi\|^3_{L^3(\Omega)}\le C_I\|\phi\|^{1-\sigma}_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\Delta^{-1}\phi\|^\sigma\|\nabla\phi\|^2, \tag{A.1}$$

其中，若 $\sigma=1$，则 $d=2$；若 $\sigma=\frac{4}{5}$，则 $d=3$。

引理 A.2. [3] *(广义 Gronwall 引理)* 设非负函数$y_1\in C([0,T])$、 y_2、 $y_3\in L^1(0、 T)$、 $a\in L^\infty(0、 T)$以及实数 $A\ge 0$满足

$$y_1(t)+\int_0^t y_2(s)ds\le A+\int_0^t a(s)y_1(s)ds+\int_0^t y_3(s)ds$$

对所有 $t\in[0,T]$。假设对于 $B\ge 0$， $\beta\ge 0$ 和每个 $t\in[0,T]$，我们有

$$\int_0^t y_3(s)ds\le B\sup_{s\in[0,t]}y_1^\beta(s)\int_0^t\left(y_1(s)+y_2(s)\right)ds.$$

令 $E:=e^{xp\left(\int_0^T a(s)\,ds\right)}$ 并假设 $8AE\le(8B(1+T)E)^{-1/\beta}$，则我们得到

$$\sup_{t\in[0,T]}y_1(t)+\int_0^T y_2(s)ds\le 8Aexp\left(\int_0^T a(s)ds\right).$$

现在，我们准备给出定理 3.2 的证明。

证明。根据（3.7），我们有

$$\begin{aligned}\partial_t e_u+\mathcal{A}e_w=&-\mathcal{A}\epsilon_w+\frac{A^nw_h^n-A^{n-1}w_h^{n-1}}{2}+\mathcal{A}(q(t)-q^n)+w_h^n-R^nw_h^n\\&+(t-t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2u_h,\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\varepsilon\mathcal{A}e_u-e_w=-\varepsilon\mathcal{A}\epsilon_u+\epsilon_w+\varepsilon\frac{A^nu_h^n-A^{n-1}u_h^{n-1}}{2}+\frac{P^nf(u_h^n)-P^{n-1}f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon}-\frac{w_h^n-w_h^{n-1}}{2}$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}(p(t)-p^n)-(q(t)-q^n)+\frac{f(u)-f(p^n)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\left(u_h^n-p^n\right). \tag{A.3}$$

为使结论清晰，我们将本证明剩余部分分为十一个步骤。

步骤 1：将 (A.2) 两边分别乘以 $-\Delta^{-1}e_u$ ，将 (A.3) 两边乘以 e_u，然后将所得方程相加，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^2+\varepsilon\|\nabla e_u\|^2=\left(\frac{A^nw_h^n-A^{n-1}w_h^{n-1}}{2},-\Delta^{-1}e_u\right)\\
&\quad+\left(\mathcal{A}(q(t)-q^n),-\Delta^{-1}e_u\right)+\left(w_h^n-R^nw_h^n,-\Delta^{-1}e_u\right)+\left((t-t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2u_h,-\Delta^{-1}e_u\right)\\
&\quad-\varepsilon a\left(\epsilon_u,e_u\right)+\varepsilon\left(\frac{A^nu_h^n-A^{n-1}u_h^{n-1}}{2},e_u\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(u_h^n-p^n,e_u\right)\\
&\quad+\left(\frac{P^nf(u_h^n)-P^{n-1}f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon},e_u\right)+\left(-\frac{w_h^n-w_h^{n-1}}{2},e_u\right)\\
&\quad+\left(\left(\varepsilon\mathcal{A}\left(p(t)-p^n\right)-\frac{1}{\varepsilon}\left(f(p^n)\frac{t_n-t}{\tau_n}-f(p^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n}\right)-(q(t)-q^n)\right),e_u\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(f(u_h^n)\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}+f(u_h^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n}-f(p^n)+f(p^n)\frac{t_n-t}{\tau_n}-f(p^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n}\right),e_u\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(f(u_h)-f(u_h^n)\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}-f(u_h^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n})\right),e_u\right)+\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(f(u)-f(u_h)\right),e_u\right),
\end{aligned}$$

