arXiv:2305.01357v2 [math.CT] 9 May 2023

代数理论无穷小模型的粘合

Filip Bár

谨以此文纪念我的母亲（*1955*年*4*月*22*日—*2022*年*12*月*6*日）

摘要

代数理论模型范畴具有良好的范畴性质，但粘合方面除外。借鉴合成微分几何中的见解与实例，我们将代数理论模型推广为无穷小模型。我们证明，无穷小模型范畴保留了大部分良好的范畴性质，同时粘合行为得到显著改善。因此，无穷小模型是一种有趣且自然的构造，能够在代数与几何之间进行插值。

1 引言

在 [10] Kock 已证明，合成微分几何中的一个（形式）流形允许对两两互为无穷小邻点的点进行仿射组合。在本文及后续工作中，[12, 13] 他广泛运用了这种关于无穷小仿射组合的几何代数，并将其与微分几何中众所周知的概念和构造联系起来。在 Kock 的工作基础上，作者一直在尝试理解形式流形在何种意义上是仿射空间的模型，以及这一观点能否推广至群和向量空间等其他代数理论。这促使他在 [3]中提出了代数理论的无穷小模型这一概念：它是一个配备了无穷小结构的空间，该结构充当该理论中运算的定义域。

类似于拓扑的结构，无穷小结构定义了无穷小邻近点的集合。不过，与开集不同，这些集合是点的有限元组。这使得无穷小结构可以用作代数理论[1]的运算定义域。在 [4] 中，作者给出了第一个重要应用，证明了流形上的对称仿射联络等价于二阶无穷小仿射结构，并充分利用了无穷小仿射空间这一附加结构。它超越了前述形式流形所具有的性质，即允许对由 Kock 所利用的彼此（一级）无穷小邻点进行仿射组合。在[5] 中，这一等价关系得以扩展到非对称仿射联络，将后者与流形上每一点处的群的无穷小模型联系起来。在合成微分几何中遇到的大量仿射空间、向量空间、群和李代数的无穷小模型实例，以及它们的应用，都说明有必要建立无穷小代数的一般理论。

[1]本文假设所有代数理论都是有限元的，即所有运算的元数有限。此外，我们将采用代数理论的“工作定义”，即通过其表示来定义：一个只有一种类型的签名，其中包含函数符号和一组方程。

本文旨在引入代数理论 $\mathbb{T}$ 的无穷小模型这一概念，将其作为一种自然构造，概念上涵盖并扩展$\mathbb{T}$-模型，而且这一概念本身独立于几何；希望它能够在合成微分几何以外的其他领域得到应用。为此，我们研究无穷小模型范畴的性质。借助范畴逻辑中的一些强有力的一般性结果，我们将能够迅速确立一般的范畴性质。本文的重点将放在无穷小模型的特殊粘合性质上，即哪些无穷小模型的余极限可以根据底层集合计算得出。我们将看到，无穷小模型具有一些显著的粘合性质：与 $\mathbb{T}$-模型形成鲜明对比的是，余积基本上变成底层集合的并，而余等化子通常则像 $\mathbb{T}$-模型范畴中那样，由同余关系的商构造而成。其他哪些余极限能够被提升，取决于模型的无穷小结构相对于彼此有多“大”。我们将在第一和第三个粘合定理及其推论中给出充分条件。这说明无穷小模型在代数与几何之间起着插值作用。

按照本文的目标，我们将以集合范畴 集合 作为基范畴。然而，为了开展合成微分几何，我们需要以良适模型 [7] 为基范畴，它是一个格罗滕迪克拓扑斯。事实上，本文陈述的所有结果都可推广到格罗滕迪克拓扑斯。粘合定理及其推论的证明，只需在该拓扑斯的内语言中重新表述即可迁移。

2 无穷小结构

集合 A 上的一个无穷小结构（简称“i-结构”）是指：对每个 $n \in \mathbb{N}$ 给定一个 n元关系 $A\langle n\rangle$，用以定义 A 中的哪些 n 点彼此无穷小邻近。

定义 2.1（i-结构）。设 A 是一个空间。A 上的一个**i-结构**是一个以 $\mathbb{N}$为指标的族 $n \mapsto A\langle n\rangle \subseteq A^n$，满足

(1) $A\langle 1\rangle = A$, $A\langle 0\rangle = A^0 = 1$ （“单点”空间，或终对象）

(2) 对于每个有限集合的映射 $h\colon m \to n$，以及每个 $(P_1, \ldots, P_n) \in A\langle n\rangle$，都有 $(P_{h(1)}, \ldots, P_{h(m)}) \in A\langle m\rangle$

第一个条件是归一化条件。第二个条件确保这些关系彼此相容：如果有一族点彼此无穷小邻近，那么这族点的任意子族，以及通过重复这些点而形成的任意一族点，也都彼此无穷小邻近。特别地，我们得到 $A\langle n\rangle$ 是对称且自反的关系。若一个 n-元组 $(P_1, \ldots, P_n) \in A^n$ 属于 $A\langle n\rangle$，则记作 $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle$。保持无穷小结构的映射 $f\colon A \to X$，即满足 $f^n(A\langle n\rangle) \subseteq X\langle n\rangle$ 的映射，称为 *i-态射*。

A 上的两个平凡的 i-结构示例分别是离散 i-结构和粗糙 i-结构，其中 $A\langle n\rangle$ 分别取为对角线 Δ_n和整个 A^n。一类非平凡的示例，同时也是合成微分几何中最受关注的 i-结构，是由对角线的第一邻域（作为关系）生成的 i-结构。例如，设 R 是一个交换环。回想一下，

$$D(n) = \{(d_1, \ldots, d_n) \in R^n \mid d_i d_j = 0,\ 1 \le i, j \le n\}$$

R^n 上的对角线的第一邻域定义为

$$\{(P_1, P_2) \mid P_2 - P_1 \in D(n)\}$$

这是一个对称且自反的关系，我们可以由此构造一个 i-结构：取对角线的第一邻域作为 $R^n\langle 2\rangle$，并在 R^n 上定义幂零平方 i-结构，定义如下：

$$R^n\langle m\rangle = \{(P_1, \ldots, P_m) \mid (P_i, P_j) \in R^n\langle 2\rangle,\ 1 \le i, j \le m\}$$

因此，这个 i-结构是由 $R^n\langle 2\rangle$生成的。并非所有 $A\langle -\rangle$ 感兴趣的 i-结构都需要由 $A\langle 2\rangle$ 生成。例如， [5, 4] 中定义的一阶和二阶 i-结构就不是如此。在[11, 命题 17。4]Kock 已证明，每个形式流形都带有一个自然的幂零平方 i-结构，它由该流形的局部模型粘合而成，见 R^n，其中 R 满足 Kock-Lawvere 公理模式。[2]

3 克隆与代数理论

代数理论 $\mathbb{T}$ 的无穷小模型 A 背后的思想是：对于给定的、定义在 A 上的 i-结构，任意 n 元运算并非定义在底空间的积上，而只定义在 $A\langle n\rangle$ 上。为了对其进行形式化定义，我们需要一种代数理论的表示，它按元数对理论 $\mathbb{T}$ 的所有运算（包括导出运算）进行分类。为此，我们将采用抽象克隆的结构。我们的定义基于 [8,定义 1.2.1]:

