arXiv:2305.01370v2 [math.SG] 4 Sep 2024

持久性 K 理论

PAUL BIRAN、OCTAV CORNEA 和 JUN ZHANG

摘要。 本文研究三角持久性范畴（TPC）的基本 K理论性质。这一概念由 [12]提出，它是一类范畴，可视为三角范畴的一种细化，因为 TPC 的态射集是持久模。我们计算了一些基本例子中的 K群，并讨论其在福柯范畴以及恰当拉格朗日子流形拓扑中的应用。

目录

1. 引言 2 2. 预备知识 5 2.1. 诺维科夫环 5 2.2. 持久模 5 2.3. 条形码 6 2.4. 三角持久范畴 7 2.5. 三角权重与碎片化伪度量 10 2.6. Fukaya三角持久性范畴 12 3. TPC 的 K-群的一般性质 16 3.1. TPC 的无环范畴 17 3.2. TPC 函子与诱导的 K-态射 18 3.3. $\mathcal{C}$ 上的幺半结构与 $K(\mathcal{C})$上的环结构 20 3.4. 对偶 TPC 及其 K-群 21 3.5. TPC 的 ∞-层级与一个正合列 23 3.6. 一般性质总结 24 4. 过滤链复形 25 4.1. 主要计算结果 25 4.2. 与 $H_0(\mathcal{F}\mathrm{Ch}^{\mathrm{fg}})$ 相关的 K-群的计算 27 4.3. 与 $H_0(\mathcal{F}\mathrm{Ch}^{\mathrm{t}})$ 相关的 K-群的计算 31

日期：2024年9月5日。2020年 数学主题分类。 55N3153D12（主要）；18F3019E9918G8053D40 53D37（次要）。关键词和短语。 三角持久范畴、格罗滕迪克群、Fukaya 范畴、辛流形、拉格朗日子流形、Floer 同调。第二作者获得了个人 NSERC Discovery基金资助。第三作者获得国家重点研发计划项目（编号：2023YFA1010500）、国家自然科学基金委员会项目（编号：12301081 和 12361141812）以及中国科学技术大学双一流建设研究基金的部分资助。

4.4. 更多关系 33 5. 持久模的条形码、阶梯函数与 K-理论 36 5.1. 环 LC_B 与 LC 36 5.2. LC、 LC_B 与 K-群上的环结构 38 5.3. 持久性莫尔斯不等式 40 6. 一个 K-理论配对 43 6.1. 配对 43 6.2. 正合列 (33)与配对 κ 46 6.3. 双线性形式 κ 46的反对称性 7. K-群及条形码上的测量。48 7.1. $K(\mathcal{C})$ 上的群半范数 48 7.2. K- 理论数值不变量 50 7.3. 其他测量 53 8. 辛几何应用 54 8.1. 配对 κ 与拉格朗日子流形 55 8.2. 浸入的拉格朗日子流形 61 8.3. 一个例子 62 参考文献 66

1. 引言

本文的主要目标是研究 K-理论性质的三角持久范畴（TPC），并探讨这些性质在辛拓扑背景下的一些应用。我们回顾 [12]（或其早期版本 [11]）中的内容：粗略地说，TPC 是一个持久范畴 $\mathcal{C}$，即一个其态射为持久模同态$\mathcal{C}(A,B) = \{\hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(A,B)\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$的范畴，且复合运算与持久结构相容；它还满足以下条件：零级范畴 $\mathcal{C}_0$是三角化的，该范畴与 $\mathcal{C}$ 具有相同的对象，但仅包含零级态射 $\hom_{\mathcal{C}_0}(-,-) = \hom^0_{\mathcal{C}}(-,-)$。完整定义及所有相关概念将在第 2.4 节中回顾。此类 TPC 的基本性质 $\mathcal{C}$ 是，其 ∞级范畴 $\mathcal{C}_\infty$（同样具有与 $\mathcal{C}$ 相同的对象，其态射为 $\hom_{\mathcal{C}}(-,-)$ 的 ∞-极限）也是三角化的，并且其中的每个正合三角都带有权重 $r \geq 0$。利用这一权重，可以在 $\mathcal{C}$的对象上定义一族碎片化伪距离，计算通过正合三角分解对象所需的权重。

与 TPC K相关的基本 $\mathcal{C}$-理论构造见第 3节。回顾一下，三角范畴 $K(\mathcal{D})$ 的格罗滕迪克群 $\mathcal{D}$ 定义为由该范畴的对象自由生成的阿贝尔群，并对以下关系取商： $B = A + C$对于每个正合三角 $A \to B \to C \to TA$ 在 $\mathcal{D}$中，其中 T 是 $\mathcal{D}$的平移函子。

回到三角持久性范畴 $\mathcal{C}$，我们将其 K-群定义为

$$K(\mathcal{C}) := K(\mathcal{C}_0) \ .$$

这是对 $\mathcal{C}$ 涉及以下对象的迭代锥进行仅含0-权三角的线性化。因此， K-类 $[X] \in K(\mathcal{C})$ 可以看作对象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 的代数不变量 X ，粗略地说，它在0-同构下保持不变（见引理 3.2.2）。与此同时，由于在构造 $K(\mathcal{C})$的商中没有使用高权三角，这个 K-群仍然携带相关的度量信息。

这篇论文更确切的目标是进一步理解这个群的结构，尤其是代数方面与度量方面之间的相互作用。

第一个结构性结果将 $K(\mathcal{C})$ 与 K-群联系起来，该群是 ∞-层的 $\mathcal{C}$， $K_\infty(\mathcal{C}) := K(\mathcal{C}_\infty)$。我们在第 §3 节注意到，存在一个由 Λ_P-模构成的长正合列：

$$0 \to \mathrm{Tor} K(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{AC}) \to K(\mathcal{C}) \to K_\infty(\mathcal{C}) \to 0. \tag{1}$$

这里， Λ_P 是带整数系数的通用诺维科夫多项式环（我们在 §2.1 节回顾其定义），TPC 的 K- 群自然是 Λ_P- 模。范畴 $\mathcal{AC}$ 是 $\mathcal{C}$ 的满子范畴，其对象是 $\mathcal{C}$ 中与 $\mathcal{C}_\infty$ 中的 0 同构的对象；这称为 $\mathcal{C}$的无环子范畴。这个 $\mathcal{AC}$ 也是一个 TPC，因此 K-群$K(\mathcal{AC}) := K(\mathcal{AC}_0)$按上述方式定义。术语 Tor$K(-)$表示一种扭型函子。为了对此有所了解，回顾 [12] ， $\mathcal{C}_\infty$ 是 $\mathcal{C}_0/\mathcal{AC}_0$Verdier 局部化。

在第4 节中，我们计算滤过链复形范畴的相关 K群。本引言中，我们只关注一个例子： $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}} = H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$，即有限生成滤过链复形的同伦范畴。不同类型的滤过链复形是 TPC 最常见的例子。此外，这些例子在某些方面也具有普遍性。例如，我们证明对于 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 正合列（1）可以识别为下列正合列：

$$0 \to 0 \to \Lambda_P^{(0)} \to \Lambda_P \to \mathbb{Z} \to 0,$$

其中 $\Lambda_P^{(0)} \subset \Lambda_P$ 是由在 $t = 1$处取值为零的诺维科夫多项式 $P(t)$ 组成的理想，即 $P(1) = 0$。将（1）与后一个正合列相识别，最有趣的部分是同构

$$K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \xrightarrow{\cong} \Lambda_P \tag{2}$$

这表明，在此情形下， Λ_P-模 $K(\mathcal{C})$ 与 Λ_P 本身相同。我们将此同构记为 λ ，并很快概述其定义。由欧拉示性数诱导出同构 $K_\infty(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ 。

同构 λ: $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \xrightarrow{\cong} \Lambda_P$ 是通过以下方式诱导的：将一个经过滤、有限生成的链复形 C. 首先，将 C 与其关联的（分次）持久同调 $H_*(C)$ (参见 §2.2 ，其中简要回顾了相关定义）。然后，将以下对象与

$H_*(C)$ 关联起来的是它的分次条形码$\mathcal{B}_{H_*}(C)$。它由有限个区间（亦称条）组成，形式为 $[a,b)$ 和 $[c,\infty)$，其中每个区间在 $\mathbb{Z}$ 中都有一个特定次数。对于次数为 k 的区间$[a,b)$，我们关联多项式 $(-1)^k(t^a-t^b) \in \Lambda_P$；对于次数为 k 的区间 $[c,\infty)$，我们关联 $(-1)^k t^c$。最后，我们将分次条形码 $\mathcal{B}_{H_*}(C)$ 中各区间对应的多项式相加，得到诺维科夫多项式 $\lambda_{H_*}(C)$。映射 $C \longmapsto \lambda_{H_*}(C) \in \Lambda_P$ 诱导出同构 λ。这里还需注意的是，当 $\mathcal{C}$ 具有幺半结构（定义见 §3.3）时，$K(\mathcal{C})$ 是一个 Λ_P-代数。 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 就是这种情形，其幺半运算为张量积，而同构 λ 是环同构。

在第5节中，我们探讨一种自然的方法，将实值函数与分次持久模或条形码关联起来。作为副产品，我们将映射 $C \to [C] \in K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$（它将过滤链复形关联到其 K-类）重新解释为过滤欧拉示性数。给定一个持久模 $M=\{M^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$，考虑整数值函数 $\sigma_M(\alpha) = \dim(M^\alpha)$。按照本文所采用的持久模定义（见 2.2），并假设满足某些有限型约束， $\sigma_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个有界阶梯函数，属于一组此类函数，该函数组记为 LC_B，并在 §5.1 中定义。若 $M_\bullet$ 是一个分次持久模，对每个次数 i 都由持久模 M_i 组成，那么自然可以考虑欧拉示性数函数 $\bar{\chi}_{M_\bullet} \in LC_B$, $\bar{\chi}_{M_\bullet} = \sum_k (-1)^k \sigma_{M_k}$。我们证明， LC_B 具有一种基于函数卷积的显著环结构；在此环结构下，它同构于环 Λ_P。此外，在这一环同构 $LC_B \cong \Lambda_P$ 下，映射 $M_\bullet \to \bar{\chi}_{M_\bullet} \in LC_B$ 是式 (2) 中 λ 的另一种表达。本章还包含莫尔斯不等式的持久性版本（命题 5.3.1），以及一个计数条的应用（推论 5.3.4）。

在第6 节中，我们回到一般情形，并考虑一个三角持久性范畴$\mathcal{C}$。在某些有限型约束下，我们证明存在一个双线性配对

$$\kappa : \overline{K(\mathcal{C})} \otimes_{\Lambda_P} K(\mathcal{C}) \to \Lambda_P \tag{3}$$

这里，$\overline{K(\mathcal{C})}$与 $K(\mathcal{C})$是同一个阿贝尔群，但其 Λ_P-模结构为 $\bar{\cdot}$，满足$t\bar{\cdot}x = t^{-1}\cdot x$，其中 $\cdot$ 是 $K(\mathcal{C})$上的模结构。配对 κ 由以下映射诱导：该映射将一对对象 X、Y关联到诺维科夫多项式$\lambda_{\hom_C(X,T^*(Y))}$，其中同态$_{\mathcal{C}}(X,T^*(Y))$是一个分次持久模，其在次数 i上的部分为同态$_{\mathcal{C}}(X,T^iY)$（回顾一下， T 是 $\mathcal{C}_0$中的平移函子）。鉴于上述讨论，注意到 κ 可以视为欧拉配对。在范畴$\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$的情形下，该配对尤其简单。利用识别 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \cong \Lambda_P$，对于任意两个多项式 P、$Q \in \Lambda_P$，我们有 $\kappa(P,Q)(t) = P(t^{-1})Q(t)$。存在一些条件——属于卡拉比–丘对偶类型——它们蕴含配对 κ 是斜对称的，即 $\kappa(x,y)(t) = \kappa(y,x)(t^{-1})$。范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$满足这些条件。

第7 节专门分析了 K群上的“测量”。我们看到，TPC $\mathcal{C}$ 对象上的碎片化伪距离可用于在 $K(\mathcal{C})$上定义非平凡的群半范数。随后，我们讨论利用条形码在 LC_B中的表示来提取定量信息的其他方法。

第 8 节讨论辛拓扑中的应用。我们将介绍一些结果，表明在第 3 章的 κ 所引入的三角化持久性 Fukaya 范畴的 K群上定义的配对 [12]能够以定量方式区分嵌入拉格朗日子流形与浸入拉格朗日子流形。主要结果见推论 8.1.2 和定理 8.1.4。该推论表明，配对 $\kappa(A, A)$ 中， A 是一个嵌入拉格朗日子流形的 K类，它是一个常值诺维科夫多项式，等于该拉格朗日子流形的欧拉示性数（差一个符号）。该定理给出了一种估算方法，用以估计将某些浸入拉格朗日子流形变为嵌入拉格朗日子流形所需的最小“能量”。这一估算颇为微妙，因为它还涉及对某些相关条形码中条数目的估算，而这些估算是根据 §5中的持久莫尔斯不等式推导出来的。

致谢。 我们感谢匿名审稿人仔细阅读论文，并提出了许多有助于改进论述的意见。

2. 预备知识

这里列出本文后文将采用的一些约定，并回顾一些必要概念，以便读者更轻松地阅读本文。

2.1. 诺维科夫环。 我们将使用以下几种形式的诺维科夫环。记

$$\Lambda = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} n_k t^{a_k} \;\middle|\; n_k \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{R}, \lim_{k\to\infty} a_k = \infty \right\} \tag{4}$$

为系数取自 $\mathbb{Z}$ （形式变量为 t）的诺维科夫环，并赋予标准乘法。另记 $\Lambda_P \subset \Lambda$ 为诺维科夫多项式构成的子环，其元素由有限个 和 $\sum n_k t^{a_k} \in \Lambda$组成。

2.2. 持久模。 关于持久模的文献中，定义的变体有很多。这里固定本文将采用的框架。

持久模 M 是由实数$M = \{M^s\}_{s\in\mathbb{R}}$索引的、取值于域$\mathbf{k}$上的向量空间族，并配有映射 $i_{s,\,t}\colon M^s \to M^t$，对所有 $s \le t$均满足 $i_{t,\,r} \circ i_{s,\,t} = i_{s,\,r}$；对所有 $s \le t \le r \in \mathbb{R}$ 以及 $i_{s,\,s} = \mathbb{1}$ ，任取 $s \in \mathbb{R}$均成立。我们始终假设本文所讨论的持久模 M 满足以下三个条件。

(i)（下半连续性）对于任意的 $s \in \mathbb{R}$ ，以及任意充分接近 s 的 $t \ge s$ ，映射$i_{s,\,t}\colon M^s \to M^t$ 是同构。（ii）（下有界）对于充分小的 s ，我们有 $M^s = 0$。

(iii)（驯顺）对于每个 $s \in \mathbb{R}$，我们有

$$\dim_{\mathbf{k}}(M^s) < \infty. \tag{5}$$

我们经常使用分次持久模。也就是说，如果 $M_\bullet = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是以 $\mathbb{Z}$ 为指标、其中指标表示次数的持久模序列，那么 $M_\bullet$ 是一个分次持久模。在这种情况下，温和性条件变为:

$$\text{for every } s \in \mathbb{R},\ \dim_{\mathbf{k}}(\oplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i^s) < \infty\ . \tag{6}$$

滤过链复形的同调提供了持久模中最典型的一些例子。就我们这里的目的而言，滤过链复形是一个三元组 (C_*, ∂, ℓ)，其中 (C_*, ∂) 是一个链复形，并且 $\ell:\ \oplus_i C_i \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 是一个过滤函数（参见 [35,定义 2。2]）。特别地，∂ 和 ℓ 是相容的，即

$$\ell(\partial x) \le \ell(x) \quad \text{for any } x \in C_*.$$

由此可知，对于任意 $r \in \mathbb{R}$，截断 $(C_*^{\le r}, \partial)$，其中 $C_*^{\le r} = \{x \in C \mid \ell(x) \le r\}$ 是一个定义良好的链复形。对于“严格”截断 $C_*^{<r}$，同样成立。

我们将主要考虑两类过滤链复形:

(i) 有限生成-链复形，其全空间 $\oplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k$ 为有限维，且对于 r 充分小的情形，$C_*^{\le r} = 0$。(ii) 驯顺-链复形，使得对于所有 $r \in \mathbb{R}$，$\oplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k^{\le r}$ 均为有限维，且对于 r 充分小的情形，$C_*^{\le r} = 0$。

如果过滤链复形 C 是驯顺的，那么 $\{C_*^{\le r}\}_{r\in\mathbb{R}}$ 构成上述类中的分次持久模。此外，这些截断的同调 $\{H_*(C^{\le r})\}_{r\in\mathbb{R}}$ 也构成同一类中的分次持久模。我们将这个持久模记作 $H_*(C)$。

2.3. **条码**。本文将使用以下版本的条码。一个条码 $\mathcal{B} = \{(I_j,\ m_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$ 是由若干对组成的集合，每一对由区间 $I_j \subset \mathbb{R}$ 和正整数 $m_j \in \mathbb{Z}_{>0}$构成，这些对由一个集合 $\mathcal{J}$索引，并满足以下< E?

(i) 假设 $\mathcal{J}$ 要么有限，要么为 $\mathcal{J} = \mathbb{Z}_{\ge 0}$。(ii) 每个区间 I_j 均为 $I_j = [a_j, b_j)$ 类型，其中 $-\infty < a_j < b_j \le \infty$。(iii) 若 $\mathcal{J} = \mathbb{Z}_{\ge 0}$，则假设 $a_j \to \infty$ 如 $j \to \infty$。

区间 I_j 称为条，对于每个 j，m_j 称为条 I_j的重数。

对于每个条形码 $\mathcal{B}$，我们可以通过以下方式关联一个持久模。对于上述区间 $I = [a, b)$，记 $V(I)$ 为由以下方式定义的持久模。

$$V^s(I) = \begin{cases} \mathbf{k}, & \text{if } s \in I; \\ 0, & \text{if } s \notin I, \end{cases} \tag{7}$$

并且，当 $s, t \in I$ 时，持久化映射 $i_{s,t}: V^s(I) \longrightarrow V^t(I)$ 为恒等映射 $\mathrm{id}_{\mathbf{k}}$。我们将 $V(I)$ 称为对应于 I 的区间模。

通过取直和，我们为每个条形码 $\mathcal{B}=\{(I_j,n_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$ 关联一个持久模，如下所示：

$$V(\mathcal{B}):=\bigoplus_{j\in\mathcal{J}}V(I_j)^{\oplus m_j}. \tag{8}$$

容易看出， $V(\mathcal{B})$ 满足 §2.2中的条件。反过来，众所周知，这一构造可以逆转。更确切地说，按照 §2.2中的约定，对于每个持久模 M ，都存在唯一的条形码 $\mathcal{B}$ ，如上所述，并且满足$M\cong V(\mathcal{B})$。换言之，条形码刻画了持久模的同构类型。更多细节请参见 [35, 28] 。我们将持久模 M 所对应的条形码记作 $\mathcal{B}_M$。

我们还需要分次条形码这一概念。所谓分次条形码，是指由一系列条形码 $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 组成的序列，这些条形码以整数为指标，并满足以下附加假设。记 $\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}$ 为所有区间的并集，并保留各区间的重数；若不同 $\mathcal{B}_i$中的条重合，则将其重数相加。我们假设 $\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}$是一个可容许条形码，即其中出现的所有重数均有限，并且还满足上述容许条件 (1)、(2)、(3)。

我们常常将单个（非分次）条形码 $\mathcal{B}$ 视为分次条形码，只需将其置于次数 0。

设 $\mathcal{B}=\{(I_j,\ m_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$ 是一个非分次条形码。我们按如下方式将一个诺维科夫环中的元素 $\lambda_{\mathcal{B}}\in\Lambda$ 与 $\mathcal{B}$ 关联起来：

$$\lambda_{\mathcal{B}}:=\sum_{j\in\mathcal{J}}m_j\lambda_{I_j}, \tag{9}$$

其中

$$\lambda_{I_j}:=\begin{cases}t^{a_j}-t^{b_j}, & \text{if } I_j=[a_j,b_j);\\ t^{a_j}, & \text{if } I_j=[a_j,\infty).\end{cases} \tag{10}$$

设 M 是一个条形码为 $\mathcal{B}_M$的持久模。应用上述构造，我们得到诺维科夫环中的一个元素

$$\lambda_M:=\lambda_{\mathcal{B}_M}\in\Lambda. \tag{11}$$

的定义可以推广到分次情形。具体而言，设 $M_\bullet=\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个分次持久模。进一步假设满足（6）中的温和性条件，则定义：

$$\lambda_{M_\bullet}:=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\lambda_{M_i}\ \in\ \Lambda\ . \tag{12}$$

分次条形码也有类似的定义。

2.4. **三角持久范畴**。 三角持久范畴是在 [11, 12] 中引入的。这里我们只粗略回顾一些基础知识，以便读者更容易理解本文。

TPC 是一个范畴 $\mathcal{C}$ ，具有以下四项性质（完整定义见 [12]）。

(i) $\mathcal{C}$ 是一个持久范畴。这意味着，对于 A, B 中的任意两个对象 $\mathcal{C}$，同态 同态$_{\mathcal{C}}(A, B)$ 构成一个持久模 $\{$ 同态 $^{s}_{\mathcal{C}}(A, B)\}_{s\in\mathbb{R}}$，并且态射的复合以显然的方式与持久结构相容。在本文中，我们假设这些持久模总是下有界且下半连续的，详见 §2.2。

(ii) $\mathcal{C}$ 带有一个“移位函子” Σ。这是由移位函子 $\Sigma^r : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$组成的结构，其中 $\Sigma^r \circ \Sigma^s = \Sigma^{r+s}$ 对所有 r， $s \in \mathbb{R}$ 和 $\Sigma^0 = \mathbb{1}$ 都成立；这些函子与持久性结构相容。此外，它还包含自然同构 $\eta_{r,\ s} : \Sigma^r \to \Sigma^s$ ，它们满足某些自然相容关系，并且满足 $\eta_{r,\ r} = id$, $\eta_{r,\ s} \in \hom^{s-r}(-,\ -)$。

为了便于记住一个例子，最简单的 TPC 是过滤链复形的（同伦）范畴。在这种情况下， $\Sigma^r C$ 由过滤链复形 C 将滤过向上移位 r 得到；自然变换 $\Sigma^r C \xrightarrow{\eta_{r,\ s}} \Sigma^s C$ 在向量空间层面上是恒等映射，此时滤过被遗忘。

(iii) 范畴 $\mathcal{C}_0$ 与 $\mathcal{C}$ 具有相同的对象，其态射是 $\mathcal{C}$的 0 级态射，即 $\hom^0_{\mathcal{C}}(-,\ -)$；它是三角化的， Σ^r 是一个三角函子（作用于 $\mathcal{C}_0$），并且 $\eta_{r,\ s}$ 与 $\mathcal{C}_0$上的加法结构相容。注意，作为三角化范畴，$\mathcal{C}_0$ 具有一个平移函子 T。这个函子不应与移位函子 Σ 混淆，后者涉及持久性层级的移位。（遗憾的是，在三角范畴的语境中，“移位函子”和“平移函子”这两个名称常被用于指同一事物，通常与分次中的移位或平移有关。然而，在我们的框架中，这两个概念截然不同。）

(iv) 为了表述刻画 TPC 的最后一个性质，我们还需要引入几个概念，这些概念在论文后文也会用到。我们称 $f, g \in \hom^s_{\mathcal{C}}(A, B)$ 是 r-等价 的，如果 $i_{s,s+r}(f - g) = 0$。这里 $i_{s,s+r} : \hom^s(-,-) \to \hom^{s+r}(-,-)$ 是持久结构映射。我们记作 $f \simeq_r g$。如果满足 $\mathbb{1}_K \simeq_r 0$，则称对象 K 是 r-无环 的，其中 $r \geq 0$ 为某个值。

对于所有 $r \geq 0$，自然变换 $\eta_{r,0} : \Sigma^r \to \Sigma^0 = \mathbb{1}$，在$X \in$ 处特化为 Obj($\mathcal{C}$) 后，属于 $\hom^{-r}(\Sigma^r X, X)$，因此我们可以对它应用 $i_{-r,0} : \hom^{-r}(\Sigma^r X, X) \to \hom^0(\Sigma^r X, X)$。结果记作 $\eta_r = i_{-r,0}(\eta_{r,0})$，因此 $\eta_r \in \hom_{\mathcal{C}_0}$。

那么，定义 TPC 的第四个性质如下：对于每个 $r \geq 0$ 和对象 X，在 $\mathcal{C}$ 中存在一个正合三角 $\mathcal{C}_0$

$$\Sigma^r X \xrightarrow{\eta_r} X \to K \to T\Sigma^r X$$

其中 K 是 r-无挠的。

定义 2.4.1。 (a) 一个三角持久性范畴 $\mathcal{C}$ 称为 驯顺的，如果对任意两个对象 A， $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 持久模 同态$_{\mathcal{C}}(A,\ B)$ 满足条件 (5)，并且称其为有限型，如果持久模 同态$_{\mathcal{C}}(A,\ B)$ 的条形码仅含有限多条。

(b) 若对任意两个对象 $X, Y \in$Obj($\mathcal{C}$)，都存在 $l \in \mathbb{N}$，使得对每个 $|i| \geq l$ 均有 $\hom_{\mathcal{C}}(X, T^i Y) = 0$，则称三角持久性范畴 $\mathcal{C}$ 为有界。这里， T是三角范畴 $\mathcal{C}_0$的平移函子。

显然，若 TPC 是驯顺的，且 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，则 $\lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)} \in \Lambda$ 是良定义的。此外，给定 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，考虑如下定义的分次持久模 $\hom(X, T^{\bullet}Y)$：

$$\hom(X, T^{\bullet}Y)_i = \hom_{\mathcal{C}}(X, T^i Y),\ i \in \mathbb{Z}\ . \tag{13}$$

如果 $\mathcal{C}$ 驯顺且有界，那么该元素

$$\lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(X,T^{\bullet}Y)} \in \Lambda \tag{14}$$

定义良好。如果 $\mathcal{C}$ 是有限型且有界的，则该元素属于 Λ_P d.