对所有 $t\in(t_{n-1},t_n]$ 以及每个 $n=1,2,\ldots,N$。然后对 t 积分，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\nabla\Delta^{-1}e_u^N\|^2+\int_0^T\varepsilon\|\nabla e_u\|^2dt\\
=&\frac{1}{2}\|\nabla\Delta^{-1}e_u^0\|^2+\int_0^T\left(\frac{A^nw_h^n-A^{n-1}w_h^{n-1}}{2},-\Delta^{-1}e_u\right)dt\\
&+\int_0^T\left(w_h^n-R^nw_h^n,-\Delta^{-1}e_u\right)dt+\int_0^T\left((t-t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2u_h,-\Delta^{-1}e_u\right)dt\\
&+\int_0^T\left(\mathcal{A}(q(t)-q^n)+q(t)-q^n,-\Delta^{-1}e_u\right)dt+\int_0^T-\varepsilon a\left(\epsilon_u,e_u\right)dt\\
&+\int_0^T\left(q^n-q(t)-(w_h^n-w_h),-\Delta^{-1}e_u\right)dt+\int_0^T\left(w_h^n-w_h,-\Delta^{-1}e_u\right)dt\\
&+\int_0^T\varepsilon\left(\frac{A^nu_h^n-A^{n-1}u_h^{n-1}}{2},e_u\right)dt+\int_0^T\frac{1}{\varepsilon}\left(u_h^n-p^n,e_u\right)dt\\
&+\int_0^T\left(\frac{P^nf(u_h^n)-P^{n-1}f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon},e_u\right)dt+\int_0^T\left(-\frac{w_h^n-w_h^{n-1}}{2},e_u\right)dt\\
&+\int_0^T\left(\left(\varepsilon\mathcal{A}\Big(p(t)-p^n\Big)-\frac{1}{\varepsilon}\Big(h(p^n)\frac{t_n-t}{\tau_n}-h(p^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n}\right.\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\frac{\frac{h(p^n)-h(p^{n-1})}{\tau_n} - \frac{h(p^{n-1})-h(p^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\Big) - \Big(q(t)-q^n\Big)\Big), e_u\Big)dt \\
&+ \int_0^T \Big(\frac{1}{\varepsilon}\left(p^n - p^{n-1} - \left(u_h^n - u_h^{n-1}\right)\right)\frac{t_n-t}{\tau_n} + \frac{1}{2\varepsilon}(t-t_{n-1})(t-t_n) \\
&\Big(\frac{\frac{p^n-p^{n-1}}{\tau_n} - \frac{p^{n-1}-p^{n-2}}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}} - \frac{\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau_n} - \frac{u_h^{n-1}-u_h^{n-2}}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\Big), e_u\Big)dt + \int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u_h^n - u_h^{n-1}\right)\frac{t_n-t}{\tau_n}, e_u\right)dt \\
&\int_0^T \Big(\frac{1}{\varepsilon}\left(f(u_h^n)\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} + f(u_h^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n} - f(p^n) + f(p^n)\frac{t_n-t}{\tau_n} - f(p^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n}\right) \\
&+ \frac{1}{2\varepsilon}(t-t_{n-1})(t-t_n)\left(\frac{\frac{f(u_h^n)-f(u_h^{n-1})}{\tau_n} - \frac{f(u_h^{n-1})-f(u_h^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}} - \frac{\frac{f(p^n)-f(p^{n-1})}{\tau_n} - \frac{f(p^{n-1})-f(p^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\right), e_u\Big)dt \\
&\int_0^T \Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big(f(u_h) - f(u_h^n)\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n} - f(u_h^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n} - \frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n) \\
&\frac{\frac{f(u_h^n)-f(u_h^{n-1})}{\tau_n} - \frac{f(u_h^{n-1})-f(u_h^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\Big), e_u\Big)dt \\
&+ \int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}\left(f(u) - f(u_h)\right), e_u\right)dt \\
:=&\frac{1}{2}\|\nabla\Delta^{-1}e_u^0\|^2 + \mathcal{B}_1 + \cdots + \mathcal{B}_{17},
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &:= \int_0^T \left(w_h^n - R^n w_h^n, -\Delta^{-1}e_u\right)dt; \\
\mathcal{B}_2 &:= \int_0^T \left(\frac{A^n w_h^n - A^{n-1}w_h^{n-1}}{2}, -\Delta^{-1}e_u\right)dt; \\
\mathcal{B}_3 &:= \int_0^T \left((t-t_{n-\frac{1}{2}})\partial_n^2 u_h, -\Delta^{-1}e_u\right)dt; \\
\mathcal{B}_4 &:= \int_0^T \left(\mathcal{A}(q(t)-q^n) + q(t) - q^n, -\Delta^{-1}e_u\right)dt; \\
\mathcal{B}_5 &:= \int_0^T -\varepsilon a\left(\epsilon_u, e_u\right)dt; \\
\mathcal{B}_6 &:= \int_0^T \left(q^n - q(t) - (w_h^n - w_h), -\Delta^{-1}e_u\right)dt; \\
\mathcal{B}_7 &:= \int_0^T \left(w_h^n - w_h, -\Delta^{-1}e_u\right)dt; \\
\mathcal{B}_8 &:= \int_0^T \varepsilon\left(\frac{A^n u_h^n - A^{n-1}u_h^{n-1}}{2}, e_u\right)dt;
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{B}_9 := \int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\left(u_h^n - p^n, e_u\right) dt;$$

$$\mathcal{B}_{10} := \int_0^T \left(\frac{P^n f(u_h^n) - P^{n-1} f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon}, e_u\right) dt;$$

$$\mathcal{B}_{11} := -\int_0^T \left(\frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{2}, e_u\right) dt;$$

$$\mathcal{B}_{12} := \int_0^T \Big(\Big(\varepsilon\mathcal{A}\Big(p(t) - p^n\Big) - \frac{1}{\varepsilon}\Big(h(p^n)\frac{t_n - t}{\tau_n} - h(p^{n-1})\frac{t_n - t}{\tau_n} - \frac{1}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n)\frac{\frac{h(p^n)-h(p^{n-1})}{\tau_n} - \frac{h(p^{n-1})-h(p^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\Big) - \Big(q(t) - q^n\Big)\Big), e_u\Big) dt;$$

$$\mathcal{B}_{13} := \int_0^T \Big(\frac{1}{\varepsilon}\left(p^n - p^{n-1} - \left(u_h^n - u_h^{n-1}\right)\right)\frac{t_n - t}{\tau_n} + \frac{1}{2\varepsilon}(t - t_{n-1})(t - t_n) \Big(\frac{\frac{p^n-p^{n-1}}{\tau_n} - \frac{p^{n-1}-p^{n-2}}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}} - \frac{\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau_n} - \frac{u_h^{n-1}-u_h^{n-2}}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\Big), e_u\Big) dt;$$

$$\mathcal{B}_{14} := \int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u_h^n - u_h^{n-1}\right)\frac{t_n - t}{\tau_n}, e_u\right) dt;$$

$$\mathcal{B}_{15} := \int_0^T \Big(\frac{1}{\varepsilon}\left(f(u_h^n)\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} + f(u_h^{n-1})\frac{t_n - t}{\tau_n} - f(p^n) + f(p^n)\frac{t_n - t}{\tau_n} - f(p^{n-1})\frac{t_n - t}{\tau_n}\right) + \frac{1}{2\varepsilon}(t - t_{n-1})(t - t_n)\left(\frac{\frac{f(u_h^n)-f(u_h^{n-1})}{\tau_n} - \frac{f(u_h^{n-1})-f(u_h^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}} - \frac{\frac{f(p^n)-f(p^{n-1})}{\tau_n} - \frac{f(p^{n-1})-f(p^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\right), e_u\Big) dt;$$

$$\mathcal{B}_{16} := \int_0^T \Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big(f(u_h) - f(u_h^n)\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} - f(u_h^{n-1})\frac{t_n - t}{\tau_n} - \frac{1}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n)\frac{\frac{f(u_h^n)-f(u_h^{n-1})}{\tau_n} - \frac{f(u_h^{n-1})-f(u_h^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\Big), e_u\Big) dt;$$

$$\mathcal{B}_{17} := \int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}\left(f(u) - f(u_h)\right), e_u\right) dt.$$

接下来，我们分别估计各项 $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1,\ \cdots,\ 17}$。

步骤 2：首先，使用施瓦茨不等式对包含空间离散误差项的项 $\mathcal{B}_1$ 进行估计。

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}_1| &= \left|\int_0^T \left(w_h^n - R^n w_h^n, -\Delta^{-1} e_u\right) dt\right| \\ &= \left|\sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(w_h^n - R^n w_h^n, -\Delta^{-1} e_u\right) dt\right|\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w_h^n - R^n w_h^n\| \cdot \left\|\Delta^{-1} e_u\right\| dt$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} C_1 h \|w_h^n - R^n w_h^n\|_{1,\Omega} \left\|\Delta^{-1} e_u\right\| dt. \tag{A.5}$$

