arXiv:2305.01413v1 [physics.soc-ph] 2 May 2023

# 信任还是不信任：非对称N人信任博弈的演化动态

Ik Soo Lim 和 Naoki Masuda

摘要——**信任他人，并以可信赖行为回报他人给予的信任，是经济和社会互动的基础。信任博弈（TG）被广泛用于研究信任和可信任性，涉及一名投资者和一名受托人之间的顺序互动。投资者至少需要有两种策略或选项（例如，选择信任或不信任受托人）。根据演化博弈论，反社会策略（例如不信任）会演化，导致投资者和受托人最终获得的收益低于采用亲社会策略（例如信任）时所能获得的收益。最近，有人提出了将信任博弈推广至多人（即两人以上）参与者的信任博弈。然而，其结果取决于两项假设，而许多现实情境可能与之存在显著偏差：（i）投资者必须信任受托人；（ii）投资者可以通过模仿转变为受托人，反之亦然。我们提出一种非对称多人信任博弈，允许投资者选择不信任，并禁止不同角色的参与者相互模仿；投资者只向其他投资者学习，受托人亦然。我们表明，所提出的信任博弈的演化博弈动力学在定性上取决于收益函数的非线性，以及通过某个机构向参与者收取并分配的激励数量。我们还表明，给予受托人的激励有助于以较低成本在利己型参与者中促进信任和可信任性，且足以实现这一目的。**

索引词——**演化博弈论、演化动力学、复制子动力学、信任博弈、激励**

## I. 引言

自利个体之间亲社会行为的演化一直是跨学科研究的重点。例如，在囚徒困境（PD）等社会困境情境中，合作的演化，以及其 $N$n参与者推广形式——公共物品博弈（PGG）——吸引了广泛关注 [1][2][3][4][5][6]。演化博弈论提供了一个理论框架，用于研究自利个体在这些社会困境或其他情境中的策略或行为演化；在这些情境中，成功的策略或基因通过适应度依赖型繁殖和模仿得以传播 [7][8]。它也被广泛用于各种应用，例如对竞争性技术的传播以及绿色供应链管理政策进行建模 [9][10]。

两位参与者之间的非同时互动或序贯互动在许多情境中都很常见，例如买卖双方互动；而囚徒困境和公共物品博弈则关注同时互动。非同时互动会引发信任问题，因为两位参与者中的一方所作的决定

Ik Soo Lim 任职于英国格林威治大学计算与数学科学学院，地址：英国伦敦 SE10 9LS（电子邮箱：i.lim@gre.ac.uk）。Naoki Masuda 任职于美国纽约州立大学布法罗分校数学系及计算与数据赋能科学与工程项目。稿件收到日期：XXXX；修订日期：YYYY。

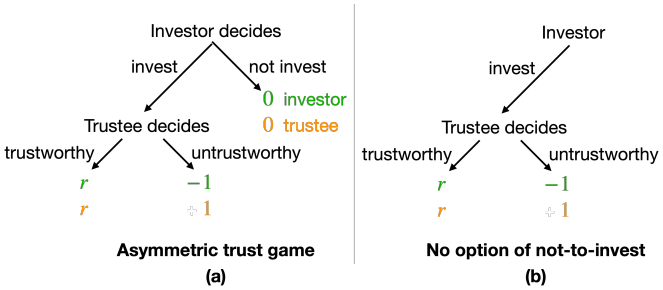



图 1. 双人二元信任博弈。（a）非对称双人二元信任博弈的博弈树，在文献 [27],中称为一般双人TG1G，其中每位参与者的角色是固定的。投资者的收益以绿色显示，受托人的收益以橙色显示。改编自文献 [19]。本文将这一博弈推广至 $N$人博弈。（b）用于在文献 [27]中推广至NTG的双人二元信任博弈的博弈树。该博弈不允许投资者选择不投资。在（a）和（b）中，我们要求 $0 < r < 1$，其中 $r$ 表示亲社会策略的相对生产力。

（例如买方）可能使自己容易遭受另一方（例如卖方）的剥削 [11]。在此类情境中，较高程度的信任他人，以及以可信赖行为回报他人给予的信任，与更高效的司法体系、更高质量的政府官僚机构、更低的腐败程度、更完善的金融发展以及更好的经济成果等社会效益相关 [12]。信任这一概念也引起了工程研究界的关注，涉及从网络到人机交互和人工智能等领域[13][14][15]，其中许多问题都被表述为买卖双方互动 [16]。信任博弈（TG）是社会困境情境中非同时互动的一种正式建模的当前黄金标准，已被广泛用于研究信任和可信任性 [11][12][17][18][19][20][21][22][23][24]。信任博弈由两位参与者扮演不同角色进行的一次性序贯互动构成：一方是投资者（例如代表信任者、买方或公民），另一方是受托人（例如代表卖方或治理者）。信任博弈最简单的变体之一是二元信任博弈，其中每种角色各有两种策略 [19][25][26]。投资者可以选择投资（即信任）受托人，也可以选择不投资。随后，受托人决定对投资者表现得可信任或不可信任（图1a）。

演化博弈论预测，在双人二元信任博弈中，自利策略（例如，投资者不进行投资）会演化出来。经典博弈论通过逆向归纳法也得出类似结论：如果投资者进行了投资，理性受托者会因采取不可信任的做法而获益更多；预见到这一点，理性投资者便不会

一开始就向受托者投资。因此，两位参与者最终获得的收益低于采取亲社会策略时所能获得的收益（即投资者进行投资，受托者值得信任）。因此，需要一种额外机制来促进信任博弈中亲社会策略的演化 [28][29][30]。

一个 $N$参与者的二元信任博弈（NTG）最近被提出，作为二元信任博弈 $N \geq 2$的多人（即 [27]）推广形式。然而，它存在两个主要问题，妨碍我们以相当现实的方式阐明多人情境下信任与可信任性的机制。首先，在这种 NTG 中，投资者没有不投资的选项（图1b）；假设投资者会进行投资。因此，无法研究信任行为相对于不信任行为的演化与稳定性。请注意，他们提出的含有$N = 2$ 名参与者的 NTG 并非本模型试图推广的双人信任博弈。其次，投资者可以通过基于收益的模仿转变为受托人，反之亦然。第二项假设导致的演化结果是，所有参与者最终都变成受托人，从而停止博弈参与[27]。没有投资者，博弈便无法继续。对于这一结果的合理性以及角色无关模仿这一假设的依据，尚不清楚。文献 [27], 以公民和治理者构成的 NTG 为例，其中公民可以通过模仿转变为治理者。演化结果是所有参与者都变成治理者。一旦没有公民，就没有 NTG 可供参与。一个只有治理者、没有公民的群体不仅不现实，也不符合信任博弈的行为实验设置；这些设置确保公民（或投资者）和治理者（或受托人）始终都能参与信任博弈 [12]。对原始信任博弈 NTG 的后续研究 [27] 也沿用了上述两个假设，即投资者没有不投资的选择，而且参与者可以通过模仿转变为自己偏好的角色 [31][32][33]。

现实中，投资者与受托人之间的互动往往涉及多方互动，而非双边互动；例如，一个大型项目可能涉及多名投资者。因此，建立合理的非同步信任博弈并理解其种群动力学，仍是一项值得追求的目标。本文的贡献有三点：

- 我们提出了一种非对称非同步信任博弈，其中每种角色有两种策略。该模型推广了双人信任博弈，同时避免了先前提出的非同步信任博弈固有的两个问题。
- 我们引入了非线性收益函数，其产生的演化动力学在定性上可能与线性收益函数产生的动力学不同。
- 我们提出了一种激励方案，能够以较低成本引导利己型参与者采取亲社会策略，从而使收益（或社会福利）的群体平均值最大化。

本文使用的源代码托管在 GitHub 上：https://github.com/iksoolim/asymmetricN-player ~~trust~~game。

## II. 模型

### A. 种群与群体形成

我们考虑一种非对称信任博弈，其中每个个体在整个演化动力学过程中始终固定扮演投资者或受托人之一。此外，我们假设社会学习，即收益引导的策略模仿，只在扮演相同角色的个体之间发生，这与双人信任博弈 [19] 中的情况相同。每种角色都有两种可选策略。投资者可以选择投资或不投资受托人。受托人则选择对投资者可信任或不可信任。我们考虑两个无限大的种群，一个由投资者组成，另一个由受托人组成。不时地，分别从两个种群中均匀随机抽取 $N_I$名投资者和 $N_T$ 名受托人，组成一个群体，这些 $N \equiv N_I + N_T$名个体参与一场单轮信任博弈。我们假设 $N_I$和 $N_T$ 是固定的。

