arXiv:2305.01354v1 [math.FA] 2 May 2023

具有幂零群作用的图上的正调和函数

Matti Richter[1]

[1]德国勃兰登堡州波茨坦，14469，波茨坦大学数学研究所，新皇宫10号。

作者联系方式：matti.richter@uni-potsdam.de;

摘要

我们研究在幂零且余紧的群作用下保持不变的有向加权图。特别地，我们考虑正调和函数集合的锥截面 K。我们将凸紧集 K 的极端点集合刻画为 K 中乘性元的集合。此外，我们研究给定参数 λ 对应的正广义特征函数。我们发现，当 λ 低于某个阈值时，乘性 λ-调和函数的拓扑空间 M_λ 同胚于一个球面。

关键词：图、群、幂零、调和

致谢。作者感谢 Yehuda Pinchover 的宝贵谈话，这次谈话启发了本文。此外，作者感谢 Matthias Keller 对本文内容和结构持续提出反馈。

前言

基于 Choquet 和 Deny 的开创性论文[1]，Margulis 研究了离散幂零群 [2]上的正调和函数。借助肖凯定理，他证明调和函数可以表示为对乘法函数的积分。在这一情形下，乘法函数是从群到正实数的群同态。该结果的一个直接推论是刘维尔性质，即任何有界调和函数都是常数。此前，Dynkin 和 Maljutov 也已证明，对于具有幂零传递群作用的马尔可夫链，这一性质同样成立 [3]。

后来，Lin [4] 将 Margulis 证明中的思路应用于线性微分算子的连续情形。他证明，对于任意余紧群作用，所有满足 $f(ghx) = f(hgx)$ 的有界正调和函数，对所有群元素 g， h都为常数。

此外，Agmon [5] 研究了 $\mathbb{R}^d$ 上具有实周期系数的二阶线性椭圆算子，并得到了与 Margulis 非常相似的结果。受 Allegretto [6] [7] [8] 和 Piepenbrink [9] [10] [11] 研究成果的启发，他考察了这类算子的正调和函数。利用 Pinchover 的一个证明，他证明了关于调和指数函数的积分表示；这类函数具有如下形式：$x \mapsto \exp(\langle \xi, x \rangle)\varphi(x)$，其中 $\xi \in \mathbb{R}^d$，且 φ 是周期函数。Agmon 进一步研究了实参数 λ 下 λ-调和指数函数的集合族结构。Guivarc'h 还在对称空间上于 [12]研究了这一集合族。随后，在 1994年，Lin 和 Pinchover [13] 将 Agmon 的结果推广到了具有幂零群作用和余紧群作用的流形。在他们的框架中，该算子是一个在群作用下保持不变的椭圆算子。于是，正调和函数可表示为关于乘性调和函数的积分。Lin 和 Pinchover 还采用了 Margulis 关于幂零群作用的论证；对于阿贝尔情形中 $\mathbb{Z}^d$ 作用于 $\mathbb{R}^d$的情况，则不需要这些论证。从这个意义上说，Agmon 的结果是 [13]的一个特例。

本文研究的对象是一个有向图，它可能不是局部有限的，并带有幂零且余紧的群作用。我们分两步研究薛定谔算子的正广义特征函数。

首先，我们推广 Margulis 的表示定理 [2]。其次，我们按照 [5] 和 [13] 的思路，描述正乘性广义特征函数所构成的拓扑空间的结构。

本文结构如下。第一节介绍相关术语和记号。第二节阐述第一个主要结果，即关于群作用的 Margulis 定理，定理 2.1。本文研究了凸紧集 $\mathcal{K}$，它是归一化正调和函数集合的闭包。该定理指出， $\mathcal{K}$ 中的每个调和元都在交换子子群作用下不变，并且调和极端点都是乘性的。由此，我们在推论2.2中得到正调和函数的表示定理。进一步，这一结果将正调和函数的研究归结为阿贝尔群的情形，见第 2.2 节。

第三节关注 Agmon、Lin 和 Pinchover 结果的类似结论。为了证明更多结果，我们假设图是局部有限的。第二个主要结果——定理 3.1 将 $\mathcal{K}$ 的极端点刻画为 $\mathcal{K}$ 的乘性元集合。一个包含关系可直接由定理2.1得出，另一个则需要一些额外工作才能证明。之后，我们将研究扩展到参数 λ 对应的正 $\lambda \in \mathbb{R}$-调和函数。由于这些只是对应于另一算子的调和函数，因此我们可以对每个参数应用定理 3.1 。鉴于此，我们接着研究由正的、乘性的 $\mathcal{M}_\lambda$ -调和函数构成的集合族 λ。第三个结果——定理 3.5 随后描述了这个集合族的拓扑

性质。更确切地说，该定理指出， $\mathcal{M}_\lambda$ 或者为空集，或者是单点集，或者同胚于一个 d-球面；具体情形取决于参数 λ。这里， d 是一个与 λ 无关的整数。

1 设定

1.1 带群作用的图与哈纳克不等式

我们先介绍图和薛定谔算子的一些基本定义。

设 X 为可数离散空间。则其上的图定义为权函数 $b\colon X\times X\to[0,\infty)$ 与势 $c\colon X\to\mathbb{R}$，满足

$$\sum_{y\in X} b(x,y)<\infty$$

对所有 $x\in X$ 均成立。我们通常还假设对所有 $x\in X$， $b(x,x)=0$，但这不会影响调和函数。此外，后文还会出现一些对角项非零的图。接下来，我们将顶点 $x\in X$ 的度定义为

$$\deg(x):=\sum_{y\in X} b(x,y)+c(x).$$

注意，尽管此记号采用了 [14] 的形式，但此处我们并不假设 b 是对称的。

我们称 y 是 x 的邻点，当 $b(x,y)>0$时，并记作 $x\sim y$。如果每个 $x\in X$ 只有有限多个邻点，我们就称该图是局部有限的；如果对任意 x、 $z\in X$，在 X中都存在一条从 x到 $z\in X$的路径 $x=y_1\sim\cdots\sim y_n=z$，则称该图是连通的。

对于给定的图 (b,c)，我们定义薛定谔算子 $H=H_{b,\,c}$ 如下：

$$H_{b,c}:\mathrm{Dom}(H_{b,c})\to C(X),\quad H_{b,c}f(x):=\sum_{y\in X} b(x,y)(f(x)-f(y))+c(x)f(x),$$

其中 $C(X)$ 表示 X 上所有（连续）实值函数构成的空间，并且

$$\mathrm{Dom}(H_{b,c}):=\{f\in C(X)\mid \sum_{y\in X} b(x,y)|f(x)|<\infty\}.$$

在文献中，当 $c=0$ 或 $c\geq 0$时，算子 H 也称为拉普拉斯算子。不过，我们希望允许 c 取任意实值。我们将调和函数子空间定义为

$$\mathcal{H}:=\{f\in\mathrm{Dom}(H)\mid Hf=0\}$$

以及超调和函数的凸锥

$$\mathcal{S}:=\{f\in\mathrm{Dom}(H)\mid Hf\geq 0\}.$$

此外，若 $(-f) \in \mathcal{S}$，则称函数为次调和函数。我们也用 $\mathcal{H}^+$ 和$\mathcal{S}^+$ 分别表示 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{S}$ 中非平凡且非负元素的集合。容易看出， $\mathcal{H}^+$ 和 $\mathcal{S}^+$ 是凸锥，稍后我们将看到它们只包含严格正元素。注意，函数 $f \in \mathrm{Dom}(H)$ 是超调和函数，当且仅当 $Hf \geq 0$, 这等价于

$$\sum_{y \in X} b(x,y) f(y) \leq \deg(x) f(x), \quad \text{for all } x \in X.$$

只需重新排列各项即可看出这一点；当且仅当 f 是调和函数时，对所有 x 等号都成立。我们将在后文用到这一刻画。

设 G 是作用于 X的一个（离散）群。若存在一个紧致（即有限） $V \subseteq X$ ，使得 $GV = X$，则称该群作用是余紧的。如果集合V 中各元素的轨道两两不相交，我们就称该集合为基本域。显然，若群作用是余紧的，则总存在基本域 V，因为对于含有更多元素的有限 V，只需移除其中一些元素即可。

下文中，我们固定空间 X 以及作用于 X的余紧群作用 G ，其基本域为 V。对于 $g \in G$，定义由 g 给出的平移为

$$T_g : C(X) \to C(X), \quad T_g f(x) = f(g^{-1}x),$$

它关于 X上的 $\mathbb{R}$ 的积拓扑是线性且连续的。给定一个子群 $R \subseteq G$，若函数 f 是带有特征$\gamma \in \mathrm{Hom}(R, \mathbb{R}_{>0})$的 R-乘性函数，则称其为 R-乘性函数，并且

$$T_g f = \gamma(g^{-1}) f \quad \text{for all } g \in R,$$

其中，$\mathrm{Hom}(R, \mathbb{R}_{>0})$表示从 R 到乘法群（正实数群）的群同态集合。我们只考虑映射到正实数的同态，因为我们主要关注正函数。对于 $R = G$ 的情形，我们通常只说 f 是乘性的。与这种 f 对应的特征记为 γ_f。在 $\gamma_f = 1$的情形，即对所有 $g \in R$都有 $T_g f = f$ 时，我们称 f 是 R-不变的。

如果算子 H 作用于 $C(X)$，我们称其为 R-不变的，若 T_g(定义域(H)) $\subseteq$定义域(H)，并且

$$H \circ T_g = T_g \circ H \quad \text{for all } g \in R,$$

即该算子与平移可交换。于是，如果函数 f 相对于一个 R-不变的薛定谔算子是超调和的，那么对所有 $g \in R$ ， $T_g f$ 也都是超调和的，因为

$$H(T_g f) = T_g(Hf) \geq 0,$$

次调和性和调和性也有类似的结论。事实证明，算子的 R 不变性这一概念，等价于图 (b, c) 的一种同样自然的 R 不变性定义。

引理 1.1. 设 $R \subseteq G$ 是一个子群，(b, c) 是 X 上的一个图。那么，薛定谔算子 $H = H_{b,\ c}$ 是 R 不变的，当且仅当 b 和 c 都是 R 不变的，即

$$b(gx, gy) = b(x, y) \text{ and } c(gx) = c(x) \text{ for all } x, y \in X \text{ and } g \in R.$$

此外，在这种情况下，对所有 $x \in X$ 和 $g \in R$，$\deg(gx) = \deg(x)$。

证明。设 b, c 是 R-不变的，则对于 $f \in \mathrm{Dom}(H)$ 和 $x \in X$，我们有

$$\begin{aligned} HT_{g^{-1}} f(x) &= \sum_{y \in X} b(x, y)(f(gx) - f(gy)) + c(x) f(gx) \\ &= \sum_{y \in X} b(gx, gy)(f(gx) - f(gy)) + c(gx) f(gx) \\ &= \sum_{y \in X} b(gx, y)(f(gx) - f(y)) + c(gx) f(gx) \\ &= Hf(gx) = T_{g^{-1}} Hf(x) \end{aligned}$$

