arXiv:2305.01391v1 [math.DG] 2 May 2023

某些最大对称 (2,3,5)分布的局部等价 III：An-Nurowski 曲面在平面上滚动

MATTHEW RANDALL

Abstract. 我们考察由 An-Nurowski 曲面与平面的乘积上的 An-Nurowski 圆 twistor 丛所给出的最大对称 (2, 3, 5) 分布。这个圆 twistor 分布刻画了 An-Nurowski 曲面在平面上无滑动或扭转滚动时的构形空间。我们计算与该最大对称 (2, 3, 5) 分布相关的向量场，它们定义了一个分裂的 $\mathfrak{g}_2$ 李代数；通过投影，我们在子流形 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ （不含曲面的构形空间）上得到 $SL(3,\mathbb{R})$ 的作用。

1. Introduction

在 [1], 的研究中发现，除了曲率比为 1 : 9 或 9 : 1 的两个球面或两个双曲面彼此无滑动或扭转滚动的构形空间外，还存在一个额外曲面 Σ^2 的构形空间，该曲面配备了黎曼度量

$$ds^2 = \left(\frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}\right)^2 \mathrm{d}h^2 + h^2 \mathrm{d}q^2 \tag{1.1}$$

在平面上无滑动或扭转滚动时具有最大 G_2 对称性的度量，其中 κ 和 c 为任意常数，且 c 非零。我们将具有此类度量的黎曼曲面称为 An-Nurowski 曲面。它构成一个由两个常数参数化的族；除去由 c 生成的相似变换后，有三个互不等价的类。这就是 [1] 中的主要结果定理 3。本文计算了与 An-Nurowski 曲面 Σ^2 在 $\mathbb{R}^2$ 上无滑动或扭转滚动时所形成的构形空间对应的 (2, 3, 5) 分布的分裂李代数向量场。对于具有 $\kappa = 0$ 和 $c = 1$ 的曲面，本文给出了完整的向量场列表；它们对应于 [1] 中的度量 g_{1o}。作为推论，将构成 $\mathfrak{sl}_3 \subset \mathfrak{g}_2$ 的向量场投影后，我们得到 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ 上的 $SL(3,\mathbb{R})$ 作用； $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ 是构形空间中不包含该曲面的子流形。

本文的主要目标是计算这一特定滚动实例的 $\mathfrak{g}_2$ 向量场李代数。这里的大部分乃至全部结果都已在 [1], 中得到，只是我们补充了若干细节。双曲面滚动的情形已在 [9] 中处理，球面滚动则见 [10]。首先，我们

建立该构形空间上共形结构的度量代表元。

2. Nurowski's metric for the configruation space of An-Nurowski surface rolling on a plane

考虑余标架

$$t_1 = \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}x, \quad t_2 = \mathrm{d}\phi - \mathrm{d}x, \quad t_3 = \mathrm{d}\theta + h(x)\mathrm{d}q, \quad t_4 = \mathrm{d}\theta - h(x)\mathrm{d}q$$

在平面 $\mathbb{R}^2$ 上，该平面具有局部坐标（ϕ， θ）和标准度量

$$ds_1^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\phi^2 \tag{2.1}$$

以及一个坐标为 (x, q) 且具有"翘曲积"度量的旋转曲面 Σ^2

$$ds_2^2 = \mathrm{d}x^2 + h(x)^2\mathrm{d}q^2. \tag{2.2}$$

配备分裂符号乘积度量的这两个曲面的乘积上

$$2t_1t_2 + 2t_3t_4$$

我们可以构造五维 An-Nurowski 圆圈扭量分布 M，它将 $\mathbb{R}^2 \times \Sigma^2$ 的自对偶零 2-平面参数化为一个圆丛。这个圆 twistor 分布通过对自对偶零 2-平面进行水平提升而构造，并自然地配备如下的 (2,3,5) 分布。

这两个 1-形式湮灭了零 2-平面。

$$\cos(\psi)t_3 - (\sin(\psi) + 1)t_1 \quad \text{and} \quad \cos(\psi)t_2 + (\sin(\psi) + 1)t_4.$$

自对偶零 2-平面平行这一要求给出了额外的 1-形式

$$d\psi + \frac{h'}{2h}(t_3 - t_4).$$

这三个 1-形式编码了与在平面上无滑动、无扭转地相互滚动的旋转曲面（具有 Killing 对称性）相关联的 An-Nurowski 圆 twistor 分布。由向量场 $\mathcal{D}$ 张成的分布

$$V^1 = \partial_\theta + \cos(\psi)\partial_x + \sin(\psi)(\frac{1}{h}\partial_q - \frac{h_x}{h}\partial_\psi),$$
$$V^2 = \partial_\phi - \sin(\psi)\partial_x + \cos(\psi)(\frac{1}{h}\partial_q - \frac{h_x}{h}\partial_\psi)$$

被这三个1-形式湮灭，且秩为2。当 $h_{xx} \neq 0$ 时，括号分布 $[\mathcal{D}, \mathcal{D}]$ 的秩为3，而完整切空间 $[\mathcal{D}, [\mathcal{D}, \mathcal{D}]] \cong TM$ 的秩为5；因此，只要满足一般性条件 $h_{xx} \neq 0$，该分布的增长向量便为 (2, 3, 5)。

在 [7], 的第5节中，说明了如何为任意一个 (2, 3, 5)-分布规范地关联一个分裂符号为 (2, 3) 的共形度量类，也称为 Nurowski 共形结构或 Nurowski 共形度量，使得该秩2分布相对于共形度量类中的任意度量都是各向同性的。将等价方法 [4] （另见 [7] 的第5节）应用于 (2, 3, 5)-分布，可得到1-形式 (θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5) 和 ($\Omega_1, \dots, \Omega_9$)，它们共同定义了 5 维流形 M 上的一个秩 14 主丛。Nurowski 共形度量类中的一个代表度量为

$$g = 2\theta_1\theta_5 - 2\theta_2\theta_4 + \frac{4}{3}\theta_3\theta_3. \tag{2.3}$$

