# 使用逆矩阵修正引理和Benders分解求解安全约束最优潮流的新方法

Matias Vistnes 和 Vijay Venu Vadlamudi挪威科技大学电气能源系，挪威特隆赫姆{matias.vistnes, vijay.vadlamudi}@ntnu.no

Sigurd Hofsmo Jakobsen 和 Oddbjørn Gjerde*SINTEF*能源研究所挪威特隆赫姆{sigurd.jakobsen, oddbjorn.gjerde}@sintef.no

arXiv:2305.01395v1 [math.OC] 2 May 2023

摘要—**随着电力系统复杂性的不断增加，人们需要更快速的电力系统可靠性分析方法。我们提出了一种求解安全约束最优潮流（SCOPF）问题的新方法，该方法利用Sherman-Morrison-Woodbury恒等式和Benders分解减少计算时间。案例研究表明，在一个包含500个节点的系统中，与采用预防性“N-1”策略相比，在确保系统可靠运行、考虑短期和长期故障后限值的同时，运行时间可减少83.5%，并降低运行成本。**

索引词—**最优潮流、Benders分解、Schur补、Sherman-Morrison-Woodbury恒等式。**

## 一、引言

即使计算机的处理能力不断提升，在不断扩张的电力系统中，电力系统分析所需的所有建模细节仍无法实现而不遭遇计算瓶颈。对系统运营商和规划人员而言，更令人担忧的是，由于可再生能源渗透率提高以及极端天气日益频繁，系统状态变化得越来越快。此外，随着能源转型和电气化进程推进，电力系统投资未能跟上需求增长，导致系统运行越来越接近设备限值。因此，获得准确的解至关重要，这些解能够确保向客户可靠供电；社会对电力的依赖程度已远超以往。

采用传统的可靠性管理方法，可以通过电网建设方案来实现可靠性，使系统始终满足确定性可靠性准则（DRC）（通常为 N-1[1]）。运营商通常采用预防性重新调度经济调度，以满足 DRC。然而，这类方案的成本可能高得令人难以承受，而且未必符合社会经济效益。建议欧盟资助的 GARPUR 项目 [1], 致力于采用更具概率性、以风险为基础的方法进行可靠性管理，在可靠性与成本之间取得平衡。项目提出的可靠性管理方法与准则（RMAC）包含社会经济目标、可靠性目标、剔除原则和放宽原则。近期研究表明，RMAC 需要更好的方法，尤其需要能够更好地随系统规模扩大而扩展的方法 [1]–[3]。

安全约束最优潮流（SCOPF）是风险管理与控制（RMAC）研究中广泛使用的工具。它可用于优化发电计划和电力系统运行。完整的SCOPF公式应采用交流电力系统模型，包含预防性、纠正性和恢复性措施，以满足系统在当前状态和潜在故障状态下的限值要求。这是一个大规模非凸混合整数非线性规划（MINLP）[2], ，目前尚不存在能够分析大型实际系统的全包容性求解方法 [4], [5]。问题难以求解的原因有很多，尤其包括系统规模、所考虑的故障数量，以及预防性、纠正性和恢复性措施的优化。风险和机会约束增加了问题的复杂性 [4]。Capitanescu [2] 指出，应纳入多组故障后限值（对应不同时间尺度），以更好地模拟运行人员采取的措施以及设备运行限值所涉及的不同时间尺度。文献中提出了许多SCOPF公式。Wang 等 [4] 采用拉格朗日松弛和Benders分解，为大型电力系统求解基于风险的直流安全约束最优潮流。Kardos 等 [3] 采用并行分布式算法，利用Schur补，在大型系统中求解包含预防性措施的非概率交流安全约束最优潮流。Karangelos和Wehenkel [5]则在较小型电力系统中，采用迭代方案求解包含预防性和纠正性措施的机会约束交流安全约束最优潮流。

求解大型电力系统的安全约束最优潮流，需要考虑大量节点、支路和故障。本文重点介绍两种方法：逆矩阵修正引理（IMML）和 Benders分解。

本论文研究成果所依据的研究工作获得了挪威研究委员会通过“输电电网韧性与概率可靠性管理”项目（RaPid）（资助编号：294754）、挪威水资源与能源局以及Statnett的资助。

[1]“N-1 准则是一项原则，根据该原则，系统应始终能够承受可信的应急——即系统组件（如线路、变压器或发电机）意外故障或停运——并在不违反运行安全限值的情况下适应新的运行状态” [1]。

IMML 展示了如何高效计算大型矩阵中的矩阵小幅修改。它最初被称为 Sherman-Morrison-Woodbury 恒等式 [6], , 后来应用于电力系统领域 [7]。尽管在文献中应用较少，IMML 是 Schur补的一种应用，可通过减少故障场景的计算负担，在 SCOPF公式中发挥巨大潜力。IMML 与 Benders分解相结合，后者是一种广泛应用且效率很高的方法，可用于分解大型优化问题[4], [8], [9]。