定义 3.1 (克隆)。 一个**克隆** O 由以下数据组成：

- 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 集合 $O(n)$。
- 对于每个(n, k)，都有一个 $\in \mathbb{N}^2$ 映射 $*_{nk}$： $O(n) \times O(k)^n \to O(k)$。
- 对于每个 $n \ge 1$ 和 $1 \le j \le n$ 元素$\pi^n_j \in O(n)$。

(1) (结合律) 对于每个 $\sigma \in O(n)$、 t_1、.....、 $t_n \in O(m)$、 s_1、 $\ldots s_m \in O(k)$

$$\sigma *_{nk} (t_1 *_{mk} (s_1, \ldots, s_m), \ldots, t_n *_{mk} (s_1, \ldots, s_m)) = (\sigma *_{nm} (t_1, \ldots, t_n)) *_{mk} (s_1, \ldots, s_m).$$

特别地，常元的命名与求值彼此兼容，常量运算的命名也是如此：

- 在 $m = 0$ 的情况下， t_i 是常元，而结合律表述为

$$\sigma *_{nk} (t_1, \ldots, t_n) = *_{0k}(\sigma *_{n0} (t_1, \ldots, t_n))$$

- 在 $n = 0$ 的情况下，运算 σ 是一个常元，而结合律表述为

$$*_{0k}(\sigma) = (*_{0m}(\sigma)) *_{mk} (s_1, \ldots, s_m)$$

(2)（投影）对于每个 $n \ge 1$、 $1 \le j \le n$、 t_1、.....、 $t_n \in O$（m）

$$\pi^n_j *_{nm} (t_1, \ldots, t_n) = t_j$$

[2]这也可以从我们的第三个粘合定理 5.11 推导出来：当使用良适模型作为基范畴，而不是 集合。

(3) (单位) 对每个 $\sigma \in O(n)$, $n \geq 1$

$$\sigma *_{nn} (\pi_1^n, \ldots, \pi_n^n) = \sigma$$

(4) (**规范化**) $*_{00}(c) = c$.

克隆同态 $f: O \to O'$ 是函数族 $f_n: O(n) \to O'(n)$, 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立, 并且与克隆运算交换。克隆代数 是克隆在集合 A上的作用:

定义 3.2 （克隆代数）。 设 O 为一个克隆。一个 O**-代数** A 由以下部分组成:

- 一个集合 A。
- 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 一个映射 $\bullet_n: O(n) \times A^n \to A$。

满足

(1) (结合律) 对于每个 $\sigma \in O(n)$, $t_1, \ldots, t_n \in O(m)$, $a_1, \ldots a_m \in A$

$$\sigma \bullet_n (t_1 \bullet_m (a_1, \ldots, a_m), \ldots, t_n \bullet_m (a_1, \ldots, a_m)) = (\sigma *_{nm} (t_1, \ldots, t_n)) \bullet_m (a_1, \ldots, a_m).$$

特别地, 作用保持常元:

$$\bullet_0(c) = (*_{0m}(c)) \bullet_m (a_1, \ldots, a_m)$$

(2) (投影) 对于每个 $n \geq 1, 1 \leq j \leq n, a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\pi_j^n \bullet_n (a_1, \ldots, a_n) = a_j$$

正如表示论中所熟知的, O-代数在 A 上的结构等价于一个克隆同态 $O \to \mathrm{End}(A)$, 其中 $\mathrm{End}(A)$ 表示由映射 $A \times \ldots \times A \to A$ 的（多重）复合所定义的自同态克隆。

O-代数同态 是'等变'映射 $f: A \to A'$, 也就是底层集合之间与相应作用相容的映射; 由此得到一个范畴 O-Alg, 其对象为 O-代数, 态射为 O-代数同态。

与代数理论 $\mathbb{T}$ 对应的（抽象）克隆[3] $O_{\mathbb{T}}$ 可按如下方式构造: 给定 $\mathbb{T}$ 的一个表示 (Σ, E), 定义 $O_{\mathbb{T}}(n)$ 为有限生成自由$\mathbb{T}$-代数 $F_{\mathbb{T}}(n) = T_\Sigma(n)/E_n$, 其中 $T_\Sigma(n)$ 是签名 Σ 在 n 个变量上的项代数。代入运算诱导出映射 $*_{nm}: T_\Sigma(n) \times T_\Sigma(m)^n \to T_\Sigma(m)$, 这些映射与同余关系相容, 因此下降为一个映射

$$*_{nm} : F_{\mathbb{T}}(n) \times F_{\mathbb{T}}(m)^n \to F_{\mathbb{T}}(m), \quad ([t], ([s_1], \ldots, [s_n])) \mapsto [t[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n]]$$

将（等价类的）变量命名为 $\pi_j^n\ [x_j] \in F_{\mathbb{T}}(n)$, 以用于 $n \geq 1$。克隆的公理源于项的代入所满足的相应性质。特别是关于规范化, 由于 $F_{\mathbb{T}}(0)$ 是不含自由变量的项（等价类）构成的集合, 代入便成为恒等映射。

反之, 给定一个克隆 O 我们可以通过以下方式构造一个代数理论: $\mathbb{T}_O$ 为每个运算 n定义一个 $\sigma \in O$元函数符号n, $n \in \mathbb{N}$ 并将 O 定义中所述的 3.1所有定义方程作为方程集合。这些构造在该理论的模型的具体范畴与相应克隆的代数之间诱导出同构:

[3]也可以为 $\mathbb{T}$-模型 A 构造 $\mathbb{T}$ 的运算克隆。这正是克隆最初在普遍代数中引入的方式, 见原文[6, 第三章。3]不过, 我们感兴趣的是编码 $\mathbb{T}$ 的克隆, 而不只是它的某个模型。

命题 3.3（克隆与代数理论）。克隆与代数理论在以下意义下是等价的：

(1) 对于每个代数理论 $\mathbb{T}$，都存在一个克隆 $O_{\mathbb{T}}$，使得 $\mathbb{T}$-**Mod** 和 $O_{\mathbb{T}}$-**Alg** 是 ***Set*** 上的同构范畴。

(2) 对于每个克隆 O，都存在一个代数理论 $\mathbb{T}_O$，使得 $\mathbb{T}_O$-**Mod** 和 O-**Alg**是 ***Set*** 上的同构范畴。

(3) 克隆 $O_{\mathbb{T}_O}$ 和 O 是同构的。

证明。 参见 [3, 定理 1.4。1]其余需要证明的部分见该定理。 □

4 代数理论的无穷小模型

现在我们可以将代数理论 $\mathbb{T}$ 的无穷小模型定义为作用于 i-结构 A上的克隆 $O_{\mathbb{T}}$ 的无穷小代数。与（全） O-代数相比，除了运算定义域之外，主要区别在于邻域公理；该公理保证对无穷小邻近点进行运算后，所得结果仍然是无穷小邻近点。这是定义结合律所必需的。

定义 4.1 (克隆的 *i*-代数)。 设 O 为一个克隆。一个 i-结构 A 连同一族映射

$$\bullet_n : O(n) \times A\langle n\rangle \to A\langle 1\rangle, \qquad n \in \mathbb{N}$$

若满足以下公理，则称为一个**无穷小** O**-代数**：

(1) (邻域) 对每一对 $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq 1$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in O(m)$，以及$a \in A\langle m\rangle$，都有

$$\langle \sigma_1 \bullet_m a, \ldots, \sigma_n \bullet_m a\rangle \in A\langle n\rangle$$