TPC 中一个有用的概念是 r-同构。这是一个映射 $f \in \text{同态}^0_{\mathcal{C}}(A,\ B)$，它嵌入一个正合三角 $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow K \longrightarrow TA$，其中 $\mathcal{C}_0$ 是 K r- 无环的。一个 r- 同构 f 有一个右 r- 逆映射，即一个映射 $g \in \text{同态}^0_{\mathcal{C}}(\Sigma^r B,\ A)$，且满足 $f \circ g = \eta_r$。类似地，也有左 r-逆映射。但左逆和右逆通常并不相同。

TPC 中可用的关键结构是权重为 $r \geq 0$ 的严格正合三角 。这是一个对 $\Delta = (\Delta,\ r)$，其中 $r \in [0, \infty)$，且 Δ 是 $\mathcal{C}_0$ 中的一个三角，

$$\Delta \ :\ A \xrightarrow{\bar{u}} B \xrightarrow{\bar{v}} C \xrightarrow{\bar{w}} \Sigma^{-r} TA,$$

它可以补全为 $\mathcal{C}_0$ 中的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \Sigma^r C & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & \searrow{\scriptstyle \Sigma^r \bar{w}} & \\ A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C' & \xrightarrow{w} & TA \\ & & & \searrow{\scriptstyle \bar{v}} & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\ & & & & C & & \end{array} \tag{15}$$

满足 $u = \bar{u}$，并且满足以下条件：三角形 $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C' \xrightarrow{w} TA$ 在 $\mathcal{C}_0$ 中正合，且 ϕ 是一个带有 r- 右逆 ψ 的 r- 同构。三角形 Δ 的权重记作 $w(\Delta) = r$。

与 $\mathcal{C}$ 相关联的范畴 $\mathcal{C}_\infty$ 与 $\mathcal{C}$ 具有相同的对象，但其态射为：

$$\hom_{\mathcal{C}_\infty}(A, B) = \varinjlim \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(A, B),$$

直接极限（或余极限）沿着 $\alpha \in \mathbb{R}$ 按照以下集合上的标准序取$\mathbb{R}$ （参见 [12, 定义2.9（ii）]）。

r-无环对象在 $\mathcal{C}$, $r \geq 0$ 中构成满子范畴 $\mathcal{AC}$ of $\mathcal{C}$ 的对象。容易看出， $\mathcal{AC}$ 本身是一个 TPC，其 0级 $\mathcal{AC}_0$ 只是 $\mathcal{C}_0$ 中与 $\mathcal{AC}$ 具有相同对象的满子范畴。 [12, 命题 2.38] 证明了， $\mathcal{C}_\infty$ 是 $\mathcal{C}_0$ 关于 $\mathcal{AC}_0$ 的 Verdier 局部化。这意味着 $\mathcal{C}_\infty$ 是三角化的。

$\mathcal{C}_\infty$ 的正合三角与 $\mathcal{C}$ 的严格正合三角之间的关系如下。首先，给定 $\mathcal{C}$ 中任意一个图表

$$\Delta : A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$$

我们将 $\Sigma^{s_1,s_2,s_3,s_4}\Delta$ 图表记作

$$\Sigma^{s_1,s_2,s_3,s_4}\Delta : \Sigma^{s_1}A \xrightarrow{u'} \Sigma^{s_2}B \xrightarrow{v'} \Sigma^{s_3}C \xrightarrow{w'} \Sigma^{s_4}D$$

其中，映射 u', v', w' 由 u, v, w 与相应的$\eta_{r,s}$复合而得。

按照这一约定，若存在图表 Δ：$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$（位于 $\mathcal{C}_\infty$中），并且该图表表示 Δ（也就是说，u是 $\bar{u}$ 在 ∞下的像，其他态射也类似），则称三角形 Δ：$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$在 $\mathcal{C}_\infty$中是正合的，使得移位后的三角形

$$\widetilde{\Delta} = \Sigma^{0,-s_1,-s_2,-s_3}\bar{\Delta} \tag{16}$$

在 $\mathcal{C}$ 和 $0 \le s_1 \le s_2 \le s_3$中是严格正合的（权重为 s_3）。 Δ、 w_∞（Δ）和 $\widetilde{\ }$的不稳定权重，是上述所有严格正合三角形 Δ 的严格权重 w（Δ）的下确界。最后， Δ和 $\bar{w}$（Δ）的权重定义为：

$$\overline{w}(\Delta) = \inf\{w_\infty(\Sigma^{s,0,0,s}\Delta) \mid s \ge 0\}\ .$$

$\widetilde{\ }$如果不存在定义中所述的 Δ，则令 $w_\infty(\Delta) = \infty$。

最值得关注的两种权重概念分别是： $\mathcal{C}$ 中严格正合三角的 w，以及 $\mathcal{C}_\infty$中正合三角的 $\overline{w}_\mathcal{C} = \overline{w}$。

2.5. **三角权重与碎片化伪度量。** 我们在此讨论三角权重的定义，以及如何利用它来定义三角范畴中对象上的一族伪度量。我们重点关注的主要例子是持久性权重 $w_\mathcal{C}$，该权重已在§2.4中回顾。

设 $\mathcal{D}$ 是一个（小）三角范畴，并用 $\mathcal{T}_\mathcal{D}$ 表示其正合三角类。 $\mathcal{D}$ 上的三角权重 w 是一个函数

$$w : \mathcal{T}_\mathcal{D} \to [0, \infty)$$

它具有两个性质：其一是八面体公理的加权形式（精确表述见 [12, 定义 2.1 (i)] ），其二是归一化公理，要求所有正合三角的权重至少等于某个 $w_0 \in [0, \infty)$，并且该 w_0 对所有形如 $0 \to X \xrightarrow{\mathbb{1}_X} X \to 0$， $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$的正合三角及其旋转都能取到。

三角权重可能要求具备的另一项性质是次可加性。这意味着，与 $0 \to X \xrightarrow{\mathbb{1}_X} X \to 0$ 类型的三角形取直和不会增加权重。有关精确定义，请参见 [12, 第 2 章第 2 节1]。

§ $\bar{w}_\mathcal{C}$ 2.4 中回顾的权重 是 $\mathcal{C}_\infty$ 上的三角权重，称为持久性权重（由 $\mathcal{C}$诱导）。它与$(\bar{w}_\mathcal{C})_0 = 0$次可加。

固定一个三角范畴 $\mathcal{D}$，以及其上的三角权重 w。令 X 是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象。X 的一个迭代锥分解 D 及其线性化 $\ell(D) = (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$由 $\mathcal{D}$ 中的一族正合三角组成：

$$\begin{cases} \Delta_1: & X_1 \to 0 \to Y_1 \to TX_1 \\ \Delta_2: & X_2 \to Y_1 \to Y_2 \to TX_2 \\ \Delta_3: & X_3 \to Y_2 \to Y_3 \to TX_3 \\ & \vdots \\ \Delta_n: & X_n \to Y_{n-1} \to Y_n \to TX_n \end{cases} \tag{17}$$

其中 $X = Y_n$（为包含 $n = 1$ 的情形，我们设 $Y_0 = 0$）。此类锥分解的权重定义如下：

$$w(D) = \sum_{i=1}^{n} w(\Delta_i) - w_0 \ . \tag{18}$$

设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$。对于 $\mathcal{D}$ 中的两个对象 X, X'，定义

$$\delta^{\mathcal{F}}(X, X') = \inf \left\{ w(D) \,\middle|\, \begin{array}{l} D \text{ is an iterated cone decomposition} \\ \text{of } X \text{ with linearization } (F_1, ..., T^{-1}X', ..., F_k) \\ \text{where } F_i \in \mathcal{F},\ k \geq 0 \end{array} \right\} \tag{19}$$

并将其对称化：

$$d^{\mathcal{F}}(X, X') = \max\{\delta^{\mathcal{F}}(X, X'), \delta^{\mathcal{F}}(X', X)\}. \tag{20}$$

加权八面体公理蕴含 δ^F 满足三角不等式，因此 $d^{\mathcal{F}}$ 是一个伪度量，称为与 w 和 $\mathcal{F}$ 相关联的碎片化伪度量。参见 [12]。

对于 § $\mathcal{C}$ 中定义的 TPC2.4，我们将关注定义在 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_\infty)$ 上的、与持久性权重 $\bar{w}_{\mathcal{C}}$ 相关联的碎裂伪度量；该权重定义在 $\mathcal{C}_\infty$ 上。

此外，还有一些通常很有用的更简单的分解，我们称之为约化分解。令 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。在 $\mathcal{C}$ 中，X 的一个权重为 r 的约化锥分解是一个二元组 $D = (D, \phi)$，其中 D 是 $\mathcal{C}_\infty$ 中的一个锥分解，如（17）所示，其中所有三角形 Δ_i 的权重为 0，并且

$$\phi : Y_n \to X$$

在 r 中的一个 $\mathcal{C}$-同构。这种分解的线性化根据定义就是 D 的 lin-$^{-}$ 线性化。我们将 D 的权重记为 $w(D) := r$。

容易看出，Δ_n 与 r-同构 ϕ 结合后，可用于在 $\mathcal{C}_\infty$ 中定义如下形式的正合三角：

$$X_n \to Y_{n-1} \to X \to TX_n$$

权重为 r。因此，如果 X 在 $\mathcal{C}$ 中具有权重为 r 的约化锥分解，那么它也在 $\mathcal{C}_\infty$ 中具有锥分解 D'，且 $\bar{w}_{\mathcal{C}}(D') = r$。

与一般分解相比，约化分解在应用中更容易处理。此外，[12] 中的推论 2.86 的证明表明，对于任意分解 D，若 X 如式（17）所示，则存在一个约化分解 D'，其 X权重不超过 $4w$（D），且其线性化为 ℓ（D'）=（$\Sigma^{r_1}X_1$、$\Sigma^{r_2}X_2$.....、$\Sigma^{r_n}X_n$），其中 $r_i \in \mathbb{R}$。

注意，对于约化分解，与式（19）中的类似度量不满足三角不等式，因此这类分解似乎无法导出伪度量。然而，正如我们将在 §8.1 中看到的，约化分解对于涉及 K-理论不变量、权重和条形码的估计很有用。

2.6. **Fukaya 三角持久性范畴。** 三角持久性范畴的概念部分源于 Floer 理论中的自然滤过。事实上，[12,第 3] 章证明，由精确闭拉格朗日子流形生成的通常导出 Fukaya 范畴具有 TPC 精化。本小节回顾 [12]中的构造，以满足 §8中的应用所需。更多细节请参阅该论文。

2.6.1. 滤过 A_∞ 范畴。 在介绍滤过框架之前，我们先简要说明关于（未滤过的） A_∞-范畴的一般约定。

为与论文中其余代数部分以及我们此前的一些工作（例如 [8, 6, 5] 以及部分见于 [12]）保持一致，我们在此对A_∞-范畴采用同调约定。更具体地说，这意味着在我们的 A_∞-范畴中， $\mathcal{A}$的 μ_d-运算的次数为 $d-2$ （而非 $2-d$），对所有 $d \geq 1$均如此。特别是，任意两个对象 X、Y之间的同态 $\hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$，赋予 μ_1后，都是链复形（而非上链复形）。此外，在相关情形下，我们假设同调单位（有时甚至是严格单位） e_X 的次数为 0， $e_X \in \hom_{\mathcal{A}}(X,X)_0$。再看 $\mathcal{A}$的同调范畴$H(\mathcal{A})$，其同态是链复形（$\hom_{\mathcal{A}}(-,-)$ μ_1）的同调，而μ_2-运算则诱导出乘积

$$H_i(\hom_{\mathcal{A}}(X,Y)) \otimes H_j(\hom_{\mathcal{A}}(Y,Z)) \longrightarrow H_{i+j}(\hom_{\mathcal{A}}(X,Z)),$$

因此，我们得到一个分次范畴（若 $\mathcal{A}$ 在同调意义下含单位元，则该范畴有单位元）。有时我们会限制到次数 0 同调范畴 $H_0(\mathcal{A})$。若 $\mathcal{A}$ 在同调意义下含单位元，则 $H_0(\mathcal{A})$ 成为一个有单位元的范畴，因为我们假设同调单位元 e_X 的次数为 0。稍后在 §2.6.2中讨论福柯范畴时，我们将说明如何调整 Floer 理论中的标准分次设定，使其符合上述约定。

现在转向过滤情形。过滤的 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$ 是一个定义在给定基域 $\mathbf{k}$ 上的 A_∞-范畴（采用上述约定），其中任意两个对象 X, Y之间的同态空间 $\hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 都带有滤过（且滤过递增），并且 所有 复合映射 μ_d, $d \geq 1$ 均保持滤过。我们在 $\hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 上赋予微分 μ_1，并将其视为过滤链复形。我们将 $\hom^s_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 中的 $s \in \mathbb{R}$ 记为其第 s 级滤过子复形，其中 $\hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 为整个空间。对于过滤的 A_∞- 范畴，我们再作三个假设：

(i) $\mathcal{A}$ 是严格含幺的，且单位元位于持久性层级 0。(ii) 对于任意两个对象 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$，空间 $\hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 是 $\mathbf{kk}$ 上的有限维空间。(iii) $\mathcal{A}$ 关于持久性移位是完备的，具体而言，我们有一个移位“函子”，它由一族 A_∞-函子 $\Sigma = \{\Sigma^r : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}, r \in \mathbb{R}\}$ 构成，其成员满足以下条件：

(1) Σ^r 是严格含幺的，且 Σ^r 的高阶分量 $(\Sigma^r)_d$, $d \geq 2$ 均为零。(2) $\Sigma^0 = \mathbb{1}$, $\Sigma^s \circ \Sigma^t = \Sigma^{s+t}$。(3) 给定预先指定的同一化 $\hom^s_{\mathcal{A}}(\Sigma^r X, Y) \cong \hom^{s+r}_{\mathcal{A}}(X, Y)$，它们与包含映射 $\hom^{\alpha}_{\mathcal{A}}(X, Y) \subset \hom^{\beta}_{\mathcal{A}}(X, Y)$（对 $\alpha \leq \beta$）相容。这些同一化被视为移位函子 Σ结构的一部分。

给定一个滤过的 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$，令 $Tw\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$ 上（滤过）扭曲复形的范畴。它本身也是一个滤过的 A_∞-范畴。范畴 $\mathcal{A}$ 以显然的方式嵌入 $Tw\mathcal{A}$，该嵌入是一个满且忠实的滤过 A_∞-函子。此外，$Tw\mathcal{A}$ 在滤过意义下是预三角化的（这尤其意味着它在滤过映射锥的构造下封闭）。因此，同调范畴

$$\mathcal{C}'\mathcal{A} := H_0(Tw\mathcal{A})$$

是一个 TPC，它包含 $\mathcal{A}$ 的同调持久性范畴 $H_0(\mathcal{A})$.

与 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$ 相关联的另一个 TPC，由 $\mathcal{A}$ 上的滤过 A_∞-模范畴 $Fmod(\mathcal{A})$ 给出。这里我们只考虑严格含幺模。在该范畴 Σ 上有一个显然的移位函子：$(\mathbb{R}, +) \to \mathrm{End}(Fmod(\mathcal{A}))$，而且 $Fmod(\mathcal{A})$ 实际上是 [12, 第 2] 章意义下的滤过 dg 范畴，并且它是预三角化的。因此，$H_0(Fmod(\mathcal{A}))$ 是一个 TPC。$Fmod(\mathcal{A})$ 的某个子范畴对我们尤其重要。由于我们假设严格含幺，Yoneda嵌入是滤过的：

$$\mathcal{Y} : \mathcal{A} \to Fmod(\mathcal{A})$$

因此，存在一个过滤拟同构。

$$\mathcal{M}(X) \to \hom_{Fmod}(\mathcal{Y}(X), \mathcal{M})$$

对于 X 中所有的对象 $\mathcal{A}$ 以及 $\mathcal{M} \in \mathrm{Obj}(Fmod(\mathcal{A}))$。令 $\mathcal{A}^{\#}$ 为 Yoneda 模及其移位所生成的三角化闭包。这是 $Fmod(\mathcal{A})$的一个满子范畴，其对象包括对 Yoneda 模的移位沿保滤态射取迭代锥所得到的所有对象（即形如 $\Sigma^r\mathcal{Y}(X)$的模）。

最后，令 $\mathcal{A}^{\nabla}$ 为 $Fmod(\mathcal{A})$ 的最小满 dg-子范畴，它包含 $\mathcal{A}^{\#}$ 以及所有与 $\mathcal{A}^{\#}$($r \in [0, \infty)$) 中的对象 r-拟同构的模（及其所有移位和平移）。如果在 $H_0Fmod(\mathcal{A})$ 中存在一个 r-同构 $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$，则称模 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ r-拟同构。

容易看出，$\mathcal{A}^{\nabla}$ 仍然是预三角化的，带有由$Fmod(\mathcal{A})$诱导的移位函子，因此同调范畴 $\mathcal{C}\mathcal{A} := H_0(\mathcal{A}^{\nabla})$是一个 TPC。
存在滤子函子：

$$\Theta : Tw(\mathcal{A}) \longrightarrow Fmod[Tw(\mathcal{A})] \longrightarrow Fmod(\mathcal{A})$$

其中，第一个箭头是 Yoneda嵌入，第二个箭头是沿自然包含 $\mathcal{A} \to Tw(\mathcal{A})$ 的拉回。复合映射 Θ 是同调满忠实嵌入，并且

它诱导出 TPC 的忠实且全的嵌入。Θ 的像落在 $\mathcal{A}^\nabla$ 内（实际上落在由 $A^\#$ 表示的范畴内），因此我们得到 TPC 的一个包含映射：

$$\bar{\Theta} : \mathcal{C}'\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}\mathcal{A}$$

一般而言，这并不是 TPC 等价（与非滤过情形相反）。特别是，范畴 $\mathcal{C}\mathcal{A}$ 包含的对象远多于 $\mathcal{C}'\mathcal{A}$。$\mathcal{C}\mathcal{A}$ 中的每个对象都与 $\mathcal{C}'\mathcal{A}$ 中的某个对象 r-同构，但这可能只对某些 $r > 0$ 成立（若要得到 TPC 等价，我们需要能够取 $r = 0$）。

2.6.2. 滤过福柯范畴。我们采用以下设定：$(X, \omega = d\lambda)$ 是一个 Liouville 流形，即一个恰当辛流形，配备了辛结构 ω 的一个指定原函数 λ，并且相对于这些结构，X 在无穷远处辛凸。此处使用的拉格朗日子流形是三元组 $L = (L, h_L, \theta_L)$，由闭的、定向的恰当拉格朗日子流形 $L \subset X$ 构成，并配备了 $\lambda|_L$ 的一个原函数 $h_L : L \longrightarrow \mathbb{R}$ 以及一个分次 θ_L。我们将这样的对 L 称为标记拉格朗日子流形，并将 L 称为其底层拉格朗日。

继续之前，我们先说明 Floer 理论和福柯范畴所采用的代数约定。首先，除非另有说明，从现在起所有福柯范畴都假定定义在基域 $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_2$ 上。

Floer 理论中的标准上同调分次约定是，μ_d-运算的次数为 $2 - d$，这与 A_∞-范畴的标准上同调约定相容。标准同调分次约定是，μ_d-运算的次数为 $d - 2 + n - dn$，其中 $n = \frac{1}{2}\dim X$ 是环境辛流形 X 的复维数。特别地，这意味着 μ_2-乘积的次数为 $-n$，即 $\mu_2 : CF_i(L_0, L_1) \otimes CF_j(L_1, L_2) \longrightarrow CF_{i+j-n}(L_0, L_2)$，而（链级）单位元的次数为 n，$e_L \in CF_n(L, L)$。莫尔斯同调理论中也采用这一约定（其中单位元是莫尔斯函数的极大值，因此次数为 n，并代表流形的基本类 L）。显然，这与 §2.6.1 中描述的约定不相容。为了将 Floer 同调的设定调整为 §2.6.1 中的设定，我们对分次作如下简单移位。定义：

$$CF'^j(L_0, L_1) := CF_{n+j}(L_0, L_1), \quad HF'^j(L_0, L_1) := HF_{n+j}(L_0, L_1), \ \forall j \in \mathbb{Z}.$$

现在，我们重新定义 Fukaya 范畴 $\mathcal{F}uk(X)$ 中的同态，使得

$$\hom_{\mathcal{F}uk(X)}(L_0, L_1)_j = CF'^j(L_0, L_1),$$

Floer 同调也类似如此 HF'。按照这些约定，Fukaya 范畴符合 §2.6.1 中描述的约定，即 μ_d 运算的次数为 $d - 2$，而（同调意义下的）单位元位于次数 0。调整分次唯一显而易见的缺点（纯属审美上的考虑）是，采用标准分次时，$CF_*(L, L)$（赋予适当的辅助结构后）是 L 的莫尔斯复形，而 $HF_*(L, L) \cong H_*(L; \mathbb{Z}_2)$（请记住，我们讨论的是恰当拉格朗日子流形）。然而，采用新的分次后，$CF'^j(L, L)$ 和 $HF'^j(L, L)$ 集中在负次数 $-n \le j \le 0$ 中，并且我们有 $HF'^j(L, L) \cong H_{n+j}(L; \mathbb{Z}_2)$。还需注意的是，采用新的分次约定后，庞加莱对偶

具有如下形式： $HF'_j(L,L') \cong HF'_{-n-j}(L',L)^*$，其中上标中的星号表示对偶。

现在我们继续讨论滤过福柯范畴的情形。固定一组带标记拉格朗日子流形 $\mathcal{X}$ in X。我们假设 $\mathcal{X}$ 在分次平移以及¯原函数的移位下封闭，其含义是：若 $L=(L,\ h_L)$ 属于 $\mathcal{X}$，那么对于每个 $r\in\mathbb{R}$ 和 $k\in\mathbb{Z}$，带标记拉格朗日子流形

$$\Sigma^r L[k] := (\bar{L}, h_L + r, \theta_L - k) \tag{21}$$

¯也属于 $\mathcal{X}$。我们将底层拉格朗日子流形的族记为 $\bar{\mathcal{X}}$：

$$\bar{\mathcal{X}} = \{\bar{L} \mid L \in \mathcal{X}\}\ .$$

¯我们将假设族 $\mathcal{X}$ 是有限的，且其元素处于一般位置¯，也就是说，任意两个不同的拉格朗日子流形 L', $L''\in\mathcal{X}$ 都横截相交，并且对于任意三个不同的拉格朗日子流形 $\bar{L}_0,\bar{L}_1,\bar{L}_2\in\bar{\mathcal{X}}$，都有 $\bar{L}_0\cap\bar{L}_1\cap\bar{L}_2=\emptyset$。

注意，我们在此隐式引入了移位函子 Σ^r和平移函子 $T^kL:=L[-k]$ 它们按照（21）作用于 $\mathcal{X}$ 中的对象。

在 [12] 的第 3 章中，在上述设定下构造了藤原型的滤过 A_∞ 范畴 $\mathcal{F}uk$（$\mathcal{X}$；$\mathcal{P}$），其对象为 $\mathcal{X}$ 的元素。这里，$\mathcal{P}$ 是一种扰动数据的选取，大致按照 [32]，中的方案进行，但经过特别谨慎的处理，从而使所得范畴确实是滤过的¯，而不只是弱滤过的。该构造十分精细，其中有限性及处于一般位置的约束 $\mathcal{X}$ 被反复使用。由此得到的范畴 $\mathcal{F}uk$（$\mathcal{X}$；$\mathcal{P}$）是严格含幺的，其单位元位于滤过 0；此外，对所有 $L\in\mathcal{X}$，同态$^{\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})}$（$L$，$L$）都集中在滤过 0 中。这是因为用于定义 A_∞ 运算的模空间采用了“簇”型构型，将莫尔斯流线与弗洛尔型多边形混合起来，因此作为链复形，（同态$^{\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})}$（$L$，$L$）$\mu_1$）与莫尔斯函数 $f_L: L\to\mathbb{R}$ 的莫尔斯复形重合，而该函数的选取属于数据 $\mathcal{P}$ 的一部分。此外，对于两个横截相交的拉格朗日子流形 L、L'，弗洛尔数据中的哈密顿项为 0（换言之，它满足齐次弗洛尔方程）。

此外还证明，对于两种不同的可允许扰动数据选择 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 所定义的任意两个此类范畴，它们在如下意义下滤过拟等价：存在滤过A_∞-函子 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})\to\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P}')$，它们在对象上是恒等映射，并诱导出同调持久范畴的（滤过）等价。

On随后我们可以应用 §2.6.1 中的讨论，从而得到两个相关的 TPC 's.
第一个是 $\mathcal{CF}uk(\mathcal{X})$，即同调范畴

$$\mathcal{CF}uk(\mathcal{X}) = H_0[\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})^\nabla]$$

其中，$\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})^\nabla$ 是 $Fmod(\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P}))$的最小三角化满子范畴（相对于权重 0 三角），它包含满足 $L\in\mathcal{X}$的 Yoneda 模 $\mathcal{Y}(L)$，并且对所有 r 都在 r-同构下封闭；具体而言，若 $j: M\to M'$ 是模的 r-同构，且 $M\in\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})^\nabla$，则 $M'\in\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})^\nabla$。更具体地说，该范畴中的每个对象都与某个权重 0 的 Yoneda 模迭代锥 r-同构，其中 r。

对于不同扰动数据选取所定义的两个此类三角持久范畴彼此等价（作为 TPC），因此我们在记号中省略对扰动数据的提及。

第二类 TPC，$\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$，定义如下：

$$\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X}) = H_0[Tw(\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P}))]$$

其中，$Tw(\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P}))$ 是由 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})$ 构造的过滤扭曲复形范畴。任意两种扰动数据的选择都会产生等价的 TPC，我们同样省略记号中的 $\mathcal{P}$ 。有以下滤子函子：

$$\Theta : Tw(\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})) \longrightarrow Fmod[Tw(\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P}))] \longrightarrow Fmod(\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P}))$$

以及一个比较函子：

$$\bar{\Theta} : \mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X}) \ .$$

当然，这里也有未滤过的范畴，因为 X 中的带标记拉格朗日子流形是一个 A_∞-范畴的对象，即 Fukaya 范畴 $\mathcal{F}uk(X)$ ，它取自 X，并按照 Seidel 的著作中的方法构造 [32]。为避免混淆，我们将此范畴记为 $\mathcal{F}uk_{un}(X)$，以表明此处忽略了滤过；对于其他使用中的结构，例如 A_∞ 模等，我们也采用这一约定。同样，我们还有范畴 $\mathcal{F}uk_{un}(\mathcal{X})$，其对象仅为 $\mathcal{X}$的元素，以及相应的导出版本 $D\mathcal{F}uk(X)$和 $D\mathcal{F}uk_{un}(\mathcal{X})$。

滤过版本与非滤过版本之间的基本关系是，它们之间存在三角范畴的等价

$$[\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X}))]_\infty \cong [\mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X})]_\infty \cong D\mathcal{F}uk_{un}(\mathcal{X}) \ .$$

鉴于 $\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$，且 $\mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$ 都是 TPC，其对象集合可以赋予碎片化伪度量，其形式为 $d^{\mathcal{F}}$，如 §2.5所述，对任意选定的对象 $\mathcal{F}$。

3. TPC 的 K-群的一般性质

本节旨在描述 TPC 的 K-群的若干基本性质。本节中，我们固定一个记为 $\mathcal{C}$ 的 TPC。其零级范畴 $\mathcal{C}_0$ 与 $\mathcal{C}$ 具有相同的对象，但其态射仅包括 $\mathcal{C}$ 中的零级态射，即 $\hom_{\mathcal{C}_0}(A,B) = \hom^0_{\mathcal{C}}(A,B)$。我们最关注的群是 $K(\mathcal{C}_0)$，即范畴 $\mathcal{C}_0$ 的格罗滕迪克群；根据 TPC 的定义，该范畴是三角化的。我们将此群称为 $\mathcal{C}$ 的 K-群，并记作 $K(\mathcal{C})$。注意，通过对每个 $r \in \mathbb{R}$ 定义 $t^r \cdot [A] = [\Sigma^r A]$ ， $K(\mathcal{C})$ 具有自然的 Λ_P-模结构。

我们从第 3.1 节关于无环对象的一些注记开始。第 3.2 小节说明，适当定义的 TPC 函子如何在 K 群层面上诱导态射。在第 3.3 节中，我们讨论 K 群上的一种环结构；当 TPC 具有张量结构时，该结构便有定义——我们称这样的 TPC 为幺半 TPC。在第 3.4节中，我们讨论 TPC 的反范畴及其 K 群。在第 3.5

我们考察 TPC 的 ∞ 层面及其相关的 K 群。我们将这些性质中的大部分归纳在第 3.6.1 节的定理 3.6中。

3.1. **TPC 的无环范畴。** 设 $\mathcal{C}$ 是一个 TPC。TPC 的一个重要特征是，存在一类对象，它们以可量化的方式“接近0”。具体而言，回顾一下，对象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 是 r-无环的，对于 $r \geq 0$，记作 $X \simeq_r 0$，如果 $\mathbb{1}_X \simeq_r 0$ （见 §2.4，更多细节见 [12]）。

如 §2.4所述，存在两个（子）范畴。

(i) $\mathcal{C}$的满子范畴，记作 $\mathcal{AC}$，其对象对任意 $r \geq 0$ 都是 r-无环的。(ii) $\mathcal{C}_0$的满子范畴，记作 $\mathcal{AC}_0$，其对象对任意 $r \geq 0$ 都是 r-无环的。

子范畴 $\mathcal{AC}$ 显然是一个持久范畴，因为 $\hom_{\mathcal{AC}} = \hom_{\mathcal{C}}$，它具有持久模结构。此外，对于 $X, Y \in \mathrm{Obj}((\mathcal{AC})_0) = \mathrm{Obj}(\mathcal{AC}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{AC}_0)$，我们有

$$\hom_{(\mathcal{AC})_0}(X,Y) = \hom^0_{\mathcal{AC}}(X,Y) = \hom_{\mathcal{AC}_0}(X,Y).$$

由此得到 $(\mathcal{AC})_0 = \mathcal{AC}_0$。此外，子范畴 $\mathcal{AC}$ 是一个 TPC，而范畴 $\mathcal{C}_\infty$ 是 $\mathcal{C}_0$ 关于 $\mathcal{AC}_0$ 的 Verdier 局部化（更多详情见 [12]）。因此，K-群 $K(\mathcal{AC})$ 的 $\mathcal{AC}$ 是良定义的。注意，与 $K(\mathcal{C})$ 类似，群 $K(\mathcal{AC})$ 也具有 Λ_P-模的结构，定义为 $t^r \cdot [A] = [\Sigma^r A]$。

这两个 K群 $K(\mathcal{C})$ 和 $K(\mathcal{AC})$ 密切相关。首先，存在一个显然的同态，

$$j : K(\mathcal{AC}) \to K(\mathcal{C}) \quad \text{defined by} \quad X \mapsto X. \tag{22}$$

这个 i s 是良定义的，因为 $\mathcal{AC}_0$ 中的正合三角也是 $\mathcal{C}$中的正合三角 $_0$.

此外（而且这是一个非平凡的结果），我们还有一些方向相反的态射，称为无环截断，其定义如下。对于任意固定的 $r \geq 0$ 以及任意 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，由 §2.4中的 (iv)，我们有一个正合三角

$$\Sigma^r X \xrightarrow{\eta_r^X} X \to Q_{r,X} \to T\Sigma^r X \tag{23}$$

在 $\mathcal{C}_0$ 中，对于某个 r-无环对象 $Q_{r,\ X} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{AC}_0)$。考虑以下映射

$$Q_r : K(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{AC}) \quad \text{defined by} \quad X \mapsto Q_r(X) := Q_{r,X}. \tag{24}$$

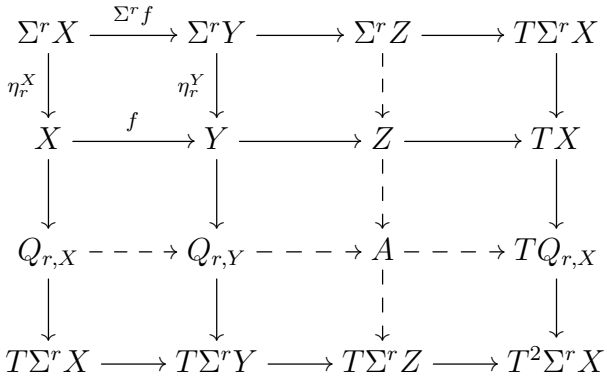
注意，由于$Q_{r,\ X}$ 是 r-无环的，且在 $\mathcal{C}_0$中仅在同构意义下确定，因此我们知道 $Q_{r,\ X}$ （或者更准确地说，类 $[Q_{r,X}]$）是 $K(\mathcal{AC})$中的一个定义良好的元素。

引理 3.1。 **1.** 映射 Q_r 在（24）中定义良好，并且是一个同态 .

