使用手眼机器人-世界公式进行基础设施外参标定

Markus Horn*、Thomas Wodtko*、Michael Buchholz 和 Klaus Dietmayer乌尔姆大学测量、控制与微技术研究所，德国{firstname}.{lastname}@uni-ulm.de

arXiv:2305.01407v2 [cs.RO] 2 Aug 2023

摘要—我们提出了一种可证明全局最优的方法，用于求解同时支持多个传感器和目标的手眼机器人—世界问题。此外，我们利用这一方法估计基础设施传感器的地理参考标定。由于基础设施传感器记录的车辆运动大多是平面的，因此若不纳入额外知识，就无法为相应的手眼机器人—世界问题求得唯一解。因此，我们扩展了所提出的方法，将先验知识（即标定目标的平移范数）纳入其中，从而得到唯一解。我们的方法在模拟数据和真实世界数据上均取得了最先进的结果。尤其是在真实世界路口数据上，我们采用平移范数的方法是唯一能够提供准确结果的方法。

索引词—标定、智能基础设施

I. 引言

随着城市和乡村环境中的智能车辆与智能基础设施日益增多，需要越来越多的传感器来应对随之而来的挑战 [1]。为了准确处理这些传感器采集的数据，传感器标定是必不可少的。虽然内参信息通常可以在出厂时获得，但外参标定流程必须适应相应工作环境的具体情况 [2]。例如，在实验室环境中对两台视场（FOVs）重叠的摄像机进行标定时，可以采用多种标定方法。相比之下，基础设施传感器通常安装在远高于地面的位置，且可能具有有限的视场。此外，还必须遵守严格的条件，例如，道路可能无法因标定目的而封闭。因此，必须根据相应需求处理传感器外参标定任务。

大多数基础设施标定方法都基于周边环境中的静态特征，或车辆等动态物体的特征。然而，尤其是在初始标定时，只要标定过程不影响交通且完全自动化，使用特定的标定目标也是合理的。由于摄像机是基础设施中最常用的传感器之一，许多

本研究由联邦教育与研究部（BMBF）（项目 UNICARagil, FKZ16EMO0290）和巴登-符腾堡州经济事务部（项目 U-Shift II, AZ3- 433.62-DLR/60）提供经费支持。

* *Markus Horn* 和 *Thomas Wodtko* 为共同第一作者。通讯作者：*MarkusHorn*。

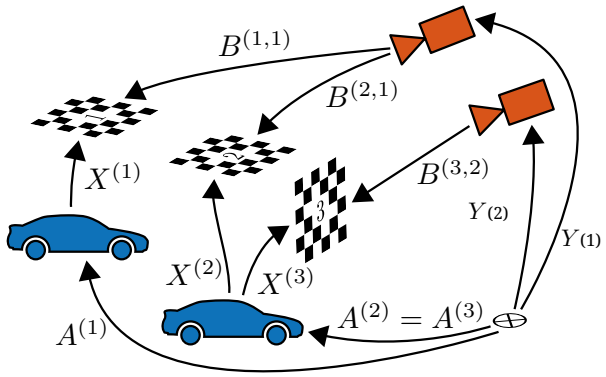


图 1. 展示了单个测量步骤 k 中多传感器多目标标定的一个示例场景。两辆全局位姿已知的网联自动驾驶车辆搭载了多个刚性安装的棋盘格标定目标，由两台固定式基础设施摄像机检测。对于目标 t 和传感器 s，$A^{(t)}$ 表示所搭载 t 的车辆经地理参考的位姿，而 $B^{(t,s)}$ 表示 s对 t 的检测。所需的标定参数为 $X^{(t)}$ 和 $Y^{(s)}$。所有测量值不必同时进行；在步骤 k进行检测 $B_k^{(t,s)}$ 时，只需具备相应的 $A_k^{(t)}$ 。

标定流程通常仅限于这些传感器。然而，由于还使用了激光雷达等其他传感器类型，适用于多个传感器类型的方法能够促进更大规模系统的整体标定流程。随着网联自动驾驶车辆（CAVs）数量不断增加，地理参考标定对于融合网联自动驾驶车辆和基础设施传感器的数据至关重要。因此，需要借助例如标定车辆提供的全局参考系。为此，我们提出在配备全局定位功能的车辆上安装特定于传感器的标定目标，例如用于相机的棋盘格，并估计传感器和目标的标定参数。如果已知从目标到车辆的变换，则可以使用透视 n 点（PnP） [3] 等方法来估计传感器标定参数。遗憾的是，准确测量标定靶变换非常耗时，并且需要特殊设备，例如坐标测量机或激光测距仪。因此，我们采用手眼机器人—世界（HERW）公式来实现这一问题。通常，HERW 标定用于估计移动传感器和固定目标情况下的夹爪到传感器（手眼）以及基座到目标（机器人—世界）标定参数。相比之下，在我们的问题中，目标是移动的，而传感器是固定的。此外，基础设施传感器还

© 2023 IEEE。允许个人使用本材料。对于任何其他用途，包括在任何当前或未来的媒体中重印或再版本材料用于广告或宣传目的、创作新的合集、转售或重新分发至服务器或列表，或在其他作品中重复使用本作品中受版权保护的任何组成部分，必须获得 IEEE 的许可。数字对象标识符：10.1109/IV55152.2023.10186703

通常分别进行标定，即每个传感器被单独处理，并使用不同的标定特征或目标。相比之下，同时对多个传感器和目标进行标定，可以在优化过程中考虑相互依赖的误差。因此，如图1所示，我们提出了一种用于 HERW 标定的新型多传感器多目标公式。

该方法可以获得地理参考传感器标定参数$Y^{(s)}$。在网联自动驾驶车辆上安装特定的标定目标，有助于检测任务，也便于针对不同的传感器类型调整该方法。由于目标位姿 $X^{(t)}$ 也会被估计，因此无需预先测量。给定全局车辆位姿 $A^{(t)}$ 所对应的车辆原点，在我们的案例中为后轴中心，不会影响 $Y^{(s)}$的结果。