注意，在常元 $(m = 0)$ 的情形下，这变为 $\langle \bullet_0(\sigma_1) \ldots, \bullet_0(\sigma_n)\rangle \in A\langle n\rangle$。

(2) (结合律) 对每一对 $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\sigma \in O(n)$, $t_1, \ldots, t_n \in O(m)$, $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \in A\langle m\rangle$

$$\sigma \bullet_n (t_1 \bullet_m (a_1, \ldots, a_m), \ldots, t_n \bullet_m (a_1, \ldots, a_m)) = (\sigma *_{nm} (t_1, \ldots, t_n)) \bullet_m (a_1, \ldots, a_m).$$

(3) (投影) 对每个 $n \geq 1, 1 \leq j \leq n, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A\langle n\rangle$

$$\pi^n_j \bullet_n (a_1, \ldots, a_n) = a_j$$

一个 i-O-同态 $h : (A, \bullet) \to (A', \bullet')$ 是一个 i-态射 $h : A \to A'$，它与运算交换，即

$$h(\sigma \bullet_n x) = \sigma \bullet'_n h^n(x), \qquad x \in A\langle n\rangle$$

无穷小 O-代数与无穷小 O-同态构成一个范畴 O-iAlg。由于粗糙 i-结构，每个 O-代数也都是无穷小 O-代数，我们将其称为全（*i*-）O代数；因此，范畴 O-Alg 是 O-iAlg 的满子范畴，而无穷小模型则扩展了 $\mathbb{T}$-模型的概念。

代数理论的无穷小模型的有趣实例，自然地出现在合成微分几何以及环和 C^∞-环[4]上的代数几何中。例如，任何形式流形 M [11, 第 17] 章，都是交换 $\mathbb{R}$-代数 R 上仿射组合理论的无穷小模型，并满足 Kock-Lawvere 公理模式 [3, 定理 3.2.8][5]。对于任意点 $P \in M$，其（一级）无穷小邻点 P 构成的子空间带有无穷小 R-模的结构。若 M 也是一个群，那么其中性元 e 的无穷小邻点构成的子空间便形成一个无穷小群（但幂零平方 i-结构除外）[5, 定理 3.4]。为使这些例子更易理解，请注意，任何合成微分几何的良适模型，都是一个 Grothendieck 拓扑斯，并配备了流形范畴的全忠实嵌入。此外，它将 $\mathbb{R}$ 映射到 R，并将流形映射为形式流形 [7]。由此可见，任何流形都给出了一个以 $\mathbb{R}$为底空间的仿射空间无穷小模型实例。

尽管克隆及其无穷小代数对于讨论代数理论无穷小模型的性质十分重要，但一般而言，若要在实践中研究某个特定代数理论的无穷小模型，它们并不是方便的结构。事实上，处理克隆 $\mathbb{T}$ 相当繁琐。所幸，这并非必要。

给定代数理论 $\mathbb{T}$ 的一个表示(Σ, E)，可以将 $\mathbb{T}$ 的签名和公理扩展为一个新理论 I$[\mathbb{T}]$，使得 $O_\mathbb{T}$-iAlg $\cong$ I$[\mathbb{T}]$-Mod；后者表示 I$[\mathbb{T}]$-模型范畴及相应的 Σ 结构同态。新理论 I$[\mathbb{T}]$ 称为 $\mathbb{T}$的无穷小化 。它通过以下方式得到：

(1) 添加一个 i-结构的理论，

(2) 将 Σ 中的定义运算限制到 i-结构上，

(3) 将定义方程对 i-结构进行全称量化，

(4) 为每个定义运算添加一个邻域公理 Σ。

更形式地说，如果希望仍处于一阶逻辑的笛卡尔片段内（参见 [9, 第 D 章1]），则需要向签名中添加关系符号 $A\langle n\rangle, n \in \mathbb{N}$，将每个函数符号替换为函数关系（即其图），然后将每个Σ-项替换为由函数关系与相应 i-结构合取构成的公式，再添加 i-结构公理和邻域公理。（技术细节参见 [3,定义 2.4.1]。）[6]

注意，I$[\mathbb{T}]$ 不再是代数理论；它是一个笛卡尔理论。由于 i-结构不需要以方程方式定义，[7] I$[\mathbb{T}]$ 通常也不是本质代数的。

---

[4]不过，在这些例子中，我们需要在不同于 集合 的基范畴上进行讨论。[5]这一结果已由 [10, 定理 2。2]预示。请注意， [3, 定理 3.2。8] 依赖于 [3,定理 2.6。19]我们在本文中为该定理提供了一个反例；应改用第三个粘合定理 5.11 。[6]原始的无穷小化构造见 [3, 定义 2.4。1] 它并未免除证明签名上所有导出运算均满足邻域公理的负担 Σ。关于（4）中提到的简化邻域公理，参见 [5, 定义 3、引理 2 和注释 1]。[7]我们不作此限制的原因在于合成微分几何中的形式流形等例子。它们的 i-结构由局部模型粘合而成，并非由方程全局定义。

命题 4.2。 设 $\mathbb{T}$ 是定义在签名 Σ 上的代数理论， $O_{\mathbb{T}}$ 是命题 *3.3*中的克隆。范畴 $O_{\mathbb{T}}$-**iAlg** 与 I[$\mathbb{T}$]-**Mod** 作为 集合上的范畴同构。

证明。 不难看出，无穷小 $O_{\mathbb{T}}$-代数与 I[$\mathbb{T}$]-模型相对应，反之亦然。然而，由于涉及形式逻辑，证明相当冗长且技术性较强。感兴趣的读者可参阅 [3, 定理 2.4.2], ，其中证明了以有限极限范畴为基底时的这一结论。 □

无穷小化构造（分别地，命题 4.2）的一个令人欣喜的结果是，范畴 O-**iAlg** （由无穷小 O-代数组成）是局部有限可呈的:

定理 4.3。 范畴 O-**iAlg** 是局部有限可呈的。

证明。 根据命题3.3，并且由于同构克隆的无穷小代数范畴彼此同构，不失一般性，我们可以假设 $O = O_{\mathbb{T}}$ 其中 $\mathbb{T}$是一个代数理论。根据命题 4.2，有 $O_{\mathbb{T}}$-**iAlg** $\cong$ I[$\mathbb{T}$]-**Mod**。由于 I[$\mathbb{T}$] 是一个笛卡尔理论，因而是一个（有限元的）极限理论，其模型范畴是局部有限可呈的 [1,定理 5。9]。 □

特别地， $O_{\mathbb{T}}$-**iAlg** 是完备、余完备、良幂且良余幂的 [1,注。1.56]。

定理 4.4。

(i) 遗忘函子 $U:$ O-**iAlg** $\to$ **Set** 唯一地提升小极限；也就是说，对于每个小图表 $D:$ $J \to O$-**iAlg** 及其极限锥 λ，存在唯一的极限锥 μ，使得 $U\mu = \lambda$。（另见*[2,* 定义 *13.17]*。）

(ii) U 唯一地提升滤过余极限。

证明。 </style}无穷小 O-代数是利用 Set 中的积、单态射和等化子（用于定义方程）构造的，而这些构造都与取极限和滤过余极限相交换，因此 U 可以提升它们。由于函子 U 是遗忘函子忠实于对象的，也就是说，若 Uh 是恒等映射，则同构 h就是恒等态射，因此它所提升的所有极限和余极限 U 都能被唯一提升。（另见 [2, 命题 13.21]。不过请注意，一般而言， U 既不反映恒等态射，也不反映同构。）