本文提出一种新颖、高效且可扩展的方法，通过预防性和纠正性措施来确定电力系统的最优社会经济运行。未来工作将计划纳入恢复性措施。该方法将 IMML 和 Benders分解整合到概率型直流SCOPF框架中；所开发的方法具有模块化特点，可与其他 SCOPF公式及求解技术结合使用。采用直流安全约束最优潮流，以便分析大型电力系统。本文的核心贡献在于高效求解潮流，并以独特方式构造同时纳入预防性和纠正性措施的 Benders割。

本文其余部分安排如下：第二节介绍 SCOPF 公式、IMML 和 Benders分解，并由此得出所提出的方法。第三节介绍案例研究的详细内容。第四节对本文工作进行总结。

## II. 方法论

电力系统由节点 $\mathcal{N}$、支路 $\mathcal{B}$、发电机 $\mathcal{G}$ 和负荷 $\mathcal{D}$ 集合构成，其中 $N=|\mathcal{N}|$ 和 $B=|\mathcal{B}|$。应急记为 $c$，并取自故障集合 $\mathcal{C}$。为捕捉输电线路的短期和长期运行限制，以及发电机爬坡的影响，我们考虑一个包含一个故障前状态和两个故障后状态的电力系统。第一个故障后状态设定在应急发生后、断路器跳闸时。第二个状态设定在几分钟后，此时所有频率备用均已投入。我们假设系统在所有状态之间均具有稳定轨迹；尽管这一假设很常见，但并非总是成立 [10]。

### *A.* 安全约束最优潮流（*SCOPF*）

对 Capitanescu 和 Wehenkel 提出的预防-校正型SCOPF 进行扩展，并在下文给出（矩阵和向量变量以粗体表示）：

$$\min_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{x}_c,\boldsymbol{u}_c} \quad f=f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{x}_c,\boldsymbol{u}_c) \tag{1a}$$

$$s.t. \quad \boldsymbol{g_0}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)=0 \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{h_0}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)\le \overline{\boldsymbol{h}}_0^{LT} \tag{1c}$$

$$\boldsymbol{g_c}(\boldsymbol{x}_c,\boldsymbol{u}_c)=0 \qquad c\in\mathcal{C} \tag{1d}$$

$$\boldsymbol{h_c}(\boldsymbol{x}_c,\boldsymbol{u}_0)\le \overline{\boldsymbol{h}}_c^{ST} \qquad c\in\mathcal{C} \tag{1e}$$

$$\boldsymbol{h_c}(\boldsymbol{x}_c,\boldsymbol{u}_c)\le \overline{\boldsymbol{h}}_c^{LT} \qquad c\in\mathcal{C} \tag{1f}$$

$$|\boldsymbol{u}_c-\boldsymbol{u}_0|\le \Delta\boldsymbol{u}_c \qquad c\in\mathcal{C} \tag{1g}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为状态变量，$\boldsymbol{u}$ 为控制变量，$f$ 为关于 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{u}_0$、$\boldsymbol{x}_c$以及$\boldsymbol{u}_c$、$\boldsymbol{g}$ 的待最小化函数，$\boldsymbol{h}$ 为运行限制，$\Delta\boldsymbol{u}_c$ 为控制变量的最大允许变化量。下标 $\cdot_0$ 和 $\cdot_c$分别表示基准工况和应急后工况。$\boldsymbol{h}_0^{LT}$、$\boldsymbol{h}_c^{ST}$ 和 $\boldsymbol{h}_c^{LT}$ 分别表示正常运行的运行限制、应急后的短期限制和应急后的长期限制。

本文考虑支路故障，包括输电线路和变压器。考虑的运行限制包括支路最大电流（短期和长期）、发电机最大有功功率输出、发电机爬坡限值，以及故障发生后每个节点最多切除 10% 的负荷。

### *B.* 逆矩阵修正引理

进行故障分析时，我们求解直流潮流方程：

$$(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\Delta H})\cdot\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{P} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{H}$ 是一个稀疏的（$N\times N$）电纳矩阵，$\boldsymbol{\Delta H}$ 是由故障引起的系统修改，$\boldsymbol{\theta}$ 是节点电压相角，$\boldsymbol{P}$ 是节点注入有功功率。如果$\boldsymbol{\Delta H}$ 是对称的[2]，且可以写成：

$$\boldsymbol{\Delta H}=\boldsymbol{\Phi}_m\cdot\boldsymbol{\delta h}\cdot\boldsymbol{\Phi}_m^{\mathsf{T}} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{\delta h}$ 是一个（$M\times M$）矩阵，表示对$\boldsymbol{H}$的修改；$\boldsymbol{\Phi}_m$ 是一个（$N\times M$）连接矩阵，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathsf{T}}$ 是 $\boldsymbol{\Phi}$的转置矩阵。$M$ 是修改元件的数量。这是一个秩一更新问题，因此可以使用 IMML。与求解完整方程组相比，IMML 可以降低计算成本。此外，求解 $\boldsymbol{\theta}$并使用 IMML 可得 [7]:

$$\boldsymbol{\theta}=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_m\boldsymbol{c}\boldsymbol{\Phi}_m^{\mathsf{T}}\right)\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{c}=\left(\boldsymbol{\delta h}^{-1}+\boldsymbol{\Phi}_m^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_m\right)^{-1} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。(4)对于任意数量的系统元件修改均有效。在单个元件修改的情况下，$\boldsymbol{c}$ 变为标量 $c$。一般而言，如果$\boldsymbol{c}^{-1}$ 是奇异的，则系统修改会将系统分割成孤岛 [7]。分离系统无法使用IMML进行分析。按照大O记号，该方案的复杂度为O($NM+M^2$)；与求解复杂度为O($N^3$)的线性问题相比，当 $N\gg M$时，所需运算次数大幅减少。

使用IMML计算应急 $\boldsymbol{F}_c$ 后，从节点 $i$ 到节点 $j$ 的支路 $l$ 潮流的过程包含以下方程：

$$\boldsymbol{\theta}_c=\boldsymbol{\theta}-\frac{\boldsymbol{\delta}\cdot(\theta[i]-\theta[j])}{1/H[i,j]+\delta[i]-\delta[j]} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\delta}=\frac{x_l}{H[i,j]}\cdot(\boldsymbol{X}[:,i]-\boldsymbol{X}[:,j]) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{\Psi}\cdot\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\theta}_c \tag{8}$$

[2]对于非对称的 $\boldsymbol{\Delta H}$ （例如使用移相变压器时），该公式仍然有效，但方程略有不同 [7]。

其中， $x_l$ 是支路 $l$的电抗， $\boldsymbol{X}$ 是逆电纳矩阵， $\boldsymbol{\Psi}$ 是对角支路电纳矩阵， $\boldsymbol{X}[:,i]$（$\boldsymbol{X}[i,:]$）表示矩阵 $\boldsymbol{X}$的第 $i$ 列（行）。矩阵的详细信息见附录第 V 节。

在拟议方法论中，使用应急后的逆电纳矩阵 $\boldsymbol{X}_c$ 来计算应急功率传输分布因子（PTDF）矩阵（实际上即线路停运分布因子（LODF）， $\boldsymbol{\varphi}$）以及停运后的潮流。

$$\boldsymbol{\varphi}_c = \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{X}_c \tag{9}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\varphi}_c \cdot \boldsymbol{P} \tag{10}$$

直接计算 $\boldsymbol{X}_c$ 的方法是对故障电纳矩阵 $\boldsymbol{X}_c = （\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\Delta H}）^{-1}$ 求逆。不过，使用 IMML 求得 $\boldsymbol{X}_c$ 更高效。

$$\boldsymbol{X}_c = \boldsymbol{X} - \frac{\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\Phi}[i,:] \cdot H[i,j] \cdot \boldsymbol{\delta}}{1 + H[i,j] \cdot \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\Phi}[i,:]} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{x_b}{H[i,j]} \cdot (\boldsymbol{X}[:,i] - \boldsymbol{X}[:,j]) \tag{12}$$

### *C. Benders*分解

Benders分解是一种将优化问题划分为一个主问题和多个子问题[8]的方法。根据子问题，在主问题的建模中加入 Benders割，使得主问题的最优解成为式 (1) 的可行解。在本文中，主问题为 (1a)–(1c)，子问题中的约束为 (1d)–(1g)。在最优解中，存在有效约束的故障通常只是 $\mathcal{C}$ 的一个小子集。因此，为获得可行解，无须将所有子问题都加入主问题。通过 Benders割可以重新表述子问题中的支路潮流约束，从而降低复杂度。

从支路潮流方程 (10) 出发，可以推导出 Benders割。利用 (10) 可以建立一个约束，将支路潮流限制在额定值 $\underline{\boldsymbol{h_l}}$:

$$-\overline{\boldsymbol{h}}_{\boldsymbol{l}} \le \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{P} \le \overline{\boldsymbol{h}}_{\boldsymbol{l}}. \tag{13}$$

在最优解中，只有下限或上限可能起作用。(10) 对注入功率变更 $\Delta P$ 同样成立。因此，可以表示一个要求潮流变更 $\Delta F$ 的约束。

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\Delta P} \begin{cases} \ge \Delta F_l, & \text{if } F_l \ge 0 \\ \le \Delta F_l, & \text{if } F_l < 0 \end{cases} \quad \forall l \in \mathcal{B} \tag{14}$$