### B. 收益

我们假设，投资型投资者的投资总价值为

$$\frac{1-w^{k_i}}{1-w} = \begin{cases} 0 & \text{if } k_i = 0, \\ 1 & \text{if } k_i = 1, \\ 1 + w + w^2 + \cdots + w^{k_i - 1} & \text{if } k_i \geq 2, \end{cases} \quad (1)$$

其中， $k_i \in \{0, 1, \ldots, N_I\}$ 表示群体中的投资型投资者数量，而 $w > 0$ 决定了新增一名投资者为集体利益作出贡献时，投资价值如何累积。此前，公共物品博弈（PGG）中也使用过类似的非线性收益函数 [4]。如果 $0 < w < 1$，那么每增加一名投资型投资者，其贡献价值都会递减，即经过折减或呈次可加性。如果 $w = 1$，那么无论投资型投资者的数量如何，每位投资者的贡献价值均为 1， $k_i$。该线性收益函数与原始信任博弈（NTG）中的收益函数相同 [27]。注意，当 $k_i$ 时，投资总价值等于 $w = 1$；这是将洛必达法则应用于公式（1）左侧所得的结果。如果$w > 1$，则每位投资者的贡献价值会随着 $k_i$ 的增加而增加，即体现出协同效应或超可加效益。

总投资被平均分配给 $N_T$ 受托人。因此，群体中不可信受托人从博弈中获得的收益，记作$\Pi_u^o(k_i)$，为

$$\Pi_u^o(k_i) = \frac{1}{N_T} \frac{1-w^{k_i}}{1-w}. \quad (2)$$

群体中可信任的受托人获得的收益，记作$\Pi_t^o(k_i)$，为

$$\Pi_t^o(k_i) = r\Pi_u^o(k_i) = r\frac{1}{N_T} \frac{1-w^{k_i}}{1-w}, \quad (3)$$

其中 $r$ 表示亲社会策略的相对生产力，并满足 $0 < r < 1$。在双人信任博弈中，当一名投资者与一名可信任的受托人相互作用时，双方获得相同的收益（图1a）。在

$N$参与者的一般化版本中，类似地，我们假设一群投资型投资者与一群可信任的受托人相互作用时，每个群体都获得相同的（群体）收益。来自 $k_t \in \{0,1,\ldots,N_T\}$可信任的受托人的总回报由群体中的 $k_i$ 投资型投资者平均分配。因此，投资型投资者从博弈中获得的收益，记作 $\Pi_i^o(k_i,k_t)$，表示为

$$\begin{aligned}\Pi_i^o(k_i,k_t) &= \underbrace{\frac{1}{k_i}k_t\Pi_t^o(k_i)}_{\text{net gain}} + \underbrace{(N_T-k_t)\left(-\frac{1}{N_T}\right)}_{\text{net loss}} \\ &= \frac{k_t}{N_T}\frac{r\left(1-w^{k_i}\right)}{k_i(1-w)} + \left(1-\frac{k_t}{N_T}\right)\cdot(-1).\end{aligned} \tag{4}$$

收益 $\Pi_i^o(k_i,k_t)$ 等于投资型投资者在与每位 $N_T$ 名受托人进行双人博弈时的预期收益；可信任的受托人带来的净收益为$r\left(1-w^{k_i}\right)/k_i(1-w)$，而不可信任的受托人带来的净损失为$-1$。最后，非投资型投资者的收益为 $\Pi_n^o=0$。注意，$N_I=N_T=1$ 的一个特殊情形可还原为双人信任博弈（图1a）。

通过纳入对参与者的激励及相关成本，我们将投资型投资者、非投资型投资者、可信任的受托人和不可信任的受托人的最终收益 $\Pi_i$、 $\Pi_n$、 $\Pi_t$和 $\Pi_u$ 分别定义为：

$$\Pi_i(k_i,k_t) = \Pi_i^o(k_i,k_t) + v_I - av_I, \tag{5}$$

$$\Pi_n = \Pi_n^o - av_I, \tag{6}$$

$$\Pi_t(k_i) = \Pi_t^o(k_i) + v_T - av_T, \tag{7}$$

$$\Pi_u(k_i) = \Pi_u^o(k_i) - av_T, \tag{8}$$

其中，投资者向提供激励的机构支付费用 $av_I$，而投资型投资者从该机构获得奖励 $v_I$，其中 $v_I \geq 0$。我们假设费用率$a>1$ 满足激励总额低于费用总额，同时将机构的运营成本考虑在内。类似地，受托人向机构支付费用 $av_T$，而可信任的受托人获得奖励 $v_T \geq 0$。我们对公共物品博弈（PGG）也假设采用类似的激励方案 [6]。对于由 $N$ 名参与者组成的群体中的某位投资者， $N_T$ 名受托人中有 $m_t$ 名可信任（因此有 $N_T-m_t$名不可信任）的概率为 $\binom{N_T}{m_t}y_t^{m_t}(1-y_t)^{N_T-m_t}$，其中$y_t$ 表示受托人群体中可信任受托人的比例； $1-y_t$ 表示不可信任受托人的比例。对于某位投资者，在其余 $N_I-1$名投资者中有 $m_i$ 名进行投资的概率为 $\binom{N_I-1}{m_i}y_i^{m_i}(1-y_i)^{N_I-1-m_i}$，其中$y_i$ 表示投资者群体中投资型投资者的比例。因此，投资型投资者的预期收益为

$$\begin{aligned}P_i &= \sum_{m_i=0}^{N_I-1}\binom{N_I-1}{m_i}y_i^{m_i}(1-y_i)^{N_I-1-m_i} \\ &\quad\times\sum_{m_t=0}^{N_T}\binom{N_T}{m_t}y_t^{m_t}(1-y_t)^{N_T-m_t}\Pi_i(m_i+1,m_t) \\ &= \frac{r}{N_I(1-w)}\frac{y_t}{y_i}\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}+y_t-1 \\ &\quad+v_I-av_I.\end{aligned} \tag{9}$$

类似地，非投资型投资者、可信任受托人和不可信任受托人的预期收益 $P_n$， $P_t$ 和 $P_u$ 分别为

$$P_n = -av_I, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}P_t &= \sum_{m_i=0}^{N_I}\binom{N_I}{m_i}y_i^{m_i}(1-y_i)^{N_I-m_i} \\ &\quad\times\sum_{m_t=0}^{N_T-1}\binom{N_T-1}{m_t}y_t^{m_t}(1-y_t)^{N_T-1-m_t}\Pi_t(m_i), \\ &= \frac{r}{N_T(1-w)}\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}+v_T-av_T,\end{aligned} \tag{11}$$

$$P_u = \frac{1}{N_T(1-w)}\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}-av_T. \tag{12}$$

推导过程见附录A，公式（9）、（11）和（12）。

### C. 演化博弈动力学

对于演化博弈动力学，我们采用如下非对称复制子方程：

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= y_i(P_i-P_I) = y_i(1-y_i)(P_i-P_n) \\ &= (1-y_i)y_i\left(\frac{ry_t\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}}{N_I(1-w)y_i}+y_t-1+v_I\right),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_t &= y_t(P_t-P_T) = y_t(1-y_t)(P_t-P_u) \\ &= (1-y_t)y_t\left(\frac{(r-1)\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}}{N_T(1-w)}+v_T\right),\end{aligned} \tag{14}$$

其中，点表示时间导数， $P_I=y_iP_i+(1-y_i)P_n$是整个群体中投资者的平均收益， $P_T=y_tP_t+(1-y_t)P_u$ 是受托人的平均收益。

为分析方程（13）和（14）所描述的动力学，我们令 $\dot{y}_i=\dot{y}_t=0$，求出所有均衡。均衡的稳定性由雅可比矩阵的特征值决定，该矩阵为

$$J = \begin{pmatrix}\frac{\partial\dot{y}_i}{\partial y_i} & \frac{\partial\dot{y}_i}{\partial y_t} \\ \frac{\partial\dot{y}_t}{\partial y_i} & \frac{\partial\dot{y}_t}{\partial y_t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix} \tag{15}$$