更正式地说，我们可以利用 O-iAlg 等价于范畴 $Lex(C_{\mathrm{I}[\mathbb{T}]}, \mathbf{Set})$ 中保持有限极限的函子 $C_{\mathrm{I}[\mathbb{T}]} \to$ Set（对于 $\mathbb{T} = \mathbb{T}_O$），其中 $C_{\mathrm{I}[\mathbb{T}]}$ 表示 I[$\mathbb{T}$] [9, thm. D1.4.7]的句法范畴。范畴之间的等价与到 Set 的遗忘函子相容。因此，我们可以将 U 视为遗忘函子 $\mathrm{ev}_A : Lex(C_{\mathrm{I}[\mathbb{T}]}, \mathbf{Set}) \to \mathbf{Set}$，即在（唯一）类型 A （在 $C_{\mathrm{I}[\mathbb{T}]}$ 中的句法表示）处的取值。由于极限和滤过余极限与有限极限交换，保持有限极限的函子的极限和滤过余极限按点计算，这表明 ev_A 同时提升了二者。 □

推论 4.5 （自由 i-O-代数）。 U 有一个左伴随。

证明。 U 保持滤过余极限和小极限。根据局部可表示范畴的伴随函子定理，它具有左伴随函子 [1, 1。66]。 □

由于 A上存在不同的 i-结构，因此可能存在不止一种无穷小 O-代数结构， U 一般而言并不反映极限。例如，令O 为某个域上的仿射组合克隆。任意仿射空间对于离散和不可分辨这两种 i-结构都是无穷小O-代数，因此 U 不反映恒等式，进而也不反映极限。这是无穷小模型与拓扑空间共有的性质。特别是，由于 U 不反映同构，它既不是单子函子，也不是 [2, 定义 231]中所定义的本质代数函子。

5 无穷小模型的粘合定理

我们已经看到，从 $\mathbb{T}$-模型范畴转到代数理论 $\mathbb{T}$ 的无穷小模型时，遗忘函子 U 到基范畴 Set 的性质会从有限元的单子代数函子 [2, 定义 23.19] 变成一个既非单子函子、也非本质代数函子的函子。（U 也不是拓扑函子[2, 定义 21.1], 。）尽管从范畴意义上说，我们失去了 Set 上的“代数性”，但仍保留了许多良好的范畴性质，例如局部可表示性，以及极限和滤过余极限可由底层集合计算得出。本节将研究余极限在多大程度上也具有这些性质。

我们首先给出无穷小模型范畴中始对象的一个显式表示。

命题 5.1. 设 O 是一个克隆。

(i) 常元集合 $O(0)$ 与映射$^{*(-)0}: O(n) \to O(0)$ 构成一个（全）O-代数。

(ii) 总体的 O-代数 $O(0)$ 是 O-**iAlg**中的始对象。

证明。 (i) 这是由定义 $m = 0$中的结合律（关于 O ）和克隆的投影公理所推出的，见定义 3.1。

(ii) 设 A 是一个无穷小 O-代数。定义 4.1中的邻域公理表明（对于 $m = 0$），任意 n-元常元组在 $O(0)$ 中，属于 $A\langle n\rangle$；映射

$\bullet_0: O(0) \to A\langle 1\rangle$因此是一个 i-态射。由于 $A\langle 0\rangle \cong 1$ 无穷小 O-代数的结合律表明 $\bullet_0$ 这是一个 i-O-同态。i-O-同态的唯一性（$O(0)\ {}^{*(-)0}$） $\to$（$A, \bullet$）源于 O 满足规范化公理。

□

推论 5.2。 遗忘函子 $U:$ O-**iAlg** $\to$ **Set** 保持始对象，当且仅当 $\mathbb{T}_O$ 的签名 Σ 不含常元；即 $O(0) = \emptyset$。在这种情况下， O-**iAlg**具有严格始对象，并且 U 提升并反映该对象。

考虑到范畴中的任意小余极限都可以由始对象和（小）宽推出构造而成，我们所能期望的最佳结果就是U 能唯一地提升宽推出。事实证明，只要宽跨度中的 i-O-同态反映 *i*-结构，确实如此。

定义 5.3。 设 A 和 B 是 i-结构。若 i-态射 $h:$ $A \to B$**反映 i-结构**，则称其满足

$$\langle h(x_1), \ldots, h(x_n)\rangle \in B\langle n\rangle \implies \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in A\langle n\rangle$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。（ $n = 0$ 的情形是平凡的。）若一个 i-O-同态反映 i-结构，则其底层 i-态射也反映 i-结构。

从全 O 代数出发的任何 i-O-同态必然反映 i-结构。然而，并非每个 i-O-同态都反映 i-结构。例如，之前遇到过的从仿射空间 A 上的离散 i-结构到由恒等映射诱导的不可分 i-结构的 i-O-同态，只要 A 不是单点集合，就不会反映 i-结构。

现在，我们可以陈述并证明关于代数理论无穷小模型的第一个（也是主要的）粘合定理。

定理 5.4. 遗忘函子 $U\colon O\text{-}\mathbf{iAlg} \to \mathbf{Set}$ 唯一地提升反映 *i*-结构的 *i*-O-同态的小型宽推出。此外，余极限锥中的所有 *i*-O-同态都反映 *i*-结构。

证明。 我们将首先证明该定理的断言对（二元）推出成立，然后解释如何将所给构造推广到宽推出的情形。

(1) 考虑 i-O-代数的图，其中 f 和 g 是反映 i-结构的 i-O-同态。

$$\begin{array}{ccc} & (A, \bullet^A) & \\ {\scriptstyle f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle g} \\ (C, \bullet^C) & & (B, \bullet^B) \end{array}$$

以及其在集合中的 U-像的推出

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ C & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

回想一下，集合中的推出可以构造为余积 $C \coprod B$ 关于等价关系的商，该等价关系由关系 $\{(f(a),\ g(a)) \mid a \in A\}$生成。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_B} \\ C & \xrightarrow{i_C} & C \coprod_A B \end{array}$$

映射 i_C 和 i_B 是余积包含映射与商映射的复合。两个元素 $i_C(x)$和 $i_B(y)$相等，当且仅当存在 $a_1, \ldots, a_\ell$属于 A，并且有一条之字形

$$\begin{array}{ccccccccc} & & a_1 & & a_2 & & \cdots & & a_\ell \\ & {\scriptstyle f}\swarrow & & {\scriptstyle g}\searrow\ {\scriptstyle g}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f} & & {\scriptstyle f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle g} \\ x = f(a_1) & & & & g(a_1) & & f(a_2) \quad \cdots \quad f(a_{\ell-1}) & & & & y = g(a_\ell) \end{array}$$