其中， $F_l$ 是支路 $l$上的当前潮流。为缓解支路 $l$ 在支路 $i$ 发生应急后出现的过载，添加到主问题公式（1a）–（1c）中的 Benders割如下:

$$\sum_{n}^{\mathcal{N}} \varphi_{i,n} \Delta P_n \begin{cases} \ge F_l - \overline{h}_l, & \text{if } F_l > \overline{h}_l \\ \le F_l + \overline{h}_l, & \text{if } F_l < -\overline{h}_l \end{cases} \tag{15}$$

$$\Delta P_n = P_{c,n} - P^g_{0,n} - P^{g+}_{c,n} + P^{g-}_{c,n} + P^d_{c,n} \tag{16}$$

其中，$\varphi_{i,\,n}$ 是应急支路$i$ 与节点 $n$处的 LODF 值， $P_{c,\,n}$ 是采用应急 $c$对应的当前发电计划解时注入节点 $n$ 的有功功率，$P^g_{0\,,\,n}$和$P^g_{c,\,n}$分别是节点$n$ 作为预防性措施和纠正性措施时的有功功率发电变更（$P^{g+}$ 表示增加， $P^{g-}$ 表示减少）， $F_l$ 是发生过载的支路 $l$ 上的潮流。对于处于限值范围内的支路,$-h_l \le F_l \le h_l$， （15）未定义，因为无需缓解过载。

如果仅考虑预防性措施，或仅考虑短期运行限值，则 (16) 分别简化为:

$$\Delta P_n = P_{0,n} - P^g_{0,n} \tag{17}$$

$$\Delta P_n = P_{c,n} - P^g_{0,n} + P^{g-}_{c,n} + P^d_{c,n} \tag{18}$$

其中 $P_{0,\,n}$ 是基准工况下采用当前发电计划解时，注入节点 $n$ 的有功功率。采用该时间范围对应的 $h_l$ 。

除对潮流进行建模的 Benders割外，还利用 (19) 扩展目标函数，以计入采取校正措施缓解支路过载所增加的成本；若仅考虑短期运行限值，则使用 (20)。

$$\min k_{\mathcal{G}}^{\mathsf{T}} \left(P_0^{\mathcal{G}} + \pi_c P_c^{\mathcal{G}+}\right) + \text{voll}^{\mathsf{T}} \left(P_0^{\mathcal{D}} + \pi_c P_c^{\mathcal{D}}\right) \tag{19}$$

$$\min \text{voll}^{\mathsf{T}} \left(P_0^{\mathcal{D}} + \pi_c P_c^{\mathcal{D}}\right) \tag{20}$$

其中 $k^{\mathcal{G}}$ 为发电成本， $\pi_c$ 为应急发生概率，voll 为失负荷价值， $P^{\mathcal{D}}$ 为有功负荷削减量。

### *D.* 算法

图1所示的拟议方法论采用 IMML 来识别可能发生支路过载的故障。模型中加入 Benders割，以表示可采取的潜在预防性或纠正性措施，从而缓解支路过载。

首先，使用任何能够优化线性规划问题的算法，在不考虑任何可能故障的情况下求解安全约束最优潮流。由此可得到系统当前状态下安全的“N-0”发电计划，并获得最低系统成本。随着后续将割作为约束加入，系统成本会增加。

对于给定的支路故障，使用基准工况发电计划（可包含预防性措施）根据式（8）计算潮流。如果计算发现该故障导致支路过载，则计算式（10）。式（10）的复杂度为 O($n^2m+nm^2$)，而式（8）的计算速度要快得多，复杂度为 O($nm+m^2$)。

如果支路故障导致系统分裂成多个孤岛，则使用 Goderya算法 [12] 检测这些孤岛。随后，确定参考孤岛（包含参考节点的连通节点集合）。假定不含参考节点的孤岛发生停电。将$\boldsymbol{H}$ 中的参考孤岛节点用于算法1，以计算 $\boldsymbol{X}_c$；然后分别使用式（26）和（27）求出新的功率传输分布因子矩阵和潮流。如果存在过载支路，则添加 Benders割；否则，将短期变量添加到主问题中，但不向模型添加割。