当 g 的 Weyl 张量消失时，该分布称为极大对称分布，其局部对称群为最小的例外李群 split G_2。

现在，对于我们所研究的旋转曲面在平面上滚动这一例子，且满足一般性条件 $h_{xx} \neq 0$，来确定圆 twistor 分布上共形结构的这一代表度量。采用记号 χ，有

$$\chi_1 = \mathrm{d}\theta, \qquad \chi_2 = \mathrm{d}\phi, \qquad \chi_3 = \mathrm{d}x, \qquad \chi_4 = h(x)\mathrm{d}q.$$

分布 $\mathcal{D}$ 由以下 1-形式湮灭:

$$\omega_1 = \chi_1 - \cos(\psi)\chi_3 - \sin(\psi)\chi_4 = \frac{1+\sin(\psi)}{2}t_1 + \frac{1-\sin(\psi)}{2}t_2 + \frac{\cos(\psi)}{2}(t_3 - t_4),$$
$$\omega_2 = \chi_2 + \sin(\psi)\chi_3 - \cos(\psi)\chi_4 = \frac{1+\sin(\psi)}{2}t_4 + \frac{1-\sin(\psi)}{2}t_3 + \frac{\cos(\psi)}{2}(t_2 - t_1),$$
$$\omega_3 = \mathrm{d}\psi + \frac{h_x}{h}\chi_4.$$

取以下对象即可将其补充为一个余标架:

$$\omega_4 = \sin(\psi)\chi_3 - \cos(\psi)\chi_4, \quad \omega_5 = \cos(\psi)\chi_3 + \sin(\psi)\chi_4.$$

为了得到 Nurowski 共形结构的余标架，我们取

$$\theta_1 = \omega_1, \quad \theta_2 = \omega_2, \quad \theta_3 = \left(\frac{h}{h''}\right)^{1/3}\omega_3,$$
$$\theta_4 = \left(\frac{h''}{h}\right)^{1/3}\left[\omega_4 + \left(\frac{\lambda}{10hh''^2} - \frac{\mu\cos(\psi)^2}{30hh'^2h''^3}\right)\omega_2 + \frac{(3hh''^2+\lambda)\cos(\psi)}{3h'(h'')^2}\omega_3\right],$$
$$\theta_5 = \left(\frac{h''}{h}\right)^{1/3}\left[\omega_5 - \left(\frac{\lambda}{10hh''^2} - \frac{\mu\sin(\psi)^2}{30hh'^2h''^3}\right)\omega_1 + \frac{\mu\cos(\psi)\sin(\psi)}{15hh'^2h''^3}\omega_2 - \frac{(3hh''^2+\lambda)\sin(\psi)}{3h'(h'')^2}\omega_3\right],$$

其中

$$\lambda = h'''h'h - h''h'^2 - 3h''^2h \quad \text{and} \quad \mu = 15\lambda h''^2h - 3h'h''(\lambda'h - 3\lambda h') + 5\lambda^2.$$

由此，我们得到

$$\begin{aligned}g &= 2\theta_1\theta_5 - 2\theta_2\theta_4 + \frac{4}{3}\theta_3^2 \\ &= \left(\frac{h''}{h}\right)^{1/3}\Bigg[2(\omega_1\omega_5 - \omega_2\omega_4) - \frac{\lambda}{5hh''^2}(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{\mu}{15hh'^2h''^3}(\sin(\psi)\omega_1 + \cos(\psi)\omega_2)^2 \\ &\quad - \frac{2(3hh''^2+\lambda)}{3h'(h'')^2}(\sin(\psi)\omega_1\omega_3 + \cos(\psi)\omega_2\omega_3)\Bigg] + \frac{4}{3}\left(\frac{h}{h''}\right)^{2/3}\omega_3^2,\end{aligned}$$

可通过函数 $(\frac{h''}{h})^{-1/3}$ 进行缩放，得到

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= 2(\omega_1\omega_5 - \omega_2\omega_4) - \frac{\lambda}{5hh''^2}(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{\mu}{15hh'^2h''^3}(\sin(\psi)\omega_1 + \cos(\psi)\omega_2)^2 \\ &\quad - \frac{2(3hh''^2+\lambda)}{3h'h''^2}(\sin(\psi)\omega_1\omega_3 + \cos(\psi)\omega_2\omega_3) + \frac{4h}{3h''}\omega_3^2.\end{aligned}$$

由于

$$\omega_1 = \chi_1 - \omega_5, \quad \omega_2 = \chi_2 + \omega_4, \quad \omega_4^2 + \omega_5^2 = \chi_3^2 + \chi_4^2,$$
$$\chi_1\omega_5 = \frac{1}{2}(\chi_1^2 + \omega_5^2 - (\chi_1 - \omega_5)^2), \quad \chi_2\omega_4 = \frac{1}{2}((\chi_2+\omega_4)^2 - \chi_2^2 - \omega_4^2),$$

我们有

$$2(\omega_1\omega_5 - \omega_2\omega_4) = \chi_1^2 + \chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_4^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2$$

因此，我们可以将度量更简洁地表示为

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= \chi_1^2 + \chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_4^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \frac{\lambda}{5hh''^2}(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{\mu}{15hh'^2h''^3}(\sin(\psi)\omega_1 + \cos(\psi)\omega_2)^2 \\ &\quad - \frac{2(3hh''^2+\lambda)}{3h'h''^2}(\sin(\psi)\omega_1\omega_3 + \cos(\psi)\omega_2\omega_3) + \frac{4h}{3h''}\omega_3^2.\end{aligned}$$

在 [1] 中已证明，当 $\lambda(x) = 0$ 时，度量是共形平坦的，且 (2,3,5)-分布达到最大对称性；也就是说， $h(x)$ 满足三阶常微分方程

$$h'''h'h - 3h''^2h - h''h'^2 = 0.$$

定理 2.1（ [1]中的命题 5）。对于两个曲面的乘积上与 An-Nurowski 圆 twistor 分布相关联的共形结构，Nurowski 代表度量为：其中一个曲面是具有度量 (2.2) 的旋转曲面，另一个是具有度量 (2.1) 的平面，二者彼此无滑动或扭转滚动，其度量由下式给出