根据注 2.1，当 h 足够小时，可以忽略该项。同理，项 $\mathcal{B}_9$ 也可以忽略。

类似地，时间离散化项 $\mathcal{B}_2$ 和 $\mathcal{B}_3$ 可估计为

$$|\mathcal{B}_2| = \left| \int_0^T \left(\frac{A^n w_h^n - A^{n-1} w_h^{n-1}}{2}, -\Delta^{-1} e_u \right) dt \right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{A^n w_h^n - A^{n-1} w_h^{n-1}}{2} \right\|_{-1} \cdot \left\|\nabla \Delta^{-1} e_u\right\| dt$$
$$:= \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \gamma_w^n \left\|\nabla \Delta^{-1} e_u\right\| dt. \tag{A.6}$$

$$|\mathcal{B}_3| = \left| \int_0^T \left((t - t_{n-\frac{1}{2}}) \partial_n^2 u_h, -\Delta^{-1} e_u \right) dt \right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{\tau_n^2}{8} \cdot \partial_n^2 u_h \right\|_{-1} \cdot \left\|\nabla \Delta^{-1} e_u\right\| dt$$
$$:= \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \beta_u^n \left\|\nabla \Delta^{-1} e_u\right\| dt. \tag{A.7}$$

步骤 3: 对于项 $\mathcal{B}_4$，根据椭圆重构的定义，我们有 e

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_4| &= \left| \int_0^T \left(\mathcal{A}(q(t) - q^n) + q(t) - q^n, -\Delta^{-1} e_u \right) dt \right| \\
&= \Big| \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Big(\mathcal{A}\Big(\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} q^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} q^{n-1} + \frac{1}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n) \partial_n^2 q - q^n \Big) \\
&\quad + \Big(\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} q^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} q^{n-1} + \frac{1}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n) \partial_n^2 q - q^n \Big), -\Delta^{-1} e_u \Big) dt \Big| \\
&= \Big| \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Big((((\mathcal{A} R^{n-1} w_h^{n-1} + R^{n-1} w_h^{n-1}) - (\mathcal{A} R^n w_h^n + R^n w_h^n)) \frac{t_n - t}{\tau_n} \\
&\quad + \frac{1}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n)(\partial_n^2 \mathcal{A} q + \partial_n^2 q)), -\Delta^{-1} e_u \Big) dt \Big| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| (\mathcal{A} R^{n-1} w_h^{n-1} + R^{n-1} w_h^{n-1} - (\mathcal{A} R^n w_h^n + R^n w_h^n)) \frac{t_n - t}{\tau_n} + \frac{\tau_n^2}{8} \partial_n^2 (\mathcal{A} R w_h + R w_h) \right\|_{-1} \cdot \\
&\quad \left\|\nabla \Delta^{-1} e_u\right\| dt
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\Big(\big\|A^{n-1}w_h^{n-1}+w_h^{n-1}-(A^nw_h^n+w_h^n)\big\|_{-1}+\Big\|\frac{\tau_n^2}{8}\partial_n^2(Aw_h+w_h)\Big\|_{-1}\Big)\cdot \big\|\nabla\Delta^{-1}e_u\big\|\,dt$$

$$:=\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\eta_w^n\cdot\big\|\nabla\Delta^{-1}e_u\big\|\,dt. \tag{A.8}$$

步骤 4：项 $\mathcal{B}_5$ 给出了空间离散误差，其界如下

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_5| &= \left|-\int_0^T \varepsilon a(\epsilon_u,e_u)dt\right| \\
&= \left|-\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\varepsilon a(\epsilon_u,e_u)dt\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\varepsilon\|\nabla\epsilon_u\|\cdot\|\nabla e_u\|dt\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(2\|\nabla\epsilon_u\|^2+\frac{\varepsilon^2}{8}\|\nabla e_u\|^2\right)dt\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}2\left\|\nabla\epsilon_u\right\|^2dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\varepsilon^2}{8}\left\|\nabla e_u\right\|^2dt,
\end{aligned} \tag{A.9}$$

并且根据三角不等式以及算子 G 和 ∇的线性性，可得

$$\begin{aligned}
\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\nabla\epsilon_u\|^2dt &= \int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\nabla(p-u_h)\|^2dt \\
&= \int_{t_{n-1}}^{t_n}\Big\|\nabla\Big(\Big(R^nu_h^n-u_h^n\Big)\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}+\Big(R^{n-1}u_h^{n-1}-u_h^{n-1}\Big)\frac{t_n-t}{\tau_n} \\
&\quad+\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)(\partial_n^2p-\partial_n^2u_h)\Big)\Big\|^2dt \\
&\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n}\Big(\big\|\nabla\big(R^nu_h^n-u_h^n\big)\big\|^2\Big(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\Big)^2+\big\|\nabla\big(R^{n-1}u_h^{n-1}-u_h^{n-1}\big)\big\|^2\Big(\frac{t_n-t}{\tau_n}\Big)^2 \\
&\quad+\frac{(t-t_{n-1})^2(t-t_n)^2}{4}\|\partial_n^2\nabla p-\partial_n^2\nabla u_h\|^2 \\
&\quad+2\big\|\nabla\big(R^nu_h^n-u_h^n\big)\big\|\cdot\big\|\nabla\big(R^{n-1}u_h^{n-1}-u_h^{n-1}\big)\big\|\frac{(t-t_{n-1})(t_n-t)}{\tau_n^2} \\
&\quad+2\big\|\nabla\big(R^nu_h^n-u_h^n\big)\big\|\cdot\|\partial_n^2\nabla p-\partial_n^2\nabla u_h\|\frac{(t-t_{n-1})^2(t-t_n)}{2\tau_n} \\
&\quad+2\big\|\nabla\big(R^{n-1}u_h^{n-1}-u_h^{n-1}\big)\big\|\cdot\|\partial_n^2\nabla p-\partial_n^2\nabla u_h\|\frac{(t-t_{n-1})(t-t_n)^2}{2\tau_n}\Big)dt \\
&\leq C_0^2\left((\mathcal{E}_u^n)^2\frac{(t-t_{n-1})^3}{3(t_n-t_{n-1})^2}\,|_{t_{n-1}}^{t_n}-(\mathcal{E}_u^{n-1})^2\frac{(t_n-t)^3}{3(t_n-t_{n-1})^2}\,|_{t_{n-1}}^{t_n}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\mathcal{E}_u^n\mathcal{E}_u^{n-1}\frac{\frac{1}{2}(t_n+t_{n-1})t^2-\frac{1}{3}t^3-t_nt_{n-1}\cdot t}{(t_n-t_{n-1})^2}\Big|_{t_{n-1}}^{t_n}\Big)\\
&+\frac{\tau_n^3}{12}C_0\|\partial_n^2\nabla p-\partial_n^2\nabla u_h\|\Big(\mathcal{E}_u^n+\mathcal{E}_u^{n-1}\Big)+\frac{\tau_n^5}{120}\|\partial_n^2\nabla p-\partial_n^2\nabla u_h\|^2\\
\le&\frac{C_0^2}{3}\tau_n\left((\mathcal{E}_u^n)^2+(\mathcal{E}_u^{n-1})^2+\mathcal{E}_u^n\mathcal{E}_u^{n-1}\right)\\
&+C_0^2\frac{\tau_n^2\tau_{n-1}\Big(\mathcal{E}_u^n+\mathcal{E}_u^{n-1}\Big)+\tau_n^3\Big(\mathcal{E}_{u-1}^n+\mathcal{E}_u^{n-2}\Big)}{6\tau_{n-1}(\tau_n+\tau_{n-1})}\Big(\mathcal{E}_u^n+\mathcal{E}_u^{n-1}\Big)\\
&+C_0^2\tau_n^3\frac{\Big(\tau_{n-1}\Big(\mathcal{E}_u^n+\mathcal{E}_u^{n-1}\Big)+\tau_n\Big(\mathcal{E}_{u-1}^n+\mathcal{E}_u^{n-2}\Big)\Big)^2}{30\tau_{n-1}^2(\tau_n+\tau_{n-1})^2}\\
:=&\widetilde{\mathcal{E}_u^n}^2,
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