显然，对所有 $g \in R$，$T_{g^{-1}} f \in \mathrm{Dom}(H)$。

反过来，假设 H 是 R-不变的，并令 $g \in R$。那么对所有 $x \in X$，我们得到

$$c(x) = H1(x) = HT_{g^{-1}} 1(x) = T_{g^{-1}} H1(x) = c(gx)$$

其中，1 表示在 X 上恒等于 1 的常值函数。此外，对于 $x \neq y \in X$，我们有 $gx \neq gy$，并且

$$\begin{aligned} b(x, y) &= -\left(\sum_{z \in X} b(x, z)(1_{gy}(gx) - 1_{gy}(gz)) + c(x) 1_{gy}(gx) \right) \\ &= -HT_{g^{-1}} 1_{gy}(x) = -T_{g^{-1}} H1_{gy}(x) \\ &= -\left(\sum_{z \in X} b(gx, z)(1_{gy}(gx) - 1_{gy}(z)) + c(gx) 1_{gy}(gx) \right) \\ &= b(gx, gy), \end{aligned}$$

并且对所有 $x \in X$，$b(x, x) = 0 = b(gx, gx)$。关于“此外”部分，我们只需注意到，对于 $x \in X$ 和 $g \in R$，我们有

$$\deg(gx) = \sum_{y \in X} b(gx, y) + c(gx) = \sum_{y \in X} b(x, g^{-1} y) + c(x) = \deg(x),$$

因为作用 $y \mapsto g^{-1} y$ 是双射。 □

有了这一点，我们就可以证明一个关于群作用的一致哈纳克不等式。

引理 1.2（哈纳克不等式）。设 b 是一个连通图， c 是一个势，且 $H = H_{b,\ c}$ 是 R-不变的。那么，对于 x、 $y \in X$，存在 $C_{x,\ y} > 0$ 使得

$$T_g f(x) \geq C_{x,y} T_g f(y)$$

对每个 $f \in \mathcal{S}^+$ 和每个 $g \in R$均成立。

证明。若 X 仅由一个点组成，或为 $\mathcal{S}^+ = \emptyset$，则结论显然成立。设 $\#X \geq 2$ 且令 $f \in \mathcal{S}^+$。若对某个 $x \in X$有 $\deg(x) \leq 0$，则有

$$0 \leq Hf(x) = \deg(x) f(x) - \sum_{y \in X} b(x,y) f(y) \leq 0$$

因此，只要 $b(x,y)$ 不为零，就可得出 $f(y) = 0$。此外，在这种情况下，我们还有 $\deg(y) f(y) = 0 \leq 0$，由此可知，对所有 $x \sim y \in X$，若 $z \mapsto f(z) \deg(z)$ 在 x 处不为正，那么它在 y 处也不为正，且 $f(y) = 0$。由于该图是连通的，这一论证表明 $z \mapsto f(z)\deg(z)$ 处处为零，且$f = 0$，这与 $f \in \mathcal{S}^+$ 矛盾。因此，$\deg$ 严格为正，故 f 在 gx 中的超调和性推出

$$f(gx) \geq \deg(gx)^{-1} \sum_{gy \in X} b(gx, gy) f(gy) \geq \deg(x)^{-1} b(x,y) f(gy)$$

对所有 $g \in G$ 和 $x \sim y \in X$，利用 $b(gx, gy) = b(x,y)$ 以及 $\deg(gx) = \deg(x)$。最后，由于图的连通性，利用归纳论证即可得到该结论，因为常数 $\deg(x)^{-1} b(x,y)$ 与 f 和 g 无关。

□

推论 1.3. 对于与连通图相关联的 Schr ¨odinger 算子 H，每个 $f \in \mathcal{S}^+$ 都是严格正的。

证明。首先注意，子群 $R = \{e\}$ 在 X 上的作用是平凡的，因此 H 是 R-不变的。设 $f \in \mathcal{S}^+$，特别地， $f(x) > 0$，其中某个 $x \in X$。由哈纳克不等式立即可得，对于每个 $y \in X$， $f(y) \geq C_{y,\ x} f(x) > 0$，这说明$f > 0$。

□

由此可知， $\mathcal{H}^+$ 仅包含严格正元素。此外，我们得到锥 $\mathcal{S}^+$ 的一个截面的以下紧致性结果。

推论 1.4。设 H 是定义在 X 上的连通图（b, c）所关联的 Schr ¨odinger 算子，并固定 $x_0 \in X$。那么锥截面

$$\mathcal{S}_1^+ := \{f \in \mathcal{S}^+ \mid f(x_0) = 1\}$$

相对于 X上 $\mathbb{R}$ 的积拓扑是紧致的。

证明。与上一个推论一样，我们对平凡子群$\{e\}$应用哈纳克不等式。我们首先证明$\mathcal{S}_1^+$是闭的。设 $f_n \in C(X)$是一个收敛到

$f \in C(X)$的序列，收敛方式为积拓扑，即逐点收敛。那么 f 显然仍然是非负的，并且 $f(x_0) = 1$，因此 f 也非平凡；由Fatou 引理可得

$$\sum_{y\in X} b(x,y)f(y) \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{y\in X} b(x,y)f_n(y) \le \deg(x) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \deg(x)f(x),$$

因此 f 是超调和的，故 $f \in \mathcal{S}_1^+$和 $\mathcal{S}_1^+$是闭集。

此外，对于任意 $f \in \mathcal{S}_1^+$，由哈纳克不等式和 $f(x_0) = 1$可得 $f(x) \in [C_{x,x_0}, C_{x_0,x}^{-1}]$，因此

$$\mathcal{S}_1^+ \subseteq \prod_{x\in X} [C_{x,x_0}, C_{x_0,x}^{-1}]$$

其中右侧由 Tychonoff 定理可知是紧致的，而 $\mathcal{S}_1^+$的紧致性也随即得证。

□

需要指出的是，集合 $\mathcal{H}_1^+$不一定是闭集，因此无法得出它是紧致的。下一节将讨论这一问题。

1.2 凸集与紧集及 Choquet 理论

设 (b,c) 是定义在 X 上的连通图，带有给定的 G-作用，使得 $H = H_{b,\,c}$ 是G-不变的。此外，固定一点 $x_0 \in X$。在 $C(X)$ 上，我们考虑 $\mathbb{R}$ 在 X上的积拓扑。对于集合 $A \subseteq C(X)$，记 ex A 为极端点集，conv$A$ 为闭凸包。我们研究正调和函数构成的凸锥 $\mathcal{H}^+$。然而，为了应用 Choquet 理论，我们需要紧致凸集，因此只取该锥的一个截面，再取其闭包，从而得到如下定义

$$\mathcal{K} := \overline{\{f \in \mathcal{H}^+ \mid f(x_0) = 1\}}.$$

只考虑满足 $f(x_0) = 1$ 的函数并不失一般性，因为薛定谔算子是线性的，因此将函数乘以一个正数与作用该算子 H可交换。另一方面，对于非局部有限图，取闭包会使情况稍微复杂一些，因为 $\mathcal{K}$ 中的函数未必全都是调和函数。不过，我们仍有 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{S}_1^+$，因为 $\mathcal{H}^+ \subseteq \mathcal{S}^+$ 且 $\mathcal{S}_1^+$ 由推论 1.4可知是紧致的，这也说明 $\mathcal{K}$ 是紧致的。此外，由定义可立即得出 $\mathcal{K}$ 是凸的。

对于子群 $R \subseteq G$，我们定义

$$\mathcal{K}^R := \{f \in \mathcal{K} \mid f \text{ is } R\text{-invariant}\} = \mathcal{K} \cap \bigcap_{g\in R} \ker(T_g - I),$$

其中 I 表示 $C(X)$ 上的恒等算子，ker(L) 表示算子L的核。由于对于每个 $g \in G$，$T_g - I$ 的核都是 $C(X)$ 的一个闭子空间，并且 $\mathcal{K}$ 是紧致且凸的，因此 $\mathcal{K}^R$ 也是紧致且凸的。

集合 $\mathcal{K}^R$ 按这种方式定义，以便我们可以应用肖凯定理，参见 [15]，其内容如下：设 K 是局部凸

向量空间中的一个紧致凸子集，且 K 可度量化。那么，对每个 $f \in K$，都存在一个定义在极端点集 $\operatorname{ex} K$ 上的博雷尔测度 μ_f，使得

$$f = \int_{\operatorname{ex} K} k \, d\mu_f(k).$$

事实证明，这对于寻找调和函数尤其有用。确实，取 $K = \mathcal{K}$ 我们将看到，$\operatorname{ex} \mathcal{K}$ 中的几乎所有元素都是调和且乘法的，当测度 μ_f 由 $\mathcal{K}$中的一个调和元诱导时。那么，寻找所有正调和函数的问题就归结为只需寻找乘法函数。以下引理证明了这一论述的第一部分，因此我们只需研究 $\mathcal{K}$的调和极端点。关于凯莱图这一特殊情形的该引理的一个版本见 [2, 公式 (3)]。

引理 1.5. 设 $R \subseteq G$ 和 $f \in \mathcal{K}^R$ 是调和的。设 μ_f 是由肖凯定理得到的测度，使得

$$f = \int_{\operatorname{ex} \mathcal{K}^R} k \, d\mu_f(k),$$

那么 μ_f 集中在调和函数上，即集合

$$\{k \in \operatorname{ex} \mathcal{K}^R \mid Hk \neq 0\}$$

相对于 μ_f是一个零测集。
证明。给定 $x \in X$， f的调和性给出 $\deg(x)f(x) = \sum_{y \in X} b(x,y)f(y)$，因此

$$\begin{aligned}
\int_{\operatorname{ex} \mathcal{K}^R} \deg(x)k(x) \, d\mu_f(k) &= \deg(x) \int_{\operatorname{ex} \mathcal{K}^R} k(x) \, d\mu_f(k) \\
&= \deg(x)f(x) \\
&= \sum_{y \in X} b(x,y)f(y) \\
&= \sum_{y \in X} b(x,y) \int_{\operatorname{ex} \mathcal{K}^R} k(y) \, d\mu_f(k) \\
&= \int_{\operatorname{ex} \mathcal{K}^R} \sum_{y \in X} b(x,y)k(y) \, d\mu_f(k),
\end{aligned}$$

由于 k 和 b 均非负，因此可以交换求和与积分。显然，左边有限，由此可得

$$\int_{\operatorname{ex} \mathcal{K}^R} Hk(x) \, d\mu_f(k) = 0.$$

此外，由于每个 $k \in \mathcal{K}^R$ 都是超调和的，被积函数非负。因此，对于每个 $x \in X$，满足 $Hk(x) \neq 0$ 的极端点集合的测度为零；又因为 X 可数，我们得出

$$\{k \in \operatorname{ex} \mathcal{K}^R \mid Hk \neq 0\} = \bigcup_{x \in X} \{k \in \operatorname{ex} \mathcal{K}^R \mid Hk(x) \neq 0\}$$