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= \chi_1^2 + \chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_4^2 - (\frac{\lambda}{5hh''^2}+1)(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{\mu}{15hh'^2h''^3}(\sin(\psi)\omega_1 + \cos(\psi)\omega_2)^2 \\ &\quad - \frac{2(3hh''^2+\lambda)}{3h'h''^2}(\sin(\psi)\omega_1\omega_3 + \cos(\psi)\omega_2\omega_3) + \frac{4h}{3h''}\omega_3^2.\end{aligned}$$

当微分方程满足下述条件时，该度量是共形平坦的，且该分布具有最大分裂 G_2 对称性

$$h'''h'h - 3h''^2h - h''h'^2 = 0 \tag{2.4}$$

成立。

例 2.1（球面在平面上滚动）。对于单位球面在平面上滚动的构形空间，取 $h(x) = \sin(x)$，我们得到$\mu(x) = 0$ 和 $3hh''^2 + \lambda = 0$。这给出了共形结构

$$\tilde{g} = \chi_1^2 + \chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_4^2 - \frac{2}{5}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{4}{3}\omega_3^2$$

它不是共形平坦的。

方程 (2.4) 的解给出了上述 An 和 Nurowski 曲面。

定义 2.2。我们将配备度量 (2.2) 的黎曼旋转曲面称为 An 和 Nurowski 曲面，其中 $h(x)$ 是微分方程 (2.4) 的一个解。

2.1. 关联微分方程。微分方程 (2.4) 等价于 [1] 的微分方程 (4.11)

$$\rho_{xxx}\rho_x\rho^2 - 3\rho_{xx}^2\rho^2 + \rho_{xx}\rho_x^2\rho + \rho_x^4 = 0$$

该方程由作者 An 和 Nurowski 通过以下变量替换推导得出。取 $\tilde{x} = \int \rho \mathrm{d}x$，其中 ρ、x 是 [1] 中定理 3 的证明所用的坐标。我们取 $h(\tilde{x}) = \rho$。于是

$$\begin{aligned}
\rho_x &= hh_{\tilde{x}}, \\
\rho_{xx} &= hh_{\tilde{x}}^2 + h^2h_{\tilde{x}\tilde{x}}, \\
\rho_{xxx} &= h(h_{\tilde{x}}^3 + 4hh_{\tilde{x}}h_{\tilde{x}\tilde{x}} + h^2h_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}).
\end{aligned}$$

将这些代入 [1] 的方程 (4.11)，得到

$$h^5(h_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}h_{\tilde{x}}h - 3h_{\tilde{x}\tilde{x}}^2h - h_{\tilde{x}\tilde{x}}h_{\tilde{x}}^2) = 0,$$

并将 $\tilde{x}$ 重新标记为 x，即可得到方程 (2.4)。

2.2. 求解微分方程。现在我们来考察微分方程 (2.4) 的解

$$h'''h'h - 3h''^2h - h''h'^2 = 0.$$

这可以按如下方式求解。左侧是 $\frac{h}{(h')^3}$ 的导数的分子，因此对其进行一次积分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{h(h')^3}{h''}\right) = 0$$

得到

$$\frac{h(h')^3}{h''} = c^3.$$

这个二阶方程还存在另一个积分，因为该方程是下式导数的分子

$$\frac{h^2}{c^2} + \frac{2c}{h_x}.$$

由此可得

$$\frac{h^2}{c^2} + \frac{2c}{h_x} = \kappa,$$

其中 κ 和 c 是两个积分常数，且 c 不为零。因此我们有 e

$$h_x = \frac{2c^3}{\kappa c^2 - h^2}.$$

这给出

$$\mathrm{d}h = \frac{2c^3}{\kappa c^2 - h^2}\mathrm{d}x,$$

或者等价地，

$$\frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}\mathrm{d}h = \mathrm{d}x,$$

由此我们得到

$$\begin{aligned} x + \alpha &= \int \frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}\mathrm{d}h \\ &= \frac{\kappa}{2c}h - \frac{1}{6c^3}h^3, \end{aligned}$$

而（2.4）的解由三次方程的根给出

$$h^3 - 3\kappa c^2 h + 6c^3(x + \alpha) = 0.$$

现在我们进行变量替换。

$$\mathrm{d}h = \frac{2c^3}{\kappa c^2 - h^2}\mathrm{d}x,$$

将 ∂_x 替换为 $\frac{2c^3}{\kappa c^2 - h^2}\partial_h$。在这个新坐标中，度量 (2.2) 变为 (1.1) 中的形式。

在这个新坐标系中，关于圆扭量丛上的度量（该圆扭量丛取自一个 An-Nurowski 度量与平面的乘积）的结果为

定理 2.3. 与定义在两个曲面乘积上的 An-Nurowski 圆 twistor 分布相关的共形结构的 Nurowski 代表度量，其中一个曲面是带有度量 (1.1) 的 An-Nurowski 曲面，另一个是平面，

由它们彼此无滑动或扭转滚动给出

(2.5)

$$\tilde{g} = \chi_1^2 + \chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_4^2 - 2\frac{(\kappa c^2 - h^2)h}{2c^3}(\sin(\psi)\omega_1\omega_3 + \cos(\psi)\omega_2\omega_3) + \frac{(\kappa c^2 - h^2)^3}{6c^6}\omega_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2.$$

度　　量共形平坦，且该分布具有极大的分裂 G_2 对称性　　.