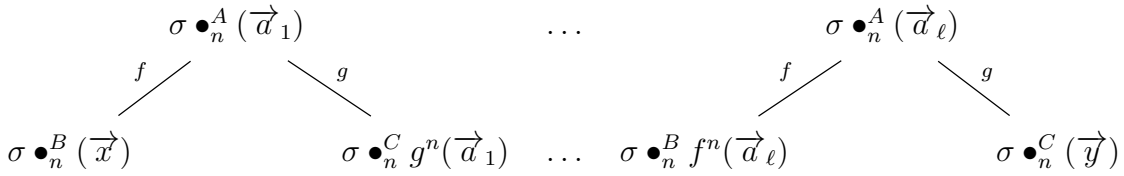
对于 $i_X(x)$ 和 $i_X(x')$，以及 $i_Y(y)$ 和 $i_Y(y')$，情况也类似。（锯齿路径只是对关系 $\{(f(a),\ g(a)) \mid a \in A\}$ 的（自反对称化的）传递闭包的显式描述。）此外，这种通过锯齿路径进行的刻画与 Z、h 和 k 的同构表示的具体选择无关。

（2）要在 Z 上定义一个 i-O-代数结构，我们分别取 C 和 B 上的 i-O-代数结构在 h 和 k 下的像。由此， h 和 k 成为 i-O- 代数同态，并且按照构造保持 i- 结构。

特别地，我们将 $Z\langle n\rangle$、 $n \in \mathbb{N}$ 定义为 $C\langle n\rangle$ 和 $B\langle n\rangle$ 在 h^n 和 k^n下的像的并。由于 h 和 k 联合满态，这就在 Z上定义了一个 i-结构。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$、 $\sigma \in O\ (n)$ 和 $\langle z_1、\ .....、\ z_n\rangle \in Z\langle n\rangle$，我们将 $\sigma \bullet_n^Z\ (z_1,\ \ldots z_n)$ 定义为 $h\ (\sigma \bullet_n^C\ (x_1,\ .....,\ x_n)\ )$ 或 $k\ (\sigma \bullet_n^B\ (y_1,\ .....,\ y_n)\ )$；其中 x_j或 y_j为任意满足 $z_j = h\ (x_j)$ 或 $z_j = k\ (y_j)$ 的对象，分别对应上述两种情形。我们需要证明每个 $\bullet_n^Z$都给出一个定义良好的映射 $\bullet_n^Z$: $O\ (n)\ \times Z\langle n\rangle \to Z$。

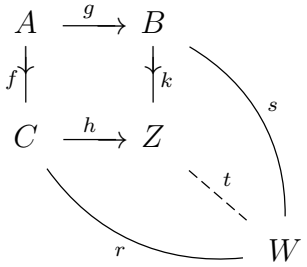
首先，由在 Z 上构造 i-结构可知，对于每个 $\langle z_1、\ .....、\ z_n\rangle \in Z\langle n\rangle$， $\sigma \bullet_n^Z\ (z_1,\ \ldots z_n)$ 确实有定义。若 $z_j = h\ (x_j)\ = k\ (y_j)$，则对每个 $1 \le j \le n$，都存在从 x_j 到 y_j 的锯齿路径。由于锯齿路径可以平凡地延长，我们可以假设它们的长度都相同，均为 ℓ。从每条锯齿路径中取第一个顶点 $a_1^j \in A$。由 $x_j = f\ (a_1^j)$ 、 $\langle x_1、\ .....、\ x_n\rangle \in B\langle n\rangle$，且由于 f反映 i-结构，得到$\langle a_1^1、\ .....、\ a_1^n\rangle \in A\langle n\rangle$。态射 g和 f都保持并反映 i-结构，因此对锯齿路径的长度 ℓ作简单归纳可得，对每个$1 \le i \le \ell$，均有 $\langle a_i^1、\ .....、\ a_i^n\rangle \in A\langle n\rangle$。由于 f和 g是 i-O-同态，这就给出一条锯齿路径



因此 $\sigma\bullet_n^B(\overrightarrow{x})\ = \sigma\bullet_n^C(\overrightarrow{y})$。其他情形，即对所有 j， $z_j = h(x_j)\ = h(x'_j)$，或 $k(y_j)\ = k(y'_j)$，也可用同样的方法处理。

现在很容易验证，$(Z, \bullet^Z)$ 是一个 i-O-代数。事实上，任意 $\langle z_1, \ldots, z_n\rangle$都可以表示为某个 $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in B\langle n\rangle$ 的 h^n-像，或某个$\langle y_1, \ldots, y_n\rangle \in C\langle n\rangle$ 的 k^n-像。由于所有公理都是方程，并且在 $(B, \bullet_B)$ 和 $(C, \bullet^C)$ 中成立，因此它们在 $(Z, \bullet^Z)$ 中也成立。此外，按构造， h和 k是反映 i-结构的 i-O-同态。

同理可得，$(Z, \bullet^Z)$ 连同 h和 k构成 O-iAlg 中的一个推出：对于一个 i-O-代数 $(W,\ \bullet^W)$ 以及 i-O-同态 r和 s，交换图中的唯一映射 t



依据在 Z 上构造 i-O-代数结构，该映射提升为 i-O-同态 t: $(Z, \bullet^Z)\ \to (W, \bullet^W)$。

(3) （小）宽推出的一般情形可通过将（2）中的构造推广到任意一族具有共同定义域（$A, \bullet^A$）的 i-O-同态 I 得到。首先，若将每个映射 $f \in I$ 的陪域记为 A_f，则宽推出可构造为余积 $\coprod_{f\in I} A_f$ 关于由关系 $\{(f(a)\ g(a))\ \mid a \in A,\ f, g \in I\}$ 生成的等价关系的商。与二元

情形一样，该关系的传递闭包可由所有对 $(f,g) \in I^2$ 的锯齿路径表示，而这一表示给出了一个不依赖于所选宽推出构造的刻画。

宽推出 O上的 i- Z 代数结构，借助映射 $i_f : A_f \to Z$ 构造如下，与二元情形相同：取所有 O下 i- $f \in I$代数结构的像。将 (2) 中给出的论证应用于所有对 $(f,g) \in I^2, f \neq g$，可知该构造定义良好。与 (2) 中一样， i_f 是反映 i-结构的 i-O代数同态，并且根据构造，它们满足 O-**iAlg** 中宽推出的泛性质。由于 U 是遗忘函子忠实于对象（见定理 4.4的证明），宽推出的提升必然唯一。

□

由于始对象 $O(0)$是一个全 O-代数，唯一的 i-O代数同态会反映 i-结构。因此，定理 5.4 为我们提供了 i-O代数余积的一种显式构造：将顶点位于 $O(0)$的（宽）推出。

通过将余切片范畴 O**(0)**/ **Set**（其对象为 f 且 $\mathrm{dom}\, f = O$**(0)**，态射为 $f \to g$ 映射 h）： $X \to Y$ 其中 $hf = g$ 作为基范畴，我们可以将这一结果表述如下：

推论 5.5。遗忘函子 U： O-**iAlg** $\to O(0)$/**Set** 唯一地提升（小）余积。特别地，如果 $O(0) = \emptyset$，那么 O-**iAlg** 中的余积就是不交并。

回顾一下， q 关于 f、 g： $A \rightrightarrows B$ 的余等化子可以写成一个推出

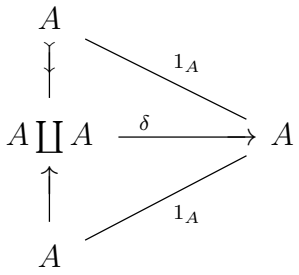
$$\begin{array}{ccc} A \coprod B & \xrightarrow{(g,1_B)} & B \\ {\scriptstyle (f,1_B)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow{q} & Z \end{array}$$