在均衡点处，其中

$$\begin{aligned}J_{11} &= r(1-y_i)y_t[(w-1)y_i+1]^{N_I-1} \\ &\quad-\frac{ry_t\left\{[(w-1)y_i+1]^{N_I}-1\right\}}{N_I(w-1)}-(2y_i-1)(v_I+y_t-1),\end{aligned} \tag{16}$$

$$J_{12} = \frac{(1-y_i)\left(r\left\{[(w-1)y_i+1]^{N_I}-1\right\}+N_I(w-1)y_i\right)}{N_I(w-1)}, \tag{17}$$

$$J_{21} = \frac{N_I(r-1)(1-y_t)y_t[(w-1)y_i+1]^{N_I-1}}{N_T}, \tag{18}$$

$$J_{22} = \frac{(2y_t-1)(r-1)\left\{1-[(w-1)y_i+1]^{N_I}\right\}}{N_T(w-1)}$$

$$-(2y_t-1)v_T. \tag{19}$$

如果两个特征值中有任意一个为正，则该均衡是不稳定的。否则，该均衡是稳定的；从足够接近均衡点处出发的轨迹会始终保持足够接近。特别地，当且仅当所有特征值均为负时，该均衡是渐近稳定的；在这种情况下，从足够接近均衡点处出发的轨迹会收敛于该均衡点 [34]。注意，方程（13）、（14）（16）、（17）和（19）在$w=1$ 的情况下也成立，此时需使用洛必达法则。

## III. 结果

在本节中，我们将刻画由方程（13）和（14）给出的动力系统的均衡、稳定性及轨迹，其状态空间为 $\{(y_i,y_t)\in[0,1]^2\}$。注意，方程（13）和（14）表明，$(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$和 $(1,1)$始终是均衡。关于这些均衡及其他均衡的稳定性证明，见附录B。

### A. $v_T=0$

对于 $v_T=0$，状态空间的边界 $y_i=0$ 是一条平衡点线。对于 $v_T=0\wedge 0\le v_I<1$，满足 $0\le y_t<\frac{1-v_I}{r+1}$ 的那部分边界（包括原点 $(y_i,y_t)=(0,0)$）是稳定的，但不是渐近稳定的（图2a）。线上满足 $\frac{1-v_I}{r+1}<y_t\le 1$ 的点（包括 $(0,1)$）以及 $(1,0)$ 和 $(1,1)$，都是不稳定的均衡。如图2a所示，任意轨迹最终都会被吸引到某个稳定均衡。该演化结果在定性上与双人信任博弈相同，无论收益函数中的非线性 $w$ 如何（例如，对任意 $w\in\{0.6,1,1.4\}$ 都如此）。在 $v_T=0\wedge v_I=0\wedge w=1$ 这一特殊情况下，我们得到一个基准模型，它是双人信任博弈的 $N$ 人推广，且不包含任何其他机制。

对于 $v_T=0\wedge v_I>1$，均衡 $(1,0)$ 不仅渐近稳定，而且全局收敛（即从任意初始状态都能到达）。均衡 $(0,0)$、$(0,1)$、$(1,1)$ 和$y_i=0$ 均不稳定。

### B. $0<v_T<v_T^*$

对于 $0<v_T<v_T^*\equiv\frac{(1-r)(w^{N_I}-1)}{N_T(w-1)}\wedge 0\le v_I<1$，一个内部均衡

$$\mathbf{Q}=\left(\frac{d^{1/N_I}-1}{w-1},\frac{N_I(1-v_I)\left(d^{1/N_I}-1\right)}{N_I\left(d^{1/N_I}-1\right)+(d-1)r}\right), \tag{20}$$

出现，其中 $d=1+\frac{N_Tv_T}{(w-1)(1-r)}$。内部均衡位于两条零流线 $P_i-P_n=0$ 和$P_t-P_u=0$ 与 $0<y_i<1\wedge 0<y_t<1$的交点处；存在内部均衡的证明见附录B5。注意，根据洛必达法则，对于 $w=1$，有 $v_T^*=\frac{N_I}{N_T}(1-r)$和 $\mathcal{Q}=\begin{pmatrix}N_Tv_T & 1-v_I\\ N_I & 1+r\end{pmatrix}$。

内部均衡对于 $w<1$是渐近稳定的，对于 $w=1$是中性稳定的，对于 $w>1$ 是不稳定的（图 2b）。其他均衡是状态空间的四个角点，且全都不稳定。对于 $w=1$，所有轨迹围绕 Q 形成闭合周期轨道，每条周期轨道上 $(y_i,y_t)$ 的时间平均值都等于由公式 (20) 给出的 Q 处的 $(y_i,y_t)$；证明见附录 C。对于 $w>1$，所有轨迹都收敛于由四个不稳定均衡组成的异宿环，这四个均衡是鞍点，以及连接它们的四条边界；(0,0) $\to$(0, 1) $\to$(1, 1) $\to$(1, 0) $\to$ (0, 0)。在这种情况下，沿异宿环的 $y_i$ 和 $y_t$的时间平均值不收敛；证明见附录 D。

对于 $0<v_T<v_T^*\wedge v_I>1$，不存在任何内部均衡。在这种情况下，只有四个角点是均衡。(1，0)均衡不仅渐近稳定，而且全局收敛。(0，0)、(0，1)和(1，1)均衡均不稳定。

### C. $v_T=v_T^*$

在 $v_T=v_T^*$处，平衡点线 $y_i=1$ 出现。对于 $v_T=v_T^*\wedge 0\le v_I<1$，满足 $\frac{N_I(1-v_I)(w-1)}{r(w^{N_I}-1)+N_I(w-1)}<y_t\le 1$的线段（包括 $(y_i,y_t)=(1,1)$）是稳定的，但不是渐近稳定的（图2c）。满足 $0\le y_t<\frac{N_I(1-v_I)(w-1)}{r(w^{N_I}-1)+N_I(w-1)}$ 的线段（包括 $(1,0)$），以及均衡 $(0,0)$ 和 $(0,1)$，均不稳定。

对于 $v_T=v_T^*\wedge v_I>1$，包括 (1,0) 和 (1,1) 在内的整条均衡线是稳定的，但不是渐近稳定的。均衡 $(0,0)$ 和 (0,1) 是不稳定的。这些结果在不同的 $w$ 取值下在定性上相同。

### D. $v_T>v_T^*$

对于 $v_T>v_T^*$，只有四个角点是均衡。均衡 $(1,1)$ 不仅是渐近稳定的，而且是全局收敛的（图 2d）。注意，$(1,1)$ 代表完全合作的群体，其完全由投资型投资者和可信任的受托人组成。所有其他均衡，即 $(0,0)$、$(0,1)$ 和 $(1,0)$，都是不稳定的。这些结果与 $v_I\ge 0$ 和 $w$ 的取值无关，但取决于 $w$。

在图3中，我们展示了截至目前分析的示意图。图中呈现的演化动力学会根据激励值 $v_I$ 和 $v_T$.