相对于 μ_f 是零测集。 □

2 幂零群的正调和函数

2.1 在交换子下的不变性与乘法性

本章中，我们重点研究幂零群在图上的群作用。特别是，我们希望更详细地研究 $\mathcal{K}$ 这一集合，该集合在上一章中已引入。我们证明一个定理，将[2] 关于幂零群的凯莱图的结果推广到具有幂零群作用的余紧图。为此，固定一个连通图（b，c）定义在 X 上，该图具有幂零且余紧的群作用 G 和基本胞腔 V，并固定 $x_0 \in X$。回顾一下，$\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{H}^+ \mid f(x_0) = 1\}$。本文的第一个主要结果是以下定理。

定理 2.1（Margulis 关于群作用的定理）。设 (b, c) 是定义在 X 上的连通图，具有幂零且余紧的群作用 G，使得 $H_{b,\ c}$ 是 G-不变的。固定 $x_0 \in X$，则集合 $\mathcal{K}$ 满足以下条件：

(a) $\mathcal{K}$ 中的每个元素都是 $[G, G]$不变的。(b) 凸集 $\mathcal{K}$ 中的每个调和极端点都是乘性的。

推论 2.2。 在定理 *2.1*的设定下，对于 $f \in \mathcal{H}^+$，存在一个概率测度 μ_f，其支撑在 $\mathcal{K}$ 的调和且乘性元上，使得

$$f = f(x_0) \int_{\mathcal{K}} k d\mu_f.$$

˜证明。 注意到 $f\colon = f/f(x_0) \in \mathcal{K}$。令 μ_f为表示测度˜，它由 f 经肖凯定理得到。于是该等式成立，并由引理 1.5 可知 μ_f 集中在 $\mathcal{K}$的调和极端点上。最后，定理 2.1 说明这些元素是乘性的。 □

为了证明定理2.1 ，我们先作一些简单的群论观察。

定义 2.3。对于正规子群 $R \subseteq G$，考虑自然投影$\pi\colon G \to G/R$ 以及因子群的中心 $Z(G/R)$。我们定义

$$Q(R) := \pi^{-1}(Z(G/R)).$$

注意到 $R \subseteq Q(R)$，因为 $R = \ker \pi$，且 $Q(R)$ 是 G 的正规子群，因为 $Z(G/R)$ 是正规子群，且 π 是群同态。此外，我们得到以下引理。

引理 2.4. 设 $f \in \mathcal{K}^R$、 $q \in Q(R)$ 和 $g \in G$。则

$$T_q T_g f = T_g T_q f.$$

证明。由于 $\pi(q) \in Z(G/R)$，我们有 $\pi([q,g]) = \pi(q)^{-1}\pi(g)^{-1}\pi(q)\pi(g) = e_{G/R}$，因此 $[q,g] \in R$，所以恒等算子

$$T_{qg} f = T_{gq} T_{[q,g]} f = T_{gq} f$$

由 f 的 R-不变性可得。 □

现在我们开始证明定理 2.1 的主要部分，为此需要两个关键引理。第一个引理，即引理 2.5，指出， $\mathcal{K}^R$的调和极端点 $Q(R)$ 对任意正规子群 R都是乘性的。第二个引理，即引理 2.6，利用第一个引理，并指出调和极端点甚至在 $q \in Q(R)$ 中的交换子作用下也保持不变。这两个引理类似于 [2, 引理 1 和引理 2] 以及 [13, 引理 6.3 (i) 和 (ii)]。

有了这些准备，证明思路如下：我们知道，任意调和 $f \in$ 极 $\mathcal{K}^R$ 在 $Q($R 中也在交换子作用下保持不变。接着，肖凯定理结合引理 1.5 可推出，这对所有 $f \in \mathcal{K}^R$ 都成立，而不仅限于极端点。这表明 $\mathcal{K}^R \subseteq \mathcal{K}^{R'}$，其中 R' 是由 $Q($R 中的交换子生成的子群。取 $R = G_{n+1}$为 G下中心列中的一个元素，我们便得到 $G_n \subseteq R'$。通过归纳论证可知，$\mathcal{K}^{G_n} \subseteq \mathcal{K}^{G_1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。最后，群的幂零性表明存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得$G_n = \{e\}$。结合 $G_1 = [G,G]$ 这一事实，我们得出

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{[G,G]}.$$

再次应用引理 2.5 ，还可得出调和函数 $f \in \operatorname{ex}\mathcal{K}$ 关于 $Q([G,G]) = G$是乘性的。

引理 2.5. 设 R 是 G的正规子群。那么，每个调和函数 $k \in \operatorname{ex}\mathcal{K}^R$ 都是$Q(R)$-乘性的。

证明. 设 $k \in \operatorname{ex}\mathcal{K}^R$ 是调和函数，且满足 $q \in Q(R)$。对所有 $r \in R$，有

$$T_r T_q k = T_q T_r k = T_q k$$

根据引理 2.4，因此 $T_q k$ 具有 R-不变性。由于群作用是余紧的，选取一个基本域 $V \subseteq X$ 使得 $GV = X$。然后利用哈纳克不等式，可得 $C > 0$ 使得 $T_g k(v) > CT_g k(q^{-1}v)$，对所有 $v \in V$和 $g \in G$。然后结合引理 2.4可得

$$\begin{aligned} k(g^{-1}v) &= T_g k(v) > CT_g k(q^{-1}v) \\ &= CT_g T_q k(v) = CT_q T_g k(v) = CT_q k(g^{-1}v) \end{aligned}$$

对于所有 $v \in V$和 $g \in G$，这意味着 $k > CT_q k$，因为 $GV = X$。

由此可知，辅助函数 $s := k - CT_q k$ 严格为正。此外， s 是调和的，并且具有 R-不变性，因为 k 和 $T_q k$ 也具有这些性质。于是，归一化函数 $k(q^{-1}x_0)^{-1}T_q k$ 和 $s(x_0)^{-1}s$ 是 $\mathcal{K}^R$ 的元素，并且

$$k = Ck(q^{-1}x_0)\frac{T_q k}{k(q^{-1}x_0)} + s(x_0)\frac{s}{s(x_0)}$$

是一个凸组合，因为 $Ck(q^{-1}x_0) + s(x_0) = k(x_0) = 1$。由于 k 是一个极端点，因此可得 $k = k(q^{-1}x_0)^{-1}T_q k$ ，从而

$$T_q k = k(q^{-1}x_0)k,$$

即， k 是 $Q(R)$-乘性的，且 $\gamma_k(q) = k(qx_0)$。 □

引理 2.6。设 R 是 G的正规子群，则对于每个 $q \in Q(R)$，若其是 G 中的一个交换子，则有

$$T_q f = f$$

对于每个调和 $f \in \mathcal{K}^R$。

证明。设 $q \in Q(R)$，使得 $q = [g, l]$ 与 g、 $l \in G$。我们首先对极端点证明该结论，因此设 $k \in \mathsf{ex}\ \mathcal{K}^R$。由于我们知道 $\pi([g, l]) = \pi(q) \in Z(G/R)$，可得

$$\pi(q^n) = \pi([g, l]^n) = [\pi(g), \pi(l)]^n = [\pi(g), \pi(l)^n] = \pi([g, l^n])$$

从而

$$[g, l^n] = q^n r_n$$

对于 $r_n \in R$ 任意 $n \in \mathbb{N}$。函数 k 是 $Q(R)$-乘性的，具有特征 γ_k由引理 2.5和引理 2.4 可知

$$T_q T_g^n k = T_g^n T_q k = T_g^n \gamma_k(q^{-1})k$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$。因此，对于集合中的每个元素 h

$$\mathcal{C}_0 = \{T_g^n k \mid n \in \mathbb{N}_0\},$$

可知 h 是 $Q(R)$-乘性的，具有相同的特征 γ_k。此外，每个$h \in \mathcal{C}_0$ 都是 R-不变的，因为

$$T_r h = T_r T_g^n k = T_g^n T_{g^{-n} r g^n} k = T_g^n k = h$$

对所有 $r \in R$ ，因为 R 是正规且 k 是 R-不变的。事实上，由 $\mathcal{C}_0$ 生成的闭锥 $\mathcal{C}$ 中的每个元素都具有 $Q(R)$-乘法性和 R-不变性，因为这些性质在正线性组合和极限下保持不变。令 $\mathcal{C}_1 := \{h \in \mathcal{C} \mid h(x_0) = 1\}$ ，可见 $\mathcal{C}_1$ 是凸且紧致的，因为 $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{K}^R$。现在，连续端同态

$$\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1, \quad h \mapsto h(g^{-1}x_0)^{-1}T_g h$$

根据绍德尔-季霍诺夫不动点定理，必有一个不动点 $h_1 \in \mathcal{C}_1$ [16],且对所有 $n \in \mathbb{N}$ 我们得到

$$\begin{aligned} T_g T_l^n h_1 &= T_l^n T_g T_{[g,l^n]} h_1 \\ &= T_l^n T_g T_q^n T_{r_n} h_1 \\ &= T_l^n T_g \gamma(q^{-1})^n h_1 \\ &= \gamma(q)^{-n} h_1(g^{-1}x_0) T_l^n h_1, \end{aligned}$$

利用 $[g, l^n] = q^n r_n$ 以及这样一个事实： h_1 是 R-不变的，并且是 $Q(R)$-乘性的。在 x_0 处计算这个恒等式并整理，得到

$$\frac{T_l^n h_1(g^{-1}x_0)}{T_l^n h_1(x_0)} = \gamma(q)^{-n} h_1(g^{-1}x_0)$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。由哈纳克不等式可知，该等式左边及其逆均有界，因此可得 $\gamma(q) = k(qx_0) = 1$ ，进而得到 $T_q k = k$。

然后，由肖凯定理和引理 1.5，我们可以将 q-不变性推广到任意 $f \in \mathcal{K}^R$，如下：

$$f(qx) = \int_{k \in \operatorname{ex} \mathcal{K}} k(qx) \mathrm{d}\mu_f = \int_{k \in \operatorname{ex} \mathcal{K}} k(x) \mathrm{d}\mu_f = f(x).$$

证明至此完成。 □

现在我们可以按照上述思路证明定理 2.1 。

定理 *2.1* 的证明。考虑 G 的下中心列，记作 $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$。对于固定的 $n \in \mathbb{N}$，取自然投影 $\pi: \ G \to G/G_{n+1}$ 我们有

$$G_n \subseteq \pi^{-1}(G_n/G_{n+1}) \subseteq \pi^{-1}(Z(G/G_{n+1})) = Q(G_{n+1}),$$

作为 $G_n/G_{n+1} \subseteq Z(G/G_{n+1})$ 。此外，我们知道 $G_n = [G, G_{n-1}]$ 由交换子生成，而这些交换子也属于 $Q(G_{n+1})$。由引理 2.6 可知，任何调和且 G_{n+1}-不变的 $f \in \mathcal{K}$ 也必然是 G_n-不变的。反复应用这一论证，我们发现，任何这样的 f 在 $G_1 = [G, G]$ 作用下不变。由 G的幂零性可知，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $G_n = \{e\}$，因此每个 $f \in \mathcal{K}$ 都 G_n-不变，进而也是 $[G, G]$-不变的。由于调和元在 $\mathcal{K}$中稠密，我们得到