然后将 (A.10) 代入 (A.9)，可得

$$
|\mathcal{B}_6|\le\sum_{n=1}^N 2\widetilde{\mathcal{E}_u^n}^2+\sum_{n=1}^N\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\varepsilon^2}{8}\left\|\nabla e_u\right\|^2dt. \tag{A.11}
$$

类似地，空间离散误差项 $\mathcal{B}_6$ 估计如下

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_6|:=&\left|\int_0^T\left(q^n-q(t)-(w_h^n-w_h),-\Delta^{-1}e_u\right)dt\right|\\
=&\Big|\sum_{n=1}^N\int_{t_{n-1}}^{t_n}\Big(q^n-(q^n\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}+q^{n-1}\frac{t_n-t}{\tau_n}+\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\partial_n^2q)\\
&-(w_h^n-(w_h^n\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}+w_h^{n-1}\frac{t_n-t}{\tau_n}+\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\partial_n^2w_h)),-\Delta^{-1}e_u\Big)dt\Big|\\
=&\Big|\sum_{n=1}^N\int_{t_{n-1}}^{t_n}\Big(\Big(q^n-w_h^n\Big)\frac{t_n-t}{\tau_n}-\Big(q^{n-1}-w_h^{n-1}\Big)\frac{t_n-t}{\tau_n}\\
&-\frac{(t-t_{n-1})(t-t_n)}{2}(\partial_n^2q-\partial_n^2w_h),-\Delta^{-1}e_u\Big)dt\Big|\\
\le&\sum_{n=1}^N\int_{t_{n-1}}^{t_n}\Big(\|q^n-w_h^n\|\cdot\|\Delta^{-1}e_u\|+\|q^{n-1}-w_h^{n-1}\|\cdot\|\Delta^{-1}e_u\|\\
&+\|\frac{\tau_n^2}{8}\partial_n^2(q-w_h)\|\cdot\|\Delta^{-1}e_u\|\Big)dt\\
\le&\sum_{n=1}^N\int_{t_{n-1}}^{t_n}\Big(Ch\left\|q^n-w_h^n\right\|_{1,\Omega}+Ch\left\|q^{n-1}-w_h^{n-1}\right\|_{1,\Omega}\\
&+Ch\|\frac{\tau_n^2}{8}\partial_n^2(q-w_h)\|_{1,\Omega}\Big)\left\|\Delta^{-1}e_u\right\|dt.
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

根据注 2.1，当 h 足够小时，可以忽略它。同理，项 $\mathcal{B}_{13}$ 也可以忽略。

第5步：时间离散化项 $\mathcal{B}_7$ 有如下界

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_7| &= \left| \int_0^T \left(w_h^n - w_h, -\Delta^{-1} e_u \right) dt \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left((w_h^n - w_h^{n-1}) \frac{t_n - t}{\tau_n} - \frac{1}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n) \partial_n^2 w_h, -\Delta^{-1} e_u \right) dt \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\left\| w_h^n - w_h^{n-1} \right\|_{-1} + \left\| \frac{\tau_n^2}{8} \partial_n^2 w_h \right\|_{-1} \right) \left\| \nabla \Delta^{-1} e_u \right\| dt \\
&:= \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \delta_w^n \cdot \left\| \nabla \Delta^{-1} e_u \right\| dt. \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}$$

类似地，项 $\mathcal{B}_{14}$、 $\mathcal{B}_8$、 $\mathcal{B}_{10}$、 $\mathcal{B}_{11}$ 也都是时间离散化项，并按如下方式进行估计

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{14}| &= \left| \int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(u_h^n - u_h^{n-1} \right) \frac{t_n - t}{\tau_n}, e_u \right) \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\varepsilon} \right\| \| e_u \| \, dt \\
&:= \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \delta_u^n \cdot \| e_u \| \, dt, \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_8| &= \left| \int_0^T \varepsilon \left(\frac{A^n u_h^n - A^{n-1} u_h^{n-1}}{2}, e_u \right) dt \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varepsilon \left\| \frac{A^n u_h^n - A^{n-1} u_h^{n-1}}{2} \right\| \cdot \| e_u \| \, dt \\
&:= \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \gamma_u^n \| e_u \| \, dt, \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{10}| &= \left| \int_0^T \left(\frac{P^n f(u_h^n) - P^{n-1} f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon}, e_u \right) dt \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{P^n f(u_h^n) - P^{n-1} f(u_h^{n-1})}{2\varepsilon} \right\| \| e_u \| \, dt \\
&:= \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \xi_u^n \cdot \| e_u \| \, dt, \qquad \text{(A.16)}
\end{aligned}$$

$$|\mathcal{B}_{11}| = \left| - \int_0^T \left(\frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{2}, e_u \right) dt \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{2} \right\| \|e_u\| \, dt$$
$$:= \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \beta_w^n \cdot \|e_u\| \, dt. \tag{A.17}$$