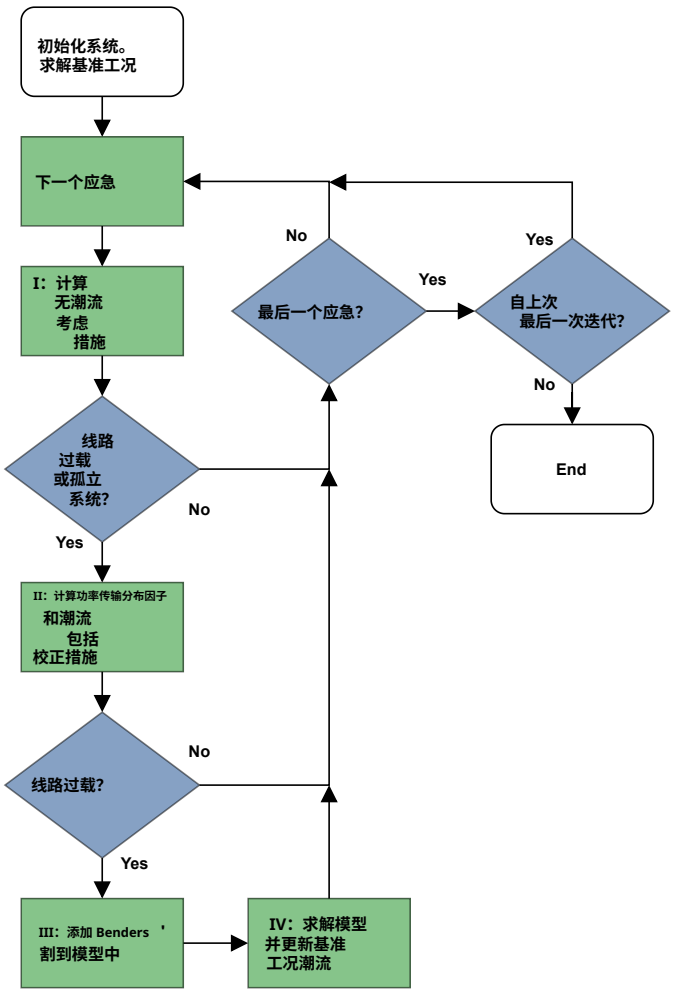


图1. 用于求解安全约束最优潮流的所提算法。

当应急导致一个或多个支路过载时，如 II-C 节所述，针对每个过载支路添加用于预防性和纠正性措施的 Benders割。随后重新求解模型，以找到新的最优点并更新基准工况潮流。

当所有故障均已检查且未发现过载支路时，算法结束。输出为基准工况下的最优发电计划，以及故障发生后的最优校正措施，以实现最优系统成本。

## III. 案例研究

开展了一项案例研究，以比较标准安全约束最优潮流（对（1）进行直接优化）与拟议方法论。这些方法使用 Julia 语言 [13] 及 JuMP [14] 和 PowerSystems [15] 软件包实现，并使用 Gurobi求解器 [16]进行问题优化。在表 I 中，对 IEEE RTS-79系统 [17] 和 SouthCarolina500（ACTIVSg500）测试系统 [18] 的结果和运行时间进行了比较。对于未提供发电机爬坡限制的情况，将每分钟额定功率的 1% 设为限制值。结果表明

表 I 使用 Julia 中的 BENCHMARKTOOLS 软件包得到的最优成本值和运行时间。运行平台：®INTELTMCORE I5-1145G7。

| | 标准方法论 | | 拟议方法论 | |
|---|---|---|---|---|
| | 最优成本 | 时间 [秒] | 最优成本 | 时间 [秒] |
| IEEE RTS-79 | 483.00 | 0.106 | 483.00 | 0.022 |
| ACTIVSg500 | 3243 | 298.091 | 998.64 | 49.154 |

采用拟议方法论可显著缩短求解时间，同时获得高度相似的最优成本值。

拟议方法论的一个假设是，仅在需要时计算功率传输分布因子矩阵，比针对每个故障都计算该矩阵更快。对于 ACTIVSg500 系统，使用 $\theta_c$in (8) 计算应急支路潮流需要 2.6μs，而使用 $\varphi_c$ in (10)（或 (26)）则慢得多，需要 1.8 ms（7.0 ms）。在 ACTIVSg500 系统上应用拟议方法论时，求解器约占运行时间的 1/3，用于优化模型；约占运行时间的 1/5，用于计算支路潮流和功率传输分布因子矩阵。若跳过 (8)，始终使用 $\varphi_c$ 计算支路潮流，则支路潮流的运行时间会增加。使用拟议方法论求解 RTS-79 系统时，求解器运行时间占总运行时间的 1/4，支路潮流运行时间占 1/10；跳过 (8) 会使支路潮流运行时间增加。RTS-79 系统有 38 条支路，只有一个单支路故障场景会导致系统解列。ACTIVSg500 系统有 597 条支路，其中有 268 个单支路故障场景会导致系统解列。因此，即使对于导致系统解列的支路故障占比很高的系统，先计算 $\theta_c$，并仅在需要时计算$\varphi_c$，也能缩短运行时间。

IEEE RTS-79系统用于比较拟议方法论和标准方法论。对于拟议方法论，支路故障的Benders割显示在表II中。支路表示如下：从节点$i$到节点 $j$ 的支路为i-j。