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{[G,G]},$$

说明 (a)。此外，再次应用引理 2.5 并结合 $R = [G, G]$，我们得到， $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{[G,G]}$ 的每个调和极端点 Q是$[G, G]$-乘性的。由于 $G/[G, G]$ 是阿贝尔的，因此可推出 $Q([G, G]) = G$，因此 $\mathcal{K}$ 的每个调和极端点 G都是乘性的，从而说明 (b)。 □

2.2 按正规子群取商

我们在上一小节中已经看到，每个正调和函数都在交换子子群作用下保持不变。由于将一个群对其交换子子群取商会得到一个阿贝尔群，因此，在这种情况下，如果能够不失一般性地假设 G 是阿贝尔的，将会很有用。在本章中，我们将这一想法具体化：对于任意正规子群 R，我们定义商空间 X_R 以及图 (b_R, c_R) 的概念，并且 G/R 在其上作用。关键的是，只要每个这样的函数都是 R-不变的，这种取商构造就保留了图的许多相关性质，尤其是正调和函数的集合。由于这一构造针对一般子群 R，稍后我们还可以利用它将问题化归到 $G \cong \mathbb{Z}^d$ 的情形，此时图是局部有限的。

定义 2.7. 设 (b, c) 是 X 上的一个图，带有群作用 G，使得 b 和 c 均为 G-不变。设 $R \subseteq G$ 是一个正规子群。于是定义

$$X_R := \{Rx \mid x \in X\}, \quad b_R : X_R \times X_R \to [0, \infty), \quad c_R : X_R \to \mathbb{R}$$

with

$$b_R(Rx, Ry) := \sum_{r \in R} b(x, ry) \quad \text{and} \quad c_R(Rx) := c(x).$$

这里，Rx 表示对每个 $x \in X$ 的集合 $\{rx \mid r \in R\}$。我们分别称 X_R、b_R 和 c_R 为按 R 取商后的空间、图和势。此外，对 $Rg \in G/R$ 和$Rx \in X_R$，定义

$$Rg\, Rx := R(gx) \in X_R.$$

注意，b_R 的定义可能会产生对角项 $b_R(Rx, Rx) > 0$，因为这样定义会使某些计算更简单。不过，这确实会影响算子$H_{b_R,\ c_R}$。

引理 2.8. 定义 2.7 中的概念定义良好。此外，b_R 定义了一个以 X_R 为底集的图，而 G/R 中一个元素与 X_R 中一个元素的乘法定义了 G/R 在 X_R上的群作用。

证明。对于 b_R 和 c_R，我们需要证明这些定义与代表元的选取无关。为此，取 x_1、x_2、y_1、$y_2 \in X$，使得 $x_1 = r_x x_2$和 $y_1 = r_y y_2$，其中 r_x、$r_y \in R$。于是有

$$b_R(Rx_1, Ry_1) = \sum_{r \in R} b(x_1, ry_1) = \sum_{r \in R} b(r_x^{-1} r_x x_2, r_x^{-1} r r_y y_2) = \sum_{r' \in R} b(x_2, r' y_2) = b_R(Rx_1, Ry_2),$$

其中第一步用到了 b 的 G-不变性，第二步则作了代换 $r' = r_x^{-1} r r_y$。此外，对于 c_R，有

$$c_R(Rx_1) = c(x_1) = c(r_x x_2) = c_R(Rx_2),$$

其中我们利用了 c 的 G-不变性。为了证明 b_R 有限并定义了一个图子 X_R，我们必须证明该级数收敛，并且 b_R 局部可和。我们将

通过一次计算来完成这一证明。事实上，设 $x \in X$，则

$$\deg_{b_R}(Rx) = \sum_{Ry \in X_R} b_R(Rx, Ry) = \sum_{Ry \in X_R} \sum_{r \in R} b(x, ry) = \sum_{y' \in X} b(x, y') = \deg_b(x),$$

由于 b 是图，因此它是有限的。由此可知， b_R 是定义良好的图，且 c_R 是定义良好的势。接下来只需证明群上的乘法运算构成群作用。事实上，设 g_1、 $g_2 \in G$ 满足 $g_1 = r_g g_2$ ，且 x_1、 $x_2 \in X$ 满足$x_1 = r_x x_2$。于是我们有

$$Rg_1\, Rx_1 = Rg_1 x_1 = Rr_g g_2 r_x x_2 = Rr_g \underbrace{g_2 r_x g_2^{-1}}_{\in R} g_2 x_2 = Rg_2 x_2$$

这证明了群乘法定义良好。最后我们看到

$$Re\, Rx = Rx$$

and

$$(RgRh)\, Rx = Rgh\, Rx = Rghx = Rg\, Rhx = Rg\, (Rh\, Rx)$$

对所有 g、 $h \in G$ 和 $x \in X$均成立，这表明以这种方式定义的乘法实际上是群作用。 □

引理 2.9. 在空间 $C(X)$ 和 $C(X_R)$ 上，考虑逐点收敛拓扑。回忆一下，元素 $x \in X$ 关于群作用的稳定子是集合 $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$。商空间 X_R、图 b_R 和势 c_R 满足以下性质。

(a) 图 b_R 和势 c_R 都是 G/R-不变的。(b) 若 G 在 X 上的群作用是余紧的，且有限集为 $V \subseteq X$，则 G/R 在 X_R 上的群作用是余紧的，有限集为 $V_R = \{Rv \mid v \in V\}$。(c) 若 b 是连通的，则 b_R 也是连通的。(d) 若 b 是局部有限的，则 b_R 也是局部有限的。(e) 若 R 包含元素 $x \in X$ 的所有稳定子，则 G/R 在 X_R 上的作用是自由的。(f) 对于势 $c' := c - \lambda$，任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都有 $c'_R = c_R - \lambda$。(g) 令 $C(X)^R$ 表示 X 上所有 R-不变函数构成的集合。那么映射

$$\Phi : C(X)^R \to C(X_R), \quad \Phi(f)(Rx) = f(x)$$

是良定义的同胚，并将$C(X)^R \cap$ 的定义域($H_{b,c}$)限制为到定义域(H_{b_R,c_R})的同胚。此外，$H_{b,c}$ 将 $C(X)^R$中的元素映射到 $C(X)^R$ 中，且下图交换:

$$\begin{array}{ccc} C(X)^R \cap \mathrm{Dom}(H_{b,c}) & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & C(X_R) \cap \mathrm{Dom}(H_{b_R,c_R}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H_{b,c}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle H_{b_R,c_R}} \\ C(X)^R & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & C(X_R) \end{array}$$

(h) 若关于$H_{b,c}$ 的每个正调和函数都是 R-不变的，则(g)中的映射 Φ 限制为一个同胚

$$\Phi|_{\mathcal{H}^+_{b,c}} : \mathcal{H}^+_{b,c} \to \mathcal{H}^+_{b_R,c_R}.$$

证明。

(a) 设 $g, \in G$ 和 $x, y \in X$。则

$$\begin{aligned} b_R(Rgx, Rgy) &= \sum_{r\in R} b(rgx, rgy) = \sum_{r\in R} b(g^{-1}rgx, g^{-1}rgy) \\ &= \sum_{\substack{r'=g^{-1}rg \\ r\in R}} b(r'x, r'y) = \sum_{r\in R} b(rx, ry) = b_R(Rx, Ry), \end{aligned}$$

由于 b 是 G-不变的，且共轭映射 $r \mapsto g^{-1}rg$ 是 R 上的双射。此外，对于 c_R，我们有

$$c_R(Rgx) = c(gx) = c(x) = c_R(Rx)$$

因为 c 是 G-不变的。

(b) 假设 $GV = X$，则我们有

$$\begin{aligned} (G/R)V_R &= \{RgRv \mid Rg \in G/R, v \in V\} \\ &= \{Rgv \mid g \in G, v \in V\} = \{Rx \mid x \in GV\} = X_R, \end{aligned}$$

这表明该群作用是余紧的。

(c) 假设 b 是连通的，并令 $x, y \in X$。存在一条路径 $x = z_1 \sim \cdots \sim z_n = y$，经由 b 连接 x 和 y 于 X 中。注意，每当 $b(z_i, z_{i+1}) > 0$ 时，

$$b_R(Rz_i, Rz_{i+1}) = \sum_{r\in R} b(z_i, rz_{i+1}) > 0$$

因为 $e \in R$。因此，路径 $Rx = Rz_1 \sim \cdots \sim Rz_n = Ry$ 经由 b_R 连接 Rx 和 Ry 于 X_R 中，这表明所需的连通性成立。

(d) 假设 b 是局部有限的。令 $x \in X$。那么，相对于 b_R， Rx 的邻点集合为

$$\{Ry \in X_R \mid b_R(Rx, Ry) > 0\} = \{Ry \in X_R \mid b(x, ry) > 0 \text{ for some } r \in R\},$$

这必定是有限的，因为根据 b的局部有限性，满足 $b(x, ry) > 0$ 的 ry 中元素 $r \in R, y \in X$ 只有有限多个。这表明 b_R 是局部有限的。

(e) 假设 R 包含所有稳定子。令 $Rg \in G/R$ 和 $Rx \in X_R$ 满足 $RgRx = Rgx = Rx$。由此可知，存在 $r \in R$ 使得 $rg \in \mathrm{Stab}(x) \subseteq R$，因此可得 $Rg = Rrg = Re$。

(f) 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $x \in X$，我们有 $c'_R(Rx) = c'(x) = c(x) - \lambda = c_R(Rx) - \lambda$。

(g) 显然，Φ 是良定义的，因为其定义域中的函数具有 R-不变性。此外，容易看出，对于 $f' \in C(X_R)$，令 $\Phi^{-1}(f')(x) = f'(Rx)$，即可定义 Φ的逆映射。根据定义，Φ 及其逆映射的连续性也立即可知。此外，我们看到，对于每个 $f \in C(X)^R$，都有

$$\sum_{Ry \in X_R} b_R(Rx, Ry)|\Phi(f)(Ry)| = \sum_{Ry \in X_R} \sum_{y' \in Ry} b(x, y')|f(y')| = \sum_{y \in X} b(x, y)|f(y)|,$$

因此 $f \in C(X)^R \cap$ 定义域$(H_{b,\,c})$ 等价于 $\Phi(f) \in$ 定义域$(H_{b_R,\,c_R})$。现在令 $f \in C(X)^R$ 以及 $r \in R$。那么根据引理 1.1 我们知道，$H_{b,\,c}$ 具有 G-不变性，因此

$$T_r H_{b,c} f = H_{b,c} T_r f = H_{b,c} f,$$

因此 $H_{b,\,c}$ 将 $C(X)^R$ 映射到自身。最后，对于 $f \in C(X)^R$ 和 $x \in X$，我们有

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(H_{b_R,c_R}\Phi(f))(x) &= \sum_{Ry \in X_R} b_R(Rx, Ry)(\Phi(f)(Rx) - \Phi(f)(Ry)) + c(Rx)\Phi(f)(Rx) \\
&= \sum_{Ry \in X_R} \sum_{y' \in Ry} b(x, y')(f(x) - f(y')) + c(x)f(x) \\
&= \sum_{y \in X} b(x, y)(f(x) - f(y)) + c(x)f(x) \\
&= H_{b,c} f(x),
\end{aligned}$$