在这个坐标系 $(\theta, \phi, \psi, h, q)$ 中，我们现在将写出通过括号运算生成分裂 $\mathfrak{g}_2$李代数的向量场。

3. Split $\mathfrak{g}_2$ Lie algebra associated to the An-Nurowski circle twistor distribution

本节中，我们考虑 An 和 Nurowski [1] 所述的 (2,3,5) 分布 `，对应于 An-Nurowski 曲面在平面上无滑动或扭转滚动的情形（或平面在曲面上无滑动或扭转滚动的情形）。曲面度量为

$$ds_1^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\phi^2$$

是平坦平面上的度量，且具有常负高斯曲率 0。重新定义坐标 (h, q) 后的 An-Nurowski 曲面，其度量为

$$ds_2^2 = \left(\frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}\right)^2 \mathrm{d}h^2 + h^2\mathrm{d}q^2$$

具有负高斯曲率 $-\frac{8c^6}{(\kappa c^2 - h^2)^3}$，并且具有 Killing 对称性。

为了将最大对称的滚动 (2,3,5) 分布与 [4], 中得到的平坦嘉当分布联系起来，我们采用如下坐标变换

$$\begin{aligned}
c_1 &= 6c^3\theta - 4h(2c^3q + \kappa c^2\psi)\sin(\psi) - h(3c^2\kappa - h^2)\cos(\psi),\\
c_2 &= 6c^3\phi - 4h(2c^3q + \kappa c^2\psi)\cos(\psi) + h(3c^2\kappa - h^2)\sin(\psi),\\
c_3 &= 2c^3q + \kappa c^2\psi,\\
c_4 &= -\sin(\psi)h,\\
c_5 &= \cos(\psi)h.
\end{aligned}$$

由此可知，下列 1-形式

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &:= \mathrm{d}c_1 - 2c_4\mathrm{d}c_3 - 4c_3\mathrm{d}c_4,\\
\Theta_2 &:= \mathrm{d}c_2 + 2c_5\mathrm{d}c_3 + 4c_3\mathrm{d}c_5,\\
\Theta_3 &:= \mathrm{d}c_3 + c_5\mathrm{d}c_4 - c_4\mathrm{d}c_5,
\end{aligned}$$

属于由以下 1-形式（ω_1、 ω_2、 ω_3）张成的空间

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \mathrm{d}\theta - \cos(\psi)\frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}\mathrm{d}h - \sin(\psi)h\mathrm{d}q,\\ \omega_2 &= \mathrm{d}\phi + \sin(\psi)\frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}\mathrm{d}h - \cos(\psi)h\mathrm{d}q,\\ \omega_3 &= \mathrm{d}\psi + \frac{2c^3}{\kappa c^2 - h^2}\mathrm{d}q.\end{aligned}$$

在上述坐标变换下，我们有

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= 6c^3\omega_1 + h\sin(\psi)(\kappa c^2 - h^2)\omega_3,\\ \Theta_2 &= 6c^3\omega_2 + h\cos(\psi)(\kappa c^2 - h^2)\omega_3,\\ \Theta_3 &= -(h^2 - \kappa c^2)\omega_3.\end{aligned}$$

该分布由以下向量场张成

$$\begin{aligned}X^1 &= \partial_\theta + \frac{\sin(\psi)}{h}\left(\partial_q - \frac{2c^3}{\kappa c^2 - h^2}\partial_\psi\right) + \frac{2c^3}{\kappa c^2 - h^2}\cos(\psi)\partial_h,\\ X^2 &= \partial_\phi + \frac{\cos(\psi)}{h}\left(\partial_q - \frac{2c^3}{\kappa c^2 - h^2}\partial_\psi\right) - \frac{2c^3}{\kappa c^2 - h^2}\sin(\psi)\partial_h.\end{aligned}$$

平坦度量的坐标可通过转到 Engel 分布得到，具体方法是取 $\mathfrak{r}_1 = c_5$、$\mathfrak{r}_2 = c_4$、 $\mathfrak{r}_3 = c_3$、 $\mathfrak{r}_4 = \frac{1}{2}(c_2 + 3c_3c_5)$、 $\mathfrak{r}_5 = \frac{1}{2}(c_1 - 3c_3c_4)$。我们得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_1 &= \cos(\psi)h,\\ \mathfrak{r}_2 &= -\sin(\psi)h,\\ \mathfrak{r}_3 &= 2c^3q + \kappa c^2\psi,\\ \mathfrak{r}_4 &= -\frac{h}{2}(2c^3q + \kappa c^2\psi)\cos(\psi) + 3c^3\phi + \frac{h}{2}(3\kappa c^2 - h^2)\sin(\psi),\\ \mathfrak{r}_5 &= -\frac{h}{2}(2c^3q + \kappa c^2\psi)\sin(\psi) + 3c^3\theta - \frac{h}{2}(3\kappa c^2 - h^2)\cos(\psi).\end{aligned}$$

由此可知，对于由 (2.5) 给出的在平面上滚动的 An-Nurowski 曲面，其最大对称分布的 Nurowski 度量与以下度量共形等价

$$\mathrm{d}s^2 = 2\mathrm{d}\mathfrak{r}_1\mathrm{d}\mathfrak{r}_5 + 2\mathrm{d}\mathfrak{r}_2\mathrm{d}\mathfrak{r}_4 + \mathrm{d}\mathfrak{r}_3{}^2$$

该度量由 Engel 在 [5] 和 [6]中确定。

命题 3.1. 上述坐标函数 $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_5)$ 将 An-Nurowski 曲面在平面上滚动所对应的极大对称滚动分布的 Nurowski 共形结构映射到标准的分裂符号

平坦度量（由 Engel 在 [5] 和 [6] 中给出的 $\mathbb{R}^5$ ）。我们有

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{6c^6}{\kappa c^2 - h^2}\tilde{g}$$

其中 $\tilde{g}$ 由定理 2.3 的 (2.5) 式给出。

我们还有， [5] 和 [6] 中给出的 1-形式满足

$$\mathrm{d}\mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_1\mathrm{d}\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_2\mathrm{d}\mathfrak{r}_1 = \Theta_3,\ \mathrm{d}\mathfrak{r}_4 + \frac{1}{2}(\mathfrak{r}_3\mathrm{d}\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_1\mathrm{d}\mathfrak{r}_3) = \frac{1}{2}\Theta_2,\ \mathrm{d}\mathfrak{r}_5 + \frac{1}{2}(\mathfrak{r}_2\mathrm{d}\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_3\mathrm{d}\mathfrak{r}_2) = \frac{1}{2}\Theta_1.$$

按照 [10], ，我们现在写出这些向量场

$$Z^1 = \partial_{c_3} + 2c_5\partial_{c_2} - 2c_4\partial_{c_1},\ Z^2 = \partial_{c_4} + 4c_3\partial_{c_1} - 2c_5\partial_{c_3},\ Z^3 = \partial_{c_5} + 2c_4\partial_{c_3} - 4c_3\partial_{c_2},$$