从表 II 可以看出，在算法的第一次迭代中，所有故障下初始基准工况发电计划中的过载均已消除。第二次迭代仅支路 7-8 出现过载。这些过载是为消除第一次迭代中发现的过载而采取校正措施所导致的。通过分析 Benders割 (15) 可以看出，在任意节点改变功率注入都可以满足该约束。然而，生成割时仅使用了过载支路的额定值，因此加入 Benders割后采取的校正措施可能导致其他支路过载。理论上，算法需要 $B^2$ 次迭代才能确保所有支路额定值均不超限。在对 RTS-79 系统和 ACTIVSg500 系统的研究中，这都只需额外迭代一次，即每个系统总共迭代两次。

表 III 展示了所提出的方法与标准方法论所生成的发电计划对比。

表 II 求解 IEEE RTS-79系统时添加的 Benders割。

**迭代 1**

| Type | 应急 | 过载 @ 支路 [pu] | |
|---|---|---|---|
| 纠正性 | 3-24 | 0.7391 | @ 14-16 |
| 纠正性 | 12-23 | 0.2420 | @ 14-16 |
| 纠正性 | 13-23 | 0.3652 | @ 14-16 |
| 纠正性 | 14-16 | 0.0491 | @ 3-24 |
| 纠正性 | 15-21 | 0.1415 | @ 16-17 |
| 纠正性 | 15-21 | 0.1415 | @ 16-17 |
| 纠正性 | 15-24 | 0.7391 | @ 14-16 |
| 纠正性 | 16-19 | 0.2183 | @ 14-16 |

**第2次迭代**

| Type | 应急 | 支路 [pu] 过载 | |
|---|---|---|---|
| 预防性 | 3-24 | 0.0700 | @ 7-8 |
| 纠正性 | 3-24 | 0.3500 | @ 7-8 |
| 预防性 | 12-23 | 0.0700 | @ 7-8 |
| 纠正性 | 12-23 | 0.3500 | @ 7-8 |
| 预防性 | 13-23 | 0.0700 | @ 7-8 |
| 纠正性 | 13-23 | 0.3500 | @ 7-8 |
| 纠正性 | 14-16 | 0.1261 | @ 7-8 |
| 纠正性 | 15-21 | 0.2234 | @ 7-8 |
| 纠正性 | 15-21 | 0.2234 | @ 7-8 |
| 预防性 | 15-24 | 0.0700 | @ 7-8 |
| 纠正性 | 16-19 | 0.3217 | @ 7-8 |

计划按每台发电机和每个负荷分别优化，但为精简起见，表格中按节点汇总。基准工况显示，两种方法在所有节点的注入功率相同（未显示）。两种方法都为支路 7-8 的应急求得了最优短期校正措施。该应急将使节点 7 与系统其余部分隔离，因此必须采取措施弥补节点 7 上损失的发电量。尽管发电计划不同，最优成本精确到第五位有效数字仍相同。

## IV. 结论

本文提出了一种利用 IMML 和 Benders分解求解具有短期和长期故障后限值的安全约束最优潮流的方法，并将其应用于案例研究。案例研究表明，拟议方法论可显著缩短计算时间。拟议方法论针对安全约束最优潮流框架进行了专门设计，与标准直接求解方法相比，实现起来更为复杂。这一缺点需要与所需的求解运行时间权衡。对于系统运行，运行时间缩短意味着在系统突发变化时，可以更接近实时地分析关键故障。对于规划，则意味着可以在相同时间范围内探索更多场景。

为进一步缩短拟议方法论的运行时间，可以并行执行针对各项故障的迭代。需要注意的是，与在各项故障之间添加 Benders割相比，并行搜索故障过载通常会发现更多存在过载的故障，因为某些割会缓解其他故障造成的过载；在添加割之前再次求解，则可缓解这一问题。

表 III 故障后各节点的注入功率变化。

**短期纠正性措施**

| 标准方法论 | | | 拟议方法论 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 应急 | Node | 变更 | 应急 | Node | 变更 |
| 7-8 | 3 | 0.18 | 3-24 | 3 | 0.07 |
| 7-8 | 4 | 0.07 | 3-24 | 7 | -0.07 |
| 7-8 | 7 | -1.40 | 7-8 | 3 | 0.18 |
| 7-8 | 8 | 0.17 | 7-8 | 4 | 0.07 |
| 7-8 | 10 | 0.20 | 7-8 | 7 | -1.40 |
| 7-8 | 13 | 0.27 | 7-8 | 8 | 0.17 |
| 7-8 | 15 | 0.32 | 7-8 | 10 | 0.20 |
| 7-8 | 16 | 0.10 | 7-8 | 13 | 0.27 |
| 7-8 | 20 | 0.10 | 7-8 | 15 | 0.32 |
| | | | 7-8 | 16 | 0.10 |
| | | | 7-8 | 20 | 0.10 |
| | | | 12-23 | 3 | 0.07 |
| | | | 12-23 | 7 | -0.07 |
| | | | 13-23 | 3 | 0.07 |
| | | | 13-23 | 7 | -0.07 |
| | | | 15-24 | 3 | 0.07 |
| | | | 15-24 | 7 | -0.07 |
| | | | 16-19 | 3 | 0.04 |
| | | | 16-19 | 7 | -0.04 |