由于道路的坡度通常变化不大，基础设施传感器观测到的车辆运动主要局限于平坦路面。此外，如果无法为了标定而封闭周边区域，车辆还必须遵守交通规则，即沿道路行驶。然而，如 [4], 所示，至少需要三组测量值，且位姿间旋转轴不共线，才能唯一求解 HERW问题。为了在技术上无法满足这些要求时仍能进行标定，我们提出了一种方法，可将额外信息整合到标定中，即变换的平移范数。此外，使用我们提出的方法同时标定多个传感器时，这些要求只需针对所有数据的整体满足，而不必针对每个传感器的单独数据分别满足。

总结我们的工作，我们提出了

- 一种用于多个传感器和目标的 HERW 标定的新型二次约束二次规划（QCQP）表述；
- 用于整合所需先验知识的约束；
- 基于该表述的地理参考基础设施标定流程；以及
- 一个基于 Python 的开源库，可通过以下网址获取：https://github.com/uulm-mrm/excalibur。

II. 相关工作

A. 手眼机器人-世界标定

[5] 对 HERW问题进行了详细分析。他们推导得出，要获得唯一解，至少需要三组测量值，且位姿间旋转轴不共线。这意味着，在没有额外信息的情况下，无法针对仅平面位姿求解 HERW 标定问题。我们将在第 VI-B 节稍后讨论这一问题。

文献中提出了多种用于实现 HERW 问题的变换表示方法：四元数与变换向量、齐次矩阵（HMs）或单位双四元数（DQs）是最常见的表示方法。然而， [6], [7] 并未发现适用于所有场景的优越表示方法。鉴于我们已在 [8], 中推导出一种用于手眼标定的高效单位双四元数表述，因此将其扩展用于 HERW 标定。

相机标定中常用的代价函数是重投影误差 [6], [9], [10]。由于大多数这类方法都需要初始标定，不准确的初始解可能导致不收敛 [10]。此外，对于没有可用对应关系的其他传感器，重投影误差并不适用。因此，我们着重于直接优化变换循环误差。

对于四元数和齐次矩阵， X 和 Y 的旋转可以与平移分开优化，平移则在第二步中进行优化 [5], [6], [11]–[13]。尽管这种方法可以获得较小的旋转误差，但由于第一步中的误差传播，也可能导致较大的平移误差和重投影误差 [6], [11]。这会给后续的检测和重建任务带来问题，因此建议同时估计旋转和平移。

对于同时估计，通常使用齐次矩阵的克罗内克积形式 [14], [15] 或单位双四元数的矩阵形式 [14] ，以实现具有闭式解的线性形式。然而，在线性方法中存在噪声 [11]时，性能会下降。此外，这些方法在求解问题时并不强制满足齐次矩阵或单位双四元数的有效性，而是在获得解后再从中求取有效变换，这可能导致误差 [12]。

文献 [11]提出了一种早期方法，该方法基于齐次矩阵构造非线性代价函数，并使用加权惩罚项强制获得有效解。然而，该方法仍需要初始解和恰当的权重选择。相比之下，正如文献 [7], [16]所提出的，在优化过程中使用约束来强制获得有效解更为合适。这两种方法都能得到全局最优解，但运行时间很长，即使只有少量测量值和一个传感器-目标对，也需要数秒甚至数分钟。相比之下，我们提出的方法能够处理更多测量值以及多个传感器和目标，同时仍能高效地获得可认证的全局最优解。此外，只有方法 [6], [13]支持多个传感器。据我们所知，我们提出的方法是首个支持多个传感器和目标的方法。

B. 基础设施标定

许多基础设施标定方法基于从车道标线 [17] 、车辆运动和边缘 [18], 或车辆边界框检测 [19], [20], 中提取的消失点 [21]。另一类方法则使用车辆上的地标检测 [22], [23]。上述方法均侧重于基础设施摄像机在常规工作环境中的标定，且不使用专门的标定目标。然而，与我们的方法不同，这些方法不适用于其他传感器类型、视场不重叠的多个传感器，或地理参考标定。由于标定并不频繁进行，只要流程完全自动化，使用标定目标仍然可行。

文献 [24], [25] 提出了其他用于对视场不重叠的传感器进行地理参考标定的方法。然而，这些方法仅适用于特定类型的单个传感器，即激光雷达或摄像机；而只要有合适的标定目标，我们的方法就可以应用于多种不同类型的多个传感器。

III. 基础

在本研究中，我们使用单位双四元数来表述 HERW问题。为此，本节将介绍双四元数及其对应的 QCQP 结构。

变换用大写字母 T 表示，通常称为函数，即不隐含指定任何表示形式。变换始终沿正向坐标系方向。两个变换的复合记为 $T_a \circ T_b$。向量和矩阵分别用小写和大写粗体字母 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{X}$表示。（双）四元数用正体字母 q 表示。

A. 双四元数

一般而言，双四元数 $\mathrm{q} = \mathrm{r} + \epsilon\mathrm{d}$ 由实部 r 和对偶部 d 构成，其中对偶单位为 ϵ，且 $\epsilon^2 = 0$ [26]。表示刚体变换时，实部是单位旋转四元数，对偶部可利用平移向量 $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3$ 计算如下

$$\mathrm{d} = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,, \quad \text{with } \mathrm{t} = (0, \boldsymbol{t})\,. \tag{1}$$

这意味着变换双四元数必须是单位双四元数，即满足以下约束

$$\|\mathrm{r}\|^2 = \mathrm{r}\,\mathrm{r}^* = 1 \quad \text{and} \quad \mathrm{r}\,\mathrm{d}^* + \mathrm{d}\,\mathrm{r}^* = 0\,, \tag{2}$$

如 [8]中所推导。此外，单位双四元数 q 和 $-\mathrm{q}$ 表示相同的变换。在第 V 节推导优化问题时必须考虑这一点。双四元数也可表示为向量化形式 $\boldsymbol{q} = \mathrm{vec}(\mathrm{q})$，其中 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^8$。此外，双四元数乘法 $\mathrm{q}_a\mathrm{q}_b$ 可表示为矩阵-向量乘积

$$\mathrm{vec}\,(\mathrm{q}_a\,\mathrm{q}_b) = [\boldsymbol{Q}_a]^{+}\,\boldsymbol{q}_b = [\boldsymbol{Q}_b]^{-}\,\boldsymbol{q}_a \tag{3}$$