证明。 对于第一个结论，我们需要证明，若将 X 替换为 $Y - Z$，在 $K(\mathcal{C})$ 中，即 $X = Y - Z$，则在 $K(\mathcal{AC})$ 中，$Q_r(X) = Q_r(Y) - Q_r(Z)$。根据相应 K-群中的定义关系，这意味着在 $\mathcal{C}_0$ 中存在正合三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX$，从而推出下文定义的三角

$$Q_{r,X} \to Q_{r,Y} \to Q_{r,Z} \to TQ_{r,X} \tag{25}$$

在 $\mathcal{AC}_0$ 中也正合，其中 $Q_{r,X}$、$Q_{r,Y}$ 和 $Q_{r,Z}$ 是正合三角（形式（23）中的 -无环对象。事实上，由 §2.4 中的 (iii)，我们有一个正合三角 $\Sigma^r X \xrightarrow{\Sigma^r f} \Sigma^r Y \to \Sigma^r Z \to T\Sigma^r X$。接着考虑以下图表，



我们知道 $\eta_r^Y \circ \Sigma^r f = f \circ \eta_r^X$，前两行和前两列都是正合三角。于是根据 3×3引理（见 [3] 中的命题 1.1.11 $A \in$），存在一个对象 $\mathcal{C}\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$（事实上，$A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{AC})$），以及一些虚线箭头，使得所有行和列都是正合的，并且图表可交换（最右下方的方块反交换）。特别地，我们有一个正合三角

$$Q_{r,X} \to Q_{r,Y} \to A \to TQ_{r,X},$$

作为图表中的第三行。此外，由于第三列 $\Sigma^r Z \to Z \to A \to T\Sigma^r Z$也是正合的，我们有 $A \cong Q_{r,Z}$。因此，我们得到正合三角（25）。

为了证明 Q_r 是一个同态，我们需要证明 $Q_r(X+Y) = Q_r(X)+Q_r(Y)$。在 K-群中，和 $X+Y$ 由一个对象 $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 表示，该对象属于一个正合三角 $X \to Z \to Y \to TX$。然后，采用第一部分中的相同论证可知，存在一个正合三角 $Q_{r,X} \to Q_{r,Z} \to Q_{r,Y} \to TQ_{r,X}$。因此，

$$\begin{aligned} Q_r(X+Y) = Q_r(Z) &= Q_{r,Z} \\ &= Q_{r,X} + Q_{r,Y} = Q_r(X) + Q_r(Y) \end{aligned}$$

在 $K(\mathcal{AC}_0)$。类似地，我们有 $Q_r(-X) = Q_{r,TX} = TQ_{r,X} = -Q_{r,X}$ 在 $K(\mathcal{AC}_0)$ 中。 □

3.2. **TPC 函子及诱导的 K-态射。** 我们在此以更抽象的方式，将此前的一些构造形式化。我们将一个 TPC 记为三元组 $(\mathcal{C}, T_{\mathcal{C}}, \Sigma_{\mathcal{C}})$（或 $(\mathcal{C}, T, \Sigma)$），以强调移位函子 Σ 以及平移函子 T 在 $\mathcal{C}$中的作用。我们回顾以下定义（参见 [12]中的定义 2.25）。

定义 3.2.1. 设 $(\mathcal{C}, T_{\mathcal{C}}, \Sigma_{\mathcal{C}})$ 和 $(\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}}, \Sigma_{\mathcal{D}})$ 是 TPC。TPC 三角形预范畴函子 $\mathcal{F}\colon (\mathcal{C}, T_{\mathcal{C}}, \Sigma_{\mathcal{C}}) \to (\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}}, \Sigma_{\mathcal{D}})$ 是满足以下条件的持久函子。

(i) 对任意 $r \in \mathbb{R}$，都有 $\Sigma^r_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \Sigma^r_{\mathcal{C}}$。此外，对于任意 $r, s \in \mathbb{R}$，都有如下交换图，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\Sigma^r_{\mathcal{C}} X) & \xrightarrow{\mathcal{F}((\eta_{r,s})_X)} & \mathcal{F}(\Sigma^s_{\mathcal{C}} X) \\ = \downarrow & & \downarrow = \\ \Sigma^r_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{(\eta_{r,s})_{\mathcal{F}(X)}} & \Sigma^s_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(X) \end{array}$$

对于任意 $X \in$Obj($\mathcal{C}$)。

(ii) 限制 $\mathcal{F}|_{\mathcal{C}_0} : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ 是一个三角函子（回顾一下，根据 TPC 的定义，0 级范畴 $\mathcal{C}_0$ 和 $\mathcal{D}_0$ 都是真正的三角范畴）。

以下是 TPC 函子的一些有用性质。

引理 3.2.2。 设 $\mathcal{F}: (\mathcal{C}, T_{\mathcal{C}}, \Sigma_{\mathcal{C}}) \to (\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}}, \Sigma_{\mathcal{D}})$ 是一个 *TPC* 函子。那么它具有以下性质。

(i) 对于任意 $X \in$ *Obj(*$\mathcal{C}$*)* 和 $r \geq 0$，有 $\mathcal{F}(\eta^X_r) = \eta^{\mathcal{F}(X)}_r$。*(ii)* 若 $X \in$ *Obj(*$\mathcal{C}$*)* 是 r-无环的，则 $\mathcal{F}(X)$ 也是 r-无环的。*(iii)* 若 $\phi: X \to Y$ 是一个 r-同构，则 $\mathcal{F}(\phi): \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ 也为 r- 同构。*(iv)* 若 $\Delta: A \xrightarrow{\bar{u}} B \xrightarrow{\bar{v}} C \xrightarrow{\bar{w}} \Sigma^{-r} TA$ 是一个权重为 $r \geq 0$ 的严格正合三角，则

$$\mathcal{F}(\Delta) : \mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(\bar{u})} \mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(\bar{v})} \mathcal{F}(C) \xrightarrow{\mathcal{F}(\bar{w})} \Sigma^{-r} T\mathcal{F}(A)$$

也是一个权重为 r 的严格正合三角。

(v) $\mathcal{F}$ 下降为群同态 $\mathcal{F}_K : K(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{D})$。对于 $K(\mathcal{AC})$ 和 $K(\mathcal{AD})$，以及 $K_\infty(\mathcal{C})$ 和 $K_\infty(\mathcal{D})$，同样的结论也成立。

证明。 证明过程相当直接，因此我们仅概述其中的主要要点。事实上， $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{C}_0$ 的限制是三角化的这一事实，以及 $\mathcal{F}$ 是一个与移位函子和自然变换 η 相交换的持久函子这一事实，很容易推出 $\mathcal{F}$将 r-无环对象映射为 r-无环对象。进而可得， $\mathcal{F}$ 将 r-同构变换为 r-同构，其余所述性质也很容易验证。□

给定任意 TPC $(\mathcal{C}, T_{\mathcal{C}}, \Sigma_{\mathcal{C}})$，回忆一下， $K(\mathcal{C})$ 和 $K(\mathcal{AC})$ 通过群同态 Q_r 定义于（24）以及 j 定义于（22）相关联。容易看出，我们还有:

引理 3.2.3. 对于任意 *TPC* $(\mathcal{C}, T_{\mathcal{C}}, \Sigma_{\mathcal{C}})$，我们有以下关系:

$$j \circ \mathcal{F}_K = \mathcal{F}_K \circ j \quad and \quad Q_r \circ \mathcal{F}_K = \mathcal{F}_K \circ Q_r$$

对于任意 $r \geq 0$。

总结迄今为止我们所证明的内容，三角持久范畴与 TPC 函子构成一个范畴，记作 $\mathcal{T}PC$。存在一个无环函子

$$\mathcal{A} : \mathcal{T}PC \longrightarrow \mathcal{T}PC \quad , \quad \mathcal{C} \longmapsto \mathcal{AC} \ .$$

态射 j 和 Q_r 可以看作是将函子 $\mathcal{A}$ 与恒等映射联系起来的适当自然变换。

回顾 §3 开头所述，对于一个 TPC $\mathcal{C}$，其 K-群 $K(\mathcal{C})$ 具有如下结构：Λ_P-模，由 $t^r \cdot [A] = [\Sigma^r A]$定义。考虑 Λ_P上的模范畴 mod Λ_P。按照这些约定，我们构造了两个格罗滕迪克群函子：

$$K : \mathcal{T}PC \longrightarrow \mathrm{mod}_{\Lambda_P} \tag{26}$$

它将 TPC $\mathcal{C}$ 对应到其 K-群 $K(\mathcal{C})$，并将 TPC 函子 $\mathcal{F}$ 对应到诱导的态射$\mathcal{F}_K$，以及

$$K\mathcal{A} : \mathcal{T}PC \longrightarrow \mathrm{mod}_{\Lambda_P} \tag{27}$$

它由 $K\mathcal{A} = K \circ \mathcal{A}$ 定义，并将 $\mathcal{C}$ 对应到模 $K(\mathcal{A}\mathcal{C})$。今后我们常将此模记为 $K\mathcal{A}(\mathcal{C})$。

3.3. **关于 $\mathcal{C}$ 的幺半结构及 $K(\mathcal{C})$上的环结构。我们从这里开始，将张量范畴（或幺半范畴，见** [25]第 VII 章第 1 节）的概念自然推广到 TPC 的情形。

定义 3.3.1。设 $\mathcal{C}$ 为一个 TPC。在 $\mathcal{C}$ 上的一个张量结构是一个结合的对称双函子 $\otimes : \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，以及一个单位元 $e_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$（相对于 $\otimes$），使得下列公理成立。

(i) 对任意 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，有 $(-) \otimes A$ 是 $\mathcal{C}$ 上的持久函子。具体而言，对任意X，$Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 及 $f \in \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, Y)$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$，

$((-) \otimes A)(X) = X \otimes A$ and $((-) \otimes A)(f) = f \otimes \mathbb{1}_A \in \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X \otimes A, Y \otimes A)$。

(ii) 对任意 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，函子 $(-) \otimes A$ 在 $\mathcal{C}_0$ 上的限制是三角化的，即它将 $\mathcal{C}_0$ 中的正合三角映射为 $\mathcal{C}_0$ 中的正合三角。此外，$(-) \otimes A$ 在 $\mathcal{C}_0$ 上是可加的。

(iii) 对任意 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，函子 $(-) \otimes A$ 与平移自等价 T 及移位函子 Σ^r 兼容，对任意 $r \in \mathbb{R}$，其意义如下：

$$TX \otimes A \cong T(X \otimes A) (\cong X \otimes TA) \text{ in } \mathcal{C}_0,$$

并且存在一族同构 $\{\theta_r : \Sigma^r X \otimes A \to \Sigma^r(X \otimes A)\}_{r \in \mathbb{R}}$，位于 $\mathcal{C}_0$ 中且满足$\theta_0 = \mathbb{1}_{X \otimes A}$，使得下图交换，

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^r X \otimes A & \xrightarrow{(\eta_{r,s})_X \otimes \mathbb{1}_A} & \Sigma^s X \otimes A \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_r} & & \downarrow{\scriptstyle \theta s} \\ \Sigma^r(X \otimes A) & \xrightarrow{(\eta_{r,s})_{X \otimes A}} & \Sigma^s(X \otimes A) \end{array}$$

对于任意 r，$s \in \mathbb{R}$。由于 $\otimes$ 的对称性，对于函子 $A \otimes (-)$ 也有类似结论。

一个幺半群 al TPC 是一个范畴 $\mathcal{C}$，与之前一样，并附带一个张量结构的选择 .

注 3.3.2. 定义 3.3.1 中的公理 (i) 可转化为以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \hom_{\mathcal{C}}^{\alpha}(X,Y) & \xrightarrow{(-)\otimes \mathbb{1}_A} & \hom_{\mathcal{C}}^{\alpha}(X\otimes A, Y\otimes A) \\ \downarrow{\scriptstyle i_{\alpha,\alpha+r}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{\alpha,\alpha+r}} \\ \hom_{\mathcal{C}}^{\alpha+r}(X,Y) & \xrightarrow{(-)\otimes \mathbb{1}_A} & \hom_{\mathcal{C}}^{\alpha+r}(X\otimes A, Y\otimes A) \end{array}$$

对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。特别地，对于任意 $f \in$ 同态$_{\mathcal{C}}^{\alpha}(X,Y)$，我们有 $i_{\alpha,\alpha+r}(f) \otimes \mathbb{1}_A = i_{\alpha,\alpha+r}(f \otimes \mathbb{1}_A)$。

注 3.3.3. 回顾一下，$\mathcal{AC}$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴，其对象仅由无环对象构成。一个简单的练习是验证，对于任意 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，函子$(-) \otimes A$ 限制后构成 $\mathcal{AC}$上的一个自函子。

例 3.3.4。幺半 TPC 的一个基本例子是有限生成过滤链复形的持久性同伦范畴$\mathcal{C}^{\mathrm{fg}} = H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$。张量结构由（过滤）链复形的张量积诱导，单位元由链复形 $E = \mathbf{k}\langle x\rangle$ 给出，该链复形集中于次数 0，具有 $\partial x = 0$，且其过滤函数ℓ 定义为 $\ell(x) = 0$。

同样地，持久性同伦范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{t}} = H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}})$ 驯性过滤链复形的范畴（见第6页）也是一个幺半 TPC。

假设 即 $\mathcal{C}$为幺半。对于 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，其类为 $[X], [Y] \in K(\mathcal{C})$ defin e

$$[X] \cdot [Y] = [X \otimes Y] \in K(\mathcal{C}) \ . \tag{28}$$

引理 3.3.5。若 $\mathcal{C}$ 具有张量结构，则 (28) 中的运算定义良好，并在 $K(\mathcal{C})$ 上诱导出交换含幺环结构，在 $K(\mathcal{AC})$上诱导出非含幺环结构。同一运算使 $K(\mathcal{AC})$ 成为一个 $K(\mathcal{C})$-模，并且映射 (22) 是 $K(\mathcal{C})$-线性的。

证明可见于论文的扩展版 [10]。

注 3.3.6。回忆一下，$K(\mathcal{C})$ 也是一个 Λ_P-模。这个模结构与前面定义的环结构（在 $\mathcal{C}$ 为幺半时定义）相容，二者共同使 $K(\mathcal{C})$ 成为 Λ_P上的代数。$K\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 也有类似的结论。

3.4. 反 TPC 及其 K-群。回顾一下，每个三角范畴 $\mathcal{C}$ 都有其反范畴，记作 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，它同样是三角化的。$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$中的正合三角与 $\mathcal{C}$ 中的正合三角之间的关系如下（我们遵循 [21] 中注 10.1.10 (ii) 给出的构造）。记 $\mathrm{op} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 为典范（逆变）函子，它满足：(i) 在 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$（=$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$）上为恒等映射；(ii) 将 $\mathcal{C}$ 中态射的定义域与目标域互换，即 $\mathrm{op}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y, X)$ 当且仅当 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$。假设 T 是 $\mathcal{C}$ 的平移自等价，则定义

$$T^{\mathrm{op}} := \mathrm{op} \circ T^{-1} \circ \mathrm{op}^{-1} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \tag{29}$$

作为 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的平移自等价。 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的正合三角定义为

$$Z \xrightarrow{\mathrm{op}(g)} Y \xrightarrow{\mathrm{op}(f)} X \xrightarrow{\mathrm{op}(-T^{-1}(h))} T^{\mathrm{op}} Z \tag{30}$$

每当 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ 是 $\mathcal{C}$中的一个正合三角时。容易看出， $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个三角范畴。

定义 3.4.1. 设 $(\mathcal{C}, T, \Sigma)$ 是一个 TPC。定义其对偶为 $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, T^{\mathrm{op}}, \Sigma^{\mathrm{op}})$ 其中 T_{op} 按（29）中的定义，且

$$(\Sigma^{\mathrm{op}})^r := \mathrm{op} \circ \Sigma^{-r} \circ \mathrm{op}^{-1} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \tag{31}$$

对每个 $r \in \mathbb{R}$。此外，同态$_{\mathcal{C}}$上的持久模结构以显然的方式在同态$_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$上诱导出相应的结构。这使得 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 成为一个持久范畴，而典范函子op 是一个（逆变）持久函子。此外，正如我们将在下文的引理 3.4.3 和 3.4.4 中看到的，$(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, T^{\mathrm{op}}, \Sigma^{\mathrm{op}})$ 按上述方式定义后是一个 TPC，且函子 op 是一个三角形预范畴函子。

这里有几点需要说明。

注 3.4.2. (i) 集合 $\Sigma^{\mathrm{op}} = \{(\Sigma^{\mathrm{op}})^r\}_{r\in\mathbb{R}}$ 构成 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$上的移位函子，自然变换 $\eta^{\mathrm{op}}_{r,s} : (\Sigma^{\mathrm{op}})^r \to (\Sigma^{\mathrm{op}})^s$ 定义如下:

$$\eta^{\mathrm{op}}_{r,s} := \mathrm{op}(\eta_{-s,-r}) \tag{32}$$

对于任意 $r, s \in \mathbb{R}$，其中 $\eta_{-s,-r} : \Sigma^{-s} \to \Sigma^{-r}$ 是对应于 Σ的自然变换。

(ii) 回顾一下，对于 $\mathcal{C}$中的每个对象 X，态射 $\eta^X_r = \iota_{-r,0}(\eta_{r,0}(X)) \in \hom^0_{\mathcal{C}}(\Sigma^r X, X)$ 在 TPC 的定义中起着重要作用。类似地，在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$中，对应的态射为

$$\begin{aligned}(\eta^{\mathrm{op}})^X_r = \iota_{-r,0}(\eta^{\mathrm{op}}_{r,0}(X)) &= i_{-r,0}(\mathrm{op}(\eta_{0,-r}(X))) \\ &= \mathrm{op}(\eta^X_r) \in \hom^0_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}((\Sigma^{\mathrm{op}})^r X, X)\end{aligned}$$

其中在第三个等式中，我们用到了 op 是一个持久函子并且与持久结构态射可交换这一条件。

(iii) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的零级范畴满足 $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})_0 = (\mathcal{C}_0)^{\mathrm{op}}$，因为典范映射 op 是一个持久函子。

引理 3.4。 **3.** 设$(\mathcal{C}, T, \Sigma)$ 是一个 *TPC*，则其对偶$(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, T^{\mathrm{op}}, \Sigma^{\mathrm{op}})$ 也是一个 *TPC* .

证明详见本文扩展版 [10] 。

为简洁起见，记 $\mathcal{C}_0^{\mathrm{op}}$ 为0级范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ （根据注3.4.2中的 (iii)，该记号不会引起歧义）。

引理3.4.4。 典范函子$\mathrm{op} : (\mathcal{C}, T, \Sigma) \to (\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, T^{\mathrm{op}}, \Sigma^{\mathrm{op}})$ 是一个三角形预范畴函子。此外，它诱导出一个群同构 $\mathrm{op}_K : K(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$。

证明很直接，可以在 [10] 中找到。

3.5. TPC 的 ∞-层与正合列。回顾第 9 页 §2.4，对于每个 TPC $\mathcal{C}$，我们都可以关联到其 ∞-层范畴 $\mathcal{C}_\infty$，其中 $\hom_{\mathcal{C}_\infty}(A,B) = \varinjlim \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(A,B)$。如 §2.4 中所述，该范畴可识别为 $\mathcal{C}_0/\mathcal{AC}_0$ 的 Verdier 局部化。因此，$\mathcal{C}_\infty$ 是三角化的（见 [12, 命题 2.38]），其 K-群 $K(\mathcal{C}_\infty)$ 定义良好。$\mathcal{C}_\infty$ 的正合三角包含 $\mathcal{C}_0$ 的正合三角，并且不难看出，$K(\mathcal{C})$ 的许多性质对 $K(\mathcal{C}_\infty)$ 仍然成立：

(i) $K(\mathcal{C}_\infty)$ 是一个 Λ_P-模。如果 $\mathcal{C}$ 是幺半的，那么 $K(\mathcal{C}_\infty)$ 是一个 Λ_P-代数。
(ii) 存在一个函子 $K_\infty : \mathcal{TPC} \longrightarrow \mathrm{mod}^{\Lambda_P}$，其定义为 $\mathcal{C} \longmapsto K_\infty(\mathcal{C}) := K(\mathcal{C}_\infty)$。

此处（与 §3.2 中一样）mod^{Λ_P} 表示关于 Λ_P 的模范畴。

现在我们将通过一个正合列来联系群 $K(\mathcal{C})$ 和 $K(\mathcal{C}_\infty)$。鉴于 $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}_0/\mathcal{AC}_0$，这种联系当然是可以预期的。注意，存在一个满同态 $\pi : K(\mathcal{C}) \longrightarrow K_\infty(\mathcal{C})$，它是由对象间的恒等映射诱导的，且其为 Λ_P-模之间的态射。此外，包含映射 $\mathrm{Obj}(\mathcal{AC}) \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 导出了一个良定义的映射 $j : K\mathcal{A}(\mathcal{C}) \xrightarrow{j} K(\mathcal{C})$。令 $\mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) := \ker(j)$，并记 $\psi : \mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) \longrightarrow K\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 为该包含映射。因此我们有以下 Λ_P-模正合列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) \xrightarrow{\psi} K\mathcal{A}(\mathcal{C}) \xrightarrow{j} K(\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi} K_\infty(\mathcal{C}) \longrightarrow 0. \tag{33}$$

由一般 Verdier 局部化的性质，容易推出以下性质 y.

命题 3.5.1。 序列 (33)是正合的。

注 3.5.2。 (a) 如前所述，这可由 Verdier 局部化的一般性质推出，但为了更明确地描述 $\mathrm{Tor}K(\mathcal{C})$ 及其正合性论证，我们在此给出相关说明。考虑如下的 Λ_P-模图表。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \widehat{\mathcal{R}}_{\mathcal{C}} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_{\mathcal{AC}_0} & \xrightarrow{\bar{j}'} & \mathcal{R}_{\mathcal{C}_0} & \xrightarrow{\bar{\pi}'} & \mathcal{R}_\infty & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\
0 & \longrightarrow & G\langle\mathcal{AC}\rangle & \xrightarrow{\bar{j}} & G\langle\mathcal{C}\rangle & \xrightarrow{\bar{\pi}} & G_\infty & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \\
 & & K\mathcal{A}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{j} & K(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\pi} & K_\infty(\mathcal{C}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \tag{34}$$

该图表按如下方式构造。我们用 $G\langle - \rangle$ 表示由相应范畴中的对象生成的自由阿贝尔群，用 $\mathcal{R}_-$ 表示与相应 TPC 的 0 级三角结构相关联的三角关系子群，正如 K- 群的定义中所述。因此，根据这里所讨论的 K 群的定义，前两列是正合的。映射 j 和 j' 是包含映射，而 j 由它们诱导。群 G_∞ 和 $\mathcal{R}_\infty$ 定义为使上面两行正合的显然的商，而 π、 π' 是 $\widehat{\ }$ 投影。映射 u 由图表中左上方的方块诱导。群 $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}\widehat{\ }$ 是 u 的核。此处讨论的所有群和态射也都是 Λ_P-模，因此 $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ 也是 Λ_P-模。显然， $\pi \circ j = 0$，因为根据定义，无环对象对某个 $r \in \mathbb{R}$ 是 r-同构于 0 的，因此它在 $\mathcal{C}_\infty$ 中同构于 0。这意味着映射 v 是良定义的，并由图表中左下方的方块诱导。

通过图追逐可知，只需证明 v 是 $\widehat{\ }$ 满射，即可得出命题中的正合性；此外，这也意味着 j 的核可被识别为 $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$,

$$\mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) = \ker(j) = \widehat{\mathcal{R}}_{\mathcal{C}} \ .$$

鉴于 $K_\infty(\mathcal{C}) = G\langle \mathcal{C} \rangle / \mathcal{R}_{\mathcal{C}_\infty}$， v 的满射性归结为以下恒等映射

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}_\infty} = G\langle \mathcal{AC} \rangle + \mathcal{R}_{\mathcal{C}_0} \tag{35}$$

这可由 $\mathcal{C}_\infty$ 中正合三角的描述推出。

(b) 将群 Tor 和 $\mathcal{C}$ 同的表示出来很有用。我们有显然的包含映射：

$$\mathcal{R}_{\mathcal{AC}_0} \hookrightarrow G\langle \mathcal{AC} \rangle \cap \ \mathcal{R}_{\mathcal{C}_0} \ .$$

进一步的图追逐表明：

$$\mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) = [G\langle \mathcal{AC} \rangle \cap \ \mathcal{R}_{\mathcal{C}_0}]/\mathcal{R}_{\mathcal{AC}_0}. \tag{36}$$

(c) 很容易看出，Tor$K(\mathcal{C})$ 可以视为一个函子：

$$\mathrm{Tor}K : \mathcal{T}PC \longrightarrow \mathrm{mod}_{\Lambda_P}$$

且 ψ： $\mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) \longrightarrow K\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 来自（33）是 Tor 之间一个自然变换的一部分K和 $\mathcal{A}K$。

3.6. 一般性质总结。我们在此将上文讨论的性质汇总为一个陈述，并对 §3.2 中的讨论作进一步展开。回顾 §3.2，mod_{Λ_P} 是关于 Λ_P 的模范畴。记 op : $\mathrm{mod}_{\Lambda_P} \to \mathrm{mod}_{\Lambda_P}^{\mathrm{op}}$ 为显然的 op 函子，其特殊性质是 op(M) $= M$，其中 M 与 M 是同一个阿贝尔群，但其 Λ_P- 模结构为 $t^r \cdot a = t^{-r} \cdot a$，其中 $a \in M$，而 a 是 M 中对应的元素。回顾 §3.2，我们将 $\mathcal{T}PC$ 记为 TPC 及 TPC 函子的范畴。

定理 3.6.1. 有四个函子： K、$K\mathcal{A}$、K_∞、$\mathrm{Tor}K$： $\mathcal{T}PC \to \mathrm{mod}_{\Lambda_P}$，它们在对象上的定义为

$$K(\mathcal{C}) := K(\mathcal{C}_0)\ , K\mathcal{A}(\mathcal{C}) := K(\mathcal{AC}_0)\ , K_\infty(\mathcal{C}) := K(\mathcal{C}_\infty)\ , \mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) := [G\langle \mathcal{AC} \rangle \cap \ \mathcal{R}_{\mathcal{C}_0}]/\mathcal{R}_{\mathcal{AC}_0}$$

（参见（36）中的Tor$K$），并且在态射上也相应成立。存在自然变换联系 K、 $K\mathcal{A}$、 K_∞和Tor$K$，它们由 §j、 Q_r *3.1* 中的映射，以及 §3.1中的 π 和 ψ （见 §3.5），这四个函子构成了与（33）中相同的正合列：

$$0 \to \mathrm{Tor}K \xrightarrow{\psi} K\mathcal{A} \xrightarrow{j} K \xrightarrow{\pi} K_\infty \to 0. \tag{37}$$

四个函子 Tor$K$，$K\mathcal{A}$，K，K_∞ 与定义域和目标中的op 函子可交换。此外，限制到由 $\mathcal{T}PC$ 中的幺半 *TPC* 和函子构成的子范畴后，它们的取值落在 Λ_P 上的代数范畴中。

4. 过滤链复形

本节将对 K-群在 $\mathcal{C} = H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})$（即以**k**为底的过滤链复形的同伦范畴）中进行显式计算，并明确 §3 中的若干性质在此情形下的具体表现。

4.1. **主要计算结果。** 关于 [35] 与该范畴相关的代数结构的一般背景，请参阅此处。下面回顾一些记号、定义和结果。

我们用 $\mathcal{F}\mathbf{Ch}$ 表示过滤链复形范畴。如 [11, 第 6.2], $\mathcal{F}\mathbf{Ch}$ 节所述，它具有滤过 dg 范畴的结构，并且是预三角化的，因此其零次同调范畴记为 $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})$，是一个 TPC（见 [11, 命题 6.1.12]）。

给定一个过滤链复形 (C_*, ∂, ℓ)，存在一个分解，且在滤过链同构意义下唯一（参见 Barannikov 的工作 [2]；另见 [35] 中的命题 7.4），

$$(C_*, \partial, \ell) \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_{(k)}[-k] \quad \text{where } C_{(k)} = \bigoplus_{i=1}^{r_k} E_1(a_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{s_k} E_2(b_i, c_i). \tag{38}$$

这里， $E_1(a)$ 和 $E_2(b,\ c)$ 表示以下两个初等滤过链复形，它们作为分解的构件：

- $E_1(a) = ((\cdots \to 0 \to \mathbf{k}x \to 0 \to \cdots), \ell(x) = a)$, $\deg(x) = 0$;
- $E_2(b,c) = ((\cdots \to 0 \to \mathbf{k}y \xrightarrow{\partial} \mathbf{k}x \to 0 \to \cdots), \ell(x) = b, \ell(y) = c)$, $\deg(x) = 0$, $\deg(y) = 1$.

接下来我们将重点关注 $\mathcal{F}\mathbf{Ch}$ 的两个全子范畴（另见 §2.2）。

(fg)（有限生成链复形）。满子范畴 $\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}} \subset \mathcal{F}\mathbf{Ch}$，其对象为全空间 $\oplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k$ 在 **k** 上有限维的过滤链复形 $(C_*, \partial$,{v13)。

(t)（温和链复形）。满子范畴 $\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}} \subset \mathcal{F}\mathbf{Ch}$ 的对象为过滤链复形 (C_*, ∂, ℓ)，且对每个过滤层级 $r \in \mathbb{R}$，截断链复形 $(C_*^{\le r}, \partial)$ 在 **k** 上是有限维的（仍然是把所有次数合在一起考察）；并且对于充分小的 r，有 $C_*^{\le r} = 0$。

正如我们将在下文看到的，$K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))$与 $K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}}))$的计算结果存在显著差异。

TPC H_0（$\mathcal{F}\mathbf{Ch}$）按照定义 3.3.1 的意义是幺半的。双算子 $\otimes$ 由两个链复形的经典张量积定义，即对于 $C = (C_*, \partial_C, \ell_C)$ 和 $D = (D_*, \partial_D, \ell_D)$，有

$$C \otimes D = ((C \otimes D)_*, \partial_{C\otimes D}, \ell_{C\otimes D})$$

其中 $(C\otimes D)_k = \bigoplus_{p+q=k} C_p \otimes D_q$，且 $(\partial_{C\otimes D})_k = \sum_{p+q=k} ((\partial_C)_p \otimes \mathbb{1}_D + (-1)^p (\mathbb{1}_C \otimes (\partial_D)_q))$。此外，$\ell_{C\otimes D} = \ell_C + \ell_D$。那么，显然这个 $\otimes$ 是结合的和对称的。单位元 e 由过滤链复形给出，

$$E_1(0) = (\cdots \to 0 \to \mathbf{k}x \to 0 \to \cdots, \ \partial = 0, \ \deg(x) = 0 \ \ \ell(x) = 0).$$

.....这一事实 e 是单位元可由下文的例4.1.1 得出。定义3.3.1 中的大多数其他公理都很容易验证。例如，同构族 $\{\theta_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ 在公理 (iii) 中实际上全都是恒等映射。事实上，根据定义，$\Sigma^r(C_*, \partial, \ell) = (C_*, \partial_C, \ell_C + r)$，因此

$$(\Sigma^r C) \otimes D = \Sigma^r(C \otimes D) = ((C \otimes D)_*, \partial_{C\otimes D}, \ell_{C\otimes D} + r).$$

唯一非平凡的部分是验证$(-) \otimes C_*$ 是$H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch})_0$上的三角函子。这由 [30]中的引理 15.58.2 得出。

例4.1.1（ [29] 中的例 2.8，或 [36]中的命题 9.2）。供后文使用，本例计算了分解（38）中出现的初等过滤复形的张量积。共有三种情况：

- $E_1(a) \otimes E_1(b) = E_1(a + b)$。- $E_1(a) \otimes E_2(b, c) = E_2(a + b, a + c)$。- $E_2(a, b) \otimes E_2(c, d) = E_2(a + c, \min\{a + d, b + c\}) \oplus E_2(\max\{a + d, b + c\}, b + d)[-1]$。

We 强调最后一种情形下，第二项存在次数平移 .