并定义

(3.1)

$$S^1 = Z^2 + c_5Z^1,\quad S^2 = Z^3 - c_4Z^1,\quad S^3 = -c_1Z^2 + c_2Z^3 - (c_1c_5 + c_2c_4 + c_3^2)Z^1.$$

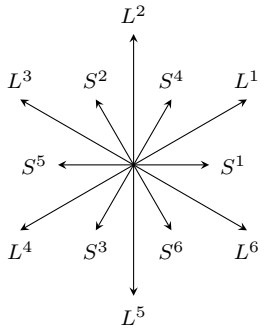
向量场 S^1、 S^2 和 S^3 两两通过李括号生成分裂$\mathfrak{g}_2$ 的李代数，具体如下：用李括号定义以下向量场

$$\begin{aligned} S^4 &= [S^1, S^2],\quad S^5 = [S^2, S^3],\quad S^6 = [S^3, S^1],\\ L^1 &= [S^1, S^4],\quad L^3 = [S^2, S^5],\quad L^5 = [S^3, S^6],\\ L^2 &= [S^2, S^4],\quad L^4 = [S^3, S^5],\quad L^6 = [S^1, S^6] \end{aligned}$$

并取 $H_1 = [S^2, S^6]$ 和 $H_2 = [S^4, S^3]$，我们要求向量场集合此即

$$\{S^1, S^2, S^3, S^4, S^5, S^6, \frac{1}{4}(H_2 - H_1), \frac{\sqrt{3}}{12}(H_1 + H_2), L^1, L^2, L^3, L^4, L^5, L^6\}$$

构成分裂的 14 维李代数 $\mathfrak{g}_2$。选择由 $\frac{1}{4}(H_2 - H_1)$ 和 $\frac{\sqrt{3}}{12}(H_1 + H_2)$ 张成的嘉当子代数后，根图如下图所示。



根据上文给出的 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ 的公式可知，向量场S^1、 S^2 和 S^3 具有如下坐标表达式:

(3.2)
$$S^1 = \frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}\partial_\phi + \cos(\psi)(\frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3 h}\partial_q - \frac{\partial_\psi}{h}) - \sin(\psi)\partial_h,$$
(3.3)
$$S^2 = \frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}\partial_\theta + \sin(\psi)(\frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3 h}\partial_q - \frac{\partial_\psi}{h}) + \cos(\psi)\partial_h,$$
(3.4)
$$\begin{aligned} S^3 = {} & 3(h^2 - \kappa c^2)(\theta\partial_\phi - \phi\partial_\theta) - 4c^2 h(\kappa\psi + 2cq)\partial_h - (3\kappa c^2 - h^2)\partial_\psi \\ & - \frac{1}{2c^3}(c^4(2cq + \kappa\psi)^2 - (3\kappa c^2 - h^2)(\kappa c^2 - h^2))\partial_q \\ & + \cos(\psi)\bigg(6c^3\phi\partial_h + \frac{3}{h}(h^2 - c^2\kappa)\theta\partial_q + \frac{6\theta c^3}{h}\partial_\psi - \frac{2h}{c}(\kappa c^2 - h^2)(2cq + \kappa\psi)\partial_\theta \\ & - \frac{h}{2c^3}(2c^4(2cq + \kappa\psi)^2 - (3\kappa c^2 - h^2)(\kappa c^2 - h^2))\partial_\phi\bigg) \\ & - \sin(\psi)\bigg(- 6c^3\theta\partial_h + \frac{3}{h}(h^2 - \kappa c^2)\phi\partial_q + \frac{6c^3\phi}{h}\partial_\psi - \frac{2h}{c}(\kappa c^2 - h^2)(2cq + \kappa\psi)\partial_\phi \\ & + \frac{h}{2c^3}(2c^4(2cq + \kappa\psi)^2 - (3\kappa c^2 - h^2)(\kappa c^2 - h^2))\partial_\theta\bigg). \end{aligned}$$

向量场 S^1 和 S^2 属于由 $S^1 = \frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}X^2$和 $S^2 = \frac{\kappa c^2 - h^2}{2c^3}X^1$ 张成的分布，并且被 1- 形式 $\{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\}$ 湮灭。

定理 3.2. 由坐标表达式 (3.2)、(3.3)、(3.4) 给出的向量场 S^1、 S^2 和 S^3 ，与 An-Nurowski 曲面在平面上无滑动或扭转滚动所对应的构形空间的 (2,3,5) 分布相关，它们两两通过括号运算生成分裂型 $\mathfrak{g}_2$ 的李代数。

李代数 $\mathfrak{g}_2$ 与对称代数 $\mathfrak{aut}(\mathcal{D})$ 同构；后者是与 $\mathcal{D}$ 的自同构群相关联的李代数。有关对称代数的坐标表达式，请参见 [11]。该李代数的交换关系见 [11] 的附录。其余向量场其实也不难写出，只需利用坐标函数 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$，通过李括号计算即可。例如，

我们发现，嘉当子代数中的对易向量场为

$$
\begin{aligned}
H_1 &= -h\partial_h - 6\phi\partial_\phi - \frac{2cq+\kappa\psi}{c}\partial_q + \frac{h}{2c^3}(3h^2-4\kappa c^2)\cos(\psi)\partial_\theta + \frac{h}{2c^3}(3h^2-8\kappa c^2)\sin(\psi)\partial_\phi \\
&\quad + \sin(2\psi)(3\partial_\psi - \frac{3\kappa}{2c}\partial_q) - 3\cos(2\psi)h\partial_h - \frac{h^3}{2c^3}\sin(3\psi)\partial_\phi + \frac{h^3}{2c^3}\cos(3\psi)\partial_\theta, \\
H_2 &= -6\theta\partial_\theta - 6\phi\partial_\phi - 2h\partial_h - \frac{2}{c}(2cq+\kappa\psi)\partial_q + \frac{2h\kappa}{c}\cos(\psi)\partial_\theta - \frac{2h\kappa}{c}\sin(\psi)\partial_\phi.
\end{aligned}
$$