其中，$[\boldsymbol{Q}_a]^{+}$ 和 $[\boldsymbol{Q}_b]^{-}$ 分别表示左侧和右侧双四元数矩阵表示 [26]。利用矩阵表示，约束 (2) 可表示为

$$1 + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{P}_r\,\boldsymbol{q} = 0 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{P}_d\,\boldsymbol{q} = 0\,, \tag{4a}$$

$$\text{with } \boldsymbol{P}_r := \begin{bmatrix} -\boldsymbol{I}_4 & \boldsymbol{0}_4 \\ \boldsymbol{0}_4 & \boldsymbol{0}_4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{P}_d := \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_4 & \boldsymbol{I}_4 \\ \boldsymbol{I}_4 & \boldsymbol{0}_4 \end{bmatrix}. \tag{4b}$$

接下来，用它来构建优化问题。

B. 双四元数 QCQP

给定一个半正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，可以构造纯二次代价或目标函数 $J(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}$。若 $\boldsymbol{z}$ 表示一个单一的向量化单位双四元数，则目标函数为 J 的优化问题定义为

$$\min_{\boldsymbol{z}} \; J(\boldsymbol{z}) := \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{z} \tag{5a}$$

$$\text{w.r.t. } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) := \begin{pmatrix} 1 + \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{P}_r\,\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{P}_d\,\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{0}\,. \tag{5b}$$

在优化过程中，约束 (4) 对于确保得到有效的单位双四元数是必需的。相应的拉格朗日对偶问题可以类似于 [8], [27] 推导得到。给定拉格朗日函数

$$L(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{z} + \lambda_1\,, \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{Q} + \lambda_1\boldsymbol{P}_r + \lambda_2\boldsymbol{P}_d$，对偶问题为

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad \lambda_1 \tag{7a}$$

$$\text{w.r.t.} \quad \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \succeq \boldsymbol{0}\,. \tag{7b}$$

根据对偶理论 [28] 可知，拉格朗日对偶问题始终是凸的，其在解 $\boldsymbol{\lambda}$处的值 J为原始最优值$\boldsymbol{z}$的下界。所谓对偶间隙，描述的是原始最优值与对偶最优值之间的差值。若对偶间隙为零，则可知$\boldsymbol{z}$ 是全局最优原始解。下一节将介绍如何根据对偶解 $\boldsymbol{\lambda}$恢复原始解$\boldsymbol{z}$ 。

为便于后续使用，可以扩展原始问题和对偶问题（5）和（7），以便优化多个双四元数。给定包含 n 个向量化双四元数的扩展优化变量 $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} & \dots & \boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ n，必须针对每个双四元数分别施加约束（4）。为此，需按照后文第 V-C 节所述复制约束矩阵。最后，必须根据相应问题构造代价矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使其维度与 $\boldsymbol{z}$ 相匹配。

C. 从对偶解恢复原始解

如 [8]，所示，可以从 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\lambda})$ 的零空间中恢复一个可证明为全局最优的原始解 $\hat{\boldsymbol{z}}$。如果零空间的维数为 1，则使用（2）的实部约束对零空间向量归一化，从而恢复解。如果零空间的维数为 2，则使用 [29] 中推导的方程恢复解。对于维数更大的零空间，则直接优化非凸原始问题，并将对应于最大特征值的归一化零空间向量作为初始解。恢复原始解后，必须检查对偶间隙。只有当对偶间隙为零时，才能确认恢复的解是全局最优解。

IV. 问题定义

采用多个目标$t = 1, \dots, m_X$和多个传感器 $s = 1, \dots, m_Y$进行 HERW 标定的目标是估计相应的标定参数 $X^{(t)}$ 和 $Y^{(s)}$，如图 1 所示。因此，总共必须同时估计 $m = m_X + m_Y$ 个变换。在每个测量步骤$k = 1, \dots, n$中，传感器 s可能会检测到目标 t $B_k^{(t,s)}$。目标 t的参考坐标系的相应位姿，在本例中即车辆全局位姿，由 $A_k^{(t)}$ 给出。这可以用一般变换方程概括为

$$A_k^{(t)} \circ X^{(t)} = Y^{(s)} \circ B_k^{(t,s)}\,. \tag{8}$$

目标是最小化所有可用测量值和变换中式 (8) 的误差。需要指出的是，并非对于每个 k，每个目标-传感器对都必须有可用的位姿和检测结果。

对于我们的主要应用——基础设施标定，我们只关注传感器标定 $Y^{(s)}$。然而，按照第 VI 节所述的概念，还需要目标相对位姿 $X^{(t)}$。由于手动测量 $X^{(t)}$ 耗时较长，因此最好同时估计所有变换。

V. 方法

本节介绍一种基于单位双四元数的 HERW 标定表述。首先，使用单个传感器-目标对，推导出包含所有必要约束的优化结构。随后，将问题表述扩展为同时标定多个传感器和目标。最后，推导相应约束，以便在标定流程中纳入先验知识。

A. 手眼机器人-世界优化问题

首先，介绍使用单个传感器和单个目标进行的标定。在这种情况下，HERW 标定表示为

$$A_k \circ X = Y \circ B_k \,, \tag{9}$$

其中，X 和 Y 表示期望的标定参数，A_k 和 B_k 是步骤 k 处的测量值。使用双四元数及其矩阵表示（3）实现单个步骤 k 的式（9），可得

$$\begin{aligned} & \mathrm{q}_a \mathrm{q}_x = \mathrm{q}_y \mathrm{q}_b && \text{(10a)} \\ \iff \quad & \mathrm{q}_x = \mathrm{q}_a^{-1} \mathrm{q}_y \mathrm{q}_b && \text{(10b)} \\ \iff \quad & \boldsymbol{x} = \left[\boldsymbol{A}^{-1}\right]^{+} [\boldsymbol{B}]^{-} \boldsymbol{y} =: \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \,, && \text{(10c)} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{C} = \left[\boldsymbol{A}^{-1}\right]^{+} [\boldsymbol{B}]^{-}$，可表示为

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{z} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_8 & -\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \,. \tag{11}$$