表明该图表可交换。

（h）假设 $\mathcal{H}^+_{b\,,c} \subseteq C(X)^R$。那么我们可以将 Φ 限制到 $\mathcal{H}^+_{b\,c\,,}$。我们注意到，Φ 和 Φ^{-1} 将正函数映射为正函数。此外，（f）中的图表可交换性说明

$$H_{b,c}\Phi(f) = \Phi(H_{b,c} f) = \Phi(0) = 0$$

对于任意调和 $f \in C(X)^R$，因此 $\Phi|_{\mathcal{H}^+_{b\,,c}}$ 映射到 $\mathcal{H}_{b_R,c_R}$。类似地，可以看出 Φ^{-1} 将调和函数映射为调和函数，因此该限制算子也是满射；结合（g），这表明它是一个同胚。

□

这一构造结合定理 2.1 使我们现在能够研究具有阿贝尔群作用的图，而不再局限于一般的幂零群作用。具体做法是用交换子子群对群、空间和图取商。这样，当算子在群平移下保持不变时，我们就保留了有关正调和函数的全部信息。

3 局部有限图的结构性结果

本节中，我们只考虑局部有限图。在这种情形下，我们可以将 $\mathcal{K}$ 的极端点刻画为恰好是乘性元。此外，我们将研究薛定谔算子的正乘性广义特征函数的结构，这将使我们对所有正广义特征函数的集合有所了解。这些结果可视为 [13, 第 4–6] 节中关于流形上微分算子的结果的离散类比。

3.1 刻画 K 的极端点

我们在上一节已经看到， $\mathcal{K}$ 的每个调和极端点都是乘性的。本节旨在证明，当图是局部有限图时，反过来也成立。将局部有限图 (b, c) 上正的归一化乘法调和函数集合记为

$$\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{K} \mid f \text{ is multiplicative}\}.$$

注意，由于图的局部有限性， $\mathcal{K}$ 只包含调和函数，因此该集合中也只有调和函数。事实上，考虑一个收敛序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^+$ ，满足 $f_n(x_0) = 1$。然后将极限移到有限和之外，得到

$$\begin{aligned} H_{b,c}(\lim_{n\to\infty} f_n)(x) &= \sum_{y\sim x} b(x,y) \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(y)) + c(x) \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{y\sim x} b(x,y)(f_n(x) - (f_n(y)) + c(x) f_n(x) \right) = \lim_{n\to\infty} H_{b,c} f_n(x) = 0, \end{aligned}$$

因此， $\{f \in \mathcal{H}^+ \mid f(x_0) = 1\}$ 是闭集。此外，对于逐点收敛到 $f \in \mathcal{K}$ 的序列 $f_n \in \mathcal{M}$ ，我们有

$$T_g f = \lim_{n\to\infty} T_g f_n = \lim_{n\to\infty} f_n(gx_0) f_n = f(gx_0) f,$$

因此， f 也是乘性的，故而是 $\mathcal{M}$的一个元素。由此可知， $\mathcal{M}$ 作为紧致的 $\mathcal{K}$的闭子集，是紧致的。现在我们可以陈述本文的第二个主要定理。作为推论，当势消失时，我们还得到刘维尔性质。定理 3.1. 设 (b, c) 是一个局部有限连通图。设 G 是一个幂零群，在 X 上余紧地作用，且 $H_{b,c}$ 是 G-不变的。那么

$$\mathcal{M} = \operatorname{ex} \mathcal{K}.$$

在证明该定理之前，我们注意到它可以推导出以下刘维尔性质。

推论 3.2（刘维尔性质）。设 b 是一个权函数，使得（b，0）是一个局部有限的连通图。设 G 是一个在 X 上余紧地作用的幂零群，且使得$H_{b,\,0}$ 是 G-不变的。则每个有界调和函数都是常数。

证明。我们首先注意到，对于一个消失的势，常函数 1 是 $\mathcal{M}$ 的元素，因为它是正的、调和的并且是 G-不变的。设 $f \in C(X)$ 有界且调和。设 $C > 0$ 使得 $-C < f < C$。则 $h := \frac{1}{2C}(C + f)$ 是调和的，并满足 $0 < h < 1$。因此，函数 $h/h(x_0)$ 和 $(1-h)/(1-h(x_0))$ 都是 $\mathcal{K}$ 的元素。由于 $1 \in \mathcal{M}$，由定理 3.1 可知，它是 $\mathcal{K}$ 的一个极端点，因此，方程

$$1 = h(x_0) \cdot h/h(x_0) + (1 - h(x_0)) \cdot (1-h)/(1-h(x_0))$$

这表明 $h/h(x_0) = 1$，因此 h，从而 f 为常数。 □

我们将分两步证明定理 3.1 。第一个包含关系可由上一节的定理 2.1 立即得到，第二个包含关系将在后文证明。首先，我们注意到下面的引理，即使对于非局部有限图也成立。它类似于 [13, 引理 5.2 (i)], ，证明也类似。

引理 3.3. 设 (b, c) 是定义在 X 上、具有余紧群作用 G 的图，设 $f_1, f_2 \in \mathrm{Dom}(H_{b,c})$ 严格为正、归一化且为乘性的，并具有相同的关联同态 $\gamma_{f_1} = \gamma_{f_2}$。若 f_1 是超调和的，且 f_2 是次调和的，则 $f_1 = f_2$，并且二者都是调和的。

证明。设 V 是该群作用的一个基本域。令 $\gamma := \gamma_{f_1} = \gamma_{f_2}$。由于 f_1 和 f_2 均为正，我们有

$$C := \min_{v \in V,} \frac{f_1(v)}{f_2(v)} > 0$$

并且对于 $x \in X$，我们可以将 $x = gv$ 写成关于 $g \in G$ 和 $v \in V$ 的形式，并得到

$$f_1(x) - Cf_2(x) = \gamma(g)(f_1(v) - Cf_2(v)) \geq \gamma(g)\left((f_1(v) - \frac{f_1(v)}{f_2(v)} f_2(v)\right) = 0,$$

因此，函数 $h := f_1 - Cf_2$ 是非负的。此外，h 是超调和的，因为 f_1 是超调和的，而 f_2 是次调和的，所以 $h \in \{0\} \cup \mathcal{S}^+$。此外，$h$ 并非严格正，因为 $h(v) = 0$ 当 $C = f_1(v)/f_2(v)$ 时，因此由哈纳克不等式的推论1.3可得 $f_1 = Cf_2$。由于两个函数都在 x_0 处归一化，因此有 $C = 1$，结论得证。 □

特别地，只要 f_1，$f_2 \in \mathcal{M}$ 且 $\gamma_{f_1} = \gamma_{f_2}$，该引理就说明 $f_1 = f_2$。有了这一点，我们便可证明以下引理，进而立即得到定理 3.1的证明。与前一个引理类似，引理 3.4 类似于 [13, 引理 5。4],证明也相似。

引理 3.4. 设 (b, c) 是 X 上具有余紧群作用 G 且固定了 $x_0 \in X$ 的局部有限连通图。那么

$$\mathcal{M} = \mathrm{ex}\,\overline{\mathrm{conv}}\,\mathcal{M}.$$

证明. 首先，由于 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$，可知 $\operatorname{conv}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$ 是紧致的。然后，根据克莱因–米尔曼定理，我们有

$$\operatorname{ex}\overline{\operatorname{conv}}\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}.$$

反设等式不成立，即存在$h \in \mathcal{M} \setminus$ 不属于 $\operatorname{conv}\mathcal{M}$。那么，对 h应用肖凯定理时，我们可以将所得测度 μ 延拓到 $\mathcal{M}$，使得

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi(k)\mathrm{d}\mu(k) = \varphi(h) = \int_{\mathcal{M}} \varphi(k)\mathrm{d}\delta_h(k)$$

对 $\mathcal{M}$ 上的所有连续线性泛函 φ 均成立，其中 δ_h 是位于h的狄拉克测度。我们注意到，μ 和 δ_0 不同，因为它们的支撑不相交，但根据上式，它们对连续线性泛函的积分相同。令

$$A := \operatorname{lin}\{\varphi_g : \mathcal{M} \to \mathbb{R},\ f \mapsto \gamma_f(g) = f(gx_0) \mid g \in G\}.$$

根据构造，A 是 $C(\mathcal{M})$ 的子空间，但它实际上还是一个子代数，因为

$$\varphi_g(f)\varphi_l(f) = f(gx_0)f(lx_0) = f(glx_0) = \varphi_{gl}(f)$$

对任意 $f \in \mathcal{M}$ 和 g，$l \in G$均成立。此外，$\varphi_e \in A$ 是常数，因为 $\varphi_e(f) = f(x_0) = 1$对所有 $f \in \mathcal{M}$均成立。最后，对于 $f_1 \neq f_2 \in \mathcal{M}$，由引理 3.3可得 $\gamma_{f_1} \neq \gamma_{f_2}$，因此存在 $g \in G$ 使得

$$\varphi_g(f_1) = \gamma_{f_1}(g) \neq \gamma_{f_2}(g) = \varphi_g(f_2).$$

我们已经证明，A 是 $C(\mathcal{M})$的一个子代数，它能够分离点并包含常数，因此根据 Stone-Weierstrass 定理，它关于上确界范数在 $C(\mathcal{M})$中稠密。

由此可知，对于所有 $\varphi \in C(\mathcal{M})$，$\delta_0(\varphi) = \mu(\varphi)$都成立，因为 δ_h 和 μ 是概率测度，且它们在 A上相同。根据 Riesz-Markov 表示定理的唯一性，我们得出 $\delta_h = \mu$，这与假设矛盾。 □

定理的证明 *3.1*。根据上一章中的引理 1.5，我们知道 $\operatorname{ex}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$，因此 $\mathcal{K} = 凸\mathcal{M}$，这是由 Krein-Milman 定理以及 $\mathcal{M}$ 是凸紧致集 $\mathcal{K}$ 的子集这一事实得出的。结合引理 3.4，我们得出

$$\mathcal{M} = \operatorname{ex}\overline{\operatorname{conv}}\mathcal{M} = \operatorname{ex}\mathcal{K}.$$ □

3.2 乘性的广义特征函数

到目前为止，我们只研究了单个算子 $H = H_{b,\ c}$ 的正解。在本小节中，我们将考虑正的广义特征函数，即满足$H - \lambda$ 且对应于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的解，这些解称为 λ-调和函数。由于假设 b 是