容易验证，上述张量结构限制后，在 $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$ 和 $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}})$ 上分别给出张量结构。我们将 $\mathcal{C}^{\mathrm{t}} = H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}})$ 和 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}} = H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$ 记作。

这两个范畴的 K群的各种计算汇总在下一个定理中。回顾 §2.1. 中的诺维科夫环 Λ 和 Λ_P

定理 4.1.2. 过滤链复形的张量积在$K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$ 和 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$上诱导出环结构。此外：

(1) 存在一个典范的环同构

$$\lambda : K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) \longrightarrow \Lambda, \tag{39}$$

由以下性质唯一确定：$\lambda([E_1(a)]) = t^a$ 对于每个 $a \in \mathbb{R}$ 都成立，其中 $E_1(a)$ 如上所述，而 $[-] \in K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$ 是相关过滤链复形的 K-类。

(2) 将由包含映射 $\mathcal{C}_0^{\mathrm{fg}} \subset \mathcal{C}_0^{\mathrm{t}}$ 诱导的映射 $i^{\mathrm{fg}}: K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \longrightarrow K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$ 记为 $\longrightarrow K$。则复合映射 $\lambda \circ i^{\mathrm{fg}}: K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \longrightarrow \Lambda$ 的值落在 Λ_P 中，并且是环同构 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \cong \Lambda_P$。*(3)* 将无环有限生成过滤链复形的同伦范畴记为 $\mathcal{AC}^{\mathrm{fg}}$，并将由包含映射 $\mathcal{AC}_0^{\mathrm{fg}} \subset \mathcal{C}_0^{\mathrm{fg}}$ 诱导的映射 j_K: $K(\mathcal{AC}^{\mathrm{fg}}) \longrightarrow K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 记为 j_K。则复合映射 $\lambda \circ j_K$ 的值落在理想 $\Lambda_P^{(0)} = \{P(t) \in \Lambda_P \mid P(1) = 0\} \subset \Lambda_P$ 中，并给出同构 $K(\mathcal{AC}^{\mathrm{fg}}) \cong \Lambda_P^{(0)}$；该同构与 $K(\mathcal{AC}^{\mathrm{fg}})$ 是一个 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$-模以及 $\Lambda_P^{(0)}$ 是一个 Λ_P-模相容。

注 4.1.3. (1) 柏原的一个较早结果 [20] 建立了一个与定理 4.1.2 第 (1) 点和第 (2) 点所述类似的同构，不过是在流形上的可构造层导出范畴框架下得到的。将诺维科夫环与阶梯函数环相对应（如第 §5 节所述）后，柏原的结果与此处结果之间的类比便更加清晰。

另一个相关结果见 [14],，其中 K-群被计算出来，其对象是多参数持久模范畴。请注意，该论文的框架与我们的略有不同：持久模范畴是 正合的，而滤过链复形的同伦范畴 $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$、$H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}})$ 则是 TPC。

(2) 态射 λ: $K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) \to \Lambda$ 与为持久模及其条形码定义的映射 $\lambda_{(-)}$ 相符，见 §2.3 。二者的关系是，对于每个过滤链复形 $\lambda(C) = \lambda_{H(C)}$，都有 C，其中 $H(C)$ 是 C的持久同调。

该定理的证明将在接下来的两个小节中展开。具体而言，§4.2 讨论 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$，而 §4.3讨论 $\mathcal{C}^{\mathrm{t}}$。这两个小节的结果结合起来，涵盖了定理 4.1.2中提出的所有断言。在 §4.4 中，我们讨论与这些范畴的无环对象有关的其他一些关系。它们有助于理解某些 K理论方面的内容，见注4.4.4 (a)。

4.2. 与 K相关的 $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$群的计算。 在本小节中，我们将 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}} := H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$ 记为域 $\mathbf{k}$ 上有限生成滤过链复形的同伦范畴。稍微滥用记号，我们有时将滤过链复形 A 的 K-类记作 $[A]$，偶尔也简记为 A。

引理 4.2.1。 在 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 中，对任意 $a \leq b \in \mathbb{R}$，都有 $E_2(a,b) = E_1(a) - E_1(b)$。

证明。由 ϕ： $E_1(b) \to E_1(a)$ 定义的（保滤）映射 $\phi(x_b) = x_a$ 的映射锥为 $E_2(a, b)$，其中 x_b 和 x_a 分别是 $E_1(b)$ 和 $E_1(a)$ 中具有指定滤过的生成元。因此，根据 K-群的定义，我们有 $E_1(a) = E_1(b) + E_2(a, b)$，属于 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$。□

回想一下，Λ_P 表示以 $\mathbb{Z}$为系数的诺维科夫多项式环，即由 nt^a 形式的单项式组成的有限和，其中 $n \in \mathbb{Z}$、$a \in \mathbb{R}$，且 t 是形式变量。更

准确地说：

$$\Lambda_P := \left\{ \sum_{k=0}^{N} n_k t^{a_k} \;\middle|\; N \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n_k \in \mathbb{Z},\ a_k \in \mathbb{R} \right\}. \tag{40}$$

我们赋予 Λ_P 明显的环结构，其单位元为 $1 = 1 \cdot t^0$。正如 §4.1末尾所解释的，由于 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 是幺半的，引理3.3.5 表明， K-群 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 具有良定义的环结构，其中乘积定义为

$$E_1(a) \cdot E_1(b) = E_1(a+b), \tag{41}$$

由（28）和例4.1.1可知。注意，根据引理4.2.1 ，我们只需考虑 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 中由 E_1-型的初等滤过链复形表示的类。此外， $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 的单位元是 $E_1(0)$。

命题 4.2.2。 存在一个环同构 $\eta:\ \Lambda_P \xrightarrow{\cong} K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ ，它将每个 $a \in \mathbb{R}$ 中的 $t^a \in \Lambda_P$ 发送到 K-类 $[E_1(a)] \in K(\mathcal{C})$ 。

证明。 根据（38），中的任意对象都同构于以下形式的链复形

$$C = \bigoplus_{k=k_0}^{k_1} C_{(k)}[-k] \quad \text{where } C_{(k)} = \bigoplus_{i=1}^{r_k} E_1(a_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{s_k} E_2(b_i, c_i). \tag{42}$$

由于 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 中的对象都是有限生成链复形，因此 k_0、 k_1、 r_k 和s_k 都是有限的。因此，这类复形的类 $[C] \in K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$具有以下形式（回想一下，链复形的次数平移 $[-1]$ 对应于在K-群中乘以 -1 ）

$$[C] = \sum_{k=k_0}^{k_1} (-1)^{-k} \left(\sum_{i=1}^{r_k} [E_1(a_i)] + \sum_{i=1}^{s_k} [E_2(b_i, c_i)] \right).$$

根据引理 4.2.1，并通过合并各项，上述表达式还可以进一步简化为：

$$[C] = \sum_{i=1}^{k} n_i [E_1(x_i)] \ \text{ for some } x_i \in \mathbb{R} \text{ and } n_i \in \mathbb{Z}, \tag{43}$$

k 有限，并且每个 x_i 在求和中只出现一次。我们还可以假设 x_i按滤过递增的顺序排列。

总之， $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 中的每个元素都可以写成如下形式（43）。我们声称， $[C]$ 如（43）所示的表示是唯一的。这等价于证明：对于过滤复形 C ，若有 $[C] = 0 \in K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$，那么与 C 相关联的表达式（43）右侧不含任何项。论证基于如下定义的过滤欧拉示性数：

$$\chi_\alpha(C) = \chi(C^{\leq \alpha}) \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \ . \tag{44}$$

由于欧拉示性数在复形的短正合列上的标准性质，这些欧拉示性数 χ_α 可下降为态射 $\chi_\alpha : K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \to \mathbb{Z}$ 。此外，显然有

$$\chi_\alpha\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i[E_1(x_i)]\Big) = 0 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \text{ iff } \ n_i = 0 \ \ \forall \ i,$$

这就证明了我们的断言。

到目前为止，我们所证明的结论先验地仅对形如 $[C]$ 且满足 $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 的 K 类成立。然而，每个元素 $X \in K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 都是这种形式，即对于某个有限生成滤过链复形 C，有 $X = [C]$ 。这是因为 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 在直和（以及分次移位）下封闭。因此，前面的结论实际上对 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 的所有元素都成立。在证明的其余部分，我们继续用 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 中的对象来表示 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 的每个元素。

考虑映射

$$\eta : \Lambda_P \to K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \ \ \text{defined by} \ \ t^a \mapsto E_1(a) \tag{45}$$

并将其线性延拓（在 $\mathbb{Z}$上）到 Λ_P。我们断言 η 是满射。事实上，对于任意写成（$g \in K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$右侧形式的 43 的 $p = \sum_{i=1}^{k} n_i t^{x_i}$诺维科夫多项式，我们有 $\eta(p) = g$。接下来，我们断言 η 是单射。这直接源于以下事实：元素在 43中的表示（ $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 是唯一的。

最后， η 是一个环同态。事实上， $\eta(1) = \eta(t^0) = E_1(0) = e$，即单位元，并且

$$\eta\left(\sum_k n_k t^{a_k}\right) \cdot \eta\left(\sum_k m_k t^{b_k}\right) = \left(\sum_k n_k E_1(a_k)\right) \cdot \left(\sum_k m_k E_1(b_k)\right)$$

$$= \sum_k \sum_{i+j=k} n_i m_j E_1(a_i + b_j) = \eta\left(\sum_k \sum_{i+j=k} n_i m_j t^{a_i+b_j}\right) = \eta\left(\left(\sum_k n_k t^{a_k}\right) \cdot \left(\sum_k m_k t^{b_k}\right)\right),$$

其中第二个等式来自于 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 中定义的乘积结构（41）。 □

我们记

$$\lambda := \eta^{-1} : K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \to \Lambda_P \tag{46}$$

为同构 η 的逆映射，或回构理论。我们在上一节已经对象范畴 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$及其关联的 K^a-群 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ $=K(\mathcal{AC}_0^{\mathrm{fg}})$，该群在 §3.1 中引入。请注意，与 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 不同， $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 的生成元全都具有 $E_2(a, b)$ 的形式，而引理 4.2.1 中的关系在$K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 中不再成立。不过，我们仍有以下类似的有用结果。

引理 4.2.3。 对于任意 $a \le b \le c \in \mathbb{R}$，我们有 $E_2(a, b) + E_2(b, c) = E_2(a, c)$ 在 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 中成立。

证明. 假设 $E_2(a, c)$ 的生成元为 y_0 和 y_1 ，满足 $\partial(y_1) = y_0$ ，且滤过为$\ell(y_0) = a$、 $\ell(y_1) = c$。类似地，假设 $E_2(b, c)$ 的生成元为 x_0 和 x_1 ，满足$\partial(x_1) = x_0$ ，且滤过为 $\ell(x_0) = b$、 $\ell(x_1) = c$。接下来考虑一个保滤过映射ϕ： $E_2(b, c) \to E_2(a, c)$，定义如下

$$\phi(x_0) = y_0 \ \ \text{and} \ \ \phi(x_1) = y_1.$$

我们有 $\mathrm{Cone}(\phi) = E_2(a,b)$。换言之，我们有一个正合三角

$$E_2(b,c) \xrightarrow{\phi} E_2(a,c) \to E_2(a,b) \to E_2(b,c)[-1]$$

因此，$E_2(a,c) = E_2(a,b) + E_2(b,c)$ 属于 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$。 □

与（40）类似，我们引入如下（非含幺）环Λ'_{P}，其元素为“双指数”诺维科夫多项式（形式变量 s）。其加法定义如下：

$$\Lambda'_P := \left\{ \sum_k n_k s^{a_k,b_k} \,\middle|\, n_k \in \mathbb{Z},\ a_k < b_k < \infty \right\} \Big/ \mathcal{R}\,, \tag{47}$$

其中，假设上述求和均为有限和。关系子群 $\mathcal{R}$ 由元素 $\{s^{a,b} + s^{b,c} - s^{a,c}\}$ 生成，其中任意 $a < b < c \in \mathbb{R}$均成立。 Λ'_P上的乘积定义如下，

$$s^{a,b} \cdot s^{c,d} := s^{a+c,a+d} - s^{b+c,b+d} = s^{a+c,b+c} - s^{a+d,b+d} \tag{48}$$

并通过线性延拓到 $\mathbb{Z}$上。注意，该定义是良定的，第二个等式来自关系 $\mathcal{R}$。容易验证，（48）中定义的乘积是结合的且分配的。

上的张量结构 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 下降为 $\mathcal{AC}^{\mathrm{fg}}$上的良定（非含幺）张量结构，因此，引理3.3.5表明，K-群 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 具有良定的（非含幺）环结构，其中乘积定义为

$$\begin{aligned} E_2(a,b) \cdot E_2(c,d) &= E_2(a+c, \min\{a+d, b+c\}) - E_2(\max\{a+d, b+c\}, b+d) \\ &= E_2(a+c, a+d) - E_2(b+c, b+d). \end{aligned}$$

这里，第一个等式来自例4.1.1，第二个等式来自引理4.2.3。事实上，若 $b+c < a+d$，则

$$\begin{aligned} E_2(a+c,b+c) - E_2(a+d,b+d) &= (E_2(a+c,b+c) + E_2(b+c,a+d)) \\ &\quad - (E_2(b+c,a+d) + E_2(a+d,b+d)) \\ &= E_2(a+c,a+d) - E_2(b+c,b+d). \end{aligned}$$

类似地，也可以写成

$$E_2(a,b) \cdot E_2(c,d) = E_2(a+c,b+c) - E_2(a+d,b+d). \tag{49}$$

(49)中的表达式解释了上面列出的 $\mathcal{R}$ 中的关系。

命题 4.2.4。 存在一个乘法同构 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{fg}) \cong \Lambda'_P$，它将$K$-类 $E_2(a,b) \in K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{fg})$ 映到 $s^{a,b} \in \Lambda'_P$，对每个 $a < b$均成立。

为了证明命题 4.2.4，我们需要建立 Λ_P 与 Λ'_P之间的联系。考虑 Λ_{P}的如下理想，

$$\Lambda_P^{(0)} := \{p(t) \in \Lambda_P \,|\, p(1) = 0\}\,. \tag{50}$$

条件 $p(1) = 0$ 等价于诺维科夫多项式 p 的所有系数之和等于 0。

引理 4.2.5。 考虑映射

$$\sigma : \Lambda'_P \to \Lambda_P^{(0)} \quad \textit{defined by} \quad s^{a,b} \mapsto t^a - t^b \tag{51}$$

并将其通过对 $\mathbb{Z}$ 的线性性扩展至Λ'_P 。那么 σ 是良定义的非幺环同构。

引理的证明可在论文的扩展版中找到 [10]。现在我们可以证明命题 4.2.4。

命题的证明 *4.2.4*。 考虑 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 的以下理想:

$$K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})^{(0)} := \left\{ A \in K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \,|\, \chi(A) = 0 \right\} \tag{52}$$

其中 $\chi : K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \to \mathbb{Z}$ 是欧拉示性数。注意， χ 对于 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 中的所有对象都有良好定义，因为我们假设它们都是有限生成的。根据命题 4.2.2中的相同论证，环同构 $\eta : \Lambda_P \to K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 限制后得到一个环同构$\eta|_{\Lambda_P^{(0)}} : \Lambda_P^{(0)} \to K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})^{(0)}$。接下来考虑下面的图表，

$$\begin{array}{ccc} \Lambda'_P & \xrightarrow[\cong]{\sigma} & \Lambda_P^{(0)} \\ {\scriptstyle \eta'}\downarrow & & \cong\downarrow{\scriptstyle \eta|_{\Lambda_P^{(0)}}} \\ K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) & \xrightarrow{j} & K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})^{(0)} \end{array} \tag{53}$$

其中上方的水平映射 σ 由引理 4.2.5可知是环同构。这里，

$$\eta' : \Lambda'_P \to K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \quad \text{is defined by} \quad \sum_k n_k s^{a_k,b_k} \mapsto \bigoplus_k n_k E_2(a_k, b_k). \tag{54}$$

引理 4.2.3 以及 (47) 中 $\mathcal{R}$ 的 Λ'_{P} 所满足的关系表明， η' 是良定义的。此外，容易验证 η' 是满射。同时， j 是 (22) 中定义的环同态。我们断言图表 (53) 交换。事实上，对于任意 $s^{a,\ b}$，有

$$\begin{array}{ccc} s^{a,b} & \xrightarrow{\sigma} & t^a - t^b \\ {\scriptstyle \eta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ E_2(a,b) & \xrightarrow{j} & E_1(a) - E_1(b) \end{array} \tag{55}$$

这验证了交换性。由于 $j \circ \eta' = \eta|_{\Lambda_P^{(0)}} \circ \sigma$ 是同构，我们推得 η' 是单射。

□

4.3. **与 K-群相关的计算：** $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}})$. 现在我们关注驯化滤过链复形上的三角持久性范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{t}} := H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}})$ 其系数取自$\mathbf{k}$ (见第 25 页）及其 K-理论。

$K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$ 和 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$ 的计算与 $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$ 的计算部分重叠，但有些地方有所不同。现在，我们不再使用 Λ_P 和 Λ'_P，而需要使用完整的

诺维科夫环

$$\Lambda := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} n_k t^{a_k} \,\middle|\, n_k \in \mathbb{Z},\ a_k \to \infty \right\} \tag{56}$$

以及与

$$\Lambda' := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} n_k s^{a_k, b_k} \,\middle|\, n_k \in \mathbb{Z},\ a_k < b_k < \infty,\ a_k \to \infty \right\} \Big/ \mathcal{R} \tag{57}$$

其中关系子群 $\mathcal{R}$ 定义同（47）中所述。

下面给出命题 4.2.2 在此情形下的对应结果。

命题 4.3.1。 存在一个环同构 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) \cong \Lambda$，它将 K-类 $E_1(a) \in K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$ 映到 $t^a \in \Lambda$，对每个 $a \in \mathbb{R}$ 均成立。

证明所依据的论证与命题 4.2.2中的几乎完全相同。在比较 Λ 中的两个可能涉及无限多个单项式的元素时，需要格外谨慎。根据温和链复形的定义，我们可以通过在某个过滤层级处进行截断，将问题化归为多项式情形。

我们还有如下结果，类似于命题 4.2.4。证明从略，可见 [10]。

命题 4.3.2。 存在一个乘法同构 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) \cong \Lambda'$，它将每个 $a < b$ 的 K-类 $E_2(a, b) \in K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$ 映为 $s^{a,b} \in \Lambda'$。此外，还存在一个乘法同构 $\Lambda' \cong \Lambda$。

我们仍用 λ 表示前面映射 η 和 η' 的逆映射，如 (46) 所示。

注 4.3.3。 映射

$$j : K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) \to K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$$

是一个同构。这可由 [10]中的图表 (63) 得出。还可以用更直接的方法看出这一点：首先注意到单位元 $e = E_1(0)$ 属于 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$，且 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$。事实上，考虑元素

$$e' = \sum_{k=0}^{\infty} E_2(k, k+1) \in K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}).$$

如下计算表明，该元素是 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$ 中的一个单位元。取任意 $E_2(a, b)$，并记作：

$$\begin{aligned} E_2(a,b) \cdot e' &= E_2(a,b) \cdot (E_2(0,1) \oplus E_2(1,2) \oplus \cdots) \\ &= (E_2(a,b) - E_2(a+1,b+1)) + (E_2(a+1,b+1) - E_2(a+2,b+2)) + \cdots \\ &= E_2(a,b) \end{aligned}$$

其中第二个等式来自（49）中的乘积公式，最后一个等式来自连续消去，此时只剩下第一项。由 $e' = e' \cdot e = e$ 我们得出

$E_1(0) \in$ 像$(K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) \xrightarrow{j} K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}))$。现在利用映射 j 在 Λ 上是线性的这一事实，可以得出 j 是一个同构。

为便于后续使用，我们总结命题 4.2.4 和命题4.3.2 的两个直接推论（另见命题3.5.1）。

推论 *4.3.4.* 我们有环同构 $j: K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \to K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})^{(0)}$（其中 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})^{(0)}$的定义见（52））以及 $j: K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) \to K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}})$。特别地，这些映射是单射，因此 $TorK(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) = 0$，$TorK(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) = 0$。此外，$K_\infty(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) = \mathbb{Z}$, $K_\infty(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) = 0$。

注 4.3.5。推论 4.3.4 说明，在 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 的情形下，正合列（33）变成如下形式的短正合列

$$0 \longrightarrow K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \xrightarrow{j} K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \xrightarrow{\pi} K_\infty(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \longrightarrow 0. \tag{58}$$

通过同构 λ 将前两项分别与 $\Lambda_P^{(0)}$ 和 Λ_P 对应起来，并利用欧拉示性数将第三项与 $\mathbb{Z}$ 对应起来，我们可以将上述序列识别为下面的序列：

$$0 \longrightarrow \Lambda_P^{(0)} \longrightarrow \Lambda_P \longrightarrow \mathbb{Z}, \tag{59}$$

其中第一个映射是包含映射，第二个映射由 $\Lambda_P \ni P(t) \longmapsto P(1) \in \mathbb{Z}$给出。序列（58）显然是分裂的。一个首选的分裂似乎来自于以下分别作用于 π 和 j 的右逆和左逆：

$$\begin{aligned} &K_\infty(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \longrightarrow K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}), \quad [C] \longmapsto \chi(C)[E_1(0)], \\ &K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \longrightarrow K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}), \quad [C] \longmapsto [C] - \chi(C)[E_1(0)]. \end{aligned} \tag{60}$$

就序列（59）而言，（60）中的第一个映射就是包含映射 $\mathbb{Z} \longrightarrow \Lambda_P$，而第二个映射是 $P(t) \longmapsto P(t) - P(1)$。

4.4. **更多关系。** 在本小节中，我们研究定义于（Q_r 24）中的无环截断映射。

注意，Q_r 只是阿贝尔群同态，因为

$$Q_r(E_1(a) \cdot E_1(b)) = Q_r(E_1(a+b)) = E_2(a+b, a+b+r)$$

而

$$\begin{aligned} Q_r(E_1(a)) \cdot Q_r(E_1(b)) &= E_2(a, a+r) \cdot E_2(b, b+r) \\ &= E_2(a+b, a+b+r) - E_2(a+b+r, a+b+2r). \end{aligned}$$

以下结果的证明见 [10]。

命题 4.4.1. 对于任意 $r \geq 0$，映射 $Q_r: K(\mathcal{C}^t) \to K\mathcal{A}(\mathcal{C}^t)$ 是阿贝尔群的一个同构。

证明。 考虑以下图表

$$\begin{array}{ccccc} K(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) & \xrightarrow{Q_r} & K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{t}}) & & \\ \lambda\downarrow\cong & & \lambda\downarrow\cong & & \\ \Lambda & \xrightarrow{\tilde{Q}_r} & \Lambda' & \xrightarrow[\cong]{\sigma} & \Lambda \end{array} \tag{61}$$

其中两个竖直同构 λ 分别是同构 η 和 η' 的逆映射，它们分别来自命题4.2.2 和命题4.3.2，右下角的同构 σ 来自˜命题4.2.4，而映射 $Q_r : \Lambda \to \Lambda'$ 由 $t^a \mapsto s^{a,a+r}$ 定义，并通过对 $\mathbb{Z}$上的线性˜将其延拓至 Λ 。注意， Q_r 使该方块交换。此外，复合

$$(\sigma \circ \tilde{Q}_r)(t^a) = \sigma(s^{a,a+r}) = t^a - t^{a+r}$$

˜ ˜是单射，因此 Q_r 是单射。接下来我们将证明 Q_r 也是满射。

˜关于 Q_r 的满射性， [10], 中给出了详细证明，这里我们只概述主要思路。首先注意到， Λ 是一个 Λ'-模，其结构由 $s^{a,b} \cdot t^c := t^{a+c} - t^{b+c}$定义。很容易验证，关于该结构， Q_r 是 Λ'-线性的。现在注意到，$\tilde{Q}_r(1 + t^r + t^{2r} + \cdots) = s^{0,r} + s^{r,2r} + \cdots = u$，其中 Λ'中的单位元。这表明 $\tilde{Q}_r$是满射。˜由此可知， Q_r 是一个同构，这也意味着 Q_r 也是一个同构。□

现在我们考察 Q_r 在 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$的情形下的映射。我们有如下交换图表，它与图表 (61) 类似（与之前一样，我们仍用 λ 表示相应映射 η的逆映射）。

$$\begin{array}{ccccc} K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) & \xrightarrow{Q_r} & K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) & & \\ \lambda\downarrow\cong & & \lambda\downarrow\cong & & \\ \Lambda_P & \xrightarrow{\tilde{Q}_r} & \Lambda'_P & \xrightarrow[\cong]{\sigma} & \Lambda_P^{(0)} \end{array} \tag{62}$$

˜ ˜同样，由于 $\sigma \circ Q_r$ 是单射， Q_r 和 Q_r 都是单射。然而，现在 Q_r 不一定是满射，这同样是由于 $K\mathcal{A}$（$\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$）中缺少单位元（ Λ'_P中也缺少单位元）。

命题 4.4.2. 对于任意 $r > 0$, 我们有

$$\mathrm{Im}(\sigma \circ \tilde{Q}_r) = \left\{ \sum_k n_k t^{a_k} \in \Lambda_P^{(0)} \,\middle|\, \textstyle\sum_{j \in J_c} n_j = 0 \ \textit{for any}\ c \in \mathbb{R}/r\mathbb{Z} \right\}$$

其中 $J_c = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, a_k \equiv c (\text{模 } r)\}$。

注 4.4.3。 环 $\Lambda_P^{(0)}$ 可以视为满足命题 4.4.2 中条件的元素集合，其中 $r = \infty$, 而 $a_k \equiv c$(模 r) 的意思就是 $a_k = c$。

命题证明 *4.4.2*。 记 $\Lambda^{(0)}_{,P}{}^{r}$ 为由 $\Lambda_P^{(0)}$ 得到的环，方法是将变量 t中出现的指数模 r约化。（也就是说，我们取元素 $\sum_k n_k t^{a_k} \in \Lambda_P^{(0)}$ ，并将所有指数 a_k模 r 约化。）所得的 $\Lambda^{(0)}_{,P}{}^{r}$ 继承了来自 $\Lambda_P^{(0)}$ 的结构，即

一个非幺环（回忆一下， $\Lambda_P^{(0)}$ 本身就是非幺的）。我们有一个投影 $\pi : \Lambda_P^{(0)} \longrightarrow \Lambda^{(0)}{}_{,P}{}^{r}$，其定义为

$$\sum_k n_k t^{a_k} \longmapsto \sum_k n_k t^{[a_k]} \quad \text{where } [a_k] \text{ is the projection of } a_k \text{ on } \mathbb{R}/r\mathbb{Z}.$$

~ ~我们需要证明 Im($\sigma \circ Q_r$) = ker(π)。如果 $p \in$ Im($\sigma \circ Q_r$)，那么 p 的每一项 t^a 都会被 $\sigma \circ \tilde{Q}_r$ 映射到 $t^a - t^{a+r}$。应用映射 π，得到 $t^a - t^{a+r} \mapsto t^{[a]} - t^{[a]} = 0$。我们~得到 π (p) $= 0$。这表明 Im($\sigma \circ Q_r$) $\subset$ ker(π)。

取定 $p = \sum_{n_k} n_k t^{a_k} \in$ ker(π)，并考虑子多项式 $p_c := \sum_{n_k} n_k t^{a_k}$，其中对每个 $c \in \mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ 都有 $[a_k] = c$。我们将证明，任意子多项式 p_c 都属于映射~$\sigma \circ Q_r$ 的像——这足以证明 p 属于该像。写作

$$p_c = n_1 t^{c+m_1 r} + \cdots + n_L t^{c+m_L r} \quad \text{where } m_1 \leq \cdots \leq m_L \in \mathbb{Z}, \tag{63}$$

且 $\sum_{k=1}^{L} n_k = 0$。此时，论证与引理 4.2.5 的证明类似，对 L 进行归纳。第一个非平凡情形是 $L = 2$，也就是 $p_c = nt^{c+m_1 r} - nt^{c+m_2 r}$。接着考虑 $x = n(t^{c+m_1 r} + t^{c+(m_1+1)r} + \cdots + t^{c+(m_2-1)r})$ $\in \Lambda_{\mathrm{P}}$，于是有

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \tilde{Q}_r)(x) = n(&t^{c+m_1 r} - t^{c+(m_1+1)r} + t^{c+(m_1+1)r} - t^{c+(m_1+2)r} \\ &+ \cdots + t^{c+(m_2-1)r} - t^{c+m_2 r}) = p_c.\end{aligned}$$

现在，假设任意一个 p_c 属于 (63) 且含有 L 个非零项的，都在像中。我们将含有 个非零项的一个（（$L+1$））重写如下：

$$\begin{aligned}p_c &= n_1 t^{c+m_1 r} + \cdots + n_L t^{c+m_L r} + \left(-\sum_{k=1}^{L} n_k\right) t^{c+m_{L+1} r} \\ &= \left(n_1 t^{c+m_1 r} + \cdots n_{L-1} t^{c+m_{L-1} r} - \left(\sum_{k=1}^{L-1} n_k\right) t^{c+m_L r}\right) \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{L} n_k\right)\left(t^{c+m_L r} - t^{c+m_{L+1} r}\right).\end{aligned}$$

根据归纳假设，上述两项都在像中。因此， p_c 在像中。□

注 4.4.4。 (a) 设 $\mathcal{C}$ 是一个 TPC，并固定 $r \in [0, \infty)$。回顾第 §3.5 节中的记号。特别地，记 $G\langle\mathcal{C}\rangle$ 为由 $\mathcal{C}$ 的对象生成的自由阿贝尔群。一个自然的问题是，是否存在某些值得关注的 K 型群，可以通过将 $G\langle\mathcal{C}\rangle$ 除以由以下形式的关系生成的子群 $\mathcal{R}_r$ 得到，其中每个严格正合三角 $B = A - C$

$$A \to B \to C \to \Sigma^{-s} TA$$

权重 $s \leq r$。一般来说，这并不会带来什么有用的结果。例如，很容易看出，如果任意权重的无环对象都属于由 $K(\mathcal{C})$ 生成的 s-无环对象子群，那么 $G\langle\mathcal{C}\rangle/\mathcal{R}_r = \mathcal{C}_\infty$。这正是 $\mathcal{C}^{\mathrm{t}}$中的情况，由命题 4.4.1可知。