此处，妥善处理单位双四元数的符号歧义至关重要。第（V-B）节将对此作进一步说明。矩阵 $\boldsymbol{M}$ 包含单个步骤的所有测量值。给定 n 个步骤，由 $\boldsymbol{Q}$ 定义的二次代价函数 J 构造如下

$$\boldsymbol{Q} := \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_k \,. \tag{12}$$

如第 III-B 节所述，为确保 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 表示有效的单位双四元数，必须添加更多约束。相应的约束矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{r,\mathrm{x}} &= \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{P}_r \,, \quad \boldsymbol{P}_{d,\mathrm{x}} = \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{P}_d \,, && \text{(13a)} \\ \boldsymbol{P}_{r,\mathrm{y}} &= \boldsymbol{E}_2 \otimes \boldsymbol{P}_r \,, \quad \boldsymbol{P}_{d,\mathrm{y}} = \boldsymbol{E}_2 \otimes \boldsymbol{P}_d \,, && \text{(13b)} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{E}_i := \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}$，使用标准基向量 $\boldsymbol{e}_i \in \mathrm{R}^2$。克罗内克积 $\otimes$ 与 $\boldsymbol{E}_i$ 将式 (4) 中的矩阵 $\boldsymbol{P}_r$和 $\boldsymbol{P}_d$ 放置在对应双四元数 x和 y的位置。最后，HERW 公式的拉格朗日对偶问题与式 (7) 类似，可表示为

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad \lambda_1 + \lambda_3 && \text{(14a)} \\ & \text{w.r.t.} \quad \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \succeq \boldsymbol{0} \,, && \text{(14b)} \\ & \text{with} \quad \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{Q} + \lambda_1 \boldsymbol{P}_{r,\mathrm{x}} + \lambda_2 \boldsymbol{P}_{d,\mathrm{x}} + && \text{(14c)} \\ & \qquad\qquad \lambda_3 \boldsymbol{P}_{r,\mathrm{y}} + \lambda_4 \boldsymbol{P}_{d,\mathrm{y}} \,. && \text{(14d)} \end{aligned}$$

该问题的解用于恢复可认证的全局最优原始解，如第 III-C 节所述。

B. 双四元数符号歧义处理

由于单位双四元数存在符号歧义，q_x 和 $-\mathrm{q}_x$表示相同的变换。然而，在矩阵—向量形式 (11) 中，这种等式并不成立，因为 $\boldsymbol{x} \neq -\boldsymbol{x}$。这意味着，对于每个周期，取决于 q_a 和 q_b 的符号，$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{z}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 才是最优解。因此，必须针对每个周期相应地选择这些符号。

由于同时切换两个符号不会影响解，因此每个周期中只需适当选择 q_b 的符号。在 [7],中，这是通过比较所有 2^{n-1} 种组合并选出最佳结果来实现的。然而，对于大量样本，这种方法并不切实际，因此我们提出一种受随机抽样一致性 [30]启发的新方法。首先，随机选取三个样本，通常足以得到唯一解。对于这些样本，只需检查四种不同的符号组合。然后，使用成本最低的组合来确定所有其他样本的符号。如果存在离群值或噪声，可使用不同的随机样本重复这一过程。对于下一节所述的多个目标或多个传感器，此方法将分别应用于每个目标-传感器对。

C. 多个传感器和目标

本节将前文推导的单传感器单目标校准扩展到多个传感器和目标，如式（8）所述。通过调整式（11）的推导，扩展后的向量矩阵表示法为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_k^{(t,s)} &:= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{t,m_X}^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{I}_8 & -\boldsymbol{e}_{s,m_Y}^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{C}_k^{(t,s)} \end{bmatrix} \,, && \text{(15a)} \\ \boldsymbol{z} &:= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} & \dots & \boldsymbol{x}_{m_X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}} & \dots & \boldsymbol{y}_{m_Y}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,, && \text{(15b)} \end{aligned}$$

使用标准基向量 $\boldsymbol{e}_{i,m_*} \in \mathrm{R}^{m_*}$，$\boldsymbol{M}_k^{(t,s)} \in \mathrm{R}^{8 \times 8m}$ 和 $\boldsymbol{z} \in \mathrm{R}^{8m}$。随后计算式 (5) 的代价矩阵 $\boldsymbol{Q}$，计算公式为

$$\boldsymbol{Q} := \sum_{(k,t,s) \in \mathbb{D}} \boldsymbol{M}_k^{(t,s)^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{M}_k^{(t,s)} \,, \tag{16}$$

其中检测集 D 包含传感器 s 在步骤 k 检测到的所有目标 t 的元组。与（13）类似，附加的约束矩阵定义为

$$\boldsymbol{P}_{r,j} = \boldsymbol{E}_j \otimes \boldsymbol{P}_r \quad \text{and} \quad \boldsymbol{P}_{d,j} = \boldsymbol{E}_j \otimes \boldsymbol{P}_d \,, \tag{17a}$$

与 $j = 1, \dots, m$ 以及 $\boldsymbol{E}_j \in \mathrm{R}^{m \times m}$。这最终导向拉格朗日对偶问题

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_{2j-1} && \text{(18a)} \\ & \text{w.r.t.} \quad \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\lambda}) \succeq \boldsymbol{0} \,, && \text{(18b)} \\ & \text{with} \quad \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{Q} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{2j-1} \boldsymbol{P}_{r,j} + \lambda_{2j} \boldsymbol{P}_{d,j} \,, && \text{(18c)} \end{aligned}$$

用于同时求解多个传感器和目标的 HERW问题。



(a) 摄像机 1　　(b) 摄像机 2

图 2. 显示了用于评估的两台基础设施摄像机的裁剪后相机图像。两幅图像中均可见带有 ArUco标记和棋盘格的标定车辆。此外，用于定量评估摄像机标定参数的参考线以红色标出。

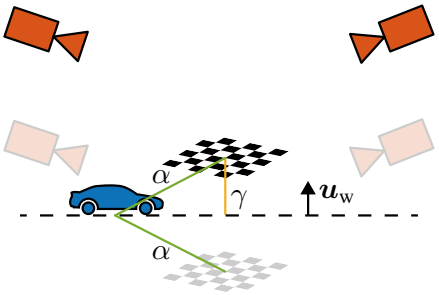


图 3. 图中展示了一辆搭载单个棋盘格靶标的车辆和两个基础设施传感器。虚线表示车辆运动平面及其向上向量 $\boldsymbol{u}_\mathrm{w}$，两者均位于世界坐标系中。在此情形下，已知平移范数 α 的 HERW 公式可得出两个可能的解，它们沿向上向量相差 2γ。所需解（彩色）显示棋盘格位于车辆上方，而另一个可能的解（透明）则要求棋盘格位于车辆下方。