### E. 群体平均收益与最优激励

我们提出并分析当前 NTG 的目标之一，是引导利己型参与者以亲社会的方式行事，提高参与者所获得收益意义下的均衡效率，并以成本高效的方式实现这一目标。因此，在本节中，我们分析经过演化动力学均衡化（例如达到稳定均衡）后给出的群体平均收益

$$\begin{aligned}P(y_i,y_t)=&\frac{N_I}{N_I+N_T}P_I(y_i,y_t)+\frac{N_T}{N_I+N_T}P_T(y_i,y_t)\\ =&-\frac{a(w-1)(N_Iv_I+N_Tv_T)+1}{(w-1)(N_I+N_T)}+\frac{N_I(v_I-1)}{N_I+N_T}y_i\\ &+\frac{N_Tv_T(w-1)-2r+1}{(w-1)(N_I+N_T)}y_t+\frac{N_I}{N_I+N_T}y_iy_t\\ &+\frac{[(2r-1)y_t+1]\left[(w-1)y_i+1\right]^{N_I}}{(w-1)(N_I+N_T)}\end{aligned} \tag{21}$$

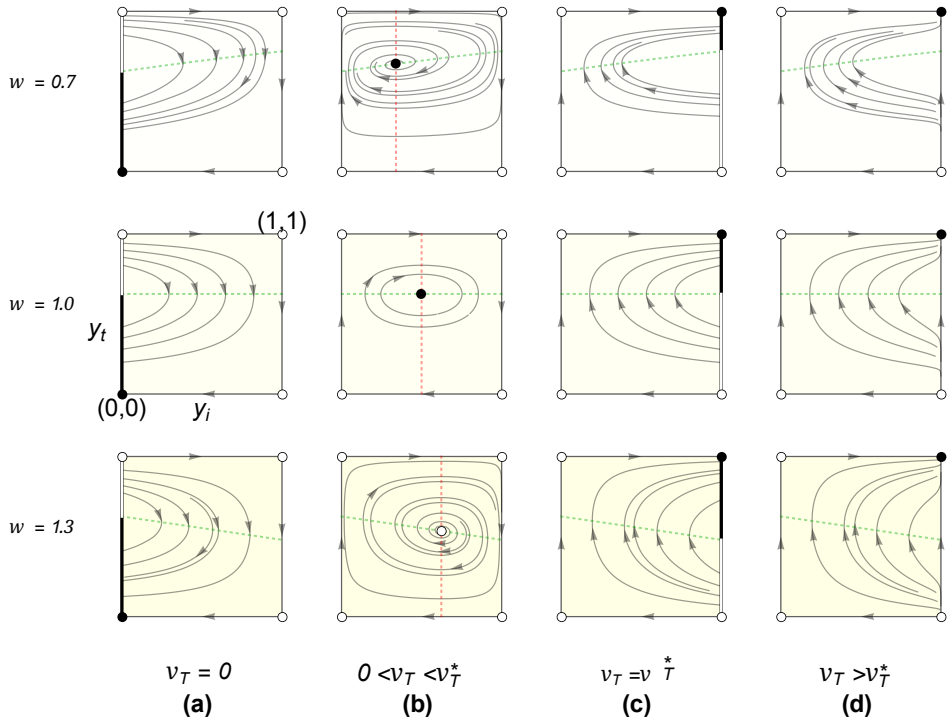



图2. 参与者角色固定时非对称信任博弈的演化博弈动力学。设定 $N_I = 5$，$N_T = 5$，$r = 0.6$、$v_I = 0$和$v_T/v_T^* \in \{0, 0.5, 1, 1.1\}$。（第一行）$w = 0.7$，（第二行）$w = 1$，（第三行）$w = 1.3$。实心圆表示稳定均衡，空心圆表示不稳定均衡。在边界 $y_i = 0$和 $y_i = 1$上，粗实线表示稳定均衡，空心线表示不稳定均衡。虚线表示零流线 $P_i - P_n = 0$（绿色）和 $P_t - P_u = 0$（红色）。(a) 当 $v_T = 0$时（即没有激励去促使受托人可信），所有轨迹都收敛到边界 $y_i = 0$的下部，投资（即信任）不会演化。(b) 当 $0 < v_T < v_T^*$时，内部均衡点出现，并随着 $v_T$增加而移动，从 $y_i = 0$移向 $y_i = 1$。(c) 当 $v_T = v_T^*$时，内部均衡消失，所有轨迹都收敛到边界 $y_i = 1$的上部。(d) 当 $v_T > v_T^*$时，所有轨迹都收敛到 (1，1)，即完全信任且完全可信的状态。收益函数中的非线性会产生稳定的内部均衡，轨迹螺旋式地趋近该均衡；也会产生不稳定的内部均衡，轨迹螺旋式地远离该均衡。这些动力学与线性收益函数情形下的动力学（即内部均衡中性稳定，周围存在周期轨迹）在性质上截然不同。

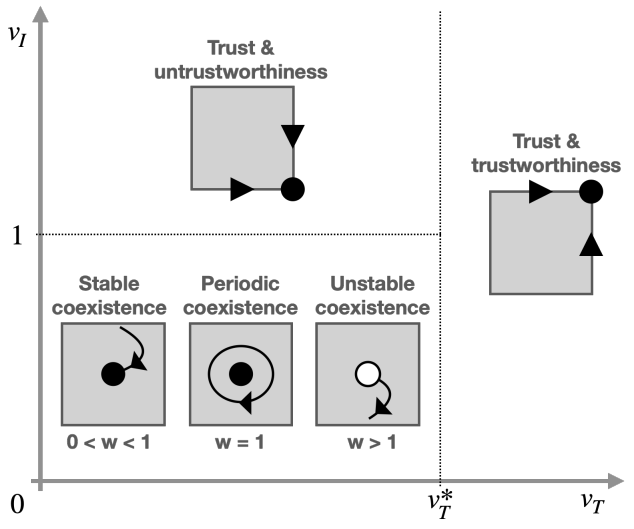



图3. 示意图总结了激励值 $v_I$ 和 $v_T$ 对演化动力学的影响。在状态空间的边界，即单位正方形上，我们只显示稳定均衡及流向它们的轨迹。非一般情形（即 $v_T = 0$、$v_T = v_T^*$、$v_I = 0$以及 $v_I = 1$）未予显示。

。注意 $\frac{\partial P}{\partial v_I} = -\frac{N_I}{N_I+N_T}(a - y_i) < 0$由于$a > 1$且 $y_i \leq 1$。换言之，有些出人意料的是，给予投资型投资者的激励 $v_I$会损害整体社会福利，因为随着 $v_I$ 增加，群体平均收益会降低。因此，对于任意给定的（$y_i$，$y_t$），都需要最小化 $v_I$，以最大化 $P$（$y_i$，$y_t$）。

*1*）在 (0，0) 处的最优收益：在 (0，0) 处的群体平均收益为

$$P(0,0) = -\frac{aN_I v_I}{N_I + N_T}. \tag{22}$$

如果 (0，0) 是稳定均衡（即 $0 \leq v_I < 1 \wedge v_T = 0$），那么 $P$(0，0) 在 $v_I = 0 \wedge v_T = 0$ 处达到最大值。

*2*）在 (1，0) 处的最优收益：在 (1，0) 处的群体平均收益为

$$P(1,0) = \frac{N_I(-av_I + v_I - 1)}{N_I + N_T} + \frac{N_T\left[\frac{1-w^{N_I}}{N_T(1-w)} - av_T\right]}{N_I + N_T}. \tag{23}$$

我们得到 $\frac{\partial}{\partial v_T}P$(1，0) $= -\frac{aN_T}{N_I+N_T} < 0$。因此，如果 (1，0) 是一个渐近稳定均衡（即$v_I > 1 \wedge 0 \leq v_T <$

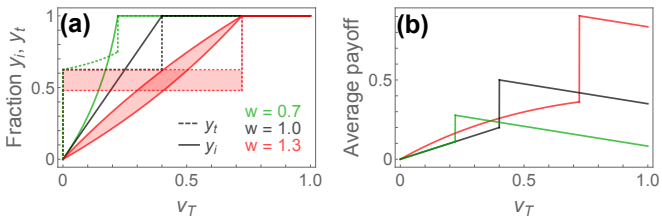



图4. 激励可信任的受托人所产生的影响，$v_T$，以及收益函数中的非线性，$w$，对NTG中演化结果的影响。除 $v_T$ 外，我们采用与图2相同的参数值。(a) 均衡中亲社会参与者的比例随给予可信任受托人的奖励$v_T$变化的情况。我们展示投资型投资者的比例 $y_i$和可信任受托人的比例 $y_t$。对于 $w > 1$ 和 $0 < v_T < v_T^*$，$y_i$ 和 $y_t$ 的时间平均值不收敛。因此，我们改为用阴影区域绘出 $y_i$ 和 $y_t$ 的渐近值范围。我们观察到，当 $v_T < v_T^*$时，$y_i$ 随 $v_T$增加而增加。当 $v_T > v_T^*$时，会演化出完全信任 $y_i = 1$ 和完全可信任性 $y_t = 1$。(b) 群体平均收益 $P$随 $v_T$变化的情况。我们观察到，当 $v_T < v_T^*$时，$P$随 $v_T$增加而增加；当 $v_T > v_T^*$时，$P$随 $v_T$增加而减少。注意，即使 $y_i$ 和 $y_t$ 的时间平均值不收敛，$P$的时间平均值仍会收敛。图(a)表明，随着 $w$增加（即从次线性到线性再到超线性），信任和可信任性的演化会变得更加困难。换言之，当 $w$ 较大时，要达到相同比例的亲社会参与者，需要更高的 $v_T$ 值。相反，图(b)表明，完全信任和可信任性的收益会随着 $w$ 增加而增加。