**长期纠正措施**

| 标准方法论 | | | 拟议方法论 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 应急 | Node | 变更 | 应急 | Node | 变更 |
| 3-24 | 2 | 0.39 | 3-24 | 2 | 0.39 |
| 3-24 | 3 | 0.18 | 3-24 | 3 | 0.18 |
| 3-24 | 13 | 0.90 | 3-24 | 13 | 0.90 |
| 3-24 | 18 | -1.47 | 3-24 | 18 | -1.47 |
| 7-8 | 1 | 0.20 | 7-8 | 7 | -1.40 |
| 7-8 | 2 | 0.20 | 7-8 | 13 | 0.90 |
| 7-8 | 3 | 0.18 | 7-8 | 15 | 0.50 |
| 7-8 | 7 | -1.40 | 12-23 | 13 | 0.55 |
| 7-8 | 8 | 0.02 | 12-23 | 16 | -0.30 |
| 7-8 | 13 | 0.30 | 12-23 | 18 | -0.25 |
| 7-8 | 15 | 0.50 | 13-23 | 13 | 0.71 |
| 12-23 | 13 | 0.55 | 13-23 | 16 | -0.30 |
| 12-23 | 16 | -0.30 | 13-23 | 18 | -0.41 |
| 12-23 | 18 | -0.25 | 14-16 | 13 | 0.16 |
| 13-23 | 13 | 0.71 | 14-16 | 15 | -0.16 |
| 13-23 | 16 | -0.30 | 15-21 | 13 | 0.22 |
| 13-23 | 18 | -0.41 | 15-21 | 18 | -0.22 |
| 14-16 | 13 | 0.16 | 15-21 | 13 | 0.22 |
| 14-16 | 15 | -0.16 | 15-21 | 18 | -0.22 |
| 15-21 | 13 | 0.22 | 15-24 | 2 | 0.39 |
| 15-21 | 18 | -0.22 | 15-24 | 3 | 0.18 |
| 15-21 | 13 | 0.22 | 15-24 | 13 | 0.90 |
| 15-21 | 18 | -0.22 | 15-24 | 18 | -1.47 |
| 15-24 | 2 | 0.39 | 16-19 | 13 | 0.30 |
| 15-24 | 3 | 0.18 | 16-19 | 16 | -0.30 |
| 15-24 | 13 | 0.90 | | | |
| 15-24 | 16 | -0.30 | | | |
| 15-24 | 21 | -1.17 | | | |
| 16-19 | 13 | 0.30 | | | |
| 16-19 | 16 | -0.30 | | | |

应进一步研究该方法对系统成本和可靠性的影响。在安全约束最优潮流中加入风险指标 [4] 或机会约束 [5]，是一项有益的改进。风险约束可以控制系统中计算得出的风险，从而在运行成本与风险规避型运行之间实现平衡。此外，将该方法扩展至 ACSCOPF，将为考虑更多类型的运行限制打开大门。

**算法1：** 计算逆电纳矩阵。

**输入：** 电纳矩阵 ($\boldsymbol{H}$) 和参考节点 (ref)

**开始**

$\boldsymbol{H}[:, ref] \leftarrow \mathbf{0}$

$\boldsymbol{H}[ref, :] \leftarrow \mathbf{0}$

$\boldsymbol{H}[ref, ref] \leftarrow \mathbf{1}$

$\boldsymbol{X} \leftarrow inverse(\boldsymbol{H})$

$\boldsymbol{X}[ref, ref] \leftarrow 0$

**end**

**输出：** 逆电纳矩阵 $\boldsymbol{X}$

## V. 附录

可以使用矩阵分析电力系统的状态。这里针对线性化（直流）潮流方程推导矩阵。第一个基本矩阵是连接矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$，其维度为（$B \times N$）。该矩阵显示了支路与节点之间的连接关系。具体而言，对于支路上的每个节点，其对应值为 1，而所有其他元素均为 0。

$$\Phi[l, n] = \begin{cases} 1, & \text{if } l_i = n \\ -1, & \text{if } l_j = n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{21}$$