(b) 将 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 映射到 $K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 的另一种自然方式，正如注4.3.5所述。具体如下：

$$K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \longrightarrow K\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \quad , \quad [C] \longmapsto [C] - \chi(C)E_1(0).$$

这个定义与由 $P(t) \longmapsto P(t) - P(1)$ 定义的映射 $\Lambda_P \longrightarrow \Lambda_P^{(0)}$ 相对应（通过由 λ 定义的同构）。

5. 条形码、阶梯函数与持久模的 K-理论

自然可以将无分次持久模 $\{M^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ 与其维数给出的实值函数 $\alpha \longmapsto \dim_{\mathbf{k}}(M^\alpha)$ 联系起来。进一步考虑分次模（如 §5.1 所述），便可将每个持久模 M 或分次条形码 $\mathcal{B}$ 与一个函数 $\bar{\sigma}_{\mathcal{B}}$ 联系起来；该函数属于一个环 $LC_B[x, x^{-1}]$，其中 x 是用于记录分次的形式变量，而 LC_B 是带有卷积型乘积的有界阶梯函数环 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$。在 §5.2 中，$x = -1$、$\bar{\chi} = \bar{\sigma}|_{-1}$ 对这一表示的意义被解释为一种映射：它将持久模关联到其在适当定义的 K-群中的 K-类。这是因为 LC_B 作为环同构于通用诺维科夫多项式环 Λ_P，并且与 §4 中关于滤过链复形同伦范畴的 K-群的描述相契合。最后，在 §5.3 中，我们运用 §5.1 和 §5.2 所发展的理论，阐述持久同调中莫尔斯不等式的一般形式。

在继续之前，我们要指出，本节 §5.1 和 §5.2 下文介绍的一些内容与 Schapira [31] 在流形上的可构造层范畴框架下完成的较早工作类似。

5.1. 环 LC_B 和 LC。

用函数环来表示条形码是很自然的，下面我们将对其进行描述。

对于子集 $S \subset \mathbb{R}$，记 $\mathbb{1}_S \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为 S上的示性函数。 :

$$\mathbb{1}_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in S \\ 0 & \text{if} \quad x \in \mathbb{R}\backslash S \end{cases} .$$

记 $\mathcal{I}$ 为左闭右开的区间 $I \subset \mathbb{R}$ 的集合，即形如 $I = [a, b)$ 且满足 $a \in \mathbb{R}, a < b \leq \infty$ 的区间。考虑由区间 $I \in \mathcal{I}$上的示性函数 σ_I 生成的阿贝尔群 LC_B，即：

$$LC_B = \left\{ \sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, \sigma = \sum_{\text{finite}} n_I \mathbb{1}_I,\ I \in \mathcal{I},\ n_I \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{64}$$

注意，函数 $\sigma_I, I \in \mathcal{I}$ 并非线性无关。例如，我们有 $\mathbb{1}_{[a,\infty)} - \mathbb{1}_{[b,\infty)} = \mathbb{1}_{[a,b)}$。若赋予 $\mathbb{R}$ 下限拓扑（即由 $\mathcal{I}$ 生成的拓扑），那么 LC_B 的元素恰好是局部常值整数值函数（相对于此拓扑而言），这些函数有界，并且还在 $-\infty$ 处消失（即在 $\mathbb{R}$ 中足够小的值处消失），因此采用记号 LC_B。

类似地，我们还有：

$$LC'_B = \left\{ \sum_{\text{finite}} n_I \mathbb{1}_I \,\middle|\, I \in \mathcal{I} \text{ is an interval of finite length, } n_I \in \mathbb{Z} \right\} \subset LC_B. \tag{65}$$

注意，与 LC_B 相比， LC'_B 中的所有函数都必须具有有界支撑，特别是它们在 $+\infty$ 处也取零。来自 LC_B 的关系 $\mathbb{1}_{[a,\infty)} - \mathbb{1}_{[b,\infty)} = \mathbb{1}_{[a,b)}$ 在 LC'_B 中不再成立，因为 $\mathbb{1}_{[a,\infty)}$ 和 $\mathbb{1}_{[b,\infty)}$ 在 LC'_B 中不存在。不过，对于任意 $a < b < c < +\infty$，我们仍有关系 $\mathbb{1}_{[a,b)} + \mathbb{1}_{[b,c)} = \mathbb{1}_{[a,c)}$。上述内容还有另一种变体，我们记作 LC。函数 $\sigma \in LC$ 是指那些可以写成如下形式的函数 $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$：

$$\sigma = \sum_{I \in \mathcal{I}_0} n_I \mathbb{1}_I, \tag{66}$$

其中求和仅对满足以下性质的区间集合进行： $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ 要么 $\mathcal{I}_0$ 是有限的，要么 $\mathcal{I}_0 = \{[a_j, b_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 其中 $a_j \to \infty$ 满足 $j \to \infty$。显然，我们有$LC'_B \subset LC_B \subset LC$。在 §5.2 下面，我们将在 LC、 LC_B 上赋予环结构，使得 LC'_B将成为 LC_B的理想。我们先在此说明，这些环结构并非“标准”环结构：两个来自 LC （或 LC_B）的函数相乘所得的函数，并不是对这两个函数逐点相乘，而是通过一种截然不同的运算得到的。

我们在此采用 §2.3 中的条形码约定。设 $\mathcal{B} = \{(I_j, m_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$ 是一个非分次条形码。存在一个与 $\sigma_{\mathcal{B}} \in LC$ 相关联的自然函数 $\mathcal{B}$，其定义公式如下：</style}

$$\sigma_{\mathcal{B}} = \sum_{j\in\mathcal{J}} n_j \mathbb{1}_{I_j}. \tag{67}$$

这个定义之所以自然，一个原因是，如果 M 是一个（非分次）持久模，且条形码为 $\mathcal{B}_M$，那么

$$\sigma_{\mathcal{B}_M}(\alpha) = \dim_{\mathbf{k}}(M^\alpha) \ .$$

以下结论对每个非分次条形码 $\mathcal{B}$ 都可直接验证：

(i) $\sigma_{\mathcal{B}} \geq 0$。**(ii)** $\sigma_{\mathcal{B}} \in LC_B$ 当且仅当 $\mathcal{B}$ 具有有限多个条。**(iii)** 假设 $\sigma_{\mathcal{B}} \in LC_B$ （即 $\mathcal{B}$ 具有有限多个条）。那么， $\sigma_{\mathcal{B}} \in LC'_B$ 当且仅当$\mathcal{B}$ 中的所有条都具有有限长度。**(iv)** 如果 $\mathcal{B}$ 仅包含无限长度条，那么 $\sigma_{\mathcal{B}}$： $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个非递减函数。**(v)** 对于每个非负且非递减的函数 $\sigma \in LC$ ，都存在一个条形码 $\mathcal{B}$，其所有条均具有无限长度，使得 $\sigma_{\mathcal{B}} = \sigma$。

现在，我们将 $\sigma_{\mathcal{B}}$ 的定义扩展到分次条形码。为此，我们通过添加形式多项式变量 x, x^{-1} （用于考虑次数），将环 LC 和 LC_B 扩展为环 $LC[x, x^{-1}]$ 和 $LC_B[x, x^{-1}]$。

设 $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个分次条形码，且 $\mathcal{B}_i=\{\ (I_j^{(i)},\ m_j^{(i)})\ \}_{j\in\mathcal{J}^{(i)}}$。我们定义

$$\bar{\sigma}_{\mathcal{B}}:=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sigma_{\mathcal{B}_i}x^i=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathcal{J}^{(i)}}m_j^{(i)}\mathbb{1}_{I_j^{(i)}}x^i. \tag{68}$$

我们还需要以下表达式：

$$\bar{\chi}_{\mathcal{B}}=\bar{\sigma}_{\mathcal{B}}|_{x=-1}=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\sigma_{\mathcal{B}_i} \tag{69}$$

注 5.1.1. 设 $M_\bullet=\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个分次持久模，其条形码满足第 §5节开头的条件。回忆一下，我们用 $\mathcal{B}_{M_\bullet}$ 表示 $M_\bullet$的分次条形码。因此有：

$$\bar{\sigma}_{\mathcal{B}_{M_\bullet}}(\alpha)=\sum_i\dim_{\mathbf{k}}(M_i^\alpha)x^i\left(=\sum_i\sigma_{\mathcal{B}_{M_i}}(\alpha)x^i\right) \tag{70}$$

这表明 $\bar{\sigma}_{\mathcal{B}_{M_\bullet}}$ 只是跟踪所有 M_i^α在所有 i取值变化时，模的维数之和 α。类似地，$\bar{\chi}_{\mathcal{B}_{M_\bullet}}(\alpha)=\chi_\alpha(M_\bullet)$ 其中 $\chi_\alpha(M_\bullet)$ 是分次向量空间 $M_\bullet^\alpha$ 的欧拉示性数，我们已在（ 44 ）中见过它。

5.2. 定义在 LC、LC_B 和 K-群上的环结构。 现在我们将为 LC 和 LC_B 赋予环结构。显然，LC 和 LC_B 在函数的标准（逐点）乘法下封闭（因为 $\mathbb{1}_I\cdot\mathbb{1}_{I'}=\mathbb{1}_{I\cap I'}$；不过请注意 $1_{\mathbb{R}}\notin LC$）。然而，与我们的目的相关的环结构将完全不同。为此，我们需要运用经典分析中的分布与卷积概念，下面将简要回顾这些内容。

给定定义在 $\mathbb{R}$ 上的局部可积函数 f，我们将它与正则分布 T_f 等同起来。T_f 是定义在 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上的线性泛函，其定义为 $T_f(\phi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\phi(x)dx$。分布上有两种重要的运算。

（i）分布的导数 D，定义为 $D(T_f)(\phi):=-T_f(\phi')$。（ii）对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的任意两个局部可积函数 f 和 g，定义它们的卷积 $T_f*T_g=T_{f*g}$，其中 $(f*g)(x):=\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)dy$。

还要回顾一下，我们有：

$$D(T_f*T_g)=D(T_f)*T_g=T_f*D(T_g). \tag{71}$$

我们在 LC 上定义一个乘积，记作 $\circ$，如下：

$$\sigma_1\circ\sigma_2:=D(\sigma_1*\sigma_2). \tag{72}$$

注意，根据（71），我们有 $\sigma_1\circ\sigma_2=D(\sigma_1)*\sigma_2=\sigma_1*D(\sigma_2)$。（72）右侧起初只是一个分布，但如下文所示，它实际上是一个正则分布，并且对应于 LC中的一个函数。我们将此函数视为运算 $\sigma_1\circ\sigma_2$的结果。此外，我们还将证明，若 $\sigma_1,\ \sigma_2\in LC_B$ 则 $\sigma_1\circ\sigma_2\in LC_B$。

这些环 LC_B、LC 实际上与我们在论文前面部分见过的诺维科夫环同构。在陈述这一结果之前，让我们先回顾一下 §2.1 和 §4中的一些相关符号约定：

Λ 是万有 Novikov 环，Λ_P 和 $\Lambda_P^{(0)}$ 分别是诺维科夫多项式以及由在 $t=1$ 处消失的这些多项式所生成的理想。

命题 5.2.1。运算 $\circ$ 定义于 (72) 将 LC 和 LC_B 变为交换含幺环，其中单位元由 $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$ 给出。除此之外，子群 $LC'_B \subset LC_B$ 是一个理想$\tilde{}$，相对于此环结构。此外，存在一个环同构 $\theta:\ \Lambda \xrightarrow{=} LC$，它由以下性质唯一确定：$\theta(t^a) = \mathbb{1}_{[a,\infty)}$。将 θ 限制于 $\Lambda_P \subset \Lambda$ 给出一个环同构 $\Lambda_P \xrightarrow{\cong} LC_B$，并且 θ 将理想 $\Lambda_P^{(0)}$ 映射到 LC'_B。

该命题的证明相当初等，基于直接计算以及涉及卷积的恒等式。详细证明见 [10]。

注 5.2.2。用 [31, 节 4], 中引入的“卷积积”表示，该乘积
$\circ$ 在 LC 中定义的 (72) 是可构造函数空间中的卷积积。作为一个具体例子，对于 $\mathbb{R}$ 中的有限区间 $[a,b)$ 和 $[c,d)$，计算可得 $\mathbb{1}_{[a,b)} \circ \mathbb{1}_{[c,d)} = \mathbb{1}_{[a+c,\min\{b+c,a+d\})} - \mathbb{1}_{[\max\{b+c,a+d\},b+d)}$. 有趣的是，这与初等滤过链复形张量积的例 4.1.1 具有某些共同特征。从另一个角度看，若将 $\mathbb{1}_{[a,b)}$ 与 $\mathbb{R}$ 上的局部常值层 $\mathbf{k}_{[a,b)}$ 等同，那么乘积 $\mathbb{1}_{[a,b)} \circ \mathbb{1}_{[c,d)}$ 的计算结果也与 $\mathbf{k}_{[a,b)}$ 和 $\mathbf{k}_{[c,d)}$ 的“层卷积”一致，记作 $*$（见 [37, 例 3.6]）。对层卷积的研究

$*$ 由 Tamarkin 在 [33, 第 3.1 节2] 发起，并进一步应用于持久模理论等领域（见 [22, 第 2 节 1]）。上文的命题 5.2.1 和 [31, 定理 3.4] 通过欧拉示性数，将诺维科夫环 Λ、函数空间LC以及 K与 上可构造层导出范畴的 -群 $\mathbb{R}$对应起来。

鉴于 命题5.2.1 对于所有分次条形码，我们都有如下关系：$\mathcal{B}$:

$$\bar{\chi}_{\mathcal{B}} = \theta(\lambda_{\mathcal{B}}) \tag{73}$$

其中，θ 是命题5.2.1中的环同构，$\bar{\chi}_{\mathcal{B}}$ 出现在（69）中，而 $\lambda_{(-)}$ 是从条形码到 Λ 的映射，定义见§2.3，另见注4.1.3。这个恒等映射有一种 K论解释，我们将在证明命题5.2.1之前对其进行概述。理解它的最佳方式是看下面的图表。

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{PM} & \longrightarrow & Tw(\mathcal{PM}) & \longrightarrow & H_0(Tw(\mathcal{PM})) & \overset{\bar{\sigma}}{\dashrightarrow} & LC_B[x,x^{-1}] \\
\uparrow{\scriptstyle H} & & & & \uparrow{\scriptstyle E} & & \downarrow{\scriptstyle (-)|_{x=-1}} \\
\mathcal{FC}\mathbf{h}^{\mathrm{fg}} & & \longrightarrow & & H_0\mathcal{FC}\mathbf{h}^{\mathrm{fg}} & \overset{\lambda}{\dashrightarrow} \Lambda_P \xrightarrow{\theta} & LC_B
\end{array} \tag{74}$$

这里 $\mathcal{PM}$ 是由条形码仅含有限条的持久模构成的范畴。该范畴可以视为一个滤过 dg 范畴（微分为平凡微分），因此可以利用扭曲复形将其完备化为一个预三角化滤过 dg-范畴$Tw(\mathcal{PM})$ 如 [12, §61]中所述。因此，其相应的同伦范畴 $H_0Tw(\mathcal{PM})$ 是一个 TPC。左上方的两个水平箭头是显然的函子。滤过的有限

生成链复形通过持久同调函子映射到 $\mathcal{PM}$ ，记为H。函子 $E\colon H_0\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}} \to H_0(Tw(\mathcal{PM}))$ 是一个 TPC 等价，由以下复合定义

$$H_0\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}} \xrightarrow{j} H_0(Tw(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})) \xrightarrow{H'} H_0(Tw(\mathcal{PM}))$$

其中 H' 由 H 和 j 诱导。后者是显然的包含映射。容易看出，它们都是等价；对于 j 这是因为 $H_0\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}$ 已经是预三角化的。虚线箭头 $\bar{\sigma}$， λ 仅定义在相应范畴的对象上（$\bar{\sigma}$ 由（68）得到的映射显然可扩展到扭曲模）。根据命题 4.2.2， λ 是将链复形 C 映到其类 $[C] \in K$（$H_0\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}$）的映射 $\cong \Lambda_P$。图表中的两个方块均可交换，且 θ 是一个环同构。综上，我们有

$$\Lambda_P \cong K(H_0\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}) \cong K(H_0Tw(\mathcal{PM})) \cong LC_B$$

并且 $\bar{\chi}$ 可以看作是将一个持久模对应到其在 $LC_B \cong K(Tw(\mathcal{PM}))$ 中的 K-类。

5.3. 持久莫尔斯不等式。 将持久模表示在环$LC[x,x^{-1}]$ 中，便可在这一背景下自然地得到莫尔斯不等式的一个版本。

设 $C = (C_\bullet, \partial, \ell)$ 是一个驯顺的过滤链复形——参见 §2.2。忽略微分，我们可以将 C 视为一个分次持久模 $\bar{C}_\bullet$，其 $\bar{C}_k^\alpha = C_k^{\leq\alpha}$ 以及持久结构映射由包含映射 $C_k^{\leq\alpha} \subset C_k^{\leq\beta}$，$\forall \alpha \leq \beta$给出。其条形码显然只有无限条。¯我们还考虑分次持久模 $H_\bullet(C)$ ，它是通过对 C 取持久同调得到的:

$$H_k(\bar{C}^\alpha) = H_k(C^{\leq\alpha}) \ .$$

置

$$\mathbb{P}_C := \bar{\sigma}_{\mathcal{B}_{\bar{C}}} \text{ and } \mathbb{H}_C := \bar{\sigma}_{\mathcal{B}_{H(\bar{C})}}$$

其中 $\bar{\sigma}$ 出现在（70）中。这两个函数属于环 $LC[x,x^{-1}]$。当 α 变化时，它们分别跟踪相应持久模在每个次数中的维数。

命题 5.3.1。 假设过滤链复形 C 是有界的。存在一个多项式 $\mathbb{Q}_C(x) \in LC_B[x,x^{-1}]$ 使得

$$\mathbb{P}_C(x) - \mathbb{H}_C(x) = (1+x)\mathbb{Q}_C(x),$$

并且 $\mathbb{Q}_C(x)$ 的每个系数关于 LC_B都是非负且非递减的函数。

注意，在 $\mathbb{P}_C(x)$、 $\mathbb{H}_C(x)$和 $\mathbb{Q}_C(x)$处求 ∞<style id='28'零的系数（回想一下，中的每个函数在 LC_B 附近都是常数 ∞）时，命题 5.3.1的结论可以得到以所谓的庞加莱多项式表示的经典莫尔斯不等式。

例5.3.2. 下面给出一个简单的例子，体现命题5.3.1中的结论。假设$C = E_2(a,b)$ 的生成元位于滤过 a ，次数为；另一个生成元位于滤过 b ，次数为1。那么

$$\mathbb{P}_C(x) = \mathbb{1}_{[a,\infty)} + \mathbb{1}_{[b,\infty)}x \quad \text{and} \quad \mathbb{H}_C(x) = \mathbb{1}_{[a,b)}.$$

那么我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(x) - \mathbb{H}_C(x) &= \left(\mathbb{1}_{[a,\infty)} + \mathbb{1}_{[b,\infty)}x\right) - \mathbb{1}_{[a,b)} \\ &= \mathbb{1}_{[b,\infty)} + \mathbb{1}_{[b,\infty)}x = (1+x)\cdot\mathbb{1}_{[b,\infty)}.\end{aligned}$$

函数 $\mathbb{1}_{[b,\infty)} \in LC_B$ 是命题 $\mathbb{Q}_C(x)$ 所声称的函数，见命题 5.3.1。

命题 *5.3.1* 的证明。我们将使用以下引理。

引理 5.3.3。设 U、V、W 是未分次的持久模**k**-模，且 $0 \to U \to V \to W \to 0$ 是持久**k**-模的短正合列（特别地，所有箭头都是持久态射），则有 $\sigma_{\mathcal{B}_V} = \sigma_{\mathcal{B}_U} + \sigma_{\mathcal{B}_W}$。

由于我们是在域上工作，且 $\sigma_{\mathcal{B}_V}(\alpha) = \mathbf{dim_k}(V^\alpha)$，对于 U 和 W 也同理，因此该引理的证明是直接的。

我们现在回到命题 5.3.1 的证明。对于任意次数 $k \in \mathbb{N}$，与滤过向量空间 C_k 相关联的有两个持久 **k**-模，定义如下

$$Z_k = \left\{\left(Z_k^s := \ker(\partial_k : C_k^{\le s} \to C_{k-1}^{\le s})\right)_{s\in\mathbb{R}},\ \{i_{s,t}^{Z_k} = \text{inclusion}\}_{s\le t\in\mathbb{R}}\right\},$$

$$B_k = \left\{\left(B_k^s := \mathrm{Im}(\partial_k : C_{k+1}^{\le s} \to C_k^{\le s})\right)_{s\in\mathbb{R}},\ \{i_{s,t}^{B_k} = \text{inclusion}\}_{s\le t\in\mathbb{R}}\right\}.$$

我们有以下两个持久模的正合列，

$$0 \to Z_k \xrightarrow{i} \bar{C}_k \xrightarrow{\partial_k} B_{k-1} \to 0, \quad \text{and} \quad 0 \to B_k \xrightarrow{i} Z_k \xrightarrow{\pi} H_k(\bar{C}) \to 0$$

其中 $H_k(C)$ 是 k 的 $H_*(C)$的次数部分。由引理 5.3.3，我们得到

$$\sigma_{\mathcal{B}_{\bar{C}_k}} = \sigma_{\mathcal{B}_{Z_k}} + \sigma_{\mathcal{B}_{B_{k-1}}} = \sigma_{\mathcal{B}_{B_k}} + \sigma_{\mathcal{B}_{B_{k-1}}} + \sigma_{\mathcal{B}_{H_k(\bar{C})}}.$$

对所有次数 k求和，根据 (70) 中的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(x) &= \sum_k \sigma_{\mathcal{B}_{\bar{C}_k}} x^k \\ &= \sum_k \left(\sigma_{\mathcal{B}_{B_k}} + \sigma_{\mathcal{B}_{B_{k-1}}}\right) x^k + \sum_k \sigma_{\mathcal{B}_{H_k\bar{C}}} x^k \\ &= \left(\sum_k \sigma_{\mathcal{B}_{B_k}} x^k\right) + \left(\sum_k \sigma_{\mathcal{B}_{B_{k-1}}} x^{k-1}\right) x + \mathbb{H}_C(x) \\ &= (1+x)\left(\sum_k \sigma_{\mathcal{B}_{B_k}} x^k\right) + \mathbb{H}_C(x).\end{aligned}$$

所求多项式 $\mathbb{Q}_C(x)$ 等于 $\sum_k \sigma_{\mathcal{B}_{B_k}} x^k$。注意，在每个持久**k**模 B_k 中只出现无限长度条形，因此多项式 $\mathbb{Q}_C(x)$ 的每个系数 $\sigma_{\mathcal{B}_{B_k}} \in LC_B$ 都是非负且单调不减的函数。□

命题 5.3.1 的一个有用应用如下。

推论 5.3.4。 设 $\phi: G \to G'$ 是两个有限生成链复形之间的过滤链映射，并设 $G'' = \mathrm{Cone}(\phi)$ 是 ϕ 的过滤锥。我们有如下不等式：

$$\#(\mathcal{B}_{H(G'')}) \leq \#(\mathcal{B}_{H(G)}) + \#(\mathcal{B}_{H(G')})$$

其中 $\#(\mathcal{B}_\bullet)$ 表示相应条形码中区间的基数。

证明。 证明基于对多项式 $\mathbb{Q}_C$ （见命题5.3.1）的简单解释。设 C 为一个过滤链复形。通过将复形 C 按照

(38)

$$C \cong \bigoplus E_1(a_i)[-k_i] \oplus \bigoplus E_2(b_j, c_j)[-k_j]$$

我们看到， $\mathbb{Q}_C(\mathbf{1}) \in LC_B$对于 $\alpha = \infty$ 的值，记为 $\mathbb{Q}_C(\mathbf{1})|_\infty$，给出了该分解中项 $E_2(b_j, c_j)$ 的数量。该数量满足：

$$\mathbb{Q}_C(1)|_\infty = \#(\mathcal{B}_{H(C)}) + N_C^0 - \mathbb{H}_C(1)|_\infty$$

其中， N_C^0是项 $E_2(b_j, c_j)$ 的数量，且 $b_j = c_j$ （这些项对应于所谓的幽灵条）；显然， $\mathbb{H}_C(\mathbf{1})|_\infty$ 是 $\mathcal{B}_{H(C)}$ 中无限条的数量。根据命题5.3.1 ，我们有 $\mathbb{Q}_C(\mathbf{1}) = {}^{\mathbb{P}_C(1)-\mathbb{H}_C(1)}{}_2$ ，因此

$$\#(\mathcal{B}_{H(C)}) + N_C^0 = \frac{[\mathbb{P}_C(1) - \mathbb{H}_C(1)]|_\infty}{2} + \mathbb{H}_C(1)|_\infty = \frac{[\mathbb{P}_C(1) + \mathbb{H}_C(1)]|_\infty}{2}$$

回到该陈述，为简化论证，暂时假设 $N_G^0 = 0 = N_{G'}^0$。于是我们有

$$\begin{aligned} 2\#(\mathcal{B}_{H(G'')}) &\leq \mathbb{P}_{G''}(1)|_\infty + \mathbb{H}_{G''}(1)|_\infty \\ &= \mathbb{P}_G(1)|_\infty + \mathbb{P}_{G'}(1)|_\infty + \mathbb{H}_{G''}(1)|_\infty \\ &= 2\#(\mathcal{B}_{H(G)}) + 2\#(\mathcal{B}_{H(G')}) - \mathbb{H}_G(1)|_\infty - \mathbb{H}_{G'}(1)|_\infty + \mathbb{H}_{G''}(1)|_\infty \\ &\leq 2\#(\mathcal{B}_{H(G)}) + 2\#(\mathcal{B}_{H(G')}). \end{aligned}$$

这里我们使用了显然的关系 $\mathbb{P}_{G''}(\mathbf{1}) = \mathbb{P}_G(\mathbf{1}) + \mathbb{P}_{G'}(\mathbf{1})$。

现在只需证明一般情形，即 N_G^0 且 $N_{G'}^0$ 不一定为零。根据[35, 定理 B], 对于这些 G 和 G'，存在滤过链复形 G_1，G_1' 以及过滤链同伦 ψ， ψ' 如下：

$$\psi : G \simeq G_1 \quad \text{and} \quad \psi' : G_1 \simeq G_1'$$

其中 G_1 和 G_1' 都没有幽灵条。特别地， $\mathcal{B}_{H(G)} = \mathcal{B}_{H(G_1)}$ 和 $\mathcal{B}_{H(G')} = \mathcal{B}_{H(G_1')}$ 。在我们的假设中，将 $\phi: G \to G'$ 替换为过滤链映射 $\phi_1 : G_1 \to G_1'$；该映射由 ϕ 经过（前）复合 ψ 的同伦逆和映射 ψ'构造而成，于是所得的过滤锥 $G_1'' = \mathrm{Cone}(\phi')$与 G''过滤拟同构。因此 $\mathcal{B}_{H(G'')} = \mathcal{B}_{H(G_1'')}$ 。由此，根据前面的讨论（其中不存在幽灵条），即可完成证明。□

注5.3.5。（a）相关且更精细一些的条形码计数不等式见[15]，其中这些不等式是通过不同的方法证明的。

(b) 很容易看出，上述推论蕴含：如果

$$0 \to M \to N \to Z \to 0$$

是持久模的一个短正合列，且 M 和 Z 的条形码都只含有限条，那么 N 的条形码中的条数至多为 $\mathcal{B}_M$ 和 $\mathcal{B}_Z$ 的条形码条数之和；这一结果也见于 [15]。

(c) 将范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 中的滤过链复形的正合三角 $G \to G' \to G'' \to TG$ 旋转（见 [12, 注 2.46]），上述推论还蕴含 $\#(\mathcal{B}_{H(G)}) \leq \#(\mathcal{B}_{H(G')}) + \#(\mathcal{B}_{H(G'')})$。

6. 一个 K-理论配对

本节将证明本文的一个主要结果：在 $\mathcal{C}$ 驯顺且有界的假设下，TPC $\mathcal{C}$ 的 K-群上存在一个双线性配对。

6.1. **配对**。在此，我们将使用一个温和且有界的三角持久性范畴 $\mathcal{C}$，如定义 2.4.1中所述，其移位函子为 Σ，平移函子为 T。

我们将构造一个群同态 $q_X\colon K(\mathcal{C}) \longrightarrow \Lambda$，对每个 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 都定义如下。设 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。给定 $N \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，回顾分次持久模

$$\hom_{\mathcal{C}}(X, T^{\bullet}N) := \{\hom_{\mathcal{C}}(X, T^i N)\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

来自（13）。定义 $\tilde{q}_X : \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \longrightarrow \Lambda$ 为

$$\tilde{q}_X(N) := \lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(X,T^{\bullet}N)}, \tag{75}$$

其中 $\lambda_{(-)}$ 与（14）中的定义相同（另见（12））。这是定义良好的，因为 $\mathcal{C}$ 是温和且有界的。我们可以将 $\tilde{q}_X$ 线性延拓到由 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$生成的自由阿贝尔群上。

定理 6.1.1. 上述线性映射 $\tilde{q}_X$ 可下降为一个同态

$$q_X : K(\mathcal{C}) \longrightarrow \Lambda\ .$$

此外，由 $\kappa : \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \Lambda_P$ 定义的映射 $\kappa(X, Y) = q_X(Y)$ 诱导出一个 Λ_P-模上的双线性映射

$$\kappa : \overline{K(\mathcal{C})} \otimes_{\Lambda_P} K(\mathcal{C}) \longrightarrow \Lambda\ .$$