对于 $c=1$ 和 $\kappa=0$ 的情形，我们也可以给出向量场的完整列表（模相似变换，这对应于 [1] 中定理 3 的 g_{1o} 类），因为这样可以更简洁地展示。在坐标 (θ,ϕ,h,q,ψ) 中，短根对应的向量场为

$$
\begin{aligned}
S^1 &= -\frac{h^2}{2}\partial_\phi - \cos(\psi)(\frac{h}{2}\partial_q + \frac{\partial_\psi}{h}) - \sin(\psi)\partial_h, \\
S^2 &= -\frac{h^2}{2}\partial_\theta - \sin(\psi)(\frac{h}{2}\partial_q + \frac{\partial_\psi}{h}) + \cos(\psi)\partial_h, \\
S^3 &= 3h^2(\theta\partial_\phi - \phi\partial_\theta) - 8hq\partial_h + h^2\partial_\psi - \frac{1}{2}(4q^2-h^4)\partial_q \\
&\quad + \cos(\psi)\Big(6\phi\partial_h + 3h\theta\partial_q + \frac{6\theta}{h}\partial_\psi + 4h^3q\partial_\theta - \frac{h}{2}(8q^2-h^4)\partial_\phi\Big) \\
&\quad - \sin(\psi)\Big(-6\theta\partial_h + 3h\phi\partial_q + \frac{6\phi}{h}\partial_\psi + 4h^3q\partial_\phi + \frac{h}{2}(8q^2-h^4)\partial_\theta\Big), \\
S^4 &= \partial_q + \sin(\psi)h\partial_\theta + \cos(\psi)h\partial_\phi, \\
S^5 &= -(4q^2-h^4)\partial_\phi + 6\theta\partial_q + 2qh^2\partial_\theta + \sin(\psi)(2h^2\partial_h + 6\theta h\partial_\theta + \frac{8q}{h}(\partial_\psi - \frac{h^2}{4}\partial_q)) \\
&\quad - \cos(\psi)(8q\partial_h - 6\theta h\partial_\phi - h^3\partial_q) + 2\cos(2\psi)qh^2\partial_\theta - 2\sin(2\psi)qh^2\partial_\phi, \\
S^6 &= -(4q^2-h^4)\partial_\theta - 6\phi\partial_q - 2qh^2\partial_\phi - \cos(\psi)(2h^2\partial_h + 6\phi h\partial_\phi + \frac{8q}{h}(\partial_\psi - \frac{h^2}{4}\partial_q)) \\
&\quad - \sin(\psi)(8q\partial_h + 6\phi h\partial_\theta - h^3\partial_q) + 2\sin(2\psi)qh^2\partial_\theta + 2\cos(2\psi)qh^2\partial_\phi.
\end{aligned}
$$

长根由以下向量场给出

$$
\begin{aligned}
L^1 &= -\partial_\theta,\\
L^2 &= \partial_\phi,\\
L^3 &= 3(2\theta\partial_\phi - \partial_\psi) - \frac{h^3}{2}(3\sin(\psi)+\sin(3\psi))\partial_\theta + \frac{h^3}{2}(3\cos(\psi)-\cos(3\psi))\partial_\phi\\
&\quad + 3\sin(2\psi)h\partial_h + 3\cos(2\psi)\partial_\psi,\\
L^4 &= -((2q)(8q^2+3h^4) - 36\phi\theta)\partial_\phi + (h^6+36\theta^2)\partial_\theta - 18\phi\partial_\psi + 18\theta h\partial_h + 36\theta q\partial_q\\
&\quad - 3\sin(\psi)\left(8qh^2\partial_h + 3h^3\phi\partial_\theta - 3h^3\theta\partial_\phi - \frac{2}{h}(h^4+4q^2)\partial_\psi + 8q^2h\partial_q\right)\\
&\quad - \cos(\psi)\left(24q^2\partial_h - 9h^3\theta\partial_\theta - 9h^3\phi\partial_\phi - 6qh^3\partial_q\right)\\
&\quad + 3\sin(2\psi)(6\theta\partial_\psi + 6h\phi\partial_h - 4q^2h^2\partial_\phi + 2qh^4\partial_\theta)\\
&\quad + 3\cos(2\psi)(6\phi\partial_\psi - 6h\theta\partial_h + 4q^2h^2\partial_\theta + 2qh^4\partial_\phi)\\
&\quad - 3\cos(3\psi)h^3(\phi\partial_\phi - \theta\partial_\theta) - 3\sin(3\psi)h^3(\phi\partial_\theta + \theta\partial_\phi),\\
L^5 &= -((2q)(8q^2+3h^4) + 36\phi\theta)\partial_\theta - (h^6+36\phi^2)\partial_\phi - 18\theta\partial_\psi - 18\phi h\partial_h - 36\phi q\partial_q\\
&\quad + 3\cos(\psi)\left(8h^2q\partial_h - 3h^3\theta\partial_\phi + 3h^3\phi\partial_\theta - \frac{2}{h}(h^4+4q^2)\partial_\psi + 8q^2h\partial_q\right)\\
&\quad - \sin(\psi)\left(24q^2\partial_h - 9h^3\theta\partial_\theta - 9h^3\phi\partial_\phi - 6qh^3\partial_q\right)\\
&\quad - 3\cos(2\psi)(6\theta\partial_\psi + 6h\phi\partial_h - 4q^2h^2\partial_\phi + 2qh^4\partial_\theta)\\
&\quad + 3\sin(2\psi)(6\phi\partial_\psi - 6h\theta\partial_h + 4q^2h^2\partial_\theta + 2qh^4\partial_\phi)\\
&\quad + 3\cos(3\psi)h^3(\phi\partial_\theta + \theta\partial_\phi) + 3\sin(3\psi)h^3(\theta\partial_\theta - \phi\partial_\phi),\\
L^6 &= 3(2\phi\partial_\theta + \partial_\psi) - \frac{h^3}{2}(3\sin(\psi)+\sin(3\psi))\partial_\theta + \frac{h^3}{2}(3\cos(\psi)-\cos(3\psi))\partial_\phi\\
&\quad + 3\sin(2\psi)h\partial_h + 3\cos(2\psi)\partial_\psi,
\end{aligned}
$$