步骤 6：项 $\mathcal{B}_{12}$也包含时间离散化项，利用 w^n、 w 和 R^n的定义进行估计，

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{12}| &= \Big| \int_0^T \Big(\Big(\varepsilon \mathcal{A}\Big(p(t) - p^n\Big) - \frac{1}{\varepsilon}\Big(h(p^n)\frac{t_n - t}{\tau_n} - h(p^{n-1})\frac{t_n - t}{\tau_n} \\
&\quad - \frac{1}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n)\frac{\frac{h(p^n)-h(p^{n-1})}{\tau_n} - \frac{h(p^{n-1})-h(p^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\Big) - \Big(q(t) - q^n\Big)\Big), e_u\Big) dt \Big| \\
&= \Big| \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Big(\Big(\varepsilon \mathcal{A}\Big(p^n \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} + p^{n-1}\frac{t_n - t}{\tau_n} + \frac{1}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n)\partial_n^2 p - p^n \Big) \\
&\quad - \frac{1}{\varepsilon}\Big(h(p^n) - h(p^{n-1})\Big)\frac{t_n - t}{\tau_n} + \frac{1}{2\varepsilon}(t - t_{n-1})(t - t_n)\frac{\frac{h(p^n)-h(p^{n-1})}{\tau_n} - \frac{h(p^{n-1})-h(p^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}} \\
&\quad - \Big(q^n \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} + q^{n-1}\frac{t_n - t}{\tau_n} + \frac{1}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n)\partial_n^2 q - q^n \Big)\Big), e_u\Big) dt \Big| \\
&= \Big| \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Big(\Big(\big(\varepsilon \mathcal{A} R^{n-1} u_h^{n-1} + \frac{1}{\varepsilon} h(R^{n-1}u_h^{n-1}) - q^{n-1} \big) - \big(\varepsilon \mathcal{A} R^n u_h^n + \frac{1}{\varepsilon} h(R^n u_h^n) - q^n \big) \Big) \frac{t_n - t}{\tau_n} \\
&\quad + \frac{\frac{(\varepsilon \mathcal{A} p^n + \frac{h(p^n)}{\varepsilon} - q^n) - (\varepsilon \mathcal{A} p^{n-1} + \frac{h(p^{n-1})}{\varepsilon} - q^{n-1})}{\tau_n} - \frac{(\varepsilon \mathcal{A} p^{n-1} + \frac{h(p^{n-1})}{\varepsilon} - q^{n-1}) - (\varepsilon \mathcal{A} p^{n-2} + \frac{h(p^{n-2})}{\varepsilon} - q^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}} \\
&\quad \frac{(t - t_{n-1})(t - t_n)}{2}, e_u\Big) dt \Big| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Big(2 \Big\| \Big(\varepsilon A^{n-1} u_h^{n-1} + \frac{1}{\varepsilon} h(u_h^{n-1}) - w_h^{n-1} \Big) - \Big(\varepsilon A^n u_h^n + \frac{1}{\varepsilon} h(u_h^n) - w_h^n \Big) \Big\| \\
&\quad + \Big\| \Big(\varepsilon A^{n-1} u_h^{n-1} + \frac{1}{\varepsilon} h(u_h^{n-1}) - w_h^{n-1} \Big) - \Big(\varepsilon A^{n-2} u_h^{n-2} + \frac{1}{\varepsilon} h(u_h^{n-2}) - w_h^{n-2} \Big) \Big\| \Big) \cdot \|e_u\| dt \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \theta_u^n \cdot \|e_u\| dt.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

步骤 7：项 $\mathcal{B}_{15}$ 也会产生时间离散误差，可利用拉格朗日中值定理和嵌入定理进行估计。

$$|\mathcal{B}_{16}| = \Big| \int_0^T \Big(\frac{1}{\varepsilon} \Big(f(u_h^n)\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} + f(u_h^{n-1})\frac{t_n - t}{\tau_n} - f(p^n) + f(p^n)\frac{t_n - t}{\tau_n} - f(p^{n-1})\frac{t_n - t}{\tau_n} \Big)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2\varepsilon}(t-t_{n-1})(t-t_n)\left(\frac{\frac{f(u_h^n)-f(u_h^{n-1})}{\tau_n}-\frac{f(u_h^{n-1})-f(u_h^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}-\frac{\frac{f(p^n)-f(p^{n-1})}{\tau_n}-\frac{f(p^{n-1})-f(p^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\right)e_u\Big)dt\Big| \\
\le&\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n\varepsilon}\left(f(u_h^n)-f(p^n)\right),e_u\right)dt\right|+\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{t_n-t}{\tau_n\varepsilon}\left(f(u_h^{n-1})-f(p^{n-1})\right),e_u\right)dt\right| \\
&+\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{1}{2\varepsilon}(t-t_{n-1})(t-t_n)\frac{\frac{f(u_h^n)-f(p^n)}{\tau_n}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}},e_u\right)dt\right| \\
&+\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{1}{\varepsilon}(t-t_{n-1})(t-t_n)\frac{\frac{f(u_h^{n-1})-f(p^{n-1})}{\tau_n}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}},e_u\right)dt\right| \\
&+\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{1}{2\varepsilon}(t-t_{n-1})(t-t_n)\frac{\frac{f(u_h^{n-2})-f(p^{n-2})}{\tau_n}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}},e_u\right)dt\right| \\
\le&\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{3}{2\varepsilon}\left\|f'(\xi_1)\right\|_{0,3,\Omega}\cdot\left\|u_h^n-p^n\right\|_{0,6,\Omega}\cdot\left\|e_u\right\|dt \\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{2}{\varepsilon}\left\|f'(\xi_2)\right\|_{0,3,\Omega}\cdot\left\|u_h^{n-1}-p^{n-1}\right\|_{0,6,\Omega}\cdot\left\|e_u\right\|dt \\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2\varepsilon}\left\|f'(\xi_3)\right\|_{0,3,\Omega}\cdot\left\|u_h^{n-2}-p^{n-2}\right\|_{0,6,\Omega}\cdot\left\|e_u\right\|dt \\
\le&\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{3}{2\varepsilon}\left\|f'(\xi_1)\right\|_{1,\Omega}\cdot\left\|u_h^n-p^n\right\|_{1,\Omega}\cdot\left\|e_u\right\|dt \\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{2}{\varepsilon}\left\|f'(\xi_2)\right\|_{1,\Omega}\cdot\left\|u_h^{n-1}-p^{n-1}\right\|_{1,\Omega}\cdot\left\|e_u\right\|dt \\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2\varepsilon}\left\|f'(\xi_3)\right\|_{1,3,\Omega}\cdot\left\|u_h^{n-2}-p^{n-2}\right\|_{1,6,\Omega}\cdot\left\|e_u\right\|dt \\
\le&\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{\varepsilon}C\mathcal{E}_u^n\left\|e_u\right\|dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{\varepsilon}C\mathcal{E}_u^{n-1}\left\|e_u\right\|dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{\varepsilon}C\mathcal{E}_u^{n-2}\left\|e_u\right\|dt \\
:=&\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\alpha_u^n\left\|e_u\right\|dt. \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