$v_T^*$)，那么 $P(1,\ 0)$ 在 $v_I = 1+\epsilon \wedge v_T = 0$ 处达到最大值，其中 $0 < \epsilon \ll 1$。

*3*）在 (1，1) 处的最优收益：(1，1) 处的群体平均收益为

$$P(1,1) = \frac{(1-a)(N_I v_I + N_T v_T)}{N_I + N_T} + \frac{2r\left(w^{N_I}-1\right)}{(w-1)(N_I+N_T)}. \tag{24}$$

我们得到 $\frac{\partial}{\partial v_T} P(1,\ 1) = -\frac{(a-1)N_T}{N_I+N_T} < 0$。如果 (1，1) 是渐近稳定均衡（即 $v_T > v_T^*$），那么 $P(1,\ 1)$ 在 $v_I = 0 \wedge v_T = v_T^* + \epsilon$ 处达到最大值。

*4*）在 **Q** 处或围绕 **Q** 的周期轨道上的最优收益：请回顾，对于 $0 \le v_I < 1 \wedge 0 < v_T < v_T^*$，存在唯一的内部均衡 **Q**。对于 $w < 1$，**Q** 是渐近稳定均衡，所有围绕 **Q** 的轨迹都会收敛于此。对于 $w = 1$，所有围绕 **Q** 的轨迹均形成闭合周期轨道，此时周期轨道上种群平均收益的时间平均与均衡处的收益相同，即 $P(\mathbf{Q})$；证明见附录 C。因此，在这两种情况下，求 **Q** 处的最优收益即可 $w < 1$ 和$w = 1$。Q 处的群体平均收益 为

$$P(\mathbf{Q}) = \frac{N_T v_T - a(1-r)(N_I v_I + N_T v_T)}{(1-r)(N_I+N_T)}. \tag{25}$$

注意，$P$(Q) 不依赖于 $w$。当 $r > r_0^* \equiv \frac{a-1}{a}$ 时，我们得到 $\frac{\partial P}{\partial v_T} = \frac{N_T(1-a+ar)}{(1-r)(N_I+N_T)} > 0$；当 $r < r_0^*$ 时，则得到 $\frac{\partial P}{\partial v_T}$(Q) $< 0$。因此，$P$(Q) 是关于 $v_T$ 的单调函数（图 4b）。对于 $0 < w \le 1$，如果 Q 渐近稳定（即 $w < 1$）或中性稳定（即 $w = 1$），那么当 $r > r_0^*$ 时，$P$(Q) 在$v_I = 0 \wedge v_T = v_T^* - \epsilon$ 处取最大值；当 $r < r_0^*$时，则在 $v_I = 0 \wedge v_T^* = 0 + \epsilon$处取最大值。

对于 $w > 1$，$y_i$ 和 $y_t$ 的时间平均值不收敛，但收益的时间平均值收敛于

$$\overline{P}_{\text{hc}} = \left[\frac{1}{(w-1)\left(\frac{(r+1)(N_I[1-r]+rN_T v_T)}{N_T v_T\left(r\left[w^{N_I}-1\right]+N_I(w-1)\right)} - \frac{r}{w^{N_I}-1}\right)} - a(N_I v_I + N_T v_T)\right]\frac{1}{N_I+N_T}, \tag{26}$$

其中，$\overline{P}_{\text{hc}}$ 是$P$(0，0) $P$(0，1) $P$(1，0)和 $P$(1，1)的凸组合，如附录D所示。注意，$\frac{\partial P_{\text{hc}}}{\partial v_I} = -\frac{aN_I}{N_I+N_T} < 0$，并且 $P_{\text{hc}}$作为 $v_T$的函数是单调的或具有局部最大值，如附录E2所示。因此，给定 $v_I = 0$，$P_{\text{hc}}(v_T)$的最大值为 $P_{\text{hc}}(0+\epsilon)$、$P_{\text{hc}}(v_T^{\text{hc}})$或 $P_{\text{hc}}(v_T^* - \epsilon)$之一，其中 $\overline{P}_{\text{hc}}$ $v_T$ $v_T = v_T^{\text{hc}} \equiv$ ( )的局部最大值位于 $\left\{\sqrt{aN_I(1-r^2)(w-1)\left[r\left(w^{N_I}-1\right)+N_I(w-1)\right]} - aN_I(1-r^2)(w-1)\right\} \times \frac{}{aN_T r(w-1)\left(w^{N_I}-N_I w+N_I-1\right)}$ $\left(w^{N_I}-1\right)$.

*5)* 不同均衡下最优收益的比较：现在我们比较不同均衡下的平均收益。在每个均衡下，包括中性情况和异宿环的情况，我们将关于 $v_I$和 $v_T$最大化后的收益记为 $P^*$ 。我们比较不同均衡下的 $P^*$，以寻找收益的总体最大值及其对应的最优激励。

对于 $0 < w \le 1$，如果$r > r_1^* \equiv \frac{a-1}{a+1}$，则不同均衡中的最优收益为 $P^*$(1, 1)；如果 $r < r_1^*$，则最优收益为 $P^*$(0, 0)；相应的最优激励分别为 $v_I = 0 \wedge v_T = v_T^* + \epsilon$ 和 $v_I = 0 \wedge v_T = 0$。对于 $w > 1$，由于 $N_I \to \infty$或 $w \to \infty$，如果$r > r_2^* \equiv \frac{a}{a+1}$，则最优收益为 $P^*$(1, 1)；如果 $r < r_2^*$，则最优收益为 $P^*$(1, 0)；相应的最优激励分别为 $v_I = 0 \wedge v_T = v_T^* + \epsilon$ 和 $v_I = 1 + \epsilon \wedge v_T = 0$。最优激励的推导见附录 E。对于 $w > 1$ 和 $N_I \ge 2$相对较小的情况，无法进行解析推导，因此我们改为通过数值方法获得最优激励。不同于 $N_I$ 或$w$较大的情况，产生异宿环的激励可以实现最优收益（图5）。需要注意的是，同时存在针对投资者和受托人的激励（即$v_I > 0 \wedge v_T > 0$）从来都不是最优的。

总之，如果亲社会策略的生产力 $r$ 相对于费用率 $a$ 足够高，那么促使完全亲社会性（即完全信任和完全可信任性）的激励是最优的。如果生产力相对较低，那么促使较低亲社会性的激励（包括零激励）是最优的。

### *F.* 其他非线性收益函数

为了检验结果对非线性收益函数细节的稳健性，我们数值研究了采用不同于式（1、但在定性上与之相似的非线性收益函数时的演化动力学。具体而言，我们将 $\log(k_i+1)/\log(2)$ 作为一种次线性收益函数，它在定性上与式（1）相似，其中 $0 < w < 1$；并将 $\exp(0.7k_i) - 1$ 作为一种超线性收益