这里 $\overline{K(\mathcal{C})}$ 作为群与 $K(\mathcal{C})$ 相同，但 Λ_P-结构反转了，即 t^a 作用为 Σ^{-a}，如 §3.6中所述，其中 Σ^s 是 $\mathcal{C}$中的移位函子。我们将 Λ_P在 $K(\mathcal{C})$ 上的作用记为 $\cdot$，将其在 $K(\mathcal{C})$ 上的作用记为 $\bar{\cdot}$。

注 6.1.2. (1) 由于 κ 在第一项上关于 Λ_P-模 $K(\mathcal{C})$ 是双线性的，因此 $\overline{\kappa}$ 不是对称的。事实上，假设对于两个对象 X、Y，有 $\kappa(X, Y) = \kappa(Y, X) \neq 0$，那么对于 $r \neq 0$，我们有 $\kappa(\Sigma^r X, Y) = t^{-r}\kappa(X, Y) = t^{-r}\kappa(Y, X) =$

$t^{-2r}\kappa(Y,\Sigma^r X)$，因此 $\kappa(\Sigma^r X,Y)\neq\kappa(Y,\Sigma^r X)$。我们将看到，在许多值得关注的情形中，形式 κ 是斜对称的，即满足

$$\kappa(X,Y)(t)=(-1)^{\epsilon}\kappa(Y,X)(t^{-1}) \tag{76}$$

其中 $\epsilon=\epsilon_{\mathcal{C}}\in\mathbb{Z}/2$ 是与范畴 $\mathcal{C}$ 相关联的全局常数。

（2）自配对 $\kappa(X,\ X)$ 作用于对象 $X\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 时，在移位和平移下是不变的，具体而言，对任意 $r\in\mathbb{R}$、$k\in\mathbb{Z}$，都有 $\kappa(\Sigma^r T^k X,\ \Sigma^r T^k X)=\kappa(X,\ X)$，其中 Σ^r 和 T 分别是移位函子和平移函子。这由定义即可轻松得出。

例 6.1.3。考虑范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}=H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$。在此情形下，我们将利用命题 κ 4.2.2 中的识别 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})\ \cong\ \Lambda_P$ 来描述。只需计算 $\kappa(E_1(a)\ E_1(c))$，再通过线性性将其推广。我们断言：

$$\kappa(E_1(a),E_1(c))=t^{c-a}. \tag{77}$$

事实上，当 $i=0$ 且移位次数为 i 时，我们有同态 $_{\mathcal{C}}(E_1(a)\ T^i E_1(c))=E_1(c-a)$，否则该值为 0（这里的 T^i 是次数 i 的移位），因此

$$\kappa(E_1(a),E_1(c))=q_{E_1(a)}(E_1(c))=\lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(E_1(a),E_1(c))}=t^{c-a}.$$

因此，利用 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$ 与 Λ_P 的识别，κ 可以改写为 Λ_P 中元素上的如下形式

$$\kappa(P,Q)(t)=P(t^{-1})Q(t)\ .$$

因此，对于 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$，配对 κ 是非退化且斜对称的（其中 $\epsilon=0$）。

定理 *6.1.1* 的证明。我们从关于 q_X 的陈述开始。我们需要证明，对于每个正合三角 $A\to B\to C\to TA$ 在 $\mathcal{C}_0$ 中，都有

$$\tilde{q}_X(A)-\tilde{q}_X(B)+\tilde{q}_X(C)=0. \tag{78}$$

为在 Λ 中证明这一关系，我们首先指出，诺维科夫多项式 $P\in\Lambda$ 为零，当且仅当对于所有 $\alpha\in\mathbb{R}$，都有 $P_\alpha(1)=0$。此处及下文中，我们用 P_α 表示 P 的 α-截断，即 P 中那些 t 的指数为 $\leq\alpha$ 的单项式之和。

给定一个分次持久模 $M_\bullet$（在每个过滤层级以下具有有限总秩），我们可以定义其 α-欧拉示性数为：

$$\chi_\alpha(M_\bullet):=\chi(M_\bullet^\alpha)\ . \tag{79}$$

使用前述记号，我们有：

$$[\lambda_{M_\bullet}]_\alpha(1)=\chi_\alpha(M_\bullet) \tag{80}$$

这直接由公式（12）得出。另见注5.1.1。

总之，要证明（78），我们需要证明对每个 α 都有：

$$\chi_\alpha(\hom_{\mathcal{C}}(X,T^\bullet A))-\chi_\alpha(\hom_{\mathcal{C}}(X,T^\bullet B))+\chi_\alpha(\hom_{\mathcal{C}}(X,T^\bullet C))=0. \tag{81}$$

注意，$\mathbf{hom}^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X,\ \cdot)$ 是 $\mathcal{C}_0$ 上的上同调函子。我们将其作用于正合三角$A \to B \to C \to TA$，得到一个长正合列

$$\cdots \to \text{同态}^{\alpha}(X, T^iA) \to \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, T^iB) \to \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, T^iC) \to \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, T^{i+1}A) \to \cdots .$$

根据有界性假设，这个长正合列只有有限项。我们将这个长正合列视为一个上链复形 $S^\bullet$（其同调平凡），并重新调整各项的次数，使得 $\mathbf{hom}^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X,\ T^iA)$ 的次数为 $3i$，$\mathbf{hom}^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X,\ T^iB)$ 的次数等于 $3i+1$，最后 $\mathbf{hom}^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X,\ T^iC)$ 的次数为 $3i+2$。$S^\bullet$ 的欧拉示性数为零，因此：

$$\begin{aligned} 0 = \chi(S^\bullet) = &\sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{3i} \dim\ \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, T^iA) + \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{3i+1} \dim\ \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, T^iB) \\ &+ \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{3i+2} \dim\ \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, T^iC). \end{aligned}$$

$3i$ 和 $3i+2$ 的奇偶性与 i相同，而 $3i+1$ 和 i 的奇偶性相反。因此，

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{i} \dim\ \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, T^iA) - \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{i} \dim\ \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, T^iB) \\ &+ \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^{i} \dim\ \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, T^iC) \end{aligned}$$

这表明关系式（81），并由此完成证明。

现在我们转向陈述中关于映射 κ 的部分。给定 $\mathcal{C}_0$ 中的一个正合三角 $X \to Y \to Z \to TX$，我们需要证明，对于每个 N，都有：

$$\tilde{q}_X(N) - \tilde{q}_Y(N) + \tilde{q}_Z(N) = 0\ . \tag{82}$$

鉴于函子 $\mathbf{hom}^{\alpha}_{\mathcal{C}}(-,\ N)$ 在 $\mathcal{C}_0$上是同调的，并且

$$\hom_{\mathcal{C}}(T^{-i}X, N) \simeq \hom_{\mathcal{C}}(X, T^iN)\ \ \forall i, \tag{83}$$

第一部分中的相同论证表明（82）。我们推得 κ 下降到群的张量积 $K\left(\mathcal{C}\right) \otimes K\left(C\right)$。该 Λ_P-模部分的结论现在由以下事实得出：

$$t^a \cdot \kappa([X],[Y]) = \kappa(t^a \cdot [X],[Y]) = \kappa([X], t^a \cdot [Y])\ .$$

这是由于以下事实：

$$\hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(\Sigma^{-r}X, Y) = \hom^{\alpha}_{\mathcal{C}}(X, \Sigma^r(Y))$$

对所有 $\alpha,\ r \in \mathbb{R}$。 □

注 6.1.4。 配对 κ 从更一般的导出函子的滤过版本形式体系的角度来看，上述配对是自然的。更多细节将在 [9]中给出。

6.2. **正合列 (33) 和配对 κ。** 假设 $\mathcal{C}$ 是一个 TPC，并且还是温和且有界的（见定义 2.4.1）。回忆一下，我们有如下 Λ_P模的正合列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) \longrightarrow K\mathcal{A}(\mathcal{C}) \xrightarrow{j} K(\mathcal{C}) \longrightarrow K_\infty(\mathcal{C}) \longrightarrow 0\ . \tag{84}$$

另请回顾定理 6.1.1 表明我们有一个配对 $\kappa:\ K(\mathcal{C}) \otimes_{\Lambda_P} \overline{K(\mathcal{C})} \longrightarrow \Lambda$。这里我们将讨论该配对与正合列（84）之间的一些关系。

推论 6.2.1。 存在一个配对：

$$\kappa' : \overline{K\mathcal{A}(\mathcal{C})} \otimes_{\Lambda_P} K(\mathcal{C}) \longrightarrow \Lambda'$$

它在 $\mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) \otimes_{\Lambda_P} \overline{K(\mathcal{C})}$ 上为零，其中 Λ' 在（57）中定义。配对 κ' 和 κ 的关系为：$\sigma \circ \kappa' = \kappa \circ (\bar{j} \otimes id)$，其中 $\bar{j}: K\mathcal{A}(\mathcal{C}) \longrightarrow \overline{K(\mathcal{C})}$ 与（84）中的 j 相同，但此处视为在具有反向 Λ_P-结构的模之间的映射。映射 $\sigma: \Lambda' \longrightarrow \Lambda$ 在（51）和 §4.3 中定义。

若 $\mathcal{C}$ 为有限型，则配对 κ 的取值属于 Λ_P，而配对 κ' 的取值属于 $\Lambda'_P \simeq \Lambda_P^{(0)}$。配对 κ 诱导出通常的欧拉配对

$$\kappa'' : K_\infty(\mathcal{C}) \otimes K_\infty(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

通过公式 $\kappa'' = \kappa|_{t=1}$。

证明。κ' 的构造与 κ 类似，但基于映射 q'_X，该映射替换了 q_X，对于$X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{AC})$。在这种情况下：$\tilde{q}'_X(N) = \lambda'_{\hom_{\mathcal{C}}(X,T^\bullet N)}$，而 $\lambda'_{(-)}$是通过公式 $\lambda'_I = s^a$ 为条形码仅含有限条的持久模定义的；[b] 对于 $I = [a,b)$，再按线性性扩展。鉴于 X是无环的，$\hom_{\mathcal{C}}(X, T^\bullet N)$ 的条形码仅含有限条，因此此 $q'_X(-)$ 定义良好。回顾命题 4.2.4，其中有一个映射 $\sigma: \Lambda' \to \Lambda$，由 $\sigma(s^a,^b) = t^a - t^b$ 定义，且它是一个同构。显然，$\sigma \circ \kappa' = \kappa \circ (\bar{j} \otimes \mathrm{id}|_{K(\mathcal{C})})$，其中 $j: K\mathcal{A}(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C})$ 与 j是同一个映射，但其定义域和值域分别为 $K\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 和 $K(\mathcal{C})$，并带有反向的 Λ_P-模结构。

由此我们推得 $\tilde{q}'_X$ 下降为一个映射 q'_X，它定义在 K-群上，并且 κ' 通过 $\kappa'(X,\ Y) = q'_X(Y)$是良定义的。利用正合列（33），还可得出κ' 在 $\mathrm{Tor}K(\mathcal{C}) \otimes_{\Lambda_P} K(\mathcal{C})$上为零。

若 $\mathcal{C}$是有限型的，那么根据定义 2.4.1，所有持久模 $\hom(X, T^\bullet Y)$都只有有限多个条。因此，q_X 的像属于 Λ_P，κ的像也如此。分次向量空间 $\hom_{\mathcal{C}_\infty}(X, T^\bullet Y)$的经典欧拉示性数作为整数是良定义的；由于有限条对该和的贡献为零，它等于 $\kappa(X,Y)(1)$。最后，在这种情况下，κ' 落在 Λ'_P 中，而 Λ'_P 经 σ 同构映射到 $\Lambda_P^{(0)}$（见引理 4.2.5）。□

6.3. **双线性形式的反对称性 κ。** 这里我们讨论确保双线性形式 κ 按照（76）的意义具有斜对称性的条件。

例 6.3.1。作为一个启发性例子，我们回到范畴 $\mathcal{FC}\mathbf{h}^{\mathrm{fg}}$。我们已经从例 6.1.3 中知道，在这种情况下 κ 是斜对称的；不过，仍值得注意的是，这一事实反映了 $\mathcal{FC}\mathbf{h}^{\mathrm{fg}}$ 的卡拉比-丘性质（参见例如 [17, 23, 18, 16]）。

设 $C = (C_*, \partial_*, \ell) \in \mathbf{Obj}(\mathcal{FC}\mathbf{h}^{\mathrm{fg}})$，即一个有限生成滤过链复形。按照 [35, 第 2 节4]，可以构造 C 的代数对偶（次数按固定数值 $m_0 \in \mathbb{Z}$ 平移）：这是一个滤过链复形，记作

$$C^\vee = (C_*^\vee := \mathrm{Hom}(C_{m_0-*}, \mathbf{k}), \delta_*, \ell^\vee) \tag{85}$$

其中 $\delta_*: C_*^\vee \to C_{*-1}^\vee$ 定义为 $\phi \in \mathbf{Hom}(C_{m_0-*}, \mathbf{k}) \mapsto \delta_*(\phi) := (-1)^* \cdot \phi \circ \partial_{m_0-*} \in \mathbf{Hom}(C_{m_0-*+1}, \mathbf{k})$，而对偶过滤函数定义为

$$\ell^\vee(x_i^\vee) = -\ell(x_i) \tag{86}$$

若 $\{x_i\}_i$ 是 C_* 的一组基，且 $\{x_i^\vee\}_i$ 是 $C_*^\vee$ 的对应对偶基，则有以下关系：

$$\lambda(C)(t) = (-1)^{m_0} \lambda(C^\vee)(t^{-1}) \,. \tag{87}$$

事实上，[35] 命题 6.7 表明，38中的分解，对于 C 和 $C^\vee$，通过以下对应关系彼此关联：

(i) $E_1(a)$ 是 C 的一个直和项，当且仅当 $E_1(-a)[-m_0]$ 是 $C^\vee$ 的一个直和项

(ii) $E_2(a,b)$ 是一个直和项 of C 若 and only 若 $E_2(-b,-a)[-m_0+1]$ is 是一个直和项 of $C^\vee$

且这意味着 (87)。范畴 $\mathcal{FC}\mathbf{h}^{\mathrm{fg}}$ 满足一种卡拉比–丘对偶性，其含义是，对于任意两个对象 X，Y 存在一个过滤拟同构

$$\varphi_{X,Y} : \big(\hom(Y,X)\big)^\vee \longrightarrow \hom(X,Y) \tag{88}$$

现在利用 (87) 以及 $m_0 = 0$，我们看到 κ 在 $H_0(\mathcal{FC}\mathbf{h}^{\mathrm{fg}})$上是斜对称的。

例 6.3.1 有显而易见的推广。例如，设 $\mathcal{A}$ 是一个预三角化滤过 dg-范畴，并且对于任意 $X, Y \in \mathbf{Obj}(\mathcal{A})$，每个滤过向量空间 $\mathbf{hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ 都是有限维的；进一步假设 $\mathcal{A}$ 满足滤过形式的卡拉比-丘性质，特别是对于任意两个对象 X, Y，存在一个如 (88)) 所示的滤过拟同构。由此我们再次推得，κ 在 K-群 $H_0(\mathcal{A})$ 上是斜对称的。当然，只要滤过拟同构 (88) 存在，类似的结论对于滤过 A_∞-范畴仍然成立。

自然会想知道，TPC 的卡拉比-丘性质对应的类比是什么。一种可能的定义——本文不会对其作全面阐述——大致如下。首先，考虑一个假设仅有有限条条形码的持久模 M。定义一个新的持久模 $M^\vee$ 如下

$$(M^\vee)^\alpha = (M^{-\alpha})^*,$$

其中，$V^* := \mathbf{hom}_{\mathbf{k}}(V, \mathbf{k})$ 是 V 的对偶向量空间。$M^\vee$ 上的持久结构映射以显然的方式导出，并忽略可能的次数平移。

注 6.3.2。注意，如果 M 如本文所采用的三角持久范畴定义（见 §2.2）中那样是下半连续且下有界的，那么 $M^\vee$ 就是上半连续且上有界的。用条形码来表示， M 的条形为 $[a,+\infty)$ 和 $[c,d)$，而 $M^\vee$ 对应的条形则为 $(-\infty,\ -a]$ 和 $(-d,\ -c]$，分别如此。

现在假设 $\mathcal{C}$ 是一个 TPC。我们称 $\mathcal{C}$ 为卡拉比-丘，如果三角化范畴 范畴 $\mathcal{C}_\infty$ 是（严格）卡拉比-丘的，并且还满足以下条件：对于 $\mathcal{C}$ 中的任意两个对象 X、Y，都存在一个同构 $\Phi = \Phi_{X,\ Y}$：$[$同态$c_\infty(Y,\ X)]^* \to$ 同态$c_\infty(X,\ Y)$，并且存在持久态射：

$$\varphi = \varphi_{X,Y} : [\hom_{\mathcal{C}}(Y,X)]^\vee \to \hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

使得对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，自然映射 $\ker(\varphi^{-\infty}) \to \ker(\varphi^{\alpha})$ 都是满射，而映射 $\operatorname{coker}(\varphi^{\alpha}) \to \operatorname{coker}(\varphi^{\infty})$ 是单射。此外，同构 Φ 还必须按照以下方式与 φ 相关联。首先注意到，$\ker(\varphi^{-\infty}) = [\hom c_\infty(Y,\ X)]^*$，且 $\hom c_\infty(X,\ Y) = \operatorname{coker}(\phi_\infty)$，因此我们可以将 Φ 视为映射：$\ker(\varphi^{-\infty}) \to \operatorname{coker}(\varphi^{\infty})$。现在，我们要求对于每个 $x \in \ker(\varphi^{-\infty})$，

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid x \in \ker(\varphi^{\alpha})\} = \inf\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid \Phi(x) \in \operatorname{coker}(\varphi^{\beta})\right\}\ .$$

这些条件尤其保证：如果 φ 的定义域中的条形码分别包含（$-\infty,\ a]$）和（$c,\ d]$），那么 φ 的像就包含 $[a,\infty)$ 和 $[c,d)$。因此，如果 $\mathcal{C}$在此意义下具有卡拉比-丘性质，那么双线性形式 κ 在 $K(\mathcal{C})$上是斜对称的。

注 6.3.3. 持久模，或者更本质地说过滤链复形的庞加莱对偶性质，已在近期的工作 [34], 中得到详细发展，其中称为链级庞加莱-诺维科夫结构（参见 [34, 第 6]节）。这可以为我们的 TPC 的卡拉比-丘性质提供严谨的基础。

7. 关于 K-群和条形码的测量。

与通常的三角范畴不同，三角持久范畴带有任意非负权重的正合三角。因此，存在一种“能量”概念，用来衡量通过（迭代的）正合三角分解对象所需的能量；特别是，TPC 的对象集合 $\mathcal{C}$承载着一类称为碎片化伪度量的伪度量，回顾见 §2.5。本节首先在 §7.1 中看到，这些度量结构下降到 $K(\mathcal{C})$，并且有时会在那里给出非平凡的结构。另一方面，在 §7.2 中，我们讨论与持久模和条形码相关的数值不变量；从 § LC 5.1 中的表示观点来看，这些不变量是自然的。

7.1. 上的群半范数 $K(\mathcal{C})$。设 $\mathcal{C}$ 为一个 TPC。设 d 是 Obj($\mathcal{C}$) 上的伪度量，并且满足如下意义下的次可加性：

$$d(X \oplus X', Y \oplus Y') \le d(X,Y) + d(X',Y')\ . \tag{89}$$

这类伪度量大量存在。事实上，正如 [11, §5] 中所示，并在§2.4中回顾的那样，范畴 $\mathcal{C}_\infty$ 具有一个次可加的持久性三角权重 w。因此，$\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 带有一类伪度量 $d^{\mathcal{F}}$（其中 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$的一个辅助对象族），

称为碎片化伪度量，与 w相关。其构造在§2.5中回顾。 w 的次可加性推出，对于所有这类 89，均有 $d^{\mathcal{F}}$。

本节的主要结果讨论这些伪度量在 $K(\mathcal{C})$ 上诱导的“测量”。我们将讨论两种自然的定义。

首先，定义映射 $d\colon K(\mathcal{C}) \times K(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 如下：

$$\bar{d}(x,y) = \inf\{d(X,Y) \,|\, X,Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \text{ and } [X]=x,\, [Y]=y\}. \tag{90}$$

我们将在下文看到，该定义在 $K(\mathcal{C})$ 上导出一个在平移下不变的伪度量，因此，映射 $x \longmapsto d(x,0)$ 在 $K(\mathcal{C})$ 上给出所谓的群半范数（可能为无穷），它确定了 d。然而，我们将看到，在一些主要例子中，这个伪度量（及其相关的半范数）是平凡的。

另一种可能性是考虑一个子类 $\mathcal{S} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，使得 $\mathcal{S}$ 对直和封闭；此外， $K(\mathcal{C})$ 的每个元素在 $\mathcal{S}$ 中都有一个代表元，并定义$||-||_{d,\mathcal{S}}\colon K(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为

$$||x||_{d,\mathcal{S}} = \inf\{d(X,0) \,|\, X \in \mathcal{S} \text{ and } [X]=x\}\ . \tag{91}$$

这个定义还在 $K(\mathcal{C})$上给出了一个群半范数，我们称之为强半范数，它由 d （相对于 $\mathcal{S}$）诱导。与 $d(-,0)$不同，当 d 是一个碎片化伪度量且$||-||_{d,\mathcal{S}}$时，存在简单的例子使其有限且非平凡。下文的命题 7.1.2 将很快证明这一点。

注 7.1.1. 继续之前，我们先更详细地说明$\bar{d}$与$\|-\|_{d,\mathcal{S}}$之间的本质区别。根据定义， $d(x,0)$ 是“距离” $d(X,Y)$ 的下确界，其中 X和Y 遍历 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 中所有这样的元素：它们在 $K(\mathcal{C})$ 中的类分别为 $[X]=x$ 和 $[Y]=0$。（因此， $d(x,0)$ 中的第二个条目表示 $0 \in K(\mathcal{C})$。）相比之下，在$\|x\|_{d,\mathcal{S}}$ 的定义中，我们只在 X 上对 $d(X,0)$ 取下确界，因此 $d(X,0)$ 中的第二个条目取为零对象，而不只是 $0 \in K(\mathcal{C})$ 的一个代表。此外，我们令 X 仅遍历子集$\mathcal{S} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。

命题 7.1.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个三角持久性范畴。

(*i*) 任意伪度量 d 在 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 只要满足（*89*）中的次可加性，就会诱导出伪度量$\bar{d}$ 由（*90*）给出，并且具有平移不变性，即

$$\bar{d}(x+z,y+z) = \bar{d}(x,y)$$

对于所有 x、y、$z \in K(\mathcal{C})$。

(ii) 瓶颈度量 d_{bot} 在 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}} = H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$ 的对象上诱导出 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \cong \Lambda_P$ 上的一个伪度量，其取值仅为 0 和 ∞。关于瓶颈度量的定义及更多细节，请参阅 [28]。

(iii) 令 $d^{\mathcal{F}}$ 为 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 上与持久性权重$\bar{w}$ 在 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 上且满足 $\mathcal{F} = \{E_1(0)[s]\}_{s\in\mathbb{Z}}$的碎片化伪度量。（定义见 §*2.5* 。）由此诱导的伪度量 $\bar{d}^{\mathcal{F}}$ 在 $K(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}) \cong \Lambda_P$ 上为零。

(iv) 应用$||-||_{d,\ \mathcal{S}}$来自（91）是 $K(\mathcal{C})$ 上的群半范数，并且对于 *(iii)* 中的 $\mathcal{C}=\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$、$d=d^{\mathcal{F}}$，以及以 $\mathcal{S}$ 为对象的微分平凡的过滤链复形子类，$||-||_{d,\ \mathcal{S}}$ 是有限的，且我们有

$$||t^a||_{d,\mathcal{S}}=|a|$$

对所有 $a<0$均成立。因此，在此情形下，$||-||_{d,\ \mathcal{S}}$ 并不平凡。

该命题的详细证明可见于 [10]。

注 7.1.3。 (1) 命题 7.1.2 第 (iii) 点的类似结果已由 Berkouk [4] 在以下更一般的背景下独立证明： K任意有限维向量空间上的可构造层范畴的群。

(2) 如果将之前使用的族 $\mathcal{F}$ 替换为 $\mathcal{F}=\{E_1(r)[s]\}_{s\in\mathbb{Z}}$，其中 $r>0$为某个固定值，则所得的强碎片化半范数$||-||_{d,\ \mathcal{S}}$在具有 $a_0<r$ 的多项式上不会为零（此处 $\mathcal{S}$ 仍表示微分平凡的过滤复形类）。另一方面，如果族 $\mathcal{F}$ 如命题中所述，但 $\mathcal{S}=\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{fg}})$，则所得的伪范数$||-||_{d,\ \mathcal{S}}$是平凡的。(3) 与 $\mathcal{C}^{\mathrm{fg}}$ 上的瓶颈度量相关的强碎片化伪范数，对于所有满足 $H(A)\neq 0$的复形 A，均为无穷大。

7.2. **K-理论数值不变量**。本节将构造若干过滤链复形的数值不变量，这些不变量可以在 K-理论的层面上定义，涉及$H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$、 $\mathcal{A}H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$ 和 $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}})$。这意味着，对于给定对象 C （即一个过滤链复形），我们的不变量取值仅取决于它的 K-类。

由于（分次）条形码与范畴 $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})$ 和 $H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}})$ 中过滤链复形的同构类型一一对应，我们将把下文构造的数值不变量视为与条形码相关联的不变量。

在开始之前，回顾一下我们有如下同构

$$K\mathcal{A}(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))\xrightarrow{\cong}\Lambda_P^{(0)},\quad K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))\xrightarrow{\cong}\Lambda_P,\quad K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}}))\xrightarrow{\cong}\Lambda,\qquad(92)$$

它们将 K-类 $[C]$ 映射到一个过滤链复形的 C 诺维科夫多项式（分别为级数） $\lambda([C])=\lambda_{\mathcal{B}(H_\bullet(C))}$，其中 $H_\bullet(C)$ 是 C的持久同调， $\mathcal{B}(H_\bullet(C))$ 是它的（分次）条形码，而 $\lambda_{\mathcal{B}(-)}$ 定义见§2.3。为避免符号滥用，我们将以上三个同构都记作 λ 因为它们彼此相容，且与以下映射相容

$$K\mathcal{A}(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))\longrightarrow K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))\longrightarrow K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}}))$$

由包含映射诱导 $\mathcal{A}\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}\subset\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}\subset\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}}$ （参见定理 4.1.2）。

~另请回忆命题 5.2.1：我们有一个环同构 $\theta:\ \Lambda\xrightarrow{=}LC$，它也将 $\Lambda_P^{(0)}\subset\Lambda_P\subset\Lambda$ 同构地映射到 $LC'_B\subset LC_B\subset LC$。因此，将 λ 与 θ 复合后，我们便为 $K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))$ 和 $K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{t}}))$ 中的每个类 $[C]$ 分别得到一个 LC_B-函数（分别为 LC-函数） $\bar{\chi}([C])$，即 $\bar{\chi}([C]):=\theta\circ\lambda([C])$。

如上所述，可以直接在条形码层面定义这些函数 $\bar{\chi}$。回忆 §5.1 ：给定一个分次条形码 $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ ，我们定义

$$\bar{\chi}_{\mathcal{B}}=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\sigma_{\mathcal{B}_i}\in LC. \tag{93}$$

如果 $\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}$ 只包含有限条，那么 $\bar{\chi}_{\mathcal{B}}\in LC_B$ ；此外，如果这些条的长度都有限，那么 $\bar{\chi}_{\mathcal{B}}\in LC'_B$。下文将使用函数 $\bar{\chi}$，构造条形码（或有限生成滤过链复形的 K 类）的若干数值不变量。

§7.2.1- §7.2.3 中的部分内容与 Schapira 较早在流形上可构造层范畴的框架下所做的工作相似 [31]。其他相关的较新工作见 [13, 19, 26]。

7.2.1. 欧拉示性数。 有限生成链复形的经典欧拉示性数诱导出一个良定义的同态 $\chi: K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))\longrightarrow\mathbb{Z}$ ，它经由显然的映射 $K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))\longrightarrow K(H_0(\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))$ 和经典欧拉示性数分解。这里，我们用 $K(H_0(\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))$ 表示有限生成链复形同伦范畴（不带滤过）的 K 群。

用条形码来表述，这有如下描述。假设 $\mathcal{B}$ 在无穷远处稳定，也就是说，当滤过参数充分大时，相应的分次持久模的持久结构映射都是同构。此外，假设 $\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}$只有有限多个无限长度条。那么， $\mathcal{B}$的欧拉示性数记作$\chi(\mathcal{B})$，等于 $\bar{\chi}_{\mathcal{B}}(\infty)$。

如果我们对 $K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))$使用 Λ_P-模型，那么 $\chi(\mathcal{B})=\lambda_{\mathcal{B}}|_{t=1}$。这也与过滤链复形 C 的底层链复形的总欧拉示性数一致，因为 $\chi(C)=\bar{\chi}([C])(\infty)=\lambda([C])|_{t=1}$。

7.2.2. 长度。 下面定义一个同态 $\ell: K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))\longrightarrow\mathbb{R}$ 称为长度，定义如下。将 $K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))\cong LC_B$ (使用 $\theta\circ\lambda$ ，如第§7.2节开头所述。回想一下，所有函数 $\sigma\in LC_B$ 都是有界的，而且在无穷远处为常数。定义如下：

$$\ell(\sigma)=\int_{\mathbb{R}}\big(\sigma-\sigma(\infty)\mathbb{1}_{[0,\infty)}\big)d\mu,\quad\forall\,\sigma\in LC_B, \tag{94}$$

其中 $d\mu$ 是 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度。注意，函数 $\sigma-\sigma(\infty)\mathbb{1}_{[0,\infty)}$ 具有紧支撑，因此它在 $\mathbb{R}$ 上的积分是有限的。

如果我们将 ℓ 限制到 $K\mathcal{A}(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))\cong LC'_B$，那么

$$\ell(\sigma)=\int_{\mathbb{R}}\sigma d\mu,\quad\forall\,\sigma\in LC'_B,$$

因为所有函数 $\sigma\in LC'_B$ 都满足 $\sigma(\infty)=0$。

条形码长度的类似定义如下。设 $\mathcal{B}$ 是一个分次条形码，其 $\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}$ 由有限多条组成。设 $\bar{\chi}_{\mathcal{B}}\in LC_B$ 是其关联的 LC-函数，如下

定义于（93）中。我们将 $\mathcal{B}$ 的长度定义为 $\ell(\mathcal{B}) := \ell(\bar{\chi}_{\mathcal{B}})$，其中后者使用（94）定义。更明确地说：

$$\ell(\mathcal{B}) = \int_{\mathbb{R}} \big(\bar{\chi}_{\mathcal{B}} - \bar{\chi}_{\mathcal{B}}(\infty)\mathbb{1}_{[0,\infty)}\big) d\mu. \tag{95}$$

注 7.2.1. （a）之所以称为“长度”，原因如下。当 $\mathcal{B} = \{(I_j,\ m_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$ 是一个未分次条形码，且其中所有条均具有有限长度时，$\ell(\mathcal{B})$ 就是 $\mathcal{B}$ 中各条长度之和（计入重数）。这是因为 $\bar{\chi}_{\mathcal{B}}(\infty) = 0$，因此

$$\ell(\mathcal{B}) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\chi}_{\mathcal{B}} d\mu = \sum_{j\in\mathcal{J}} m_j \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_j} d\mu = \sum_{j\in\mathcal{J}} m_j \,\mathrm{length}(I_j).$$

注意，在这种情况下，$\ell(\mathcal{B}) \geq 0$，且当且仅当 $\mathcal{B} = \emptyset$ 时取等号。

当 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个分次条形码（其中 $\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}$ 只有有限条条形码，且所有条均具有有限长度）时，

$$\ell(\mathcal{B}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \ell(\mathcal{B}_i)$$

这正是各个 $\mathcal{B}_i$ 的长度的带符号之和。与未分次条的情形相比，在这里，$\ell(\mathcal{B})$ 也可以取负值，并且即使 $\mathcal{B} \neq \emptyset$，也可能有 $\ell(\mathcal{B}) = 0$。

(b) 式（94）中长度定义里的被积函数，与 $\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}$ 中无环对象的 K 群密切相关。事实上，映射

$$LC_B \longrightarrow LC'_B, \quad \sigma \longmapsto \sigma - \sigma(\infty)\mathbb{1}_{[0,\infty)}$$

在由 $\theta \circ \lambda$ 定义的同构 $K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})) \cong LC_B$, $K\mathcal{A}(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})) \cong LC'_B$ 下，对应于映射

$$K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})) \longrightarrow K\mathcal{A}(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})), \quad [C] \longmapsto [C] - \chi(C)[E_1(0)]$$

来自注60（4.3.5）中的式。 □

接下来，我们给出 ℓ 的另一种表达式，这在处理恒等式时很有用 $K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}})) \cong \Lambda_P$（通过同构 λ，如式（92）所示）。更确切地说，这里考虑 $\ell \circ \theta :\ \Lambda_P \longrightarrow \mathbb{R}$，其中 $\theta : \Lambda_P \longrightarrow LC_B$ 是命题 5.2.1 中的同构。为简化记号，我们将 $\ell \circ \theta$ 记作 ℓ。

设 $P(t) \in \Lambda_P$ 是一个诺维科夫多项式。简单计算可得

$$\ell(P(t)) = -P'(1), \tag{96}$$

其中，$P'(1)$ 表示 $P(t)$ 对形式变量 t 的导数，在 $t = 1$ 处计算。

最后一个公式有如下推论。回想一下，$K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))$ 带有一个由过滤链复形 $[C]\cdot[D] = [C \otimes D]$ 的张量积所诱导的乘积。

推论 7.2.2. 对于每个 $X, Y \in K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{fg}))$ 以及 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} \ell(X \cdot Y) &= \ell(X)\chi(Y) + \chi(X)\ell(Y), \\ \ell(X^n) &= n\chi(X)^{n-1}\ell(X). \end{aligned} \tag{97}$$

这很容易由（96）、 λ 是环同构这一事实，以及函数乘积求导的链式法则得出。

回想一下， $K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{陈}^{\mathrm{fg}}))$ 和 $K\mathcal{A}(H_0(\mathcal{F}\mathbf{陈}^{\mathrm{fg}}))$ 都是 Λ_P-模。对于这些结构，我们有如下公式

推论 7.2.3. 对于所有 $X \in K(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{fg}))$， $P(t) \in \Lambda_P$ 我们有：

$$\ell(P(t)X) = P(1)\ell(X) + P'(1)\chi(X).$$

特别地，如果 $X \in K\mathcal{A}(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{fg}))$ 则有 $\ell(P(t)X)) = P(1)\ell(X)$.