局部有限，因此我们可以对每个 将定理 3.1 应用于算子 $H-\lambda = H_{b,\ c-\lambda}$。鉴于该定理和肖凯定理，我们尤其关注乘性的正 λ-调和函数。

我们用 $\mathcal{H}_\lambda^+, \mathcal{S}_1^+{}_{,\lambda}, \mathcal{K}_\lambda$ 和 $\mathcal{M}_\lambda$ 分别表示先前定义的集合 $\mathcal{H}^+, \mathcal{S}_1^+, \mathcal{K}$ 和 $\mathcal{M}$，但这里针对的是图 $(b, c-\lambda)$；例如， $\mathcal{H}_\lambda^+$ 是正 λ-调和函数的集合。此外，对于 $I \subseteq \mathbb{R}$，我们用 $\mathcal{H}_I^+, \mathcal{K}_I$ 和 $\mathcal{M}_I$ 分别表示 $\mathcal{H}_\lambda^+, \mathcal{K}_\lambda$ 和 $\mathcal{M}_\lambda$ 对 $\lambda \in I$ 的并。由于这些集合只包含 λ-调和函数，因此不同参数对应的并总是互不相交的。本文的第三主定理如下，它进一步揭示了集合族 $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 的结构。

定理 3.5。设 (b, c) 是 X 上的一个局部有限连通图，具有余紧幂零群作用 G，使得 $H_{b,c}$ 是 G-不变的。那么存在 $\lambda_0 > 0$ 和 $d \in \mathbb{N}_0$，使集合族 $\mathcal{M}_\lambda$ （其中 $\lambda \in \mathbb{R}$）满足以下性质。

(a) 对于 $\lambda > \lambda_0$，集合 $\mathcal{M}_\lambda$ 为空。(b) 集合 $\mathcal{M}_{\lambda_0}$ 恰好由一个点组成。(c) 对于 $\lambda < \lambda_0$，集合 $\mathcal{M}_\lambda$ 同胚于一个 $(d-1)$-球面（若 $d = 0$ 则为空）。(d) 对于任意 $\lambda \in [-\infty, \lambda_0)$，集合 $\mathcal{M}_{(\lambda,\lambda_0]}$ 同胚于一个开 d-球。

这个定理与 [13, 定理 5.15], 类似，不过此处的结果是纯拓扑性的。此处的情况也有所简化，因为我们总能将从 G 到 $\mathbb{R}^+$ 的群同态空间与 $\mathbb{R}^n$ 认同。我们通过将所有问题归约到 $G = \mathbb{Z}^d$ 的情形来实现这一点。事实上，下面的引理使我们能够这样做。

引理 3.6. 设 (b, c) 是定义在 X 上的一个局部有限连通图，具有幂零余紧群作用 G，且 $H_{b,\ c}$ 是 G-不变的。那么存在一个正规子群 $R \subseteq G$，使得每个 $f \in \mathcal{H}_\mathbb{R}^+$ 都是 R-不变的， $G/R \cong \mathbb{Z}^d$ 对某个 $d \in \mathbb{N}_0$ 成立，并且 R 包含 $x \in X$ 中所有元素的稳定子。

证明。我们定义

$$R := \bigcap_{f\in\mathcal{M}_\mathbb{R}} \ker \gamma_f,$$

它是群同态的核的交，因此是一个正规子群。我们看到每个 $f \in \mathcal{M}_\mathbb{R}$ 都是 R-不变的，并且由推论 2.2 可知，每个$f \in \mathcal{H}_\mathbb{R}^+$ 都是 R-不变的。此外，当 $g \in \mathrm{Stab}(x)$ 对 $x \in X$ 成立时，我们有

$$\gamma_f(g) = \frac{f(gx)}{f(x)} = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

对所有 $f \in \mathcal{M}_\mathbb{R}$均成立，因此 $g \in R$，从而 R 包含所有稳定子。剩下只需证明$G/R \cong \mathbb{Z}^d$。为此，我们证明它是阿贝尔、无挠且有限生成的。首先注意到 $[G, G] \subseteq R$ 由定理 2.1可得，因此 G/R 是阿贝尔的。此外，若 $Rg \in G/R$ 的阶有限，且为 n，那么 $\gamma_f(g^n) = 1$ 对所有 $f \in \mathcal{M}_\mathbb{R}$ 均成立，这意味着 $\gamma_f(g) = 1$，因此 $Rg = Re$，从而 G/R 是无挠的。

最后，令 V 为该群作用的一个基本域，并定义

$$S := \{Rs \in G/R \mid b(v, sw) > 0 \text{ for some } v, w \in V\}.$$

集合 S 是有限的，因为 V 是有限的， b 是局部有限的，且 R 包含所有稳定子。给定$g \in G$ ，由图的连通性以及G-作用的余紧性可知，存在一条路径

$$x_0 = g_1 v_1 \sim \cdots \sim g_n v_n = g x_0$$

其中 $g_i \in G$ 和 $v_i \in V$。由 b 的 G-不变性可知 $b(v_i, g_i^{-1} g_{i+1} v_{i+1}) > 0$ ，因此令 $s_i = g_i^{-1} g_{i+1}$ ，便得到

$$Rg = Rs_1 \dots Rs_{n-1}$$

其中 $Rs_i \in S$，因为 R 还包含 x_0的稳定子。因此， G/R 由 S有限生成。由此可知， G/R 是阿贝尔、无挠且有限生成的，所以对某个 $d \in \mathbb{N}_0$，有 $G/R \cong \mathbb{Z}^d$ 。 □

本节的首要目标是确定乘法归一化特征函数族的总体集合 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ 与 $\mathbb{R}^d$。事实上，从 $(\mathbb{Z}^d, +)$ 到 $(\mathbb{R}, +)$ 的同态由其在 $\mathbb{Z}^d$的 d 个生成元 $e_1, \dots e_d$ 上的取值唯一确定，因此我们可以将向量 $\alpha \in \mathbb{R}^d$ 与该同态对应：

$$\alpha : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}, \quad \alpha(z_1, \dots, z_d) := \langle \alpha, z \rangle = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k z_k,$$

其中 α_k 表示向量 α的第 k个分量。显然，这一对应是拓扑向量空间之间的同构，因此在此意义下，将这两个对象都记作 α只是略微滥用了记号。

这使我们能够定义

$$\rho : \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^d, \quad f \mapsto \alpha_f := \log \circ \gamma_f,$$

它将每个乘法函数与其特征对应起来，该特征由对数复合而成。结果 α_f 是从 $(\mathbb{Z}^d, +)$ 到 $(\mathbb{R}, +)$ 的同态，因此根据上文的讨论，它可视为 $\mathbb{R}^d$ 的一个元素。由引理 3.3 可知， ρ 实际上是单射，因为 $f \mapsto \gamma_f$ 是单射。不过，我们希望证明 ρ 也是满射，而且事实上它是一个同胚。

下面，我们通过显式构造逆函数来证明 ρ 是满射。对于 $\alpha \in \mathbb{R}^d$，定义矩阵 Q_α 如下

$$(Q_\alpha)_{v,w} := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} b(v, zw) \exp(\langle \alpha, z \rangle)$$

对于 v、$w \in V$，且具有 $v \neq w$，以及

$$(Q_\alpha)_{v,v} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} b(v, zv) \exp(\langle \alpha, z \rangle) + \max_{w \in V} \deg(w) - \deg(v)$$

对于所有 $v \in V$。我们看到 Q_α 的各项均非负，并且由于图是连通的，它是不可约的。事实上，给定 v、$w \in V$，我们可以找到一条路径 $v = z_1 w_1 \sim z_2 w_2 \sim \cdots \sim z_n w_n = w$ 在 b 中，然后我们估计

$$(Q_\alpha^{n-1})_{v,w} \geq \prod_{i=1}^{n-1} (Q_\alpha)_{w_i, w_{i+1}} \geq \prod_{i=1}^{n-1} b(w_i, (z_{i+1} - z_i) w_{i+1}) \exp(\langle \alpha, z_{i+1} - z_i \rangle)$$
$$= \exp(\langle \alpha, z_n - z_1 \rangle) \prod_{i=1}^{n-1} b(z_i w_i, z_{i+1} w_{i+1}) > 0.$$

因此，我们可以对 Q_α 应用 Perron-Frobenius定理，并得到矩阵 Q_α 与 ρ之间的如下联系。这个引理与[13, 推论 49], 有些类似，但这里的情形稍微简单一些，因为我们可以使用 Perron-Frobenius 定理。

引理 3.7. 函数 ρ 是双射。其逆映射由 $\rho^{-1}(\alpha)(zv) = \exp(\langle \alpha, z \rangle)\varphi_\alpha(v)$ 给出，其中 φ_α 表示 Q_α的 Perron-Frobenius特征向量。此外，$\rho^{-1}(\alpha) \in \mathcal{M}_\lambda$，其中 $\lambda = \max_{v \in V} \deg(v) - \theta(\alpha)$，而 $\theta(\alpha)$ 表示 Q_α的 Perron-Frobenius 特征值。

证明。设 $\alpha \in \mathbb{R}^d$，并考虑函数

$$h_\alpha : X \to \mathbb{R}, \quad h_\alpha(zv) = \exp(\langle \alpha, z \rangle)$$

对于 $v \in V$ 和 $z \in \mathbb{Z}^d$，该函数定义良好，因为群作用是自由的。于是，h_α 的相应加性同态为 α，因此函数 $f \in \mathcal{M}_\mathbb{R}$ 满足$\rho(f) = h_\alpha$，当且仅当它具有形式 $f = h_\alpha \varphi$，其中 φ 是一个 G-不变函数。这引导我们考虑以下算子。

$$H_{h_\alpha} : C(X) \to C(X), \quad H_{h_\alpha} f := \frac{1}{h_\alpha} H(h_\alpha f).$$

文献中通常将这个算子称为相对于 h_α 的 H 基态变换。它的定义方式使其与群平移可交换。事实上，对于 $f \in C(X)$ 和 $g \in G$，我们有

$$\begin{aligned} H_{h_\alpha} T_g f &= \frac{1}{h_\alpha} H(h_\alpha T_g f) \\ &= \frac{1}{h_\alpha} H(\exp(-\alpha(z)\rangle) T_g(h_\alpha f)) \\ &= \frac{1}{\exp(\alpha(z)) h_\alpha} T_g H(h_\alpha f) \\ &= T_g H_{h_\alpha}, \end{aligned}$$

因为 h_α 是具有特征 $\exp \circ \alpha$ 的乘性函数，并且 H 与群平移可交换。特别地，H_{h_α} 将 G-不变函数映射为 G-不变函数。此外，