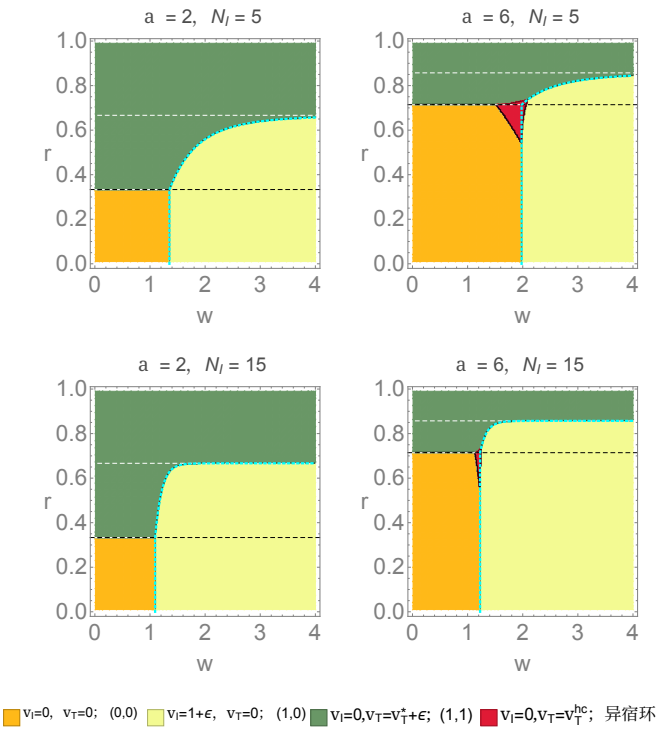



图5. 最优激励及相应的演化结果。每个彩色区域表示相应的稳定均衡或异宿环使式（21）给出的收益群体平均值最大的参数区域。在两条水平虚线中，下方和上方的虚线分别表示$r = r_1^* = \frac{a-1}{a+1}$和 $r = r_2^* = \frac{a}{a+1}$。点线曲线表示 $r\ (w) = r_2^* - \frac{a N_I\ (w-1)}{(a+1)\ (w^{N_I}-1)}$，其中$P^*$（1，1）$= P^*$（1，0）；注意，随着 $w$增大，~~$r\ (w) \to r_2^*$~~。竖直点线表示通过数值求解$P^*$（0，0）$= P^*$（1，0）得到的 $w = w^* > 1$。随着费用率 $a$增大，零激励下（橙色）以（0，0）为最优的参数区域，以及正激励下（红色）以异宿环为最优的区域都会扩大。随着 $N_I$ 或 $w$ 增大，以 $P^*$（1，1）为最优的参数区域（深绿色）与以 $P^*$（1，0）为最优的参数区域（浅黄色）之间的边界趋近于 $r = r_2^*$；我们已在 $N_I \to \infty$ 或 $w \to \infty$的极限情况下对其进行了解析推导。费用率 $a$ 越高，或投资者群体规模 $N_I$越大，能够实现完全信任和可信任性的激励所对应的最优参数区域就越小（即图中的绿色区域）。

与方程（1）在定性上相似的函数，其中 $w > 1$。图 6表明，这些收益函数均产生与采用方程（1）时定性相同的演化动力学。

## IV. 讨论

参考文献 [27] 提出的 $N$ 参与者信任博弈的一般化形式假设投资者总是进行投资。因此，他们的 NTG 在结构上既不同于双人信任博弈，也不同于我们的 NTG。相较之下，它或许应被称为可信性博弈，因为该博弈的收益完全由受托人的策略决定。最后通牒博弈（UG）和独裁者博弈（DG）中，已经存在与信任博弈和可信性博弈之间这种区分相对应的情形。最后通牒博弈涉及提议者与回应者之间在资源分配上的非同时互动 [35]。最后通牒博弈最简单的变体为每种角色各设定两种选择：对于提议者，可以提出有利于提议者的不公平分配或公平分配；对于回应者，则可以接受或拒绝该提议。如果回应者接受，提议者和回应者都获得所提出的收益。如果回应者拒绝，双方都一无所获。独裁者博弈与最后通牒博弈相似，不同之处在于回应者除了接受提议者提出的任何方案之外别无选择。因此，收益完全取决于提议者的行为，提议者也因此被称为独裁者。独裁者博弈与最后通牒博弈相关，但在结构上有所不同，因此独裁者博弈一直被单独分析 [36][37][38]。在最后通牒博弈中，声誉机制等同于回应者拒绝不公平分配，这可以促使提议者提出公平分配方案 [35]。然而，声誉机制无法在独裁者博弈中发挥作用，因为回应者没有拒绝任何分配方案的选择。我们的 NTG 属于最后通牒博弈类型，因为它允许投资者选择不进行投资，这使我们能够研究信任演化以及可信任性。

参考文献 [27] 中的演化博弈动力学假设采用角色无关模仿，这允许不同角色之间相互模仿，并导致博弈参与停止。这一假设的依据尚不清楚。据我们所知，在参考文献 [27], 之前，无论是双人博弈还是 $N$人博弈，都没有使用过这种博弈动力学。事实上，非同步博弈的演化动力学建模有两种经典方法。一种方法是假设每个参与者一半时间扮演每种角色，并以角色相关的方式模仿他人 [35][39][40]。参与者的策略因而是一个由不同角色下的策略组成的元组（例如，一个策略是作为投资者时采用的，另一个是作为受托人时采用的）。这种对称化或许更能刻画每个参与者拥有多个角色的情形，因此参与者的收益是其不同角色所获收益的平均值。例如，银行可以向其他银行放贷，也可以向其他银行借款，因而扮演贷款方/投资者和借款方/受托人两种角色。通过这种对称化，可以用单一群体来考察信任博弈及其相应的复制子动力学[30][40]。同样的方法也用于其他非对称博弈，例如最后通牒博弈 [35][40]。采用这种对称化方法来构建和分析非同步信任博弈仍是一个开放问题。第二种方法是固定两种角色，使参与者只能模仿同一角色中的其他人 [19][41]。我们采用这种方法构建了一个非对称信任博弈，它是此前提出的双人信任博弈的一种忠实推广 [19]。与先前允许不同角色之间相互模仿、从而导致投资者灭绝的研究不同 [27], ，我们发现投资者不会消亡，而是会演化为不信任受托人，除非存在激励。

文献 [27] 中的收益是投资型投资者数量的线性函数，这一点也被其后续研究 [31][32][33]所继承。在线性收益函数下，任何$N$参与者博弈都等价于两个双人博弈之和，因此前者的演化结果与后者相似。然而，在 $N$参与者博弈中，不同于双人博弈，非线性收益函数可能产生与线性收益函数在定性上不同的演化结果。我们引入了非线性收益函数

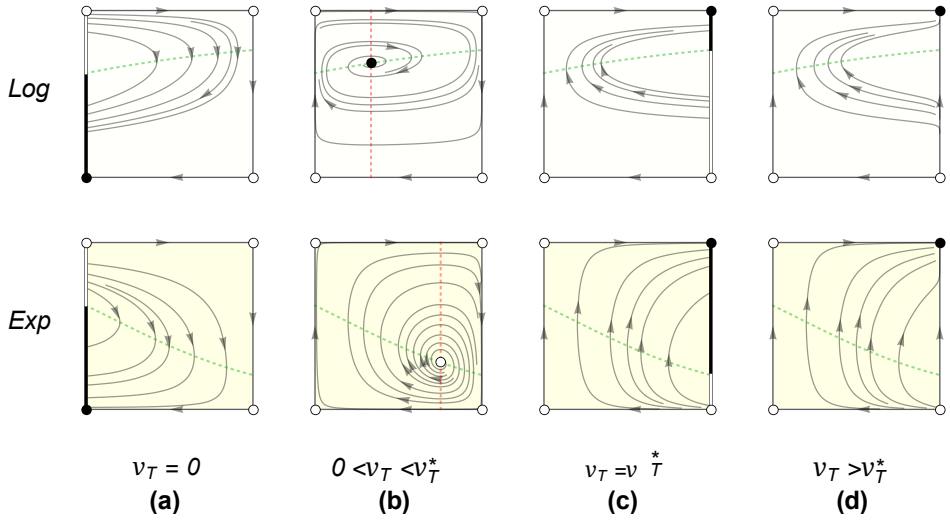



图 6. 演化动力学对非线性收益函数细节的稳健性。参数与图2中使用的参数相同。顶部面板显示，次线性收益函数 $\log(k_i+1)/\log(2)$ 会导致与式（1）中 $w = 0.7$所对应的演化动力学相似的结果，其结果展示于图 2的顶部面板中。底部面板显示，超线性收益函数 $\exp(0.7k_i) - 1$ 会导致与式（1）中 $w = 1.3$所对应的演化动力学相似的结果，其结果展示于图2的底部面板中。