D. 平移范数约束

第 II-A 节中提到的测量要求必须满足 $A_k^{(t)}$ 和 $B_k^{(t,s)}$，才能保证 [4]唯一解。正如第 VI-B 节后文所示，整合额外信息可以放宽其中一些条件。因此，我们引入新约束，以便将先验平移范数信息整合到标定中。根据（1）和（2），对偶部的范数与相应的平移范数之间的关系为

$$\|\mathrm{d}\|^2 = \left\|\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\right\|^2 = \tfrac{1}{4}\|\mathrm{t}\|^2 \,. \tag{19}$$

给定已知的平移范数 $\|\mathrm{t}\| = \alpha$，可得红黑大战

$$\boldsymbol{d}^\mathrm{T}\boldsymbol{d} = \frac{1}{4}\alpha^2 \,. \tag{20}$$

因此，附加约束

$$\frac{1}{4}\alpha_j^2 + \boldsymbol{z}^\mathrm{T}\boldsymbol{P}_{\mathrm{norm},j}\,\boldsymbol{z} = 0\,, \tag{21a}$$

$$\text{with } \boldsymbol{P}_{\mathrm{norm},j} = \boldsymbol{E}_j \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}_4 & -\boldsymbol{I}_4 \end{bmatrix}\,, \tag{21b}$$

可用于在优化过程中约束变换j 的平移范数。稍后将在第 VI-B 节应用此方法，以便利用仅平面位姿数据进行 HERW 标定。

VI. 标定流程

本节将介绍我们提出的基础设施传感器标定流程。为便于阅读，算法仅针对单个目标进行概述。因此，使用车辆位姿 A_k 和目标检测结果 $B_k^{(s)}$ 来获取目标标定 X 和传感器标定 $Y^{(s)}$。

第 VI-A 节介绍了一种用于摄像机全自动检测的标定目标。由于车辆运动 A_k 大多是平面的，因此只有利用额外信息才能获得唯一的 HERW 解。该过程将在第 VI-B 节中介绍。

A. 标定目标

如图 2 所示，多个 ArUco标记 [31]和一个棋盘格 [32] 的组合被用作标定目标。ArUco标记能够从各个方向的相机图像中快速检测并唯一识别相应的标定车辆。因此，它们有助于确定后续棋盘格检测的感兴趣区域。对于第 VII-C 节中的相机，在最远 20m 的距离处仍可检测到这些标记。随后，利用该估计结果，以亚像素精度高效地检测棋盘格角点。之后，利用相机内参标定结果和已知的棋盘格尺寸，计算棋盘格在相机坐标系中的位姿。最后，利用 ArUco标记的唯一方向，确保棋盘格位姿具有唯一的方向。

B. 仅平面位姿的平移校正

如第 V-D 节所述，在没有额外信息的情况下，仅凭仅平面位姿无法获得唯一的 HERW 解。更准确地说，沿运动平面向上向量 [4] 的方向，平移是不确定的。仅使用式 (21) 中所述的约束提供目标标定 X 的平移范数时，有效解的数量会减少为两个，如图 3 所示。该范数可以使用卷尺等工具轻松获得。由于优化过程会偏向两个解中的一个（主要受噪声影响），因此可以自动检查并调整解 $\hat{}X$ 和 $\hat{}Y^{(s)}$。为此，不失一般性地假设目标安装在车辆原点上方，即位于后轴中心处车辆坐标系的正 z 方向。

在车辆坐标系和世界坐标系中，分别使用主成分分析，根据 A_k^{-1} 和 A_k 的位置获得平面向上向量 $\boldsymbol{u}_\mathrm{v}$ 和 $\boldsymbol{u}_\mathrm{w}$。通过将估计目标标定 X 的平移向量 $\boldsymbol{t}_X$ 投影到 $\boldsymbol{u}_\mathrm{v}$ 上，计算正交高度偏移 $\gamma = \boldsymbol{u}_\mathrm{v}^\mathrm{T}\hat{}\boldsymbol{t}_X$。如果 γ 为正，则估计的棋盘格 $\hat{}$位姿 X 位于车辆原点上方，因此是所需的解。否则，必须通过以下方式调整 $\hat{}X$ 和 $\hat{}Y^{(s)}$：

$$\hat{X}' = T_{\boldsymbol{u}_X} \circ \hat{X}\,, \qquad \text{with } \boldsymbol{u}_X = -2\,\gamma\,\boldsymbol{u}_\mathrm{v}\,, \tag{22a}$$

$$\hat{Y}^{(s)\prime} = T_{\boldsymbol{u}_Y} \circ \hat{Y}^{(s)}\,, \quad \text{with } \boldsymbol{u}_Y = -2\,\gamma\,\boldsymbol{u}_\mathrm{w}\,, \tag{22b}$$

其中，$T_{\boldsymbol{u}}$ 表示一个仅包含平移向量$\boldsymbol{u}$ 且不包含旋转的变换。优化并获得所需解的整个过程总结于算法 1 中。

算法 1 基础设施标定

输入： 车辆位姿 A_k、目标检测结果 $B_k^{(s)}$ 、目标标定平移范数 α
输出： 估计标定结果 $\hat{X}$、$\hat{Y}^{(s)}$

过程 CALIBRATE(A_k, $B_k^{(s)}$, α)
  Form $\boldsymbol{M}_k^{(s)}$ 从 A_k 和 $B_k^{(s)}$ ▷ (15a)
  由所有 $\boldsymbol{M}_k^{(s)}$ 构成 $\boldsymbol{Q}$ ▷ (16)
  构成 $\boldsymbol{P}_{r,\,j}$, $\boldsymbol{P}_{d,\,j}$, 以及 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{norm},\,j}$, 用于 α_j ▷ (17)、(21)
  $\hat{X},\ \hat{Y}^{(s)} \leftarrow$ 全局 HERW 解 ▷ (18)，第 III-C 节
  $\gamma \leftarrow$ 投影 $\hat{\boldsymbol{t}}_X$ 到 $\boldsymbol{u}_v$上
  若 $\gamma < 0$ **，则**
    $\hat{X},\ \hat{Y}^{(s)} \leftarrow$ 调整 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}^{(s)}$ ▷ (22)
  返回 $\hat{X}, \hat{Y}^{(s)}$