我们注意到，对于一个 G-不变函数 φ，乘积 $f = h_\alpha\varphi$ 为正且是λ-调和的，当且仅当 φ 为正且

$$(H_{h_\alpha} - \lambda)\varphi = 0.$$

换句话说，元素 $f \in \rho^{-1}(\{\alpha\})$ 与正特征向量 φ 一一对应，其中这些正特征向量属于 H_{h_α} 到 $C(X)^G$ 的限制算子； G 是不变函数构成的空间。现在，空间 $C(X)^G$ 与 $C(V)$同构，因为定义在 V 上的函数可以周期延拓到 $C^G(V)$，而且这个映射是满射。在此同构下，限制算子 $H_{h_\alpha}|_{C(X)^G}$ 的矩阵元素为

$$H_{h_\alpha}1_{Gw}(v) = \frac{1}{h_\alpha(v)}\sum_{g\in G} b(v, gw)(-h_\alpha(gw)) = -\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} b(v, zw)\exp(\langle\alpha, z\rangle)$$

对于对应于 v、 $w \in V$的非对角元素，以及

$$H_{h_\alpha}1_{Gv}(v) = \frac{1}{h_\alpha(v)}\left(\sum_{g\in G} b(v, gw)(h_\alpha(v) - h_\alpha(gv)) + c(v)h_\alpha(v)\right) = \deg(v) - \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} b(v, zv)\exp(\langle\alpha, z\rangle).$$

对于对应于 $v \in V$的对角元素。这里， 1_{Gv} 表示相对于群作用， v 的轨道的示性函数。将此与矩阵 Q_α进行比较，我们得到

$$H_{h_\alpha}|_{C(X)^G} = \max\deg(v)I - Q_\alpha,$$

因此，这两个矩阵具有相同的特征子空间。于是，元素 $f \in \rho^{-1}(\{\alpha\})$由 $f = h_\alpha\varphi$ 给出，其中 φ 是 $H_{h_\alpha}|_{C(X)^G}$的正特征向量。然而， Q_α 与 $H_{h_\alpha}|_{C(X))^G}$恰好具有相同的特征向量，而 Perron-Frobenius特征向量φ_α 是 Q_α的唯一正特征向量。由此可知，函数 ρ 确实是双射，其逆映射为

$$\rho^{-1}(\alpha)(zv) = h_\alpha(zv)\varphi_\alpha(v) = \exp(\langle\alpha, z\rangle)\varphi_\alpha(v),$$

其中， φ_α 是 Q_α的Perron-Frobenius特征向量。

对于此外的部分，注意到与 φ_α 相关联的 Q_α 的特征值是Perron-Frobenius特征值 $\theta(\alpha)$，因此 $H_{h_\alpha}|_{C(X)^G}$ 对于同一向量的特征值为

$$\lambda = \max_{v\in V}\deg(v) - \theta(\alpha).$$

根据 H_{h_α}的构造可知，对于相同的 λ， f 是 λ-调和的。 □

现在我们可以将总空间 $\mathcal{M}_\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^d$等同起来，并且我们将在下文的引理 ρ 中看到，这实际上是一个同胚 3.11 。这一等同使我们能够将

空间 $\mathbb{R}^d$ 划分为以下集合族。对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $I \subseteq \mathbb{R}$，定义

$$\mathcal{A}_\lambda := \rho(\mathcal{M}_\lambda), \quad \mathcal{A}_I := \bigcup_{\lambda' \in I} \mathcal{A}_{\lambda'} = \rho(\mathcal{M}_I).$$

下面我们将研究族（$\mathcal{A}_\lambda$）$_{\lambda\in\mathbb{R}}$，随后我们便能够将该族的所有拓扑性质转移回（$\mathcal{M}_\lambda$）$_{\lambda\in\mathbb{R}}$，以用于定理 3.5 的证明。集合 $\mathcal{A}_\lambda$ 更易于处理，因为 $\mathbb{R}^d$上具有向量空间结构。事实上，许多有用的性质都将源于下述函数的凹性。

$$\Lambda : \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathcal{A}_\lambda \mapsto \lambda.$$

这正是族（$\mathcal{A}_\lambda$）$_{\lambda\in\mathbb{R}}$的基投影映射。然而，根据引理 3.7，可得

$$\Lambda(\alpha) = \max_{v\in V} \deg(v) - \theta(\alpha),$$

其中，$\theta(\alpha)$ 是 Q_α 的 Perron-Frobenius 特征值。由此恒等式立即可见，$\Lambda \leq \max_{v\in V}\deg(v)$，因为 Perron-Frobenius 特征值总是正的。这意味着，对于超过某个阈值的 λ，不存在乘性的 λ-调和函数。由于我们希望得到一个精确的阈值，定义

$$\lambda_0 := \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^d} \Lambda(\alpha) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathcal{A}_\lambda \neq \emptyset\} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathcal{M}_\lambda \neq \emptyset\}$$

事实上，这个上确界就是最大值，我们将在下面的定理 3.12中看到。由于λ_0 是有限的，且当 $\lambda > \lambda_0$时为空集，因此我们常将 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]}$ 和 $\mathcal{M}_{(\lambda,\lambda_0]}$ 分别记作 $\mathcal{A}_{(\lambda,\infty)}$ 和 $\mathcal{M}_{(\lambda,\infty)}$，其中 $\lambda < \lambda_0$。当然，λ_0 不可能是 $-\infty$，因为 $\mathcal{A}_{(-\infty,\lambda_0]} = \mathbb{R}^d \neq \emptyset$。

注 3.8。根据定义，λ_0 是所有满足存在 λ-调和函数这一条件的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的上确界，因为 $\mathcal{M}_\lambda$ 为空集当且仅当 $\mathcal{K}_\lambda$ 为空集。于是，若算子$H = H_{b,\ c}$ 相对于测度 m是自伴的，那么 Agmon-Allegretto-Piepenbrink 定理（见 [17], ）表明，λ_0 恰好是 H 在 $\ell^2(X, m)$上的谱底。

注 3.9. 为了计算或估计 λ_0，可以使用表示式 $\Lambda(\alpha) = \max_{v\in V}\deg(v) - \theta(\alpha)$。事实上，求出矩阵 Q_α 的所有 Perron-Frobenius 特征值中的最小值 $\theta_{\min}$，即可得到

$$\lambda_0 = \max_{v\in V} \deg(v) - \theta_{\min}.$$

此外，求出矩阵 Q_α 的任意一个 Perron-Frobenius 特征值 $\theta(\alpha)$，即可得到一个下界

$$\lambda_0 \geq \max_{v\in V} \deg(v) - \theta(\alpha),$$

这为自伴算子 $H_{b,\ c}$ 的谱隙给出了一个下界。

在定理 3.12 中，我们将证明集合 $\mathcal{A}_\lambda$ 的若干性质。证明与其对应结果 [13, 推论 5。14], 类似，但会同时利用 $\mathcal{A}_\lambda$ 作为 Λ 在 λ 下的原像，以及作为 ρ 在 $\mathcal{M}_\lambda$下的像。为分别利用这两种表示，

我们有以下两个引理。引理 3.10 类似于 [13, 引理 5。12],其中，那里省略的直接计算，在这里不过是应用了霍尔德不等式¨。另一方面，引理 3.11是一个简单的连续性结果，在 [13]中没有明显的对应结论。

引理 3.10. 映射 $\Lambda : \mathbb{R}^d \to (-\infty, \lambda_0]$ 是严格凹且连续的。

证明。取不同的 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{R})$，并令 $t \in \in (0,1)$。定义 $\lambda_i = \Lambda(\alpha_i)$。我们知道，函数 $f_{\alpha_i} := \rho^{-1}(\alpha_i)$ 是归一化的、 λ_i-调和的、正的且乘性的，其特征为 $\exp \circ \alpha_i$，其中 $i \in \{1,2\}$。特别地，

$$\sum_{y \in X} b(x,y) f_{\alpha_i}(y) = (\deg(x) - \lambda_i) f_{\alpha_i}(x)$$

对所有 $x \in X$ 均成立。此外，定义 $\lambda_t := t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2$ 和 $f_t \in C(X)$ 如下:

$$f_t(x) := (f_{\alpha_1}(x))^t (f_{\alpha_2}(x))^{(1-t)}.$$

于是我们看到， f_t 是归一化的且乘性的，其特征为 $\exp \circ \alpha_t$，其中 $\alpha_t := t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$，并且还有 $f_1 = f_{\alpha_1}$ 和 $f_2 = f_{\alpha_2}$。现在，对固定的 $x \in X$，我们可以将 X 视为配备离散测度 $b(x,\cdot)$ 的测度空间；于是对 $p = \frac{1}{t}, q = \frac{1}{1-t}$ 使用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in X} b(x,y) f_t(y) &\leq \left(\sum_{y \in X} b(x,y) f_1(y) \right)^t \left(\sum_{y \in X} b(x,y) f_2(y) \right)^{(1-t)} \\
&= (\deg(x) - \lambda_1)^t f_{\alpha_1}(x)^t (\deg(x) - \lambda_2)^{(1-t)} f_{\alpha_2}(x)^{(1-t)} \\
&\leq (\deg(x) - \lambda_t) f_t(x)
\end{aligned}$$

其中，对某个 $x \in X$，不等式为严格不等式。

事实上，假设对所有 $x \in X$ 都成立等式。那么由第二个不等式可知 $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$。由第一个不等式可知，当限制在 $b(x,\cdot)$ 的支撑上时， f_1 和 f_2 对所有 $x \in X$ 都线性相关。令 $x \in X$ 和 $\mu_x > 0$ 使得 $f_1 = \mu_x f_2$ 在 $b(x,\cdot)$ 的支撑上成立。由 f_1 和 f_2 的 λ-调和性可得

$$\begin{aligned}
(\deg(x) - \lambda) f_1(x) &= \sum_{y \in X} b(x,y) f_1(y) \\
&= \sum_{y \in X} b(x,y) \mu_x f_2(y) \\
&= (\deg(x) - \lambda) \mu_x f_2(x)
\end{aligned}$$

从而对所有 $x \sim y$, $f_1(x)/f_2(x) = \mu_x = f_1(y)/f_2(y)$。利用 $f_1(x_0)/f_2(x_0) = 1$ 这一事实以及图的连通性，可推出 $f_1 = f_2$，进而得到 $\alpha_1 = \alpha_2$，这与假设矛盾。

由此可知， f_t 是 λ_t-超调和的，但不是 λ_t-调和的。假设$\Lambda(\alpha_t) \leq \lambda_t$。那么

$$(H - \Lambda(\alpha_t))f_t = (H - \lambda_t)f_t + (\lambda_t - \Lambda(\alpha_t))f_t \geq 0,$$

因此，函数 f_t 和 $\rho^{-1}(\alpha_t)$均为归一化的乘性函数，且具有相同的特征 $\exp \circ \alpha_t$；但 f_t 是 $\Lambda(\alpha_t)$-超调和的而非调和的，且 $\rho^{-1}(\alpha_t)$是$\Lambda(\alpha_t)$-调和的，因此 $f_t \neq \rho^{-1}(\alpha_t)$。这与引理 3.3 矛盾。由此可得$\Lambda(\alpha_t) > \lambda_t$，这表明 Λ具有严格凹性。由于 $\mathbb{R}^d$ 是开集，由凹性可知 Λ 也是连续的。 □