步骤 8：为了估计项 $\mathcal{B}_{16}$（该项也会产生时间离散误差），我们首先简化以下公式

$$
f(u_h)-f(u_h^n)\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}-f(u_h^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n}-\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\frac{\frac{f(u_h^n)-f(u_h^{n-1})}{\tau_n}-\frac{f(u_h^{n-1})-f(u_h^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\big[3(u_h^n)^2u_h^{n-1}-2(u_h^n)^3-(u_h^{n-1})^3\big]\cdot\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\right)^2\frac{t_n-t}{\tau_n}\\
&+\big[3u_h^n(u_h^{n-1})^2-(u_h^n)^3-2(u_h^{n-1})^3\big]\cdot\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\left(\frac{t_n-t}{\tau_n}\right)^2\\
&+\big[3(u_h^n)^2\partial_n^2u_h-3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h\big]\cdot\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\right)^2\\
&+\big[3(u_h^{n-1})^2\partial_n^2u_h-3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h\big]\cdot\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\left(\frac{t_n-t}{\tau_n}\right)^2\\
&+\big[3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h-\frac{\frac{(u_h^n)^3-(u_h^{n-1})^3}{\tau_n}-\frac{(u_h^{n-1})^3-(u_h^{n-2})^3}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\big]\cdot\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\\
&+\Big[\big(3u_h^n(\partial_n^2u_h)^2-3u_h^{n-1}(\partial_n^2u_h)^2\big)\cdot\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\right)+3u_h^{n-1}(\partial_n^2u_h)^2\Big]\cdot\Big(\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\Big)^2\\
&+\Big[\Big(\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\Big)^3(\partial_n^2u_h)^3\Big],
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{16}|=&\Big|\int_0^T\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big(f(u_h)-f(u_h^n)\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}-f(u_h^{n-1})\frac{t_n-t}{\tau_n}\\
&-\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\frac{\frac{f(u_h^n)-f(u_h^{n-1})}{\tau_n}-\frac{f(u_h^{n-1})-f(u_h^{n-2})}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\Big),e_u\Big)dt\Big|\\
=&\Big|\sum_{n=1}^N\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{\varepsilon}\Big(\big[3(u_h^n)^2u_h^{n-1}-2(u_h^n)^3-(u_h^{n-1})^3\big]\cdot\Big(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\Big)^2\frac{t_n-t}{\tau_n}\\
&+\big[3u_h^n(u_h^{n-1})^2-(u_h^n)^3-2(u_h^{n-1})^3\big]\cdot\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\Big(\frac{t_n-t}{\tau_n}\Big)^2\\
&+\big[3(u_h^n)^2\partial_n^2u_h-3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h\big]\cdot\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\right)^2\\
&+\big[3(u_h^{n-1})^2\partial_n^2u_h-3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h\big]\cdot\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\left(\frac{t_n-t}{\tau_n}\right)^2\\
&+\big[3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h--\frac{\frac{(u_h^n)^3-(u_h^{n-1})^3}{\tau_n}-\frac{(u_h^{n-1})^3-(u_h^{n-2})^3}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\big]\cdot\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\\
&+\Big[\big(3u_h^n(\partial_n^2u_h)^2-3u_h^{n-1}(\partial_n^2u_h)^2\big)\cdot\left(\frac{t-t_{n-1}}{\tau_n}\right)+3u_h^{n-1}(\partial_n^2u_h)^2\Big]\cdot\Big(\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\Big)^2\\
&+\Big[\Big(\frac{1}{2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\Big)^3(\partial_n^2u_h)^3\Big],e_u\Big)dt\Big|\\
\le&\sum_{n=1}^N\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|\frac{3(u_h^n)^2u_h^{n-1}-2(u_h^n)^3-(u_h^{n-1})^3}{\varepsilon}\right\|\cdot\|e_u\|\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|\frac{3u_h^n(u_h^{n-1})^2-2(u_h^{n-1})^3-(u_h^n)^3}{\varepsilon}\right\|\cdot\|e_u\|\,dt\\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|\frac{\big(3(u_h^n)^2\partial_n^2u_h-3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h\big)\tau_n^2}{8\varepsilon}\right\|\cdot\|e_u\|\,dt\\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|\frac{\big(3(u_h^{n-1})^2\partial_n^2u_h-3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h\big)\tau_n^2}{8\varepsilon}\right\|\cdot\|e_u\|\,dt\\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|\frac{\big(3u_h^nu_h^{n-1}\partial_n^2u_h-\frac{\frac{(u_h^n)^3-(u_h^{n-1})^3}{\tau_n}-\frac{(u_h^{n-1})^3-(u_h^{n-2})^3}{\tau_{n-1}}}{\frac{\tau_n+\tau_{n-1}}{2}}\big)\tau_n^2}{8\varepsilon}\right\|\cdot\|e_u\|\,dt\\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\left\|\frac{\big(3u_h^n(\partial_n^2u_h)^2-3u_h^{n-1}(\partial_n^2u_h)^2\big)\tau_n^4}{64\varepsilon}\right\|+\left\|\frac{\big(3u_h^{n-1}(\partial_n^2u_h)^2\big)\tau_n^4}{64\varepsilon}\right\|\right)\cdot\|e_u\|\,dt\\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\left\|\frac{(\partial_n^2u_h)^3\tau_n^6}{512\varepsilon}\right\|\right)\cdot\|e_u\|\,dt\\
:=&\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\zeta_u^n\,\|e_u\|\,dt.
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

步骤 9：将 (A.8)、(A.12) 和 (A.13) 合并，可得

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{B}_1|+\cdots+|\mathcal{B}_4|+|\mathcal{B}_6|+|\mathcal{B}_7|\\
&\quad\le\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\gamma_w^n\left\|\nabla\Delta^{-1}e_u\right\|dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\beta_u^n\left\|\nabla\Delta^{-1}e_u\right\|dt\\
&\qquad+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\delta_w^n\cdot\left\|\nabla\Delta^{-1}e_u\right\|dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\eta_w^n\cdot\left\|\nabla\Delta^{-1}e_u\right\|dt\\
&\quad:=\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\eta_0\left\|\nabla\Delta^{-1}e_u\right\|dt\\
&\quad\le\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2}\eta_0^2dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2}\left\|\nabla\Delta^{-1}e_u\right\|^2dt.
\end{aligned}
\tag{A.22}
$$