其中，每条支路 $l$ 都有一个起始节点 $l_i$ 和终止节点 $l_j$，而 $n$ 是集合 $\mathcal{N}$中的节点。

第二个基本矩阵是对角电纳矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ ($B \times B$)，其对角线上包含所有支路的电纳。其余元素均为零。

$$\Psi[k, k] = b_k \tag{22}$$

$$\Psi[k, l] = 0 \quad \forall k \neq l \tag{23}$$

其中， $b_k$ 为支路电纳。将这些矩阵组合后得到电纳矩阵 $\boldsymbol{H}$。

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Phi} \tag{24}$$

其中， $\boldsymbol{\Phi}^{\mathsf{T}}$ 是 $\boldsymbol{\Phi}$的转置矩阵。

逆电纳矩阵 $\boldsymbol{X}$ 由电纳矩阵通过算法1计算得到。由所有系统节点构成的 $\boldsymbol{H}$ 是奇异的，因此在求逆 $\boldsymbol{H}$之前需先消去参考节点。此外，使用 $\boldsymbol{X}$ 求解潮流并计算功率转移分布因子矩阵 $\boldsymbol{\varphi}$。

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{B}^*]^{-1} \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{P} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{X} \tag{26}$$

其中， $\boldsymbol{\theta}$ 为节点电压相角， $\boldsymbol{P}$为节点注入有功功率。随后可通过以下两种方式计算支路潮流 $\boldsymbol{F}$：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\theta} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{P} \tag{28}$$

## 参考文献


[1] GARPUR项目，《采用不确定性建模和概率风险评估的普遍认可可靠性原则》，2013年。[在线]。可访问：https://www.sintef.no/globalassets/project/garpur/deliverables/garpur-d1.1-state-of-the-art-on-reliability-assessment-in-power-systems.pdf

[2] F. Capitanescu，《交流最优潮流近期进展的批判性回顾及后续所需发展》，《*Electric Power Systems Research*》，第136卷，第57–68页，2016年。[3] J. Kardoˇs、D. Kourounis和O. Schenk，《用于求解安全约束最优潮流问题的双层并行增广舒尔补内点算法》，《*IEEE*电力系统汇刊》，第35卷，第2期，第1340–1350页，2020年。[4] Q. Wang、J. D. McCalley、T. Zheng和E. Litvinov，《采用拉格朗日松弛和Benders分解求解校正风险型安全约束最优潮流》，《*International Journal of Electrical Power & Energy Systems*》，第75卷，第255–264页，2016年2月。[5] E. Karangelos和L. Wehenkel，《一种迭代交流安全约束最优潮流方法：以概率保证应对应急和校正控制失效的不确定性》，《*IEEE*电力系统汇刊》，第34卷，第5期，第3780–3790页，2019年。[6] M. A. Woodbury，《修正矩阵求逆》。普林斯顿大学，1950年。[7] O. Alsac、B. Stott和W. Tinney，《针对修正网络求解的面向稀疏性的补偿方法》，《*IEEE*电力设备与系统汇刊》，第102卷，第1050–1060页，1983年。[8] J. Benders，《求解混合变量规划问题的划分程序》，《*Numerische Mathematik*》，第4卷，第1期，第238–252页，1962年。[9] A. M. Geoffrion，《广义Benders分解》，《*Journal of Optimization Theory and Applications*》，第10卷，第4期，第237–260页，1972年。[10] E. F. Bødal、S. H. Jakobsen和O. Gjerde，《采用动态规划和时域仿真的概率运行规划》，《*Electric Power Systems Research*》，第211卷，文章编号108379，2022年。[11] F. Capitanescu和L. Wehenkel，《改进校正性安全约束最优潮流问题的表述》，《*IEEE*电力系统汇刊》，第22卷，第2期，第887–889页，2007年。[12] F. Goderya、A. A. Metwally和O. Mansour，《快速检测和识别电力网络中的孤岛》，《*IEEE*电力设备与系统汇刊》，第PAS-99卷，第1期，第217–221页，1980年。[13] J. Bezanson、A. Edelman、S. Karpinski和V. B. Shah，《Julia：一种数值计算的新方法》，《*SIAM Review*》，第59卷，第1期，第65–98页，2017年。[14] M. Lubin、O. Dowson、J. D. Garcia、J. Huchette、B. Legat和J. P. Vielma，《JuMP 1.0：面向数学优化的建模语言的最新改进》，《*Mathematical Programming Computation*》，2023年，即将出版。[15] J. D. Lara、C. Barrows、D. Thom、D. Krishnamurthy和D. Callaway，《PowerSystems.jl——用于大规模建模的电力系统数据管理软件包》，《*SoftwareX*》，第15卷，文章编号100747，2021年。 [在线]。可访问：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352711021000765[16] Gurobi Optimization, LLC，《Gurobi优化器参考手册》，2023年。 [在线]。可访问：https://www.gurobi.com [17] P. M. Subcommittee，《IEEE可靠性测试系统》，《*IEEE*电力设备与系统汇刊》，第PAS-98卷，第2054页，1979年6月，第2047页。[18] A. B. Birchfield、T. Xu、K. M. Gegner、K. S. Shetye和T. J. Over- bye，《合成网络的电网结构特征验证准则》，《*IEEE*电力系统汇刊》，第32卷，第4期，第3258–3265页，2017年。