引理 3.11。映射 ρ： $\mathcal{M}_{(-\infty,\lambda_0]} \to \mathbb{R}^d$ 是一个同胚。此外，对于任意$\lambda \in \mathbb{R}$，集合 $\mathcal{M}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 和 $\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 都是紧致的。

证明。 回顾一下， ρ 由引理 3.7 可知是双射的。此外，对于序列 f_n 逐点收敛于 f 中的 $\mathcal{M}_{(-\infty,\lambda_0]}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n)(g) = \lim_{n\to\infty} \log(\gamma_{f_n}(g)) = \lim_{n\to\infty} \log(f_n(gx_0)) = \log(f(gx_0)) = \rho(f)(g),$$

因此 ρ 是连续的。

为证明逆映射的连续性，我们首先注意到，对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，有 $\mathcal{M}_{[\lambda,\lambda_0]} \subseteq \mathcal{S}_1^+$，$\lambda$，因为对于 $\lambda' \geq \lambda$ 和 $f \in \mathcal{M}_{\lambda'} \subseteq \mathcal{H}_{\lambda'}^+$，我们有

$$(H - \lambda)f = (H - \lambda')f + (\lambda' - \lambda)f \geq 0,$$

因此 $f \in \mathcal{S}_1^+$,λ。然后，由于 $\mathcal{S}_1^+$,λ 由推论 1.4可知是紧致的，故 $\mathcal{M}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 是紧致的，因为它是闭的。事实上，对于一个序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 逐点收敛于 $f \in C(X)$，我们看到 f 是非负的，在 x_0 处归一化，并且以与我们在本章开头证明 $\mathcal{M}$ 的闭性时完全相同的方式具有乘性。此外，由于 f_n 是 λ_n-调和的，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $\lambda_n \in [\lambda, \lambda_0]$，我们可以选择一个子序列 n_k 使得 $\lambda_{n_k} \to \mu \in [\lambda, \lambda_0]$.。然后，由于图的局部有限性，我们看到 f 是 μ-调和的，因此 $f \in \mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{M}_{[\lambda,\lambda_0]}$。由此可知 $\mathcal{M}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 是紧致的，从而由 ρ的连续性， $\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 也是紧致的。由此我们得到

$$\rho^{-1}|_{\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}} : \mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]} \to \mathcal{M}_{[\lambda,\lambda_0]}$$

自动连续，特别是 ρ^{-1} 到 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]}$ 的限制算子是连续的。根据引理3.10， Λ 是连续的，因此 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]} = \Lambda^{-1}((\lambda, \infty))$是开集，故 ρ^{-1} 在 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]}$中的所有点处本身连续。由于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是任意的，且$\cup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]} = \mathbb{R}^d$，可知 ρ^{-1} 在 $\mathbb{R}^d$上连续，这说明 ρ 是一个同胚。 □

定理 3.12。记 ∂B 为集合 $B \subset \mathbb{R}^d$的拓扑边界。若对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，以下命题成立。

(a) 集合 $\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 和 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]}$ 是严格凸的。(b) 集合 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]}$ 是开集，且 $\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 是紧致的。(c) $\mathcal{A}_\lambda = \operatorname{ex}\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]} = \partial\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}$(d) 集合 $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ 恰好由一个点组成。

证明。 首先回顾，根据 λ_0的定义，我们有 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]} = \mathcal{A}_{(\lambda,\infty)}$ 以及 $\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]} =\mathcal{A}_{[\lambda,\infty)}$ 对所有 $\lambda \in [-\infty, \lambda_0)$ 。我们还回顾， Λ 由引理 3.10可知是连续且严格凹的。

(a) 这由 Λ 的严格凹性可知：将 $\mathcal{A}_{\lambda_1}$ 和 $\mathcal{A}_{\lambda_2}$ 中元素的凸组合（其中 λ_1、 $\lambda_2 \geq \lambda$ ）映射到某个 λ_3 ，该值严格大于 λ_1 和 λ_2 的凸组合，特别是大于 $\lambda_3 > \lambda$。(b) 由于 Λ 连续，因此 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]} = \Lambda^{-1}((\lambda,\infty))$ 是开集。根据引理 3.11， $\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 是紧致的。(c) 设 $f \in \mathcal{A}_\lambda$ 和 $f = tf_1 + (1-t)f_2$ ，其中 $\Lambda(f_1) \geq \lambda$ 且 $\Lambda(f_2) \geq \lambda$。于是，由于 Λ 严格凹，我们有 $f_1 = f_2 = f$，因此 $f \in \operatorname{ex}\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}$。这表明

$$\mathcal{A}_\lambda \subseteq \operatorname{ex}\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]} \subseteq \partial\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]} \subseteq \mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]} \setminus \mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]} = \mathcal{A}_\lambda,$$

因为根据 (b)， $\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 是闭的，而 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]}$ 是开的。

(d) 我们有

$$\mathcal{A}_{\lambda_0} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{[\lambda_0-\frac{1}{n},\lambda_0]},$$

因此，利用 (b)， $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ 是非空的，因为它是由嵌套的非空紧致集构成的可数交。此外，若 $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$，则根据严格凹性有 $\Lambda(\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2) > \lambda_0$，这就产生了矛盾。

□

定理 3.5 的证明。由于 (b,c) 是局部有限的，我们可以应用引理 3.6，并按照第二章中的说明，用所得到的 R 对图 (b,c) 进行商化。我们可以应用引理 2.9 的所有部分，因为 (b,c) 是连通且局部有限的， G-作用是余紧的， R 包含所有稳定子，并且每个 $f \in \mathcal{H}_\lambda$ 都是 R-不变的。由此可得，在 X_R 上得到的图 (b_R, c_R) 是局部有限且连通的，具有 $G/R \cong \mathbb{Z}^d$ 的余紧自由群作用；再对 $(b, c-\lambda)$ 取商，便得到 $(b_R, c_R - \lambda)$。最后，同胚

$$\Phi : C(X)^R \to C(X_R)$$

限制在这些集合上时，分别将图 (b,c) 的 $\mathcal{H}_\lambda^+$、 $\mathcal{K}_\lambda$ 和 $\mathcal{M}_\lambda$ 与图 (b_R, c_R) 中对应的集合映为同胚。

这意味着不失一般性，我们可以假设群作用是自由的 $\mathbb{Z}^d$-作用。然后，令上述集合 $\mathcal{A}_\lambda$ 以及 $\lambda_0 :=$上确界$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathcal{A}_\lambda \neq \emptyset\}$，由引理 3.11 可得

$$\mathcal{M}_I \cong \mathcal{A}_I$$

对所有 $I \subseteq \mathbb{R}$ 均成立。特别地，当 $d = 0$ 时，我们有 $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{0\}$，因此 $\mathcal{M}_{\lambda_0}$ 只包含一个点，而其余 $\mathcal{M}_\lambda$ 均为空。对于 $d \geq 1$ ，我们得到如下结果：

(a) 对于 $\lambda > \lambda_0$ ，我们有 $\mathcal{M}_\lambda \cong \mathcal{A}_\lambda = \emptyset$ 根据 λ_0 的定义。(b) 根据定理3.12 (d)，我们知道 $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ 恰好由一个点组成，且 $\mathcal{M}_{\lambda_0} \cong \mathcal{A}_{\lambda_0}$。

(c) 对于 $\lambda < \lambda_0$，我们有 $\mathcal{M}_\lambda \cong \mathcal{A}_\lambda = \partial\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]}$ 根据定理3.12 (c)。此外，$\mathcal{A}_{[\lambda,\lambda_0]} \subseteq \mathbb{R}^d$ 根据定理 3.12 (a) 和 (b) 是紧致凸集，因此其边界同胚于一个（$d-1$）维球面。(d) 对于 $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ 我们有 $\mathcal{M}_{(\lambda,\lambda_0]} \cong \mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]}$，并且 $\mathcal{A}_{(\lambda,\lambda_0]}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的开凸子集。根据定理 3.12 (a) 和 (b)，它同胚于一个开d球。此外，$\mathcal{M}_{(-\infty,\lambda_0]} \cong \mathcal{A}_{(-\infty,\lambda_0]} = \mathbb{R}^d$。证明至此完成。

□

参考文献

[1] Choquet, G., Deny, J.：关于卷积方程 $\mu = \mu * \sigma$。巴黎科学院报告 250, 799–801（1960）[2] Margulis, G.A.：幂零群上的正调和函数。《苏联数学文献》7，241–244（1966）[3] Dynkin, E.B., Maljutov, M.B.：有限个生成元的群上的随机游走 137，1042–1045（1961）[4]Lin, V.Y.：复空间的刘维尔覆盖与可 amenable 群 132(174)(2)，202–224 （ 1987 ） https://doi.org/10.1070/SM1988v060n01ABEH003163[5] Agmon, S.：关于 R^n 上具有周期系数的椭圆方程的正解、谱结果，以及对黎曼流形上椭圆算子的推广。载于：《微分方程》（阿拉巴马州伯明翰，1983）。《北荷兰数学研究》，第 92 卷，第 7–17 页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，???（1984）。https://doi.org/10. 1016/S0304-0208(08)73672-7[6] Allegretto, W.：关于椭圆算子两种振荡类型的等价性。《太平洋数学杂志》55, 319–328（1974）[7] Allegretto, W.：奇异微分算子的谱估计与振荡。《美国数学会会刊》73(1)，51–56（1979）https://doi.org/10.2307/ 2042880[8] Allegretto, W.：二阶椭圆算子的正解与谱性质。《太平洋数学杂志》92(1)，15–25（1981）[9] Piepenbrink, J.：非振荡椭圆方程。《微分方程杂志》15，541–550（1974）https://doi.org/10.1016/0022-0396(74)90072-2[10] Piepenbrink, J.：Glazman 猜想。《微分方程杂志》24(2)，173–177（1977）https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90142-5

[11] Moss, W.F., Piepenbrink, J.：椭圆方程的正解。《太平洋数学杂志》**75(1)**，219–226（1978年）[12] Guivarc'h, Y.：关于黎曼对称空间中调和函数与正特征函数的积分表示˙式˙˙**108(4)**，373–392（1984年）[13] Lin, V.Y., Pinchover, Y.：具有群作用的流形与椭圆算子。《美国数学会回忆录》**112(540)**，78（1994年）https://doi.org/10.1090/memo/0540[14]Keller, M., Lenz, D., Wojciechowski, R.K.：《图与离散狄利克雷空间》。《数学科学基础丛书》。施普林格，柏林（2021年）。https://doi.org/10.1007/978-3-030-81459-5[15] Phelps, R.R.：《肖凯定理讲义》。《数学讲义》。施普林格，海德堡（2001年）。https://doi.org/10.1007/b76887[16] Tychonoff, A.：一个不动点定理。《数学年刊》**111(1)**，767–776（1935年）https://doi.org/10.1007/BF01472256[17] Keller, M., Pinchover, Y., Pogorzelski,F.：图上薛定谔算子的临界性理论¨。《谱理论杂志》**10(1)**，73–114（2020年）https://doi.org/10.4171/JST/286