对于多个传感器和目标，必须逐一检查每个目标标定 $X^{(t)}$。此外，只有在更新了传感器s 检测到的所有目标后，才能调整传感器标定$Y^{(s)}$ 。由于优化过程中 $X^{(t)}$ 和 $Y^{(s)}$ 相互耦合，因此传感器检测到的所有目标中，不可能只有一部分位于车辆原点下方。

VII. 实验

本节将介绍评估过程，并展示和分析结果。首先，在第 VII-A 节中使用来自 [10]的仿真数据，将我们的方法与现有 HERW 方法进行比较。随后，第 VII-B 节和第 VII-C 节通过机器人和基础设施摄像机的真实世界数据实验，展示所提方法的实用性。

如果有真实标定结果，我们将使用 [8] 中描述的误差度量，其定义为

$$\varepsilon_r = 2\arccos(\boldsymbol{q}_{\varepsilon,1}), \tag{23a}$$

$$\varepsilon_t = \left\| 2\,\mathrm{q}_{\varepsilon,d}\,\mathrm{q}_{\varepsilon,r}^{*} \right\|, \tag{23b}$$

其中 $\mathrm{q}_\varepsilon = \mathrm{q}_T^{-1}\,\hat{\mathrm{q}}$ 和 $\boldsymbol{q}_\varepsilon = \mathrm{vec}(\mathrm{q}_\varepsilon)$ 描述的是物理实体。所有实验均在一台配备 ADMRyzen 7 3700X CPU 和 64GB DDR4内存的计算机上运行。每当施加人工噪声或测定执行时间时，结果均取 100 次运行的平均值。以下将我们的方法与 Dornaika等人 [11], 、Shah等人 [12], 、Tabb等人 [6], 和 Wang等人 [13]提出的方法进行比较。此外，还评估了 Li等人 [14]提出的 HM 和单位DQ方法。这些方法分别称为 DORNAIKA、LI HM、LI DQ、SHAH、TABB 和 WANG。

A. 仿真

作者提供的 [10] 数据集 CS SYNTHETIC 01 包含 15 组机器人臂与棋盘格的合成测量值，以及二者的真实标定结果。第 II-A 节中提到的所有测量要求均已满足。表 I 展示了不同方法的 HERW 标定结果。对于表 I 的下半部分，数据分别通过添加标准差为 1.0 cm 的零均值高斯噪声以及 $0.1°$ 进行了增强。

表 I CS 合成 01 [10]的结果。

	方法	X ε_t[毫米]	X ε_r[°]	Y ε_t[毫米]	Y ε_r[°]	时间 [毫秒]
original	DORNAIKA* [11]	4.8	**0.01**	8.3	**0.02**	32.4
	LI HM [14]	**0.5**	0.02	**2.4**	**0.02**	0.4
	LI DQ [14]	7.4	0.02	11.4	**0.02**	13.4
	SHAH [12]	7.5	0.04	8.9	0.05	**0.3**
	TABB* [6]	3.1	0.02	3.9	0.03	195.3
	WANG [13]	7.5	0.04	8.9	0.05	**0.3**
	OURS	8.8	0.02	13.3	0.03	16.6
noise	DORNAIKA* [11]	35.2	0.11	35.9	0.11	37.6
	LI HM [14]	37.3	0.12	38.1	0.12	0.4
	LI DQ [14]	32.6	0.11	33.5	0.11	12.6
	SHAH [12]	36.8	0.15	37.2	0.15	**0.3**
	TABB* [6]	37.5	0.11	37.0	0.11	268.9
	WANG [13]	36.8	0.15	37.2	0.15	**0.3**
	OURS	**31.2**	**0.10**	**32.6**	**0.10**	17.0

* 以 LI HM 的结果初始化的方法 [14]

KUKA 上的结果，表 II 02 [10]。

方法	周期误差 ε_t[毫米]	ε_r[°]	$\varepsilon_{\mathrm{repr}}$[像素]	时间 [毫秒]
DORNAIKA* [11]	**0.6**	**0.04**	1.04	58.3
LI HM [14]	39.1	**0.04**	65.84	0.4
LI DQ [14]	**0.6**	**0.04**	**0.98**	23.4
SHAH [12]	**0.6**	**0.04**	1.04	0.4
TABB* [6]	0.7	0.05	1.56	34.4
WANG [13]	**0.6**	**0.04**	1.04	**0.3**
OURS	0.7	**0.04**	**0.98**	11.8

* 以 LI HM [14] 的结果初始化的方法

总体而言，在原始数据和含噪数据上，所有方法得到的解的旋转误差大小相近。就原始数据的平移误差而言，LI HM 是精度最高的方法之一，且运行时间也属于最低之列。然而，即使噪声量相对较低，LI HM 的性能下降也比其他方法更明显。如第 II 节所述，已知 LI HM 这类线性方法的抗噪性不如其他方法。在含人工噪声的数据上，所有方法得到的解都相近，而我们提出的方法结果略好。所有方法的误差标准差约为 15 mm 和 $0.05°$。由于本次评估中的对偶间隙始终小于 10^{-8}，因此我们可以证明解相对于代价函数的全局最优性。

B. 真实世界机器人数据

作者提供的数据集 KUKA 02 [10]包含 28 组机器人臂和刚性安装的相机对棋盘格进行成像的真实世界测量值。由于没有真实值，使用变换循环误差 $A_k \circ X \circ B_k^{-1} \circ Y^{-1}$ 和所有棋盘格检测结果的均方根重投影误差 $\varepsilon_{\mathrm{repr}}$ [10] 进行评估。