然而，折叠映射 $(f,1_B)$ 和 $(g,1_B)$ 不一定反映 i-结构，即使 f 和 g 是如此。为保证这一性质， f 和 g 的像必须是无穷小闭子集；也就是说，如果 $\langle f(x)\ y\rangle \in B\langle 2\rangle$，那么 y必须位于 f 的像中（ g同样如此）。事实上，$(f,1_B)$ 反映 i-结构，当且仅当 f 反映 i-结构，并且在 B中具有无穷小闭像。因此，定理 5.4 的另一个推论是：

推论 5.6. 遗忘函子 U： O-**iAlg** $\to$ 集合 唯一地提升一族（小的）平行 *i*-结构反映 *i*-O-同态的余等化子，前提是每个映射都具有无穷小闭像。在这种情况下，余等化子反映 *i*-结构。

由于（小）余极限可以系统地由（小）余积和一个余等化子构造出来（参见 [14, 定理 V.2.1]的对偶），人们或许会希望由此得出结论： U 定理 O5.4 中的映射提升了 i-结构反映型 i-同态的（小）余极限，且这些同态的像无穷小闭。然而，事实证明， [14, 定理 V.2.1]的对偶所给出的余极限表示并不适用，因为余积之间的映射不会反映 i-结构。问题出在此构造中使用的从余积出发的折叠映射上。例如，考虑余对角折叠映射

$\delta = (1_A, 1_A)$ 对于一个 i-O-代数 A



当且仅当 A 是 $O(0)$的子代数时，它才反映 i-结构。稍后我们将给出一对 i-结构反映型 i-O同态的例子，其中 U 无法提升余等化子，因此推论5.6 已经是最好的普遍结果。

在第二粘合定理中，我们证明了一般而言， O-iAlg 中的余等化子可以像 O-Alg 中那样构造：也就是说，构造为同余关系的商[8]。

定理 5.7。 设 $(R, \bullet^R)\ (A, \bullet^A) \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}}$ 是 O-iAlg 中的一个同余关系。若 p_1 和 p_2 联合反映 *i*-结构，则 U 唯一地提升 R 的商；也就是说，对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和$y_1, \ldots, y_n \in R$

$$\langle p_1(y_1), \ldots, p_1(y_n)\rangle \in A\langle n\rangle \wedge \langle p_2(y_1), \ldots, p_2(y_n)\rangle \in A\langle n\rangle \implies \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \in R\langle n\rangle$$

在这种情况下，商映射的提升反映 *i*-结构。

证明。 R 也是集合 Set 中的一个等价关系。令 q 为其商。

$$R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{q} Z$$

首先，我们证明 p_1 和 p_2 联合反映 i-结构，足以保证存在一个 U-提升的余等化子，而且该提升必然唯一，因为 U 是遗忘函子忠实于对象的。与定理 5.4 的证明一样，i-O-结构在 Z 上通过取 i-O-代数结构在 q下的相应像来构造。对于 $n \in \mathbb{N}$ ，i-结构 $Z\langle n\rangle$ 因此定义为 $q^n(A\langle n\rangle)$ ，而 O-作用 $\bullet^Z$ 定义为

$$\sigma \bullet^Z (z_1, \ldots, z_n) = q(\sigma \bullet^A (x_1, \ldots, x_n))$$

对于任意 $\sigma \in O(n)$ 和 $\langle x_1, \ldots..., x_n\rangle \in A\langle n\rangle$，使得 $q(x_j) = z_j$。

由于 $A\langle -\rangle$ 是一个 i-结构，而 q 是一个满态射，因此显然， $Z\langle -\rangle$ 定义了一个 i-结构，使得 q 是一个反映 i-结构的 i-态射。此外，对于每个 $\langle z_1, \ldots..., z_n\rangle \in Z\langle n\rangle$, $\sigma \bullet_n^Z(z_1,\ldots..., z_n)$ 都有定义。我们需要证明 $\sigma \bullet_n^Z(z_1,\ldots..., z_n)$ 是良定义的。

令 $x'_j \in A$ 满足 $q(x'_j) = q(x_j)$ 和 $\langle x'_1, \ldots, x'_n\rangle \in A\langle n\rangle$。由于 Set 是一个有效正则范畴[9]， R是 q 的核对，并且 $R(x_j, x'_j)$ 成立；也就是说， x_j和 x'_j

[8]回顾一下，同余关系是与结构相容的等价关系。在 O-iAlg 的情形下，$(A, \bullet^A)$ 上的一个同余关系对应于两个 i-O-同态 $(p_1, p_2) : (R, \bullet^R) \rightrightarrows (A, \bullet^A)$，它们联合单态射，且所诱导的 $UR \rightarrowtail UA \times UA$ 是 Set 中的一个等价关系。[9]回顾一下，若一个范畴具有有限极限，且正则满射（即作为余等化子的满态射）在拉回下稳定，则称该范畴为正则范畴。在有效正则范畴中，每个同余关系都是一个核对。

是 R-等价的。因此存在（唯一确定的） $y_j \in R$，使得 $p_1(y_j) = x_j$且 $p_2(y_j) = x'_j$。此外，由于 $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$和 $\langle x'_1, \ldots, x'_n\rangle$都属于 $A\langle n\rangle$，且 p_1和 p_2共同反映 i-结构，我们有 $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle \in R\langle n\rangle$。由于 p_1和 p_2是 i-O-同态，我们得到

$$\sigma \bullet_n^A (x_1, \ldots, x_n) = p_1(\sigma \bullet_n^R (y_1, \ldots, y_n))$$
$$\sigma \bullet_n^A (x'_1, \ldots, x'_n) = p_2(\sigma \bullet_n^R (y_1, \ldots, y_n))$$

因此 $q(\sigma \bullet_n^A(x_1, \ldots, x_n)) = q(\sigma \bullet_n^A(x'_1, \ldots, x'_n))$，其中 q是 p_1和 p的余等化子 $_2$.

如定理 5.4 的证明中所述，由于 $(Z, \bullet^Z)$ 上的 i-O-代数公理可直接由 q 上的 i-O-代数结构的定义推出，且这些公理对 $(A, \bullet^A)$ 成立，因此它们也成立。显然，q可提升为一个 i-O-同态 $(A, \bullet^A) \to (Z, \bullet^Z)$，而 q 作为 O-iAlg 中 p_1 和 p_2 的余等化子的泛性质也可直接推出。 □

请注意，定理 5.7 的逆命题并不成立，还需要额外假设等价关系 $(p_1, p_2) : (R, \bullet^R) \rightrightarrows (A, \bullet^A)$ 是 O-iAlg 中的核对。事实上，设 A 是一个含有多个点的仿射空间，将其视为克隆 O（由仿射组合构成）上的全 i-O-代数 $(A, \bullet^A)$。考虑集合 $A \times A$ 上的离散 i-结构，使其成为 i-O-代数 $(A \times A, \delta)$。投影对 $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) : (A \times A, \delta) \rightrightarrows (A, \bullet^A)$ 是一个同余关系，其中 p_1和 p_2 并不能共同反映 i-结构，但它在 Set 中的商 $UA \to 1$ 有唯一的提升[10]。

推论 5.8. 同余关系 $(R, \bullet^R)\,(A, \bullet^A)\overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}}$在 O-iAlg 中是核对，当且仅当 p_1 与 p_2 共同反映 *i*-结构。