其中，在向量场中，我们按照三角函数基底（1,cos(ψ),sin(ψ),cos(2ψ),sin(2ψ),cos(3ψ),sin(3ψ)）对各项进行分组。我们还有

$$
\begin{aligned}
H_1 &= -h\partial_h - 6\phi\partial_\phi - 2q\partial_q + \frac{3h^3}{2}\cos(\psi)\partial_\theta + \frac{3h^3}{2}\sin(\psi)\partial_\phi\\
&\quad + 3\sin(2\psi)\partial_\psi - 3\cos(2\psi)h\partial_h - \frac{h^3}{2}\sin(3\psi)\partial_\phi + \frac{h^3}{2}\cos(3\psi)\partial_\theta,\\
H_2 &= -6\theta\partial_\theta - 2h\partial_h - 4q\partial_q - 6\phi\partial_\phi.
\end{aligned}
$$

以下几对向量场的坐标表达式在两侧具有一定的对称性：(S^1, S^2)、(S^5, S^6)、(L^3, L^6) 和 (L^4, L^5)，位于两个

由 S^3 和 S^6 分隔的超平面。此外请注意，在 S^5 和 S^6 中，旋转项最高到 2ψ；而在长根 L^3、L^4、L^5、L^6 中，则最高到 3ψ。

坐标（c_1，c_2，c_3，c_4，c_5）以下列方式确定了 $\mathfrak{sl}_3$ 的李代数到一个四维超曲面上的自然投影。考虑由 $\{L^1, L^2, L^3, L^4, L^5, L^6, H_1, H_2\}$ 的 $\mathbb{R}$-线性张成所给出的子代数。参照 [11]，附录中向量场的坐标表达式，可以发现，在坐标表达式中仅出现 c_3 的正幂，以及包含 $c_3\partial_{c_3}$ 的项。因此，我们可以将其限制在超曲面 $c_3 = 0$ 上，从而得到这些向量场。

$$
\begin{aligned}
&L^1 = -6\partial_{c_1}, \quad L^2 = 6\partial_{c_2}, \quad L^3 = 6(c_1\partial_{c_2} - c_4\partial_{c_5}),\\
&L^4 = 6c_1(c_1\partial_{c_1} + c_2\partial_{c_2} + c_4\partial_{c_4}) - 6c_2c_4\partial_{c_5},\\
&L^5 = -6c_2(c_1\partial_{c_1} + c_2\partial_{c_2} + c_5\partial_{c_5}) + 6c_1c_5\partial_{c_4},\\
&L^6 = 6(c_2\partial_{c_1} - c_5\partial_{c_4}),\\
&H_1 = -6(c_2\partial_{c_2} - \frac{1}{3}c_4\partial_{c_4} + \frac{2}{3}c_5\partial_{c_5}),\\
&H_2 = -6(c_1\partial_{c_1} + c_2\partial_{c_2} + \frac{1}{3}c_4\partial_{c_4} + \frac{1}{3}c_5\partial_{c_5})
\end{aligned}
$$

在 $\{c_3 = 0\}$ 上形成一个 $\mathfrak{sl}_3$ 代数。

$\mathfrak{sl}_3$ 的这一参数化来自分裂符号度量的共形缩放

$$dS^2 = 2\mathrm{d}c_1\mathrm{d}c_5 + 2\mathrm{d}c_2\mathrm{d}c_4$$

在 4 维中。令 $c_6 = c_1c_5 + c_2c_4$。我们可以通过将共形因子取为某个坐标的倒数来缩放度量，例如取 c_4，从而得到

$$\frac{1}{c_4^2}dS^2 = 2\mathrm{d}\left(\frac{c_6}{3c_4}\right)\mathrm{d}\left(\frac{-3}{c_4}\right) + 2\mathrm{d}\left(\frac{c_5}{c_4}\right)\mathrm{d}\left(\frac{c_1}{c_4}\right).$$

这确定了如下新坐标:

$$(c_1, c_2, c_4, c_5) \overset{\varphi}{\mapsto} \left(\frac{c_6}{3c_4}, \frac{c_5}{c_4}, \frac{c_1}{c_4}, -\frac{3}{c_4}\right) =: (c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}).$$

映射 φ 具有这样的性质：其 6 次复合映射 $\varphi^{(6)}$ 是恒等映射。这对应于循环群 C_6 从 ∂_{c_1} 和 ∂_{c_2} 开始，依次遍历根图中的六个根。再加上对称性 $(c_1, c_2, c_4, c_5) \mapsto (c_2, c_1, c_5, c_4)$，这两个映射生成了阶为 12 的二面体群 D_6。向量场 ∂_{c_i}, $\partial_{c_i^{(1)}}$, $\partial_{c_i^{(2)}}$, $\partial_{c_i^{(3)}}$, $\partial_{c_i^{(4)}}$, $\partial_{c_i^{(5)}}$ 对于 $i = 1$ 或 2，进而将上面的 $\{L^1, L^2, L^3, L^4, L^5, L^6\}$ 确定到常数。相应的对称群作用 $SL_3(\mathbb{R}) \subset G_2$ 可以与命题 4.1 中作用于舞蹈度量的对称群作用进行比较，其中 $SL(3, \mathbb{R})$ 作用于 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$，第一因子射影化为 $\mathbb{RP}^2$，第二因子射影化为其对偶舞蹈对 $\mathbb{RP}^{2*}$。对于圆 twistor 分布的 An-Nurowski

曲面在平面上滚动的情形，我们有 $\{c_3 = 0\}$ 上的坐标变换为

$$c_1 = 6c^3\theta - h(3c^2\kappa - h^2)\cos(\psi), \quad c_2 = 6c^3\phi + h(3c^2\kappa - h^2)\sin(\psi),$$
$$c_4 = -\sin(\psi)h, \quad c_5 = \cos(\psi)h.$$

更令人惊讶的是，在此情形下，还存在一个从 $\mathfrak{sl}_3$到 3维子流形 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$的进一步投影。