将 (A.14)-(A.21) 求和，可得

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_8|+\cdots+|\mathcal{B}_{16}|\le&\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\gamma_u^n\,\|e_u\|\,dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\xi_u^n\,\|e_u\|\,dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\beta_w^n\,\|e_u\|\,dt\\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\theta_u^n\cdot\|e_u\|dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\delta_u^n\cdot\|e_u\|\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\alpha_u^n\left\|e_u\right\|dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\zeta_u^n\left\|e_u\right\|dt\\
:=&\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\eta_1\left\|e_u\right\|dt\\
\leq&\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2}\eta_1^2dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2}\left\|e_u\right\|^2dt.
\end{aligned}
\tag{A.23}
$$

步骤 10：对于项 $\mathcal{B}_{17}$ 的估计，根据注2.3、谱估计 [1, 7],以及以下事实

$$
\left(f(a)-f(b)-f'(b)(a-b)\right)(a-b)\geq-\tilde{f}(b)\mid a-b\mid^3
$$

˜对于 $f(b)=3|b|$，我们得到

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{17}|=&\left|\int_0^T\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(f(u)-f(u_h)\right),e_u\right)dt\right|\\
\leq&\left|\int_0^T\left(-\frac{1}{\varepsilon}\left(f'(u_h)e_u,e_u\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\tilde{f}(u_h),|u-u_h|^3\right)\right)dt\right|\\
\leq&\left|\int_0^T\left(-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(f'(u_h)e_u,e_u\right)-\left(f'(u_h)e_u,e_u\right)+\frac{1}{\varepsilon}\|\tilde{f}(u_h)\|_{L^\infty(\Omega)}\|e_u\|_{L^3}^3\right)dt\right|\\
\leq&\left|\int_0^T\left((1-\varepsilon)\,\overline{\Lambda}_{CH}(t)\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^2+\varepsilon\left(1-\varepsilon\right)\|\nabla e_u\|^2+2\|e_u\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\mu_g\|e_u\|_{L^3}^3\right)dt\right|.
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

步骤 11：将 (A.11)、(A.22)–(A.24) 代入 (A.4)，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\nabla\Delta^{-1}e_u^N\|^2+\int_0^T\varepsilon\|\nabla e_u\|^2dt\leq&\frac{1}{2}\|\nabla\Delta^{-1}e_u^0\|^2+\sum_{n=1}^{N}2\widetilde{\mathcal{E}_u^n}^2+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\varepsilon^2}{8}\left\|\nabla e_u\right\|^2dt\\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2}\eta_0^2dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2}\left\|\nabla\Delta^{-1}e_u\right\|^2dt\\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2}\eta_1^2dt+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2}\left\|e_u\right\|^2dt\\
&+\int_0^T(1-\varepsilon)\,\overline{\Lambda}_{CH}(t)\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^2dt\\
&+\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}2\left\|e_u\right\|^2dt+\int_0^T\varepsilon\left(1-\varepsilon\right)\|\nabla e_u\|^2dt\\
&+\int_0^T\frac{1}{\varepsilon}\mu_g\|e_u\|_{L^3}^3dt.
\end{aligned}
\tag{A.25}
$$

注意

$$\begin{aligned}\|e_u\|^2 &= \left(\nabla(-\Delta^{-1}e_u), \nabla e_u\right)\\ &\le \|\nabla\Delta^{-1}e_u\|\|\nabla e_u\|\\ &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\|\nabla e_u\|^2,\end{aligned} \tag{A.26}$$

将（A.26）代入（A.25），并进一步化简，可得

$$\begin{aligned}&\|\nabla\Delta^{-1}e_u^N\|^2 + \int_0^T \frac{\varepsilon^2}{2}\|\nabla e_u\|^2 dt\\ \le&\|\nabla\Delta^{-1}e_u^0\|^2 + \sum_{n=1}^{N} 4\widetilde{\mathcal{E}_u^n}^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(\eta_0^2+\eta_1^2\right)\tau_n\\ &+ \int_0^T \left(1 + \frac{5}{2\varepsilon^2} + 2\left(1-\varepsilon\right)\overline{\Lambda}_{CH}(t)\right)\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^2 dt\\ &+ \int_0^T \frac{2}{\varepsilon}\mu_g\|e_u\|_{L^3}^3 dt.\end{aligned} \tag{A.27}$$

根据引理 A.1，并假设 $\|e_u\|_{L^\infty} \le C$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^T \|e_u\|_{L^3}^3 dt &\le \int_0^T C_I\|e_u\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\sigma}\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^\sigma\|\nabla e_u\|^2 dt\\ &\le \int_0^T C_I\|e_u\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\sigma}\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^\sigma\|\nabla e_u\|^2 dt\\ &\le C_S\left(\sup_{t\in(0,T)}\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^\sigma\right)\int_0^T\|\nabla e_u\|^2 dt.\end{aligned}$$

令

$$y_1(t) := \|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^2, \qquad y_2(t) := \frac{\varepsilon^2}{2}\|\nabla e_u\|^2, \qquad y_3(t) := 2\varepsilon^{-1}\mu_g\|e_u\|_{L^3}^3,$$

$$B := 2\varepsilon^{-1}\mu_g C_S, \qquad E := \exp\left(\int_0^T a(t)dt\right), \qquad \beta := \sigma,$$

于是根据引理 A.2，有

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla\Delta^{-1}e_u\|^2 + \int_0^T \frac{\varepsilon^2}{2}\|\nabla e_u\|^2 dt \le 8\eta^2\exp\left(\int_0^T a(t)dt\right).$$

□

Acknowledgments

Chen 的研究得到国家自然科学基金项目（12201010）和安徽省高等学校自然科学研究项目（2022AH040027）的资助。Huang 的研究部分得到国家自然科学基金项目（11971410）和国家重点研发计划

（2020YFA0713500）的资助。Yi 的研究部分得到国家自然科学基金项目（12071400、12261131501）和湖南省自然科学基金项目（2021JJ40189）的资助。