证明。 (1) 设 $(p_1, p_2) : (R, \bullet^R) \rightrightarrows (A, \bullet^A)$ 是一个核对。由于 U不仅保持核对，而且还能唯一地提升核对，因此 R 上的 i-结构是沿单态射 $(p_1, p_2) : R \rightarrowtail A \times A$ 对 $A \times A$ 上的乘积 i-结构的限制；但这表明 p_1 和 p_2 共同反映 i-结构。

可以给出如下更形式化的论证： p_1 和 p_2 共同反映 i-结构这一断言，等价于说下列交换方块

$$\begin{array}{ccc} R\langle n\rangle & \xrightarrow{(p_1^n, p_2^n)} & A\langle n\rangle \times A\langle n\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^n & \xrightarrow{(p_1^n, p_2^n)} & A^n \times A^n \end{array}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，这些方块是拉回（在集合中）。这可通过图追踪得出

$$\begin{array}{ccccc} R\langle n\rangle & \underset{p_2^n}{\overset{p_1^n}{\rightrightarrows}} & A\langle n\rangle & \xrightarrow{q^n} & Z\langle n\rangle \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R^n & \underset{p_2^n}{\overset{p_1^n}{\rightrightarrows}} & A^n & \xrightarrow{q^n} & Z^n \end{array}$$

其中，q 是集合 Set 中 (p_1, p_2) 的余等化子，这里使用了顶层和底层图表是 Set 中核对这一事实。（Z 上的 i-结构是 A上的 i-结构的 q-像。无论能否将 Z 构造成 i-O-代数，都可以定义它。）

[10]请注意，[3] 中定理 2.6.20 所述的“仅当”部分正是因此而不正确。此外，U 将正则满射反映到 [3, 推论 2.6 中的21]这一说法也是错误的；同上文备注 2.6.22(a) 中给出了反例。

（2）反过来，根据第二粘合定理 5.7 的证明，我们可以看到，$(R, \bullet^R)$ 是商 $q\colon UA \to Z$ 的提升的核对。事实上，由于 U 唯一地提升了 $Uq\colon UA \to UZ$ 的核对 $(Up_1, Up_2)\colon UR \rightrightarrows UA$（我们将该提升记为 $(R', \bullet')$），存在唯一的 i-O-同态 $h\colon (R, \bullet^R) \to (R', \bullet')$，满足$p_j \circ h = p_j$，且 Uh 是 $R = R\langle 1\rangle = R'\langle 1\rangle$ 上的恒等映射。然而，由于 p_1 和 p_2 共同反映 i-结构（对于 R 和 R' 都如此），它们必相等；也就是说，正如（1）中所论证的，这是沿单态射 $(p_1, p_2)\colon R \rightarrowtail A \times A$ 对 $A \times A$ 上的乘积 i-结构的限制。这说明 h 是 O-iAlg 中的恒等态射。

□

由于 U 保持等价关系 $(R, \bullet^R) \rightrightarrows (A, \bullet^A)$，且 Set 中的每个等价关系都是一个核对，前一推论证明的第 (2) 部分表明，$(R, \bullet^R)$ 与核对 $(R', \bullet')$ 之间唯一的区别在于 i-结构（因为 Uh 必须是恒等映射）；只有当相对于陪域而言 i-结构“过小”时，O-iAlg 中的等价关系才不会是核对。

推论 5.9。 O-iAlg 是一个正则范畴（但不是有效正则范畴），且 U 是一个正则函子，即保持有限极限和正则满射。

证明。 (1) 回顾一下，正则满射 e 是其核对的余等化子。根据前一推论 5.8，每个核对共同反映 i-结构。根据定理 5.7，U唯一地提升其 **Set**-商。提升后的商因此同构于余等化子e 在 O-**iAlg** 中，且 Ue 因此是 **Set**中的余等化子。

(2) 在前面的讨论中我们已经看到，O-iAlg 存在并非核对的等价关系，因此它不可能是有效正则范畴。要证明它是正则范畴，由于 O-iAlg 是完备且余完备的，只需证明正则满射在拉回下稳定。

现在考虑 O-iAlg 中一个正则满射 e 沿 f 的拉回 f^*e：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{e^*f} & A \\ {\scriptstyle f^*e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ B & \xrightarrow{f} & Z \end{array} \tag{1}$$

U 保持拉回和正则满射，因此该图在 U-像下成为正则满射 Ue 在 **Set**中的拉回图。由于 **Set** 是正则范畴，$U(f^*e)$ 是 **Set** 中的正则满射，也是其核对的余等化子。根据定理 4.4和 5.7，U 唯一地提升核对及其商。将前述推论5.8 证明的第（2）部分中的论证应用于此处提升的余等化子，可得该提升的余等化子与 f^*e 一致，当且仅当 B 上的 i-结构是 C 上的 i-结构在 f^*e下的像。

这可由以下图追踪得出，其中利用了 Z和 C上 i-结构的构造：设 $n > 1$和 $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in B\langle n\rangle$。由于 e 反映 i-结构，存在$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A\langle n\rangle$，使得对所有 $1 \le j \le n$，$e(a_j) = f(b_j)$。由于上述图 (1) 是一个拉回，存在 $c_j \in C$，使得 $f^*e(c_j) = b_j$且 $e^*f(c_j) = a_j$。此外，由于 f^*e和 e^*f共同反映 i-结构，我们有 $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle \in C\langle n\rangle$。这表明 f^*e是一个正则满射。

□

推论 5.10. 将 O-代数映射到全 i-O-代数的（满）包含映射 O-**Alg** $\hookrightarrow$ O-**iAlg** 保留（小）极限和余等化子，但通常不保留余积。

证明。 (1) 全部 i-O-代数的（小）积是全的，等化子也同样如此。根据 [14, 定理 V.2。1] 全体 i-O-代数图表的（小）极限是全的。由于 O-代数和 i-O-代数的极限都是由底层的 集合 中的极限构造而成（每个遗忘函子都唯一地提升极限），这等价于说包含函子保持（小）极限。

(2) 类似的论证表明余等化子得以保持。事实上，正如前一推论的证明 5.9 中所见，一对 i-O-同态$f, g\colon A \rightrightarrows B$的余等化子是其核对的商的 U-提升。 q基本上通过同样的论证，这对 O-代数的余等化子也成立，因为相应的遗忘函子会唯一地提升 集合-同余关系的商。由定理 5.7 中 i-结构的构造可知，当 O为全时，商 i- B -代数也将是全的。在这种情况下， q 的核对也全。这表明包含函子保持余等化子。

(3) 最后，我们注意到，两个非平凡阿贝尔群的余积的底层集合是集合的二元积，这不同于其底层带基点集合的楔和，也就是它们作为无穷小阿贝尔群的余积的底层集合。在 $O(0) = \emptyset$ 的情形下，我们注意到，两条仿射直线的余积是三维仿射空间，因此不同于底层集合的不交并。

□

根据推论 5.10 可知，遗忘函子 $U\colon$ O-**iAlg** $\to$ **Set** 一般不能提升反映 i-结构的 i-O-同态的余等化子，因为遗忘函子 O-**Alg** $\to$ **Set** 一般不能提升余等化子。事实上，总代数之间的每个 i-O-同态都反映 i-O-结构。然而，常零映射与 $z \mapsto 2z$ 整数的 $\mathbb{Z}$余等化子在阿贝尔群范畴中是到 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的典范投影；但在 **Set** 中，它是到集合 $2\mathbb{Z} + 1 \cup \{0\}$ 的映射，该映射将偶数归并为 0。