4. 无曲面的平面

在英国小说家 Ian McEwan 的短篇小说《Solid Geometry》中，一位名叫 David Hunter 的虚构19世纪数学家在一群起初持怀疑态度的数学界听众面前，发表了一场关于无曲面的平面的讲座。本节中，我们将与 An-Nurowski 曲面在平面上无滑动或扭转滚动相关联的 5维圆扭量丛分布投影到 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$。通过限制，我们得到对称群 $SL(3,\mathbb{R}) \subset G_2$ 在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$上的作用，亦即不含 An-Nurowski 曲面的构形空间上的作用，如下所示。

定理 4.1. 设 $\mathcal{D}$ 是圆扭量丛 M 上的 An-Nurowski (2, 3, 5)分布，该丛与具有度量 (1.1) 的 An-Nurowski 曲面 Σ 相关联，且该曲面在平面上无滑动或扭转滚动。设 $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{aut}(\mathcal{D})$ 是由定理 3.2 中的向量场 S^1、S^2 和 S^3 通过李括号生成的李代数。那么，子代数 $\mathfrak{sl}_3 \subset \mathfrak{g}_2$ 的向量场自然地经由

$$\pi : M \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$$
$$(\theta, \phi, h, q, \psi) \mapsto (\theta, \phi, 0, -\frac{\kappa}{2c}\psi, \psi)$$

到 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 = \{q = -\frac{\kappa}{2c}\psi\} \cap \{h = 0\}$ 上，即不含 Σ 的构形空间子流形。

证明。我们考虑第 3 节中给出的 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ 的坐标变换。我们取如上所述作用于 4 维超曲面 $\{c_3 = 0\} = \{2c^3q + \kappa c^2\psi = 0\}$ 的自然 $\mathfrak{sl}_3$ 子代数。接着我们注意到，现在在长根中，坐标表达式里只剩下 h 的正幂以及包含 $h\partial_h$ 的项。这使我们能够进一步将 $\mathfrak{sl}_3$ 投影到子流形 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 = \{q = -\frac{\kappa}{2c}\psi\} \cap \{h = 0\}$ 上。$\mathbb{S}^1$ 是圆扭量丛的纤维坐标的拓扑。以 $c = 1$ 为例，这给出

向量场

$$
\begin{aligned}
L^1 &= -\partial_\theta,\\
L^2 &= \partial_\phi,\\
L^3 &= -6\sin(\psi)^2\partial_\psi + 6\theta\partial_\phi,\\
L^4 &= -36(\sin(\psi)\phi - \cos(\psi)\theta)\sin(\psi)\partial_\psi + 36\theta(\theta\partial_\theta + \phi\partial_\phi),\\
L^5 &= 36(\sin(\psi)\phi - \cos(\psi)\theta)\cos(\psi)\partial_\psi - 36\phi(\theta\partial_\theta + \phi\partial_\phi),\\
L^6 &= 6\cos(\psi)^2\partial_\psi + 6\phi\partial_\theta,\\
H_1 &= 6\cos(\psi)\sin(\psi)\partial_\psi - 6\phi\partial_\phi,\\
H_2 &= -6\theta\partial_\theta - 6\phi\partial_\phi
\end{aligned}
$$

在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ 上定义 $SL(3,\mathbb{R})$ 的局部作用。 □

我们可以将这一结果与命题 4.1 的情形进行对比：在 [2], 中，$SL(3,\mathbb{R})$ 作用于舞蹈对。这种三维投影是 An-Nurowski 曲面在平面上滚动这一例中特有的，在 [9] 和 [10]中的极大对称双曲面或球面滚动分布情形下并不存在。

此外，度量代表元 g 作为对称二阶张量，在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$上恒等地消失，而令人费解的是，哪些对称性产生了 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$上的这些 $\mathfrak{sl}_3$生成元。

我们还可以问，是否存在一种自然的方法来逆转这一过程，从上述 $\mathfrak{sl}_3$ 李代数出发，对向量场进行延拓，以得到 $\mathfrak{g}_2$ 李代数。根据上面显示的公式，涉及延拓坐标 ∂_h 和 ∂_q 的表达式并不那么直接。

$\mathfrak{sl}_3$ 代数中由对跖长根生成的三个 $\mathfrak{sl}_2$，可以写成秩为 3 的 1-形式对偶基；我们还可以利用 [8] 中的 $SL(2)$ Pfaff 系统构造，创建更多具有分裂 $\mathfrak{g}_2$对称性的微分系统。然而，这样一来，与使用原始 An-Nurowski 曲面的圆周扭量构造之间的几何联系便会消失。

References

[1] D. An 和 P. Nurowski，滚动物体的扭量空间，《数学物理通讯》326，2，（2014年），393–414。[2]Gil Bor、Luis Hern´andez Lamoneda 和 Paweł Nurowski，舞蹈度量、 G_2-对称性与射影滚动，《美国数学会汇刊》370（2018年），4433–4481。[3] E. Cartan，《论有限连续单群的结构》，《科学院通报》116（1893年），784–786。[4] E. Cartan，《Pfaff 系统、五个变量以及二阶偏微分方程》，《高等师范学校科学年刊》（3）27（1910年），109–192。[5] F. Engel，《论一个具有十四个参数的单群》，《科学院通报》巴黎版116（1893年），786–788。

[6] F. Engel, 《五维空间中的两个奇特群 ¨》, 《德国数学家协会年报》8（1900年）, 196–198。¨P. Nurowski, 微分方程与共形结构, 《几何与物理学杂志》55（2005年）, 19–49。[7]M. Randall, 滚动分布的 Monge标准形, 《美国数学会会刊》151, 第2期（2023年）, 853–863。[8] M. Randall, 某些极大对称滚动分布与 SU(2) Pfaff系统的局部等价, 《北海道数学杂志》52（2023年）, 97–128。[9] M. Randall, 某些极大对称(2,3,5)分布的局部等价 I, arXiv:2108.04599。[10]M. Randall, 某些极大对称(2,3,5)分布的局部等价 II, arXiv:2109.10307。

School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, 219 Ningliu Road, Nanjing, China电子邮箱地址：100093@nuist.edu.cn