References

[1] N.D. Alikakos 和 G. Fusco. 高维空间中一般界面的 Cahn–Hilliard算子的谱. 《Indiana大学数学杂志》, 42(2):637-674, 1993.[2] S. Bartels 和 R. Müller. 对数势下 Allen–Cahn 方程和 Cahn–Hilliard 方程近似的误差控制. 《Numerische Mathematik》, 119(3):409-435, 2011.[3] S. Bartels, R. Müller 和 C. Ortner. 拓扑变化发生后的 Allen–Cahn 方程和 Ginzburg–Landau 方程近似的稳健先验与后验误差分析. 《SIAM数值分析杂志》, 49:110- 134, 2011.[4] P.W. Bates 和 P.C. Fife. Cahn–Hilliard 方程成核动力学. 《SIAM应用数学杂志》, 53(4):990-1008, 1993.[5] J.H. Bramble 和 A.H. Schatz. 有限元法中通过平均提高局部精度. 《Mathematics of Computation》, 31:74-111, 1977.[6] J.W. Cahn 和 J.E. Hilliard. 非均匀系统的自由能. I. 界面自由能. 《化学物理杂志》, 28(2):258-267, 1958.[7] X. Chen. 一般界面的 Allen–Cahn 方程、Cahn–Hilliard 方程及相场方程的谱. 《偏微分方程通讯》, 19(7-8):1371-1395, 1994.[8] Y. Chen, Y. Huang 和 N. Yi. Allen–Cahn 方程的基于SCR的误差估计与自适应有限元方法. 《计算与应用数学》, 78:204-223, 2019.[9] Y. Chen, Y. Huang 和 N. Yi. Allen–Cahn 方程自适应有限元方法的恢复型后验误差估计. 《计算与应用数学杂志》, 369:112574, 2019.[10] K. Cheng, W. Feng, C. Wang 和 S. Wise. Cahn–Hilliard 方程的能量稳定的四阶有限差分格式. 《计算与应用数学杂志》, 362:574-595, 2019.[11] A. Diegel, C. Cheng 和 S. Wise. Cahn–Hilliard 方程二阶混合有限元方法的稳定性与收敛性. 《IMA数值分析杂志》, 36(4):1867-1897, 2016.[12] Q. Du 和 R. Nicolaides. 相变连续介质模型的数值分析. 《SIAM数值分析杂志》, 28(5):1310-1322, 1991.[13] C.M. Elliott 和 D.A. French. 相分离 Cahn–Hilliard 方程的数值研究. 《 IMA 数值分析杂志》 , 38(2):97-128, 1987.[14] X. Feng 和 O. A. Karakashian. 相变 Cahn–Hilliard 方程的全离散动态网格间断Galerkin方法. 《Mathematics of Computation》, 76:1093-1117, 2007.[15] X. Feng, Y. Li 和 Y. Xing. Cahn–Hilliard 方程和 Hele-Shaw流的混合内罚间断Galerkin方法分析. 《SIAM数值分析杂志》, 54(2):825-847, 2016.[16] X. Feng 和 A. Prohl. Cahn–Hilliard 方程混合有限元方法的误差分析. 《Numerische Mathematik》, 99(1):47-84, 2004.[17] X. Feng 和 H. Wu. Cahn–Hilliard 方程和 Hele-Shaw流有限元近似的后验误差估计. 《计算数学杂志》, 26(6):767-796, 2008.[18] J. Guo, C. Wang, S. Wise 和 X. Yue. 三维 Cahn–Hilliard 方程二阶凸分裂有限差分格式的 H^2 收敛性. 《数学科学通讯》, 14(2):489- 515, 2016.[19] L. He 和 A. Zhou. 半线性椭圆问题的自适应有限元分析（中文）. 《中国科学：数学》, 46(7):929-944, 2016.

[20] B. Heimsund, X. Tai 和 J. Wang. 通过 L^2-投影实现有限元近似梯度的超收敛.*SIAM*数值分析杂志, 40:1538-1560, 2002.[21] D. Hou, M. Azaiez 和 C. Xu. 梯度流标量辅助变量方法的一种变体.*J.Comput. Phys.*, 395:307-332, 2019.[22] Y. Huang, K. Jiang 和 N. Yi. 若干梯度恢复加权平均方法. *Adv. Appl.Math. Mech.*, 4:131-155, 2012.[23] Y. Huang, H. Liu 和 N. Yi. 从分片 L^2 投影中恢复界面导数.*J.Comput. Phys.*, 231:1230-1243, 2012.[24] Y. Huang 和 N. Yi. 超收敛簇恢复方法.*J. Sci. Comput.*, 44:301-322, 2010.[25] H. Jia, Y. Li, G. Feng 和 K. Li. 浓度依赖迁移率和对数型 Flory-Huggins 体势下 Cahn–Hilliard 方程的一种高效双网格方法. *Appl. Math.Comput.*, 387:124548, 2020.[26] O. Lakkis 和 T. Pryer. 抛物问题自适应有限元方法中的梯度恢复.《*IMA*数值分析杂志》, 32(1):246-278, 2012.[27] Q. Lin 和 N. Yan. 高效有限元的构造与分析. 河北大学出版社，中国, 1996（中文）.[28] H. Liu 和 P. Yin. Cahn–Hilliard 方程无条件能量稳定的 DG 格式. 计算与应用数学杂志，390:113375, 2021.[29] A. Lozinski, M. Picasso 和 V. Prachittham. Crank-Nicolson 方法的各向异性误差估计器：在抛物问题中的应用. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(4):2757-2783, 2009.[30] J. Shen, J. Xu 和 J. Yang. 梯度流的标量辅助变量（SAV）方法. *J. Comput.Phys.*, 353:407-416, 2018 .[31] J. Shen, J. Xu 和 J. Yang. 一类新型高效稳健的能量稳定梯度流格式. *SIAM Rev.*, 61(3):474-506, 2019.[32] J. Shen 和 X. Yang. Allen–Cahn 方程和 Cahn–Hilliard 方程的数值近似. *DiscreteContin. Dyn. Syst. Ser. A*, 28:1669-1691, 2010.[33] G. Wells, E. Kuhl 和 K. Garikipati. Cahn–Hilliard 方程的间断Galerkin方法.*J. Comput. Phys.*, 218(2):860-877, 2006.[34] N. Yan. 有限元方法的超收敛分析与后验误差估计. 科学出版社, 2008.[35] X. Yang, J. Zhao, Q. Wang 和 J. Shen. 基于不变能量二次化方法的三组分 Cahn–Hilliard 相场模型数值近似. *Math. Models MethodsAppl. Sci.*, 27(11):1-38, 2017.[36] N. Yi. 基于梯度恢复的后验误差估计与自适应有限元方法.湘潭大学博士学位论文, 2011.[37] O.C. Zienkiewicz 和 J.Z. Zhu. 超收敛补片恢复与后验误差估计.*Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 33:331-1382, 1992.[38] Z. Zhang 和 A. Naga. 一种新的有限元梯度恢复方法：超收敛性质.*SIAM J. Sci. Comput.*, 26:1192-1213, 2005.