仿射空间上的类似反例也可以给出 $\mathbb{R}$.[11] 将 $\mathbb{R}^2$ 视为自身上的仿射空间。常零映射和 $x \mapsto (x, 0)$ 都是仿射映射。在仿射空间范畴中，余等化子是到 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 的投影；但在集合范畴中，它是到两个带基点的半平面的楔和的映射：$(0, \infty) \times \mathbb{R} \cup \{(0, 0)\}$ 和 $(-\infty, 0) \times \mathbb{R} \cup \{(0, 0)\}$ 在 $(0, 0)$ 处粘合，并将直线 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 压缩到 $(0, 0)$。从这个楔和到 $\mathbb{R} \times \{0\}$、且与商映射相容的唯一映射是满射，但不是单射。

我们的第三个也是最后一个粘合定理涉及局部模型的粘合，这在合成微分几何中应用无穷小代数时具有重要意义[12]。

设 M 是一个集合。偏序集 $\mathcal{A} \subset \mathrm{Sub}(M)$ 连同沿遗忘函子 $U\colon O$-iAlg $\to$ Set 对 $\mathcal{A}$ 的一个提升，称为 M 的无穷小 O- 图册，如果

(1) $\mathcal{A}$在有限交下封闭

(2) U-提升中的每个 i-O-单态射都反映 i-结构

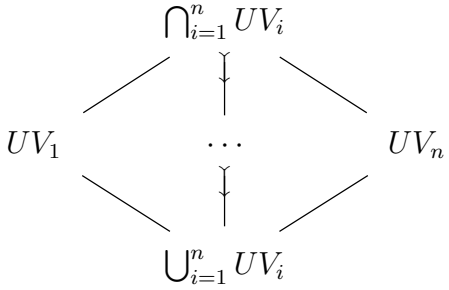
[11]这表明 [3, 定理 2.6.19]中的陈述是错误的。[12]与本文其余部分一致，我们在此给出以集合为基范畴的定义。不过，集合可以替换为格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{S}$，粘合定理的证明也可直接推广到 $\mathcal{S}$。

(3) $\mathcal{A}$ 的并是 M。

定理 5.11。 遗忘函子 $U:\ O$-**iAlg** $\to$ 集合 唯一地提升任意无穷小 O-图册 $\mathcal{A}$ 的并。

证明。 任意并都是 $\mathcal{A}$ 中子对象的有限并的滤过余极限。由于 U 根据定理 4.4 唯一地提升滤过余极限，我们只需考虑有限并的情形。

子对象 $UV_i \in \mathcal{A}$ 的有限并 $\bigcup_{i=1}^n UV_i$ 是宽推出



由于 $\mathcal{A}$ 对有限交封闭，因此存在一个 i-O-代数 W，满足 $UW = \bigcap_{i=1}^n UV_i$，并且所有单态射都是 U-像，且来自反映 i-结构的 i-O-单态射$W \rightarrowtail V_i$。根据我们的第一个粘合定理 5.4，函子 U 唯一地提升并 $\bigcup_{i=1}^n UV_i$，且所有 i-O 单态射都反映 i-结构。重复这一论证，我们可以通过添加所有有限并，将$\mathcal{A}$ 扩展为一个滤过偏序集。 □

尽管我们针对一般代数理论表述了粘合定理，但当理论没有常元，即 $O(0) = \emptyset$ 时，它似乎最为相关。事实上，若存在常元，则 i-O-代数中的每个点都无穷小邻近于每个常元，因此谈论局部模型似乎有些奇怪。对于没有常元的理论， O-iAlg 中的余积就是集合中的不交并。例如，仿射空间理论便属于这种情形，这使得仿射空间的无穷小模型的粘合变得方便。

6 结论

将代数理论 $\mathbb{T}$ 的模型范畴扩展为无穷小模型范畴，有助于保留许多良好的范畴性质，例如局部有限可呈性，以及从底层集合计算极限和滤过余极限。余积可化为常元集合上的楔和；如果该理论不要求常元，则可化为不交并。哪些其他余极限可以从底层集合计算，取决于无穷小结构，也取决于态射。推出和局部模型的粘合只需满足温和的条件；但通常，与 $\mathbb{T}$ 的模型范畴一样，余等化子是通过同余关系的商计算的。无穷小结构决定了无穷小模型更接近几何还是代数。这表明，代数理论的无穷小模型是这两种（元）概念之间一种方便的插值。

迄今为止，无穷小代数仅应用于合成微分几何，揭示了代数与广为人知的微分几何概念和构造在无穷小层面上的有趣联系 [12, 10], [3, 章 3], [13, 4];

这方面的研究仍在继续。不过，我们希望将其作为一种独立于几何根源的构造加以介绍，使其能够在其他领域找到用例和应用，而这些领域未必与几何相关。

无穷小化的构造并不局限于代数理论，而是可以扩展到任意一阶理论。这为一阶逻辑的每个片段都导出了无穷小模型范畴。这些构造是否会改变模型范畴的性质，以及如何改变，还有这些构造的应用，都是有待未来研究解答的开放问题。

参考文献

[1] J. Adámek 和 J. Rosický。局部可呈现与可及范畴，第 189 卷，收录于 伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，1994年。

[2]J. Adámek、H. Herrlich 和 G. E. Strecker。《抽象与具体范畴：猫的乐趣》。《范畴理论与应用》重印本第17辑。在线版，2006年。网址：http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/17/tr17abs.html。[3] F. Bár。《代数理论的无穷小模型》。博士论文，剑桥大学纯数学与数理统计系，2017年。网址：https://doi.org/10.17863/CAM.13058。[4]F. Bár。《仿射联络与二阶仿射结构》。《范畴拓扑与微分几何札记》，LXIII(1):35–58，2022年。网址：http://cahierstgdc.com/wp-content/uploads/2022/01/BAR-LXIII-1-2.pdf。[5] F. Bár。《二阶无穷小群与仿射联络》。arXiv 预印本，arXiv:2305.04601，2023年。网址：https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.04601。[6] P. M. Cohn。《普遍代数》。D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，第2版，1981年。[7] E. J. Dubuc。《关于合成微分几何的模型》。《范畴拓扑与微分几何札记》，20(3):231–279，1979年。网址：http://www.numdam.org/article/CTGDC_1979__20_3_231_0.pdf。[8] M. Gould。《范畴化歌剧理论的相干性》。博士论文，格拉斯哥大学信息与数学科学学院，2008年。[9] P. T. Johnstone。《大象素描：托扑斯理论纲要》，牛津逻辑指南第43、44卷。克拉伦登出版社，牛津，2002年。[10]A. Kock。《列维-奇维塔平行移动的几何构造》。《范畴理论与应用》，4(9):1–16，1998年。网址：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/1998/n9/n9.pdf。[11] A. Kock。《合成微分几何》。伦敦数学学会讲义系列第333辑。剑桥大学出版社，剑桥，第2版，2006年。

[12] A. Kock。 流形的合成几何。剑桥数学丛书第180卷。剑桥大学出版社，剑桥，2009年。[13] A. Kock。1-形式与联络的积分。 *arXiv* 预印本，arXiv:1902.11003，2019年。网址：https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.11003。[14] S. Mac Lane。工作数学家的范畴论，数学研究生教材第 5 卷数学研究生教材。施普林格出版社，纽约，第2版，1998年。