用于非对称信任博弈。即使采用非线性收益函数，我们仍发现，与公共物品博弈相比，亲社会行为在非对称信任博弈中更难以演化。公共物品博弈是研究最为广泛的 $N$参与者博弈之一 [42]。在线性收益函数下，公共物品博弈成为一种支配博弈，在该博弈中，就收益值而言，反社会行为（即背叛）支配亲社会行为，因此只有反社会行为会演化。在本研究采用的同形式非线性收益函数下，公共物品博弈会成为共存博弈或协调博弈，在这类博弈中亲社会行为能够演化 [4]。因此，激励仅被应用于线性公共物品博弈，而未被应用于非线性公共物品博弈；相关综述见文献 [43] 。然而，在具有固定角色的非对称信任博弈中，我们发现，非线性收益函数不足以促使亲社会行为演化，还需要额外机制，例如激励。我们发现，对可信任的受托人施加激励，足以使投资者群体和受托人群体中的完全亲社会性演化，即完全信任（即投资）和完全可信任性。对这一结果的直观解释如下。如果可信任的受托人比例足够高，投资型投资者的收益就高于非投资型投资者的收益，因而投资型投资者会演化。因此，如果对可信任受托人的激励足够大，使其得以演化，那么这种激励也会促使投资型投资者演化。

由式（1）给出的非线性收益函数，可以通过调节单个参数 $w$来表示折减（即次线性）效应和协同效应（即超线性）效应。该收益函数的优势在于，它允许我们对任意群体规模下的演化动力学进行解析研究$N_I$ 和 $N_T$。然而，我们的结果并不局限于这种特定形式的收益函数。我们使用不同的收益函数进行了数值模拟，以证明我们的结果对于非线性的具体细节具有稳健性

收益函数。我们指出，与式（1）不同，一般而言，不同的非线性收益函数需要针对$N_I$ 和 $N_T$ 的每种取值组合分别分析演化动力学。具体而言，对于给定的 $N_I$ 和 $N_T$，需要通过数值方法求出内部均衡，并进行线性稳定性分析。

给定一名投资型投资者，双人信任博弈会产生一种社会困境 [19][27]。总财富（即一名投资型投资者与一名受托人的收益之和）取决于受托人的策略。尽管利己型（即不可信任的）受托人的收益高于亲社会型（即可信任的）受托人，但前者导致的总财富（$= 0$）低于后者导致的总财富（$= 2r$）（图1a）。我们的 NTG 保留了社会困境的本质。对于线性收益函数，给定投资型投资者的数量 $k_i$，如果群体中的所有受托人都是利己型，他们获得的收益高于任何亲社会型受托人。然而，前者导致的总财富（$= 0$）低于后者导致的总财富（$= 2rk_i$）。

以往关于制度激励的大多数研究都聚焦于哪些激励最能促进亲社会行为 [44][45][33]。然而，衡量激励是否成功的更好标准，或许是演化稳定状态下的群体平均收益 [46]。因此，我们考虑激励管理的运营成本，寻求能够带来最高收益的最优激励。我们发现，促成最多亲社会行为（即完全信任和完全可信任性）的激励往往能带来最高收益，但并非总是如此。当亲社会行为的生产力不够高时，促成较少亲社会行为（例如，完全信任与零可信任性的组合）的激励可以带来最高收益；即使是促成零信任和零可信任性的零激励，也可能是最优选择，只要激励管理的运营成本超过亲社会行为带来的收益。我们的激励方案有一项局限：假设激励是针对个体玩家量身定制的，而博弈是在群体中进行的。

尽管这种针对个体的激励方式广泛应用于 $N$人参与者博弈 [6][45][47][48]，但与双人博弈相比，这种方式可能不太可行，因为在双人博弈中，个体玩家的行为比在 $N$人博弈中更容易识别。放宽这一假设值得进一步研究。例如，针对群体提供激励的稀释型激励方案，或许更适用于$N$人博弈。在这种激励方案中，群体中的所有个体都会按设计获得相同的激励，而是否向某个群体提供激励，则根据聚合信息来决定，例如该群体中可信任的受托人所占的比例。

总之，我们首先指出，参考文献 [27] 中的 $N$人信任博弈（TG）在结构上不同于信任博弈（TG），并提出了一种具有两种固定角色的非对称 $N$人信任博弈（TG）。在这种设定下，亲社会策略比在著名的公共物品博弈（PGG）中更难演化。尽管如此，我们证明，向受托人提供激励能够以较低成本促进利己型参与者之间的信任与可信任性演化。我们还表明，与线性收益函数相比，$N$人信任博弈（TG）中的非线性收益函数会产生更丰富的演化动力学，以及相应的最优激励。我们希望这项工作能为进一步研究 $N$人信任博弈（TG）及其变体铺平道路，例如非对称 $N$人信任博弈（TG）的对称化、结构化种群 [49][50], 重复互动对信任／可信任性演化的影响，以及有限种群中的随机演化动力学。双人NTG可以有多种不同的推广形式，每种形式都能在 $N_I = N_T = 1$时还原为双人信任博弈（TG）；这些推广形式值得深入探索。 $N$人信任博弈（TG）的应用也值得研究；例如，无线传感器或自组网络中的多跳中继可以映射为自利节点 [51][52]之间的 $N$人信任博弈（TG）。

## 附录

### A. 方程的推导(9)

我们得到

$$\begin{aligned}
P_i^o &= \sum_{m_i=0}^{N_I-1}\binom{N_I-1}{m_i} y_i^{m_i}(1-y_i)^{N_I-1-m_i} \\
&\quad\times \sum_{m_t=0}^{N_T}\binom{N_T}{m_t} y_t^{m_t}(1-y_t)^{N_T-m_t}\Pi_i^o(m_i+1,m_t) \\
&= \sum_{m_i=0}^{N_I-1}\binom{N_I-1}{m_i} y_i^{m_i}(1-y_i)^{N_I-1-m_i} \\
&\quad\times \sum_{m_t=0}^{N_T}\binom{N_T}{m_t} y_t^{m_t}(1-y_t)^{N_T-m_t}\left[\frac{m_t}{N_T}\frac{r\left(1-w^{m_i+1}\right)}{(m_i+1)(1-w)}\right. \\
&\qquad\left.+\left(1-\frac{m_t}{N_T}\right)\cdot(-1)\right] \\
&= \sum_{m_i=0}^{N_I-1}\binom{N_I-1}{m_i} y_i^{m_i}(1-y_i)^{N_I-1-m_i} \\
&\quad\times\left(\left[\frac{1}{m_i+1}r\frac{1-w^{m_i+1}}{1-w}+1\right]y_t-1\right) \\
&= \frac{ry_t}{N_I(1-w)}\left[\sum_{m_i=0}^{N_I-1}\binom{N_I}{m_i+1} y_i^{m_i}(1-y_i)^{N_I-1-m_i}\right. \\
&\quad\left.\times(1-w^{m_i+1})\right]+y_t-1 \\
&= \frac{r}{N_I(1-w)}\frac{y_t}{y_i}\left[1-(1+(w-1)y_i)^{N_I}\right]+y_t-1,
\end{aligned} \tag{A.27}$$

其中我们假设 $y_i \neq 0$并使用二项分布的均值表达式 $\sum_{m_t=0}^{N_T}\binom{N_T}{m_t} y_t^{m_t}(1-y_t)^{N_T-m_t} m_t = N_T y_t$ 以及关系 $\binom{N_I-1}{m_i}\frac{1}{m_i+1} = \frac{1}{N_I}\binom{N_I}{m_i+1}$。为证明式（A.27）中的最后一个等式，代入 $k_i \equiv m_i+1$后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_i=0}^{N_I-1}\binom{N_I}{m_i+1} y_i^{m_i}(1-y_i)^{N_I-1-m_i}\left(1-w^{m_i+1}\right) \\
=&\sum_{k_i=1}^{N_I}\binom{N_I}{k_i} y_i^{k_i-1}(1-y_i)^{N_I-k_i}\left(1-w^{k_i}\right) \\
=&\frac{1}{y_i}\sum_{k_i=1}^{N_I}\binom{N_I}{k_i} y_i^{k_i}(1-y_i)^{N_I-k_i}\left(1-w^{k_i}\right) \\
=&\frac{1}{y_i}\left[\sum_{k_i=0}^{N_I}\binom{N_I}{k_i} y_i^{k_i}(1-y_i)^{N_I-k_i}\left(1-w^{k_i}\right)\right. \\
&\left.-\binom{N_I}{0} y_i^0(1-y_i)^{N_I}\left(1-w^0\right)\right] \\
=&\frac{1}{y_i}\left[\sum_{k_i=0}^{N_I}\binom{N_I}{k_i} y_i^{k_i}(1-y_i)^{N_I-k_i}\left(1-w^{k_i}\right)\right] \\
=&\frac{1}{y_i}\left[(y_i+1-y_i)^{N_I}-\sum_{k_i=0}^{N_I}\binom{N_I}{k_i} y_i^{k_i}(1-y_i)^{N_I-k_i}w^{k_i}\right] \\
=&\frac{1}{y_i}\left[1-\sum_{k_i=0}^{N_I}\binom{N_I}{k_i}(wy_i)^{k_i}(1-y_i)^{N_I-k_i}\right] \\
=&\frac{1}{y_i}\left[1-(wy_i+1-y_i)^{N_I}\right] \\
=&\frac{1}{y_i}\left[1-(1+(w-1)y_i)^{N_I}\right].
\end{aligned} \tag{A.28}$$