最后一个恒等映射意味着，限制 $\ell|_{K\mathcal{A}(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))}$： $K\mathcal{A}(H_0(\mathcal{F}\mathbf{Ch}^{\mathrm{fg}}))$ $\longrightarrow \mathbb{R}$ 是 Λ_P-模的映射，若我们赋予其目标 $\mathbb{R}$ 以 Λ_P-模结构 $P(t) \cdot x = P(1)x$， $\forall x \in \mathbb{R}$。

7.2.3. 广义长度。 为简单起见，这里假设所考虑的分次条形码 $\mathcal{B}$ 满足： $\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}$ 只有有限多个无限长度条。

给定一个泛函 $T: LC_B \longrightarrow \mathbb{R}$，我们可以定义一个与之对应的泛函 $\widetilde{\ell_T}$，其定义在分次条形码上，定义如下：

$$\widetilde{\ell_T}(\mathcal{B}) = T(\bar{\chi}_{\mathcal{B}}). \tag{98}$$

类似地，给定一个泛函 $T: LC'_B \longrightarrow \mathbb{R}$，我们可以定义一个与之对应的泛函 ℓ_T，其定义在分次条形码上，定义如下：

$$\ell_T(\mathcal{B}) = T\big(\bar{\chi}_{\mathcal{B}} - \bar{\chi}_{\mathcal{B}}(\infty)\mathbb{1}_{[0,\infty)}\big). \tag{99}$$

如果 h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是局部可积函数，我们可以将上述方法应用于泛函 T_h，即与 h对应的分布。我们记

$$\ell_h(\mathcal{B}) := \int_{\mathbb{R}} h \cdot \big(\bar{\chi}_{\mathcal{B}} - \bar{\chi}_{\mathcal{B}}(\infty)\mathbb{1}_{[0,\infty)}\big) d\mu \tag{100}$$

为相应的条形码上的泛函。如果 h 还满足对每个 $a \in \mathbb{R}$都有 $\int_a^\infty |h| d\mu < \infty$，那么 $\widetilde{\ell_h} := \widetilde{\ell_{T_h}}$ 也定义良好。

§7.2.1 和 §7.2.2中讨论的欧拉示性数和长度都是特殊情形 $\widetilde{\chi}$，它们分别对应于 ℓ_T 和 $\widetilde{\ell_T}$ 对不同 T而言。更准确地说， $\chi(\mathcal{B}) = \ell_{\delta_\infty}(\mathcal{B})$，其中 δ_∞ 是 ∞处的狄拉克δ函数。类似地，长度 $\ell(\mathcal{B})$ 与 $\ell_h(\mathcal{B})$ 对函数 $h \equiv 1$相同。

7.3. 其他测量。 这里我们简要介绍条形码的其他一些数值不变量，这些不变量并非 K-理论性的（从这个意义上说，条形码$\mathcal{B}$ 上的不变量值并不完全取决于 $\bar{\chi}_{\mathcal{B}}$）。为简单起见，以下我们假设我们的条形码 $\mathcal{B}$ 满足这样的条件： $\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}$ 仅包含有限数量的条。

给定如上所述的分次条形码 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$，考虑以下 LC_B 函数：

$$|\sigma|_{\mathcal{B}} := \sigma_{\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sigma_{\mathcal{B}_i} \in LC_B. \tag{101}$$

$\bar{\chi}_{\mathcal{B}}$ 与 $|\sigma|_{\mathcal{B}}$ 的区别在于，后者对函数 $\sigma_{\mathcal{B}_i}$取无符号和，因此我们总有 $|\sigma|_{\mathcal{B}} \geq 0$，且当且仅当 $\mathcal{B} = \emptyset$时取等号。

现在可以像上文第§7.2.3 节中那样，将不同的泛函应用于函数 $|\sigma|_{\mathcal{B}}$，从而获得对条形码的各种测量。

例如，在 若 $\mathcal{B}^{\mathrm{tot}}$ 只有有限长度的条，我们可以定义它的绝对总长度 h:

$$|\ell|(\mathcal{B}) := \int_{\mathbb{R}} |\sigma|_{\mathcal{B}} d\mu.$$

当 $\mathcal{B}$ 来自过滤莫尔斯持久同调时， $|\ell|(\mathcal{B})$ 已在分析和谱理论中得到研究和应用 [28, 章 6]。

另一种测量如下（此处不 假设 $\mathcal{B}$ 没有无限长度条）。

$$\bar{\ell}(\mathcal{B}) = \ell(\mathcal{B}_{\mathrm{finite}}) + \chi(\mathcal{B}), \tag{102}$$

其中 $\mathcal{B}_{\mathrm{finite}}$ 是 $\mathcal{B}$ 中所有有限长度条组成的子集，而 $\chi(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{B}$ 在 §7.2.1中定义的欧拉示性数。

前述不变量 ℓ 对张量积具有良好的性质。对于任意两个分次条形码 $\mathcal{B}'$和 $\mathcal{B}''$，可以定义乘积 $\mathcal{B}' \otimes \mathcal{B}''$，它是相应持久模或滤过链复形的张量积的条形码（参见例 4.1.1）。我们有如下恒等式（证明见 [10] ）：

$$\bar{\ell}(\mathcal{B}' \otimes \mathcal{B}'') = \bar{\ell}(\mathcal{B}')\chi(\mathcal{B}'') + \chi(\mathcal{B}')\bar{\ell}(\mathcal{B}'') - \chi(\mathcal{B}')\chi(\mathcal{B}''). \tag{103}$$

8. 辛应用

本节旨在考察本文前面为与滤过 Fukaya 范畴相关联的三角持久性范畴 K所发展起来的持久 $\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$ 理论， $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}, \mathcal{P})$如 §2.6所述，并由此推导出若干辛几何应用。

这两项应用都揭示了嵌入拉格朗日子流形与浸入拉格朗日子流形之间不同的代数性质。第一项应用见 §8.1 中的推论 8.1.2（它是本文 K-理论构造的直接推论），说明 §6 中的欧拉型配对 κ 在那些存在嵌入代表的类 $A \in K(\mathcal{C})$ 上具有一种特殊性质： $\kappa(A, A)$ 是一个常数多项式，其值等于该代表的欧拉示性数。事实证明，对于某些代表拉格朗日浸入的类，这一性质并不成立。第二项应用见定理 8.1.4，它给出了消解代表类 A 、且 $\kappa(A, A) \in \Lambda_P$ 非常数的拉格朗日浸入奇点所需 “ 能量 ” 的下界。在 §8.2 中，我们讨论上述构造与浸入弗洛尔理论之间的一些关系。特别是，我们预期表达式 $\kappa(A, A)$ 能为类 A 的浸入代表的自交点数量提供下界。本小节带有一定的推测性，因为本文并未充分发展浸入情形下的滤过 Fukaya 范畴理论。

浸入情形下的滤过 Fukaya 范畴，见 §8.3 我们将给出一个示例来说明我们的结果。

8.1. 配对 κ 与拉格朗日子流形。这里我们采用 §2.6.2 中的设定与记号。特别地，我们在基域 $\mathbb{Z}_2$ 上工作，并使用 §2.6.2 开头所述的福柯范畴的同调与分次约定。因此，我们的环境流形 $(X^{2n}, \omega = d\lambda)$ 是一个 Liouville 流形。范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ 的对象是 X 中带标记的精确拉格朗日子流形所成的族 $\mathcal{X}$——这些对象是三元组 (L, h_L, θ_L)，其中 $L \subset X$ 是一个闭的（嵌入的）拉格朗日子流形，h_L 是 $\lambda|_L$ 的原函数，θ_L 是一种分次选择。我们假设 $\mathcal{X}$ 在原函数的移位和平移分次下封闭。最后，$\mathcal{P}$ 是一组扰动数据，使得由此得到的 A_∞-范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ 是滤过的。三角持久性范畴 $\mathcal{CF}uk(\mathcal{X})$ 通过 §2.6.1 和 §2.6.2 中描述的一种代数构造与 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P})$ 相关联。简言之，这个 TPC 是同调范畴

$$\mathcal{CF}uk(\mathcal{X}) = H_0[\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P})^\nabla]$$

其中

$$\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P})^\nabla \subset Fmod(\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P}))$$

是滤过 dg 范畴 $Fmod(\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P}))$ 中，滤过 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P})$- 模的（滤过）Yoneda 模 $\mathcal{Y}(L)$，$L \in \mathcal{X}$关于权重为 0 的迭代锥以及关于 r-同构，对所有 $r \geq 0$均成立。更多细节见 §2.6 ，完整构造请参阅 [12]。

继续之前，先提及以下两点，它们稍后会很有用。首先，若 C，C' 是 $\mathcal{CF}uk(\mathcal{X})$ 中两个一般对象，那么在这个范畴中可能难以明确写出同态 $\hom(C, C')$。然而，当 $C = L$ 和 $C' = L'$ 是来自 $\mathcal{X}$ 的两个对象（即族 $\mathcal{X}$ 中两个带标记拉格朗日子流形）时，我们有：

$$\hom_{\mathcal{CF}uk(\mathcal{X})}(L, L') = HF'_0(L, L') \tag{104}$$

作为持久模。更一般地，同样作为持久模，我们有：

$$\hom_{\mathcal{CF}uk(\mathcal{X})}(L, L'[k]) = HF'_k(L, L') \ .$$

回顾一下，根据定义，$T^k L' = L'[-k] = (\bar{L}', h_{L'}, \theta_{L'} - k)$。

回顾 §2.6.2 中的第二个 TPC，$\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X}) = H_0[Tw(\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P})]$，它是定义在 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P})$ 上的过滤扭曲复形的同调范畴，以及如下嵌入：

$$\bar{\Theta} : \mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathcal{CF}uk(\mathcal{X}) \ .$$

第二条注记是，对于任意 C，$C' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X}))$，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\hom_{\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X})}(C, T^i C') = 0, \text{ whenever } |i| \geq k_0 \ . \tag{105}$$

最后，我们用 $\mathcal{F}uk(X)$ 表示 X 中所有精确带标记拉格朗日子流形的（未滤过）Fukaya 范畴，并用 $D\mathcal{F}uk(X)$ 表示相应的导出范畴。在这两种情况下，这些概念都忽略滤过；如果需要强调这一点，我们则改写为 $\mathcal{F}uk_{un}(X)$、$D\mathcal{F}uk_{un}(X)$，其他相关代数结构也同样如此。

这里还要回顾的最后一个记号是诺维科夫多项式 $\lambda_M \in \Lambda_P$，它与一个持久模 M 相关联（其条形码包含有限条条），定义见 §2.3，参见其中的公式（11）。

引理 8.1.1. 将 L、$L' \in \mathcal{X}$ 视为 $\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$ 的对象。则

$$\lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(L,L')}(t) = \lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(L',L[-n])}(t^{-1}) \tag{106}$$

在 Λ_P 中。此外，对每个 $i \in \mathbb{Z}$，诺维科夫多项式 (106) 关于 $L' = L[i]$ 是常数，且等于：

$$\lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(L,L[-i])}(t) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_{n-i}(L;\mathbb{Z}_2).$$

证明。第一个公式由弗洛尔同调中的对偶性得出。具体而言，$HF_k(L,L') \cong HF_{n-k}(L',L)^*$ 作为持久模；按照我们在 §2.6.2 中的分次约定，可写为 $HF'_j(L,L') \cong HF'_{-n-j}(L',L)^*$。结合 §6.3 中关于持久模及其对偶的条码的讨论，即得（106）。

第二个结论源于我们在范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X};\mathcal{P})$ 中为弗洛尔复形定义滤过的方式，正如 §2.6.2 中所回顾的，即 $CF_*(L,L)$ 与莫尔斯复形 $CM_*(f_L)$ 相同，该复形对应于莫尔斯函数 $f_L : L \to \mathbb{R}$，且所有生成元的作用量层级均为 0。按照我们的分次约定，现在有

$$CF'_j(L,L[-i]) = CF_{n+j-i}(L,L) = CM_{n+j-i}(f_L),$$

因此 $HF'_0(L,L[-i]) \cong H_{n-i}(L;\mathbb{Z}_2)$。 □

记作 $\mathcal{C}' := \mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$。回顾第 §6 节，我们有两种配对：

$$\kappa' : \overline{K(\mathcal{C}')} \otimes_{\Lambda_P} K(\mathcal{C}') \longrightarrow \Lambda_P,$$
$$\kappa : \overline{K(\mathcal{C})} \otimes_{\Lambda_P} K(\mathcal{C}) \longrightarrow \Lambda,$$

且 κ' 与 κ 通过由包含映射 $\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ 诱导的映射 $K(\mathcal{C}') \longrightarrow K(\mathcal{C})$ 相容。因此，下文将这两种配对都记作 κ。

<escape>由于范畴的有界性性质（105），配对 $\mathcal{C}'$ 的取值属于 κ，而不仅仅是 Λ_P。尽管 Λ 定义在张量积 κ 上 $K(\mathcal{C}') \otimes_{\Lambda_P} K(\mathcal{C}')$，我们通常将其视为双线性映射，并记作 $\kappa(-,-)$。该配对可以明确地写成如下形式：</escape>

$$\kappa([C],[C']) = \sum_i (-1)^i \lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(C,T^iC')}(t), \tag{107}$$

对于任意两个元素 $[C]$，$[C'] \in K(\mathcal{C}')$。还需注意，根据我们的约定，$T^iC' = C'[-i]$。现在我们得到。

推论 8.1.2. 对于 $\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$ 中的任意两个对象 C、C'，我们有

$$\kappa([C],[C'])(t) = (-1)^n \kappa([C'],[C])(t^{-1}).$$

特别地， $\kappa([C],[C])(t) = (-1)^n \kappa([C],[C])(t^{-1})$。此外，如果一个类 $A \in K[\mathcal{CF}uk(\mathcal{X})]$可由一个嵌入拉格朗日子流形 $L \in \mathcal{X}$ 表示，那么

$$\kappa(A,A) = (-1)^n \chi(\bar{L}),$$

其中 $\chi(L)$ 是 L的底层拉格朗日 L 的欧拉示性数。

证明。 回想一下， $\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$ 中的对象可视为 $\mathcal{X}$中的拉格朗日子流形的（过滤）扭曲复形。等价地，它们是权重为0 的 Yoneda 模的迭代锥$\mathcal{Y}(L)$， $L \in \mathcal{X}$。由引理 8.1.1 和（107），结合线性即可得到证明。 □

注 8.1.3。 (i) 我们并不认为推论 8.1.2 中的关系对 $\mathcal{CF}uk(\mathcal{X})$中的所有对象都成立。每个这样的对象都与某个 r-同构于对象 $\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$，其中$r \geq 0$ 但若 $r > 0$，则不足以推出陈述中的关系。

(ii) 由于闭奇数维流形的欧拉示性数为零，推论 8.1.2 中的最后一个公式 也完全可以写作 $\kappa(A,A) = \chi(L)$。

(iii) 元素 $[C] \in K(\mathcal{C})$ 的自 κ-配对 $\kappa([C],[C])$，其中 $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X}))$，在作用移位和平移 C 下均保持不变，即

$$\kappa([\Sigma^r T^k C],[\Sigma^r T^k C]) = \kappa([C],[C]) \ ,$$

对所有 $r \in \mathbb{R}$、 $k \in \mathbb{Z}$ 均成立，其中 Σ^r 和 T 分别是移位函子和平移函子。

推论 8.1.2 的核心是，如果一个类 $A \in K(\mathcal{C})$ 可以由一个嵌入拉格朗日子流形表示，那么欧拉型诺维科夫多项式 $\kappa(A,A)$ 就是常数。一个有趣的问题是考察 $\kappa(A,A)$ 不是常数的情形，并尝试估计 A 的表示元距离嵌入有多远。

下文将讨论对这个问题的两种回答。第一种将“有多远”解释为与第 2.5 节讨论的碎片化伪度量相关的测量。第二种关注可能的 A 浸入表示元的自交点最小数量的下界，并仅在注 8.2.1 中略作介绍。

为表述第一个结果，我们还需要一些记号。首先是间隙的概念，即多项式 $Q \in \Lambda_P$ 的 $\mathrm{gap}(Q)$。假设对于所有 i， $Q = \sum_{i=1}^{k} a_i t^{\alpha_i}$、 $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ 和 $a_i \neq 0$，我们定义

$$\mathrm{gap}(Q) = \min\{\alpha_{i+1} - \max\{\alpha_i, 0\} \mid 1 \leq i \leq k-1,\ \alpha_{i+1} \geq 0\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

而如果对于所有 j 都有 $\alpha_j < 0$，我们就简单地令 $\mathrm{gap}(Q) := 0$。

第二个记号适用于任意满足以下性质的持久范畴 $\mathcal{C}$ ：对于所有对象 A, B，持久模 $\hom_C(A,B)$ 的条形码都只含有限条。在此情形下，设 $\mathcal{K} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 是一个有限对象族。我们令

$$b^{\#}(\mathcal{K}) = \max\{\#(\mathcal{B}_{\hom_{\mathcal{C}}(A,B)}) \mid A, B \in \mathcal{K}\} \ .$$

这里 $\#(\mathcal{B}_M)$ 是与持久模M相关联的条形码 $\mathcal{B}_M$ 的条数。我们将其称为 $\mathcal{K}$ 的<style id='4'>最大条形计数。

在 $\mathcal{C}$ 是 TPC 的情况下，回顾我们具有如下分次持久模 同态$(X, T^\bullet Y)$，其在(13)中定义为 同态$(X, T^\bullet Y)_i$ =同态$_{\mathcal{C}}(X, T^i Y)$ $i \in \mathbb{Z}$。我们将相应的 分次最大条形计数定义为 $\mathcal{K}$：

$$b^{\#}_{\max}(\mathcal{K}) = \max\{\#(\mathcal{B}_{\hom_{\mathcal{C}}(A,T^iB)}) \mid A, B \in \mathcal{K},\, i \in \mathbb{Z}\}.$$

现在我们需要一个与约化分解相关的测度。回顾 §2.5，¯这类分解 $D = (D, \phi)$ 具有一个线性化 $\ell(D)$ 以及一个权重，我们在此将其记为 $\bar{w}(D)$。设 $\mathcal{F} \subset$Obj$(\mathcal{C})$ 在移位和平移下保持不变。假设 D 是 $N \in$Obj$(\mathcal{C})$ 在 $\mathcal{C}$ 中的一个约化分解，其线性化为 $\ell(D)$ $=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，其中每个 $X_i \in \mathcal{F}$。我们固定一些额外的记号，这些记号仅取决于 $\ell(D)$:

- $[D] = [X_1] + \cdots + [X_n] \in K(\mathcal{C})$。- $\{\ell(D)\} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$，这是 D 线性化中的对象集合。- $n_D = n$， D 线性化中的项数。

接着令

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}}(N) = \inf\left\{ n_D^2 \cdot \frac{\bar{w}(D)\, b^{\#}_{\max}(\{\ell(D)\})}{\mathrm{gap}(\kappa([D],[D]))} \;\middle|\; \begin{array}{l} D \text{ is a reduced decomposition of } N \\ \text{such that } \mathrm{gap}(\kappa([D],[D])) \neq 0 \end{array} \right\}. \tag{108}$$

若不存在如上所述的约化分解 D，则令 $\mathcal{R}^{\mathcal{F}}(N) = \infty$。

这一度量可针对任意 TPC $\mathcal{C}$ 定义，但我们将把它应用于三角持久性范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{CF}uk(\mathcal{X})$ 以及 $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$。
我们先陈述并证明这一结果，然后在 §8.2讨论其含义。

定理 8.1.4。 设 $\mathcal{C} = \mathcal{CF}uk(\mathcal{X})$ 和 $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$ 如上所述。若 $N \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 是某个嵌入拉格朗日子流形 $\in \mathcal{X}$ 的 *Yoneda* 模，则：

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}}(N) \geq \frac{1}{4}.$$

我们将在 §8.3给出一个例子来说明该定理。对此结果应作如下理解：¯若 N 存在一个约化分解 $D = (D, \phi)$，如$\mathcal{R}^{\mathcal{F}}$的定义所述，则 s-同构 ϕ 必须满足

$$s \geq \frac{1}{4n_D^2} \cdot \frac{\mathrm{gap}(\kappa([D],[D]))}{b^{\#}_{\max}(\{\ell(D)\})}$$

对于 N 表示一个嵌入拉格朗日子流形。之所以这有用，是因为该不等式的右侧仅取决于 D 的线性化。对于每个 F， $F' \in \mathcal{F}$，只需了解作为持久模的 $HF(F,\ F')$，就能轻松计算它。在这种情况下，最大条形计数显而易见，而间隙项可通过 $K(\mathcal{CF}uk(\mathcal{X}))$ 中的简单线性代数计算得到。在许多例子中， $\mathcal{F}$构成了 $[\mathcal{CF}uk(\mathcal{X})]_\infty$ 的一组生成元，而群 $HF(F,\ F')$ 已为人所知。

定理 *8.1.4* 的证明。 假设 $r > \mathcal{R}^{\mathcal{F}}(N)$。通过考察 §2.5 中约化分解的定义，我们推知存在正合三角 Δ_i，位于 $\mathcal{C}_0$，$1 \leq i \leq k$:

$$\Delta_i \ : \ F_i \longrightarrow Y_{i-1} \longrightarrow Y_i \longrightarrow TF_i \tag{109}$$

其中有 $Y_0 = 0$，以及一个 r'-同构 $\phi : Y_k \to N$，使得

$$r > k^2 \cdot \frac{r' \ b^{\#}_{\max}(\{\ell(D)\})}{\mathrm{gap}(\kappa([D],[D]))}$$

其中 $[D] = \sum_i [F_i]$ 和 $b^{\#}_{\max}(\{\ell(D)\}) = b^{\#}_{\max}(\{F_1, F_2, \ldots, F_k\})$。我们将 $b = b^{\#}_{\max}\{\ell(D)\}$和 $g =$ 间隙$(\kappa([D], [D]))$ 记作.....。我们打算证明，由于 N 是嵌入的，因此有

$$k^2 br' \geq \frac{1}{4}\, g \tag{110}$$

这就推出了该结论。

第一步是考虑这两个分次持久模

$$HF'_{\bullet}(N,N) = \hom_{\mathcal{C}}(N, T^{\bullet}N) \quad \text{and} \quad \hom_{\mathcal{C}}(Y_k, T^{\bullet}Y_k)$$

并注意到它们是 $2r'$-交错的。这是因为，根据 [12, 引理 2.83]，，这两个模 N 和 Y_k 作为三角持久性范畴 $\mathcal{C}$中的对象是 r'-交错的；由此可知，$\hom_{\mathcal{C}}(N, T^{\bullet}Y_k)$ 相对于 $HF'_{\bullet}(N, N)$ 和 $\hom_{\mathcal{C}}(Y_k, T^{\bullet}Y_k)$（作为持久模）均是 r'-交错的，从而推出我们的结论。根据 [28], 中的等距定理，这意味着两个条形码 $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_{HF'_{\bullet}(N,N)}$ 和$\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}_{\hom_{\mathcal{C}}(Y_k, T^{\bullet}Y_k)}$ 之间的瓶颈距离至多为 $2r'$。回顾引理 8.1.1，$\mathcal{B}_1$ 仅由形如 $[0, \infty)$ 的无限区间组成。这意味着 $\mathcal{B}_2$ 中的所有有限区间长度均至多为 r'，而其中所有无限区间均形如 $[x, \infty)$，且 $x \in [-2r', 2r']$。

第二步是注意到 $-[Y_k] = [F_1] + \ldots + [F_k] = [D]$。因此

$$\kappa([D],[D]) = \lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(Y_k, T^{\bullet}Y_k)} \ .$$

特别地，gap$(\kappa([D], [D]))$ =gap$(\lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(Y_k,\ T^{\bullet}Y_k)})$。为了后续使用，le t

$$P = \lambda_{\hom_{\mathcal{C}}(Y_k, T^{\bullet}Y_k)} = \sum_{i=1}^{m} a_i t^{\alpha_i}$$

并固定 $\alpha'_i < \alpha_{i+1}$使得 gap(P) $= \alpha_{i+1} - \alpha'_i$，其中 $\alpha_{i+1} \geq 0$ 且 $\alpha'_i =$ max$\{\alpha_i, 0\}$。

第三步是应用 §5.3 中的持久莫尔斯不等式，特别是推论 5.3.4中的条形计数估计。该估计意味着:

引理 8.1.5。 我们有

$$\#(B_2) \leq k^2 b$$

（其中，与上文一样，$B_2 = \mathcal{B}_{\hom_{\mathcal{C}}(Y_k,\ T^{\bullet}Y_k)}$）。

引理的证明 *8.1.5*。回忆 $b = b^{\#}_{\max}(\{F_1, F_2, \ldots, F_k\})$。根据 $b^{\#}_{\max}$ 的定义，我们有 b 是分次持久模的条形码中条的最大数量$HF_*(F_i,\ F_j)$ 对于 $1 \leq i,\ j \leq k$和 $* \in \mathbb{Z}$。为了证明该命题，我们将使用推论

5.3.4 并将其反复应用于（109）中的正合列。为简化记号，记 $b(M,\ N)\ =\#\mathcal{B}_{\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(M,\ T^{\bullet}N)}$ 其中 $M,\ N\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。对于（109）中的每个正合列以及额外的模 M，我们由推论 5.3.4 得到：

$$b(M,Y_i)\le b(M,Y_{i-1})+b(M,F_i)\ ,\ b(Y_i,M)\le b(Y_{i-1},M)+b(F_i,M)\ .$$

其中，第二个不等式可通过应用对偶性，由第 6.1 节中的（83）推出第一个不等式。显然，取 $M=F_s$，可得：

$$b(F_s,Y_i)\le ib\ ,\ b(Y_i,F_s)\le ib\ .$$

现在假设 $b(Y_q,\ Y_q)\le q^2b$。我们要证明

$$b(Y_{q+1},Y_{q+1})\le(q+1)^2b$$

由归纳法，这就完成了引理的证明。我们有

$$b(Y_q,Y_{q+1})\le b(Y_q,Y_q)+b(Y_q,F_{q+1})\le q^2b+qb$$

并且进一步有

$$\begin{aligned}b(Y_{q+1},Y_{q+1})&\le b(Y_q,Y_{q+1})+b(F_{q+1},Y_{q+1})\\&\le q(q+1)b+(q+1)b=(q+1)^2b.\end{aligned}$$