表 II 中展示的真实世界数据结果支持了上一节关于仿真数据的发现。除 LI HM 外，所有方法都得出了相似的解，而 LIHM

真实世界交叉口标定结果，表 III。

方法	目标	传感器	棋盘格 ε_t[厘米]	棋盘格 ε_r[°]	摄像机 1 $\varepsilon_{\text{dist}}$[%]	摄像机 1 $\varepsilon_{\text{repr}}$[像素]	摄像机 2 $\varepsilon_{\text{dist}}$[%]	摄像机 2 $\varepsilon_{\text{repr}}$[px]	时间 [毫秒]
LI DQ [14]	CB	C1	804.0	0.47	106.9	14.5			18.1
WANG [13]	CB	C1	220.9	2.17	31.1	14.7			0.3
我们的方法（w/o X norm）	CB	C1	35.1	**0.45**	3.3	11.2			17.2
OURS	CB	C1	2.5	0.49	**2.0**	**5.0**			22.8
OURS	CB	C2	11.9	0.49			1.6	22.0	22.9
OURS	CB	C1 C2	4.2	0.47	**2.0**	5.1	**1.3**	7.5	138.2
OURS	CB AR	C1 C2	**2.2**	0.83	2.4	7.8	1.7	**6.1**	244.1

目标是棋盘格（CB）和前方的 ArUco标记（AR）。传感器是摄像机 C1 和 C2。

的误差远高于其他方法。此外，我们的方法得到了经验证的全局最优解，因为此处的对偶间隙为 10^{-11}。这表明，只要数据满足所有测量要求，所有方法都能校准该设置。接下来的评估展示了我们的方法在仅平面数据以及多个目标和传感器情况下的优势。

C. 真实世界路口数据

我们使用两台分辨率为 1920×1200px 的基础设施摄像机采集了真实世界数据。摄像机位于 [1] 所述的路口，视场互不重叠；一辆车辆配备了第 VI-A 节所述的目标。图 2 展示了两台摄像机拍摄的裁剪图像。相机坐标系中的目标位姿由系统自动估计，车辆全局位姿则由配备差分全球导航卫星系统（DGNSS）的 AMDA-G-Pro+ 惯性测量单元（IMU）测量得到。第一台摄像机有 134 个棋盘格位姿，第二台有 33 个。为约束平移范数，使用折叠尺测得棋盘格到车辆原点的距离为 1。88m。棋盘格真实位姿由激光测距仪测量。由于没有摄像机的真实标定结果，因此使用所有棋盘格检测结果的均方根重投影误差$\varepsilon_{\text{repr}}$ [10] 进行评估。此外，与 [23], 类似，我们还测量了每幅相机图像中可见的多个地面点之间的距离，如图 2 所示。标定后，使用估计的相机位姿和平面，将相应的图像点投影到平面上，并估算这些点之间的距离。测量与估算的地面距离之间的相对均方根误差记为 $\varepsilon_{\text{dist}}$。

表 III 展示了基础设施数据的结果。用于标定摄像机 C1 和 C2 的目标包括棋盘格 CB 和前置 ArUco标记 AR。每一行列出了相应标定运行所使用的目标和传感器。由于在不使用平移范数时，所有先前测试过的方法表现相似，因此未展示所有方法。正如预期，在不整合平移范数先验知识的情况下，无法进行标定。相比之下，将其整合到我们的方法中，几乎所有测试都能实现准确标定。比较分别标定 C1 和 C2 的结果表明，C2 记录的数据量相对于数据中的噪声水平而言不足。

我们还使用棋盘格的真实标定结果与摄像机 1 上的 PnP 进行比较，得到 $\varepsilon_{\text{dist}}$ 2。0% 和 $\varepsilon_{\text{repr}}$ 3。9px。与我们的结果 2。0% 和 5。0px 相比，为使用 PnP 而费力测量棋盘格的精确位姿并未带来显著收益，尤其是在地面距离指标上。

对于 C1 和 C2 的联合标定，我们的多传感器方法弥补了前文提到的 C2 数据不足问题，有助于改善 C2 的结果，同时不影响 C1 的标定。由于我们的方法仅针对地理参考标定，因此无法将我们的结果与其他局部参照基础设施标定方法 [21]–[23]进行比较。不过，我们分别取得了 $\varepsilon_{\text{dist}}$ 2.0 % 和 1.3 % 的结果，相较于数值为 3 % 至 9% 的其他先进方法，表现令人鼓舞。

尽管 ArUco标记位姿估计不如棋盘格位姿估计准确，但与单目标方法相比，使用 ArUco标记在一定程度上改善了 C2 的结果。不过，在这种情况下，C1 的结果略有变差。尽管如此，使用多个棋盘格标定目标而非 ArUco标记，预计能进一步改善标定结果。

VIII. 结论

我们介绍了一种 QCQP方法，可认证地求解 HERW问题的全局最优解，并支持多个传感器和目标。评估结果表明，即使面对多个传感器和目标，我们的方法也能在保持亚秒级执行时间的同时取得最先进的结果。此外，我们的方法还可纳入先验知识，即目标标定的平移范数。这样，即使基础设施传感器提供的仅平面位姿数据不满足唯一解的测量要求，也能据此进行标定。在所有对比方法中，只有我们的方法能够在仅平面位姿数据上提供准确结果。