这就完成了引理的证明。 □

现在我们回到 论证最后部分的定理证明。假设 tha t

$$4k^2br'<g$$

我们将证明这会导致矛盾。这里 k 至少为 1，且 b 至少为 2。这是因为一族恰当拉格朗日子流形的最大条形计数至少等于 $\mathcal{B}_{HF(L,L)}$ 中某个 $L\in\mathcal{X}$ 的条数，而其中至少包含 2 条。因此

$$g\ge 8r'\ .$$

回想一下，$\mathcal{B}_2=\mathcal{B}_{\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(Y_k,T^{\bullet}Y_k)}$中总共有 k^2b 条，每个有限条的长度至多为 r'。我们将 $\mathcal{B}_2$ 中各区间端点的值称为 $\mathcal{B}_2$的谱值。

我们关注属于 $H_\delta=[\alpha_{i+1}-\delta,\alpha_{i+1}+\delta]$ 且满足 $0\le\delta\le\frac{g}{2}$ 的谱值。我们有 $\alpha_{i+1}-\delta-r'\ge g/2-r'\ge 3r'$。因此，只有有限区间的端点才可能属于 $H_{\delta+r'}$（回想一下，无限区间 $[x,\infty)$ 具有 $x\in[-2r',2r']$）。此外，如果一个有限区间$J\in B_2$ 的端点属于 H_δ，那么 $J\subset H_{\delta+r'}$。对于每个 H_δ，我们考虑多项式 P'_δ，其定义与公式（12相同，但只考虑至少有一个端点属于 H_δ的区间。这意味着，如果 $B_2=\bigoplus_j I_j\oplus\bigoplus_h J_h$ 其中 I_j 是有限区间 $I_j=[u_j,v_j)$，而 J_h 是无限区间，那么：

$$P'_\delta=\sum_j(-1)^{q_j}\epsilon_\delta(I_j)(t^{u_j}-t^{v_j})\ .$$

这里， q_j 是分次条形码 $\mathcal{B}_2$ 中 I_j 的次数；如果 u、 v 中至少有一个属于H_δ，则为 ϵ_δ（I_j）$=1$；否则为 ϵ_δ（I_j）$=0$。由于只有有限区间对 P'_δ有贡献，因此我们有 P'_δ（1）$=0$。注意，如果将 P'_δ截断为多项式 P_δ，其中只包含 P'_δ中形如at^α的项， $a\in\mathbb{Z}$ 且满足 $\alpha\in H_\delta$，那么$P_\delta = a_i t^{\alpha_{i+1}}$。显然， P'_δ 中的项数至少与 P_δ中的项数相同。由 P_δ（1）$=a_{i+1}$ 和 P'_δ（1）$=0$ 可知， P'_δ 的项数严格多于 P_δ；在这些多出的项中，至少有一项形如 at^α且满足 $\alpha\in[\alpha_i+\delta,\alpha_i+\delta+r')$ 或 $\alpha\in$（$\alpha_i-\delta-r'$、 $\alpha_i-\delta$]。由于 $P_{\delta+r'}$（1）$=a_{i+1}$，这项多出的项at^α 必定要在 $P'_{\delta+r'}$中被抵消，这意味着：

$$\#\mathcal{B}_2(H_{\delta+r'}) > \#\mathcal{B}_2(H_\delta) \tag{111}$$

其中 $\#\mathcal{B}_2(H_\delta)$ 表示 $\mathcal{B}_2$ 中至少有一个端点位于 H_δ内的区间数量。已知 $k^2br'\le\frac{g}{2}$ 我们应用（111）推导出以下严格不等式序列：

$$\#\mathcal{B}_2(H_{k^2br'+r'}) > \#\mathcal{B}_2(H_{k^2br'}) > \ldots > \#\mathcal{B}_2(H_{r'}) > \#\mathcal{B}_2(H_0) \ge 1\ .$$

该序列的存在与以下事实矛盾： $\mathcal{B}_2$ 中的区间总数至多为 k^2b。□

8.2. **浸入拉格朗日子流形。** 我们将在此说明，定理 8.1.4的陈述如何给出一个估计，说明消解某些浸入拉格朗日子流形的奇点需要多少能量。

这里讨论的浸入拉格朗日子流形是（无障碍的）带标记的浸入拉格朗日子流形，它们在几何上与 $\mathcal{F}$中若干元素的并集重合。更精确地说，设 F_1、.....、 $F_k\subset\mathcal{F}$。回顾一下， $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{X}$ 中忘掉原函数和分次后的元素， $\mathcal{F}$也同样如此。对于 $L\in\mathcal{X}$，我们用 L 表示 $\mathcal{X}$中对应的元素。根据假设，族 $\mathcal{X}$ 处于一般位置。因此，从几何上看，并集 $\mathcal{L}=\cup_i F_i$ 只有双自交点（为简化讨论，我们假设各个 F_i之间没有重复）。按照 [7] 的含义，带标记的浸入拉格朗日子流形——其底层几何拉格朗日子流形为$\mathcal{L}$——是一个四元组 $\mathcal{L}=(\mathcal{L},h_\mathcal{L},\theta_\mathcal{L},I_\mathcal{L})$，其中 $h_\mathcal{L}$、 $\theta_\mathcal{L}$ 分别是原函数和分次，与嵌入情形相同，而 $I_\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}$的自交点的一个子集。在对 $I_\mathcal{L}$ 施加某些条件后（另见 [7]，其中详细讨论了这类浸入拉格朗日子流形），这样的拉格朗日子流形表示一个形式如下的扭复形 $T_\mathcal{L}\in\mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$

$$T_\mathcal{L} = \Big(\bigoplus_{i=1}^{k}\Sigma^{\alpha_i}F_i[k_i]\ ,\ \delta\ \Big)$$

对于某个微分 δ。这里的 α_i 和 k_i 由 $I_\mathcal{L}$ 的选择以及 F_i 上的初始原始元和分次决定。

$\mathcal{L}$ 的奇点消解是选择一组$\mathcal{L}$ 的自交点 $I_\mathcal{L}$ （以及原函数和分次），并选择一个嵌入拉格朗日子流形 $N\subset\mathcal{X}$，连同 $\mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$中的一个 r-同构：

$$\phi : T_\mathcal{L}\to N\ .$$

通过展开各个定义，推论的陈述意味着

$$r \geq \frac{1}{4k^2} \cdot \frac{\mathrm{gap}(\kappa(\oplus_i[\Sigma^{\alpha_i} F_i], \oplus_i[\Sigma^{\alpha_i} F_i]))}{b^{\#}_{\max}(\{F_1, \dots, F_k\})} .$$

如前所述，这个不等式的右侧通常较易处理。

当然，不提及浸入拉格朗日子流形，我们也可以直接讨论对形如 $T = (\oplus_{i=1}^{k} \Sigma^{\alpha_i} F_i[k_i], \delta)$ 的扭复形 $T \in \mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$ 进行奇点消解，上述估计仍然适用。这与先前在定义数 $\mathcal{R}^{\mathcal{F}}$ 时使用的约化分解概念十分契合。

¯注 8.2.1. (i) 在上述意义下对 $\mathcal{L}$ 进行奇点消解的一种几何来源，是在 $I_{\mathcal{L}}$ 中的点处对 $\mathcal{L}$ 进行手术，随后施加哈密顿同伦。这一点并非显而易见，因为只在部分自交¯点处对 $\mathcal{L}$ 进行手术后，得到的仍是一个浸入拉格朗日子流形；它可能无障碍，但不再是嵌入分支的并，因此也不再能用迄今讨论过的藤原型工具来处理。人们预期，无障碍的带标记浸入拉格朗日子流形可以纳入上述某个族 $\mathcal{X}$，并作为滤过 Fukaya 范畴 $\mathcal{F}uk^{imm}(\mathcal{X}; \mathcal{P})$ 的对象。构造这一 $\mathcal{F}uk^{imm}(\mathcal{X}; \mathcal{P})$，以便在 $\mathcal{X}$ 中允许那些并非嵌入分支之并的带标记、浸入且无障碍的拉格朗日子流形，是一件相当微妙的事。非滤过版本见于 [7]，但要将第 [12, 3] 章中的滤过构造加以调整，还需付出额外努力；此处不再讨论。

(ii) 假设 $\mathcal{F}uk^{imm}(\mathcal{X}; \mathcal{P})$ 已定义，我们简要提及所得 TPC 的配对κ的几个性质，$\mathcal{C}\mathcal{F}uk^{imm}(\mathcal{X})$。如果一个类 $A \in K(\mathcal{C}\mathcal{F}uk^{imm}(\mathcal{X}))$ 由一个浸入拉格朗日子流形表示 L（仅具有横截双重点），则（参见推论8.1.2）：

(a) $\kappa(A, A)(t) = (-1)^n \kappa(A, A)(t^{-1})$；(b) L 的自交点数量以下界 $N^+[\kappa(A, A)]$，其中对于多项式 $P = \sum k_i t^{\alpha_i} \in \Lambda_P$、$k_i \in \mathbb{Z}$、$\alpha_i \in \mathbb{R}$，有 $N^+[P] = \sum_{\alpha_i > 0} |k_i|$。

这两个性质都可由浸入的、无障碍拉格朗日子流形 $\mathcal{L}$的弗洛尔同调的簇模型（或珍珠模型）推出。在该模型中，弗洛尔复形 $CF(\mathcal{L}, \mathcal{L})$的生成元分为两类：浸入的定义域上的莫尔斯函数的临界点，以及浸入的自交点。每个自交点出现两次，对应对偶的作用量层级（见 [1], [7]）。

8.3. **一个例子。** 这里旨在说明如何应用推论 8.1.2 和定理 8.1.4。

考虑由以下对象 X 的两个余切丛管接得到的恰当辛流形 S^1，如图1所示，其中 Z_0（蓝色）是其中一个（水平）T^*S^1的零截面，而 Y（绿色）是另一个（垂直）T^*S^1中的一个拉格朗日子流形，由其零截面扰动而来。我们将 Z_0 定向为逆时针方向，并将 Y 定向为顺时针方向（相对于图中这两个拉格朗日子流形的画法，其中

图1），使得 Z_0与 Y 在 y' 处的交点指标为 $+1$。接下来，我们固定 λ 上的一个李维尔形式 X，使得 Z_0 和 Y 都是恰当的。

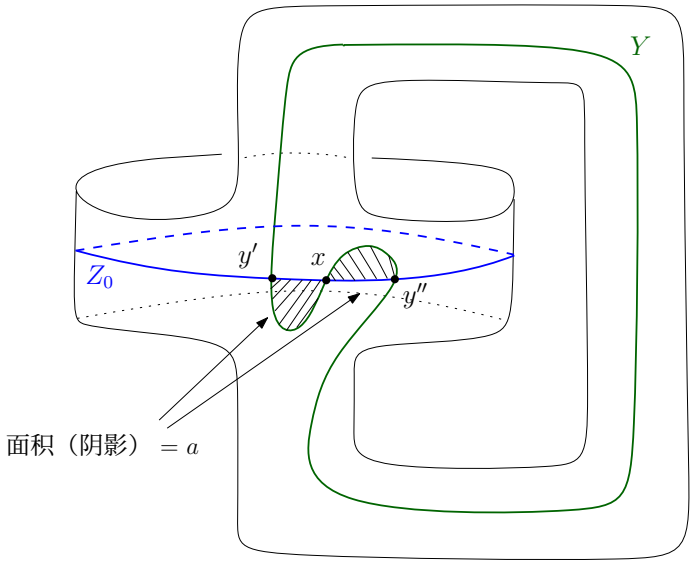


图 1。两个 T^*S^1 的管接，其中 Z_0 和 Y 是两个嵌入拉格朗日子流形。

在下文中，我们将把 Z_0 和 Y 视为带标记拉格朗日子流形，并分别用 Z_0 和 Y表示它们的底层拉格朗日子流形。关于 Z_0 和 Y的标记，我们很快会给出更具体的说明，即这些拉格朗日子流形的分次以及李维尔形式的原函数的选择。设 $\mathcal{X}$ 是 X 中的任意一族恰当拉格朗日子流形，其中包含 Z_0 和 Y 以及，并且 $\mathcal{X}$ 满足 §2.6.2 中的条件。对于族 $\mathcal{X}$，我们像之前一样取中的拉格朗日子流形以及它们所有可能的标记（即，我们为每个拉格朗日子流形 $L \in \mathcal{X}$ 赋予 $\lambda|_L$ 的所有可能的原函数以及所有可能的分次）。

回顾 §2.6，在 Fukaya 范畴的构造中，我们选取的弗洛尔数据包含 0哈密顿量，用于那些横截相交的拉格朗日子流形对。特别地，这适用于 Z_0和 Y，因此弗洛尔复形 $CF_*(Z_0, Y)$ 由 Z_0与 Y之间的交点生成，即 y', x, y''。

我们为 Z_0 和 Y 赋予分次，使其满足：

$$|y'| = |y''| = 0, \text{ and } |x| = 1,$$

其中 $|\cdot|$ 表示同调分次。因此，弗洛尔复形（取 $\mathbb{Z}_2$ 系数）的形式如下：

$$\begin{aligned} CF_0(Z_0, Y) &= \mathbb{Z}_2 y' \oplus \mathbb{Z}_2 y'', & dy' = dy'' = 0, \\ CF_1(Z_0, Y) &= \mathbb{Z}_2 x, & dx = y' + y''. \end{aligned} \tag{112}$$

现在我们来讨论弗洛尔复形上的作用过滤。我们为 $\lambda|_{\bar{Z}_0}$和 $\lambda|_{\bar{Y}}$选择原函数，使得 $Z_0 \cap Y$的交点的作用量为：

$$\mathcal{A}(y') = \mathcal{A}(y'') = 0, \quad \mathcal{A}(x) = a, \tag{113}$$

其中 a 是图 1 所示的区域1。

由此可知，持久Floer同调 $HF_*(Z_0, Y)$ 集中在次数 0，此外，持久模 $HF_0(Z_0, Y)$ 的条形码如下：

$$\mathcal{B}_{HF_0(Z_0,Y))} = \big\{[0, a), [0, \infty)\big\}. \tag{114}$$

我们将由此得到的滤过 Fukaya 范畴记为 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P})$——参见 §2.6。2.

考虑在 y' 处对 $Z_0 \cup Y$ 进行手术，所得拉格朗日子流形由图 2 中以红色表示的浸入拉格朗日子流形 S_ϵ 表示，它有两个自交点 x、y''。这里，ϵ 是在 y' 处进行手术时所用手术柄的面积（手术的详细说明见 [27, 24, 5]）。注意，S_ϵ 是恰当浸入拉格朗日子流形（对两个恰当拉格朗日子流形在单个点处进行手术时，情况总是如此）。由于 $\lambda|_{\bar{Z}_0}$ 和 $\lambda|_Y$ 的原函数在 y' 处取值相同（回忆一下，$\mathcal{A}(y') = 0$），我们可以用 Z_0 和 Y 的原函数为 S_ϵ 配备一个原函数（更准确地说，需要用一个浸入映射 $j : S \longrightarrow X$ 对 S_ϵ 进行参数化，使得 $j(S) = S$，从而使 $j^*\lambda$ 恰当，并在 S 上定义后一 1-形式的原函数）。我们还对这个 S_ϵ 施加一个 Hofer范数不超过 ϵ' 的小哈密顿微扰，从而得到 $S = S_{\epsilon, \epsilon'}$，使其与 $\mathcal{X}$ 中的所有元素横截相交。

很容易看出，S 是无障碍的（也就是说，它不携带伪全纯泪滴；另见 [7]）。因此，S 产生了一个定义在$\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$上的过滤 A_∞-模，我们将其记为 $\mathcal{S}$。事实上，这个模的存在需要用到注 8.2.1 (ii) 中提到的浸入Fukaya范畴理论中的一些内容，但此处只需用到该理论最基础的部分。其核心在于，由于 S 是无障碍的，我们可以将 S 纳入一个更大的族 $\mathcal{X}'$，使其包含 $\mathcal{X}$ 和 S。我们仍可定义与 $\mathcal{X}'$相关联的 Fukaya 过滤范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}'; \mathcal{P}')$。此时，浸入拉格朗日子流形 S给出了一个（过滤）Yoneda 模 $\mathcal{Y}(S)$，它定义在 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}'; \mathcal{P}')$上。扰动数据 $\mathcal{P}'$ 可以选取得对集合 $\mathcal{X}$也适用，并且存在一个嵌入 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P}) \to \mathcal{F}uk(\mathcal{X}'; \mathcal{P}')$，使得 $\mathcal{Y}(S)$拉回后成为定义在 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P})$上的模。最后，利用 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$在过滤拟等价意义下与扰动数据无关这一点，我们可以将此模拉回为定义在 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}; \mathcal{P})$上的模$\mathcal{S}$。这一过程的细节见 [12, 第 3 章，定理 3.12]，，但该处只讨论了 S 为嵌入子流形的情形。此处针对我们的 S 所需的修改很容易实现，方法可参照 [7]（该文在更一般的情形下介绍了带浸入对象的非过滤 Fukaya 型范畴的构造）。还需注意，该文中对 $CF(S, S)$、$CF(S, X)$、$CF(X, S)$（对于 $X \in \mathcal{X}$）这类弗洛尔复形的构造会产生过滤结构，高阶 A_∞-运算的情形也类似。

接下来, 考虑由映射锥定义的扭曲复形（在 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$ 上）

$$\mathcal{C} := \mathrm{Cone}(Z_0 \xrightarrow{y'} Y) \tag{115}$$

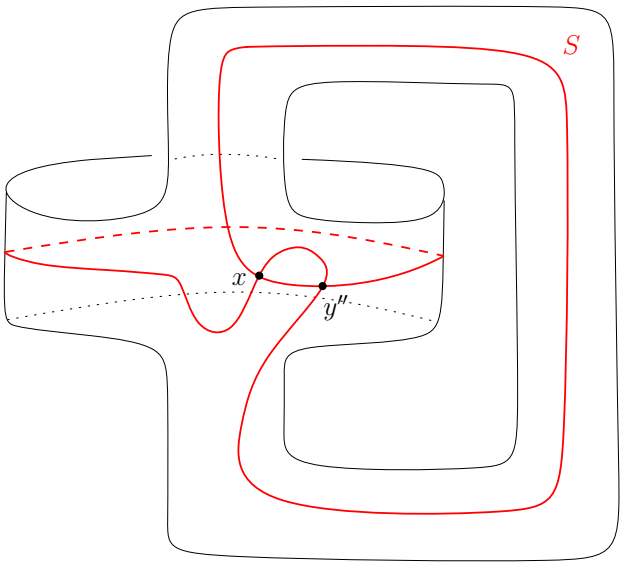


图 2. 在 y'处进行手术得到的浸入拉格朗日子流形。

态射 $y' \in$ 同态$_{\mathcal{F}uk(\mathcal{X})}(Z_0, Y) = CF_0(Z_0, Y)$ 的映射。（回顾一下，y'是一个循环。）由于 y'的过滤层级为 0，且 Z_0、Y 都是过滤扭曲复形，因此可以按照标准方式为 $\mathcal{C}$ 赋予过滤扭曲复形 $\in \mathcal{C}'\mathcal{F}uk(\mathcal{X}) \subset \mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$ 的结构。

我们断言 $\mathcal{S} \in \mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$，并且存在一个 r-同构

$$\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$$

使得当 ϵ 和 ϵ' 都趋于 0 时，$r = r(\epsilon, \epsilon')$ 趋于 0。

为证明这一点，我们比较范畴 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X}'; \mathcal{P}')$ 上的 $\mathcal{Y}(S)$ 和 $\mathcal{C}$，并注意到存在一个 r-同构

$$\bar{\phi} : \mathcal{C} \to \mathcal{Y}(S)$$

形如 $\mu_2(\alpha, -)$，其中交点 α 位于 S 与 $Z_0 \cup Y$之间。为说明这一点，我们可以将 $\mathcal{C} = \mathcal{Y}(S')$ 解释为 S' 一个带标记的浸入拉格朗日子流形，按照 §8.2 中讨论的含义，它具有显然的原函数和分次，并带有标记点 $I_{\mathcal{C}} = \{y'\}$。此时，使用 ϵ'-小哈密顿微扰也很有用，可以使其具有特殊形式；它本质上对应于 S 上具有两个临界点的莫尔斯函数。在这种情况下，α 是 $S_{\epsilon, \epsilon'}$ 与 S' 之间的交点，对应于该函数的极大值。通过将 ϕ 经由 $\mathcal{F}uk(\mathcal{X})$ 拉回，我们得到 ϕ。

现在我们转入 K-群 $K(\mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X}))$ 中的计算。我们有：

$$[\mathcal{C}] = -[Z_0] + [Y] \in K(\mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X})). \tag{116}$$

接下来我们计算配对 $\kappa([\mathcal{C}],\ [\mathcal{C}])$。根据线性和定理 8.1.2 ，我们得到：

$$\begin{aligned}\kappa([\mathcal{C}],[\mathcal{C}]) &= \kappa([Y],[Y]) + \kappa([Z_0],[Z_0]) - \kappa([Y],[Z_0])) - \kappa([Z_0],[Y]) \\ &= -\chi(Y) - \chi(Z_0) - \lambda_{HF_*(Z_0,Y)}(t) + \lambda_{HF_*(Z_0,Y)}(t^{-1}) \\ &= 0 + 0 - (1 - t^a + 1) + (1 - t^{-a} + 1) \\ &= -t^{-a} + t^a,\end{aligned} \tag{117}$$

其中第三个等号来自条形码数据（114）以及定理 8.1.2 中的恒等式。

由于 $\kappa([\mathcal{C}],\ [\mathcal{C}])$ 不是常数，根据推论 8.1.2，类 $[\mathcal{S}] = [\mathcal{C}] \in K(\mathcal{C}\mathcal{F}uk(\mathcal{X}))$不能由 $\mathcal{X}$ 中的任何拉格朗日子流形表示。

此外，我们现在想要应用定理 8.1.4。首先，前面提供的数据给出了一个约化分解 D，其权重为 r，属于 $\mathcal{S}$，其线性化为 $\ell(D) = (T^{-1}Y, Z_0)$。

显然，$[D] = -[\mathcal{C}]$ 所以 间隙$(\kappa([D],[D])) = a$。显然 $n_D = 2$。计算 $b^{\#}_{\max}(\{T^{-1}Y, Z_0\}) = 2$ 也是直接的。我们固定 $\mathcal{F} = \{T^{-1}Y, Z_0\}$。因此，我们得到

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}}(\mathcal{S}) \leq \frac{8r}{a}\ .$$

定理 8.1.4 意味着，若 $r = r(\epsilon,\epsilon') \leq \frac{a}{16}$，则 $\mathcal{C}$ 不能表示一个嵌入的拉格朗日子流形（也就是说，它不是 $\mathcal{X}$中某个元素的 Yoneda 模）。此外，只要集合 $\mathcal{X}$包含 $\mathcal{X}$， Z_0， Y，这个结果就与集合无关。

应用定理 8.1.4 的另一种方式是，通过与上述非常相似的论证推导出：假设 ϵ 和 ϵ' 都非常小，那么将 S 变形为一个嵌入所需的哈密顿同伦的 Hofer范数至少为 $\frac{a}{16}$。

注 8.3.1。 正如在定理 4 8.1.4 中的常数 所提到的，这里的常数16 并非最优。从本质上说，我们讨论的论证非常一般，但在这个例子中得到的常数很容易改进。在此例中，可以使用能量为 a 的哈密顿同伦将 S 变形为一个嵌入，而且这很可能是最优的。

参考文献

[1] G. Alston 和 E. Bao. 通过珍珠轨迹研究浸入拉格朗日子流形的 Floer 上同调。预印本（2019年）。可见 https://arxiv.org/abs/1907.03072。[2] S. Barannikov. 带框架的莫尔斯复形及其不变量。载于奇点与分岔，第《苏联数学进展》第21卷，第93–115页。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1994年。[3] A. A. Beilinson、J. Bernstein 和 P. Deligne. 奇异空间上的分析与拓扑学（I）。*Astérisque*，第100卷，1982年。[4] N. Berkouk. 层-函数对应的（非）稳定性。预印本（2022年）。可见 https://arxiv.org/pdf/2207.06335。[5] P. Biran 和 O. Cornea. 拉格朗日配边 I。《美国数学会杂志》，26(2):295–340，2013年。[6] P. Biran 和 O. Cornea. 拉格朗日配边与 Fukaya 范畴。《几何与泛函分析》，24(6):1731–1830，2014年。[7] P. Biran 和 O. Cornea. 拉格朗日图解词典。《京都数学杂志》，61(2):399–493，2021年。

[8] P. Biran、O. Cornea 和 E. Shelukhin. 拉格朗日阴影与三角范畴。Astérisque，第(426)卷：128页，2021年。[9] P. Biran、O. Cornea 和 J. Zhang. 滤过导出范畴。进行中。[10] P. Biran、O. Cornea 和 J. Zhang. 持久性 K理论。预印本（2023年）。可见于 https: //arxiv.org/pdf/2305.01370v1。[11] P. Biran、O. Cornea 和 J. Zhang. 三角剖分与持久性：代数入门。预印本（2021年）。可见于 https://arxiv.org/abs/2104.12258。[12] P. Biran、O. Cornea 和 J. Zhang. 三角剖分、持久性与 Fukaya 范畴。即将发表于《欧洲数学学会回忆录》。预印本版本（2023年、2024年）可见于 https: // arxiv.org/abs/2304.01785。[13] O. Bobrowski 和 M. S. Borman. 高斯随机场的欧拉积分与持久同调。《拓扑分析杂志》，4(1):49–70，2012年。[14] M. Botnan、S. Oppermann 和 S. Oudot. 通过秩分解研究多参数持久性的带符号条形码。载于第38届国际计算几何研讨会（SoCG 2022），LIPIcs 第224卷。《莱布尼茨国际信息学会议论文集》，第19号论文，18页。达格施图尔城堡。莱布尼茨信息学中心，瓦登，2022年。[15] L. Buhovsky、J. Payette、I. Polterovich、L. Polterovich、E. Shelukhin 和 V. Stojisavljević. 粗略节点计数与拓扑持久性。预印本（2022年）。可见于 https://arxiv.org/pdf/2206. 06347。[16] E. Campling. 拉格朗日配边的 Fukaya 范畴与对偶性。预印本（2019年）。可见于 https://arxiv.org/abs/1902.00930。[17] K. Costello. 拓扑共形场论与卡拉比-丘范畴。《数学进展》，210(1):165–214，2007年。[18] S. Ganatra. 缠绕福柯范畴的辛上同调与对偶性。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2012年。博士论文——麻省理工学院。[19] D. Govc 和 R. Hepworth. 持久度量。《纯粹与应用代数杂志》，225(3):第106517号论文，40页，2021年。[20] M. Kashiwara. 可构造层的指标定理。第130号，第193–209页。1985年。微分系统与奇点（吕米尼，1983年）。[21] M. Kashiwara 和 P. Schapira. 范畴与层，数学科学基础丛书第332卷 / 数学科学基本原理/。施普林格出版社，柏林，2006年。[22] M. Kashiwara 和 P. Schapira. 持久同调与微局部层论。《应用与计算拓扑学杂志》，2(1-2):83–113，2018年。[23] M. Kontsevich 和 Y. Soibelman. 关于 A_∞代数、 A_∞范畴与非交换几何的札记。载于《同调镜像对称》，《物理学讲义》757卷，第153–219页。Springer，柏林，2009年。[24] F. Lalonde 和 J.-C. Sikorav. 余切丛中的拉格朗日子流形与恰当拉格朗日子流形。《瑞士数学评论》，66(1):18–33，1991年。[25] S. Mac Lane. 工作数学家的范畴论，数学研究生教材第5卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1998年。[26] V. Lebovici. 可构造函数的混合变换。预印本（2021年）。可见于 https: //arxiv.org/pdf/2111.07829。[27] L. Polterovich. 拉格朗日子流形的手术。《几何与泛函分析》，1(2):198–210，1991年。[28] L. Polterovich、D. Rosen、K. Samvelyan 和 J. Zhang. 几何与分析中的拓扑持久性，大学讲义系列第74卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2020年。[29] L. Polterovich、E. Shelukhin 和 V. Stojisavljević. 莫尔斯理论与 Floer 理论中带算子的持久模。《莫斯科数学杂志》，17(4):757–786，2017年。

[30] Stacks 项目。15.58 导出张量积。可见 https://stacks.math.columbia.edu/tag/06XY。[31] P. Schapira。关于可构造函数的运算。《纯粹与应用代数杂志》，72(1):83–93，1991年。[32] P. Seidel。福柯范畴与 *Picard-Lefschetz* 理论。苏黎世高等数学讲座。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2008年。[33] D. Tamarkin。不可位移性的微局部条件，第269卷，收录于 *Springer* 数学与统计学论文集，第99–223页。Springer，尚贝里，2018年。[34] M. Usher。Morse-Novikov 理论和 Floer 理论的抽象层间持久性。预印本（2023年）。可见 https://arxiv.org/pdf/2302.14342.pdf。[35] M. Usher 和 J. Zhang。持久同调与 Floer-Novikov 理论。几何与拓扑，20(6):3333–3430，2016年。[36] J. Zhang。 p-循环持久同调与 Hofer 距离。辛几何杂志，17(3):857–927，2019年。[37] J. Zhang。定量 *Tamarkin* 理论。CRM 短期课程；辛几何虚拟系列讲座。Springer 国际出版，苏黎世，2020年。

PAUL BIRAN，数学系，苏黎世联邦理工学院，拉米街 101 号，苏黎世 8092，瑞士电子邮件地址：biran@math.ethz.ch OCTAV CORNEA，数学与统计学系，蒙特利尔大学，市中心分局邮政信箱 6128，蒙特利尔，魁北克省 H3C 3J7，加拿大电子邮件地址：cornea@dms.umontreal.ca

JUN ZHANG，几何与物理研究所，中国科学技术大学，金寨路 96 号，合肥，安徽，230026，中国电子邮箱地址：jzhang4518@ustc.edu.cn