我们仅展示了使用棋盘格作为标定目标对摄像机进行基础设施标定的方法。不过，这一概念也可用于其他传感器类型，例如使用 [33]作为激光雷达的标定目标。

参考文献

[1] M. Buchholz, J. M¨uller, M. Herrmann, J. Strohbeck, B. V¨olz, M. Maier, J. Paczia, O. Stein, H. Rehborn, and R.-W. Henn, “利用基础设施传感器的环境模型和多接入边缘计算服务器处理自动驾驶中的遮挡问题”，IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine, vol. 14, no. 3, pp. 106–120, 2022. [2] S. R. E. Datondji, Y. Dupuis, P. Subirats, and P. Vasseur, “道路交叉口基于视觉的交通监控综述”，IEEE智能交通系统汇刊, vol. 17, 2698, 2016 10, 2681 no. pp. – .[3] E. Marchand, H. Uchiyama, and F. Spindler, “增强现实中的位姿估计：实践指南”，IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 22, 2651, 2016 12, 2633 no. pp. – .[4] R. Y. Tsai and R. K. Lenz, “利用三维机器视觉实现实时、多用途的机器人手眼标定”，载于 IEEE机器人与自动化国际会议 (ICRA), 1988, pp. 554–561. [5] H. Zhuang, Z. Roth, and R. Sudhakar, “通过求解 ax=yb 形式的齐次变换方程，同时进行机器人-世界标定和工具/法兰标定”，IEEE机器人与自动化汇刊, vol. 10, no. 4, pp. 549–554, 1994. [6] A. Tabb and K. M. Ahmad Yousef, “利用迭代方法求解机器人-世界手眼标定问题”，Machine Vision and Applications, vol. 28, no. 5, pp. 569–590, 2017. [7] J. Heller, D. Henrion, and T. Pajdla, “通过全局多项式优化进行手眼标定和机器人-世界标定”，载于 IEEE机器人与自动化国际会议 (ICRA), 9 2014, pp. 3157–3164. [8] M. Horn, T. Wodtko, M. Buchholz, and K. Dietmayer, “基于每个传感器自运动和双四元数的在线外参标定”，IEEE机器人与自动化快报, vol. 6, no. 2, pp. 982–989, 2021. [9] Z. Li and V. Willert, “对不相交视场的摄像机进行眼对眼标定”，载于 IEEE智能交通系统国际会议 (ITSC), 2018, pp. 2631–2638. [10] I. Ali, O. Suominen, A. Gotchev, and E. R. Morales, “机器人-世界-手眼联合标定方法：比较研究”，Sensors, vol. 19, no. 12, 2019. [11] F. Dornaika and R. Horaud, “机器人-世界标定与手眼标定的同步进行”，IEEE机器人与自动化汇刊, vol. 14, pp. 617–622, 1998. [12] M. Shah, “使用克罗内克积求解机器人-世界/手眼标定问题”，Journal of Mechanisms and Robotics, vol. 5, no. 3, 2013.[13] Y. Wang, W. Jiang, K. Huang, S. Schwertfeger, and L. Kneip, “基于手眼约束推广方法的多视角相机高精度标定”，载于 IEEE机器人与自动化国际会议 (ICRA), 5 2022, pp. 1244–1250. [14] A. Li, L. Wang, and D. Wu, “使用双四元数和克罗内克积进行机器人-世界标定与手眼标定”，International Journal of Physical Sciences, vol. 5, no. 10, pp. 1530–1536, 2010. [15] W. Li, M. Dong, N. Lu, X. Lou, and P. Sun, “无需标定物体的机器人-世界标定与手眼标定”，Sensors, vol. 18, no. 11, 2018. [16] Z. Zhao, “通过替代线性规划进行机器人-世界标定与手眼标定”，模式识别快报, vol. 127, pp. 174–180, 2019. [17] N. K. Kanhere and S. T. Birchfield, “面向交通监控应用的相机标定方法分类与分析”，IEEE智能交通系统汇刊, vol. 11, no. 2, pp. 441–452, 2010. [18] G. S. K. Fung, N. H. C. Yung, and G. K. Pang, “根据道路车道线进行相机标定”，光学工程, vol. 42, 2977, 2003 2967pp. – .[19] M. Dubsk´a, J. Sochor, and A. Herout, “面向交通理解的自动相机标定”，载于英国机器视觉会议, 2014. [20] M. Dubsk´a, A. Herout, R. Jur´anek, and J. Sochor, “用于交通监控的全自动路侧相机标定”，IEEE智能交通系统汇刊, vol. 16, 1171, 2015 3, 1162 no. pp. – . [21] J. Sochor, R. Jur´anek, and A. Herout, “通过三维模型边界框对齐进行交通监控摄像机标定，以准确测量车辆速度”，计算机视觉与图像理解, vol. 161, pp. 87–98, 2017.

[22] R. Bhardwaj, G. K. Tummala, G. Ramalingam, R. Ramjee, and P. Sinha,《Autocalib：大规模自动交通摄像机标定》，*ACM*传感器网络汇刊，第14卷，2018年11月。[23] V. Bartl, J. ˇSpaˇnhel, P. Dobeˇs, R. Jur´anek, and A. Herout, 《利用刚体上的地标进行自动相机标定》，*Machine Vision and Applications*，第32卷，第1期，第1–13页，2021年。[24] J. M¨uller, M. Herrmann, J. Strohbeck, V. Belagiannis, and M. Buchholz, 《Laci：基础设施传感器的低成本自动标定》，载于*IEEE*智能交通系统会议（*ITSC*），2019年，第3928–3933页。[25] A. Tsaregorodtsev, J. M¨uller, J. Strohbeck, M. Herrmann, M. Buchholz, and V. Belagiannis, 《基于语义分割的相机外参标定》，载于智能交通系统国际会议（*ITSC*），2022年，第3781–3787页。[26] J. M. McCarthy, 理论运动学导论。MIT出版社，1990年。[27] T. Wodtko, M. Horn, M. Buchholz, and K. Dietmayer, 《使用双四元数进行全局最优多尺度单目手眼标定》，载于*3D*视觉国际会议（*3DV*），2021年，第249–257页。[28] S. P. Boyd and L. Vandenberghe, 凸优化。剑桥大学出版社，2004年。[29] K. Daniilidis, 《使用双四元数进行手眼标定》，国际机器人研究期刊，第18卷，298，1999年第3期，第286页。[30] M. A. Fischler and R. C. Bolles, 《随机抽样一致性：一种用于模型拟合的范式及其在图像分析和自动制图中的应用》，*ACM*通讯，第24卷，第381–395页，1981年6月。[31] S. Garrido-Jurado, R. Mu˜noz-Salinas, F. J. Madrid-Cuevas, and M. J. Mar´ın-Jim´enez, 《遮挡条件下高可靠性基准标记的自动生成与检测》，*Pattern Recognition*，第47卷，第6期，第2280–2292页，2014年。[32] P. Furgale, J. Rehder, and R. Siegwart, 《多传感器系统统一时间与空间标定》，载于*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议（*IROS*），2013年，第1280–1286页。[33] C. Guindel, J. Beltr´an, D. Mart´ın, and F. Garc´ıa, 《激光雷达-立体视觉车辆传感器配置的自动外参标定》，载于*IEEE*智能交通系统国际会议（*ITSC*），2017年，第1–6页。