我们有 $P_i = P_i^o + v_I - av_I$，其中 $P_i^o$由方程（A.27）给出。类似地，我们可以推导出 $P_t$ 和 $P_u$。

### B. 均衡的存在性与稳定性

在某个均衡处，可根据雅可比矩阵 $J$的行列式和迹（分别为 $\lambda_1\lambda_2$ 和 $\lambda_1+\lambda_2$），推断出两个特征值 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的符号。我们将 $J$ 在$\mathbf{y} \in [0,1]^2$处的行列式和迹分别记为 $\mathrm{Det}|_{\mathbf{y}}$ 和 $\mathrm{Tr}|_{\mathbf{y}}$。特别地，均衡的渐近稳定性要求 $\lambda_1<0$ 和$\lambda_2<0$，由此可得 $\mathrm{Det}|_{\mathbf{y}}>0$ 和 $\mathrm{Tr}|_{\mathbf{y}}<0$。我们按如下方式确定各均衡的稳定性。

*1)* **(0,0)**：点 $(y_i, y_t) = $处的雅可比矩阵为

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} v_I-1 & 0 \\ 0 & v_T \end{pmatrix}. \tag{A.29}$$

我们得到

$$\mathrm{Det}|_{(0,0)} = (v_I-1)v_T \tag{A.30}$$

and

$$\text{Tr}|_{(0,0)} = v_I + v_T - 1. \tag{A.31}$$

如果 $0 \le v_I < 1 \wedge v_T = 0$，则 $\text{Det}|_{(0,0)} = 0 \wedge \text{Tr}|_{(0,0)} < 0$，此时 (0，0) 是稳定的，但不是渐近稳定的。否则，(0，0) 是不稳定的。

*2)* $(0,1)$：(0,1)处的雅可比矩阵为

$$J_{(0,1)} = \begin{pmatrix} r + v_I & 0 \\ 0 & -v_T \end{pmatrix}. \tag{A.32}$$

我们得到

$$\text{Det}|_{(0,1)} = -v_T(r + v_I) \tag{A.33}$$

and

$$\text{Tr}|_{(0,1)} = r + v_I - v_T. \tag{A.34}$$

若 $v_T = 0$，则行列式$|_{(0,1)} = 0 \wedge$ 迹$|_{(0,1)} > 0$，因此 (0,1) 不稳定。若 $v_T > 0$，则行列式$|_{(0,1)} < 0$，因此 (0,1) 不稳定。

*3)* $(1,0)$：(1,0)处的雅可比矩阵为

$$\begin{aligned} J_{(1,0)} &= \begin{pmatrix} 1 - v_I & 0 \\ 0 & v_T - \frac{(1-r)\left(w^{N_I}-1\right)}{N_T(w-1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - v_I & 0 \\ 0 & v_T - v_T^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A.35}$$

我们得到

$$\text{Det}|_{(1,0)} = (v_T - v_T^*)(1 - v_I) \tag{A.36}$$

and

$$\text{Tr}|_{(0,1)} = v_T - v_T^* + 1 - v_I, \tag{A.37}$$

其中

$$v_T^* = \frac{(1-r)\left(w^{N_I}-1\right)}{N_T(w-1)} > 0. \tag{A.38}$$

若 $v_I > 1 \wedge v_T < v_T^*$，则 $\text{Det}|_{(1,0)} > 0 \wedge \text{Tr}|_{(1,0)} < 0$，因此 (1，0) 渐近稳定。若 $(v_I > 1 \wedge v_T = v_T^*) \vee ($ $v_I = 1 \wedge v_T < v_T^*)$，则 $\text{Det}|_{(1,0)} = 0 \wedge \text{Tr}|_{(1,0)} < 0$，因此 (1，0) 稳定但并非渐近稳定。否则，(1，0) 不稳定。

*4)* (1，1)：(1，1) 处的雅可比矩阵为

$$\begin{aligned} J_{(1,1)} &= \begin{pmatrix} -\frac{r\left(w^{N_I}-1\right)}{N_I(w-1)} - v_I & 0 \\ 0 & \frac{(1-r)(w^{N_I}-1)}{N_T(w-1)} - v_T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{N_T r v_T^*}{N_I(1-r)} - v_I & 0 \\ 0 & v_T^* - v_T \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A.39}$$

我们得到

$$\text{Det}|_{(1,1)} = (v_T - v_T^*)\left[v_I + \frac{N_T r v_T^*}{N_I(1-r)}\right] \tag{A.40}$$

and

$$\text{Tr}|_{(1,1)} = \left[1 - \frac{N_T r}{N_I(1-r)}\right] v_T^* - v_I - v_T. \tag{A.41}$$

我们得到 sign(Det $|_{(1,1)} = (v_T - v_T^*)\left[v_I + \frac{N_T r v_T^*}{N_I(1-r)}\right] > 0 \quad 0 < r < 1 \;\; v_I \ge 0$ sign ()，因为 ()，这由 保证，且 $v_T^* > 0$。如果 $v_T > \left[1 - \frac{N_T r}{N_I}(1-r)\right] v_T^* - v_I$，那么 $\text{Tr}|_{(1,1)} < 0$。我们还注意到 $\left[1 - \frac{N_T r}{N_I}(1-r)\right] v_T^* - v_I \le \left[1 - \frac{N_T r}{N_I}(1-r)\right] v_T^* < v_T^*$。

因此，如果 $v_T > v_T^*$，则 $\text{Det}|_{(1,1)} > 0 \wedge \text{Tr}|_{(1,1)} < 0$，使得 (1,1) 渐近稳定。

若 $v_T = v_T^*$，则 $\text{Det}|_{(1,1)} = 0 \wedge \text{Tr}|_{(1,1)} < 0$。因此，(1，1) 稳定但并非渐近稳定。

若 $v_T < v_T^*$，则行列式$|_{(1,1)} < 0$。因此，(1，1) 不稳定。

*5)* 内部均衡 $\mathbf{Q}$：我们证明，存在唯一的内部均衡$\mathbf{Q}$当且仅当 $v_T^* = \frac{1-r}{N_T}\frac{w^{N_I}-1}{w-1}$ $v_I < 1$ $0 < v_T <$ ()( ) () 且。若内部均衡存在，则它位于零流线 $P_t(y_i,\ y_t) - P_u(y_i,\ y_t) = 0$与 $P_i(y_i,\ y_t) - P_n(y_i,\ y_t) = 0$的交点处，其中 $0 < y_i < 1 \wedge 0 < y_t < 1$。下面我们逐一考察这两条零流线。

由于 $P_t - P_u = (1-r)\frac{\left\{1-[(w-1)y_i+1]^{N_I}\right\}}{N_T\ w-1}() + v_T$不依赖于 $y_t$，零流线 $P_t - P_u = 0$为 $y_i$ =常数形式。具体而言，$P_t - P_u = 0$得到 $y_i = y_{i,Q} \equiv \frac{d^{1/N_I}-1}{w-1}$，其中 $d = 1 + \frac{N_T v_T}{w-1}\frac{(}{1-r}$。我们得到 $\frac{d}{dy_i}[P_t - P_u] = -\frac{N_I(1-r)[(w-1)}{N_T}\frac{y_i+1]^{N_I-1}}{}$ $< 0$。因此，当且仅当 $0 < v_T < v_T^*$ 时，$P_t(0, y_t) - P_u(0, y_t) = v_T > 0$和 $P_t(1, y_t) - P_u(1, y_t) = v_T - v_T^* < 0$，此时零流线$P_t - P_u = 0$ （即$y_i = y_{i,Q}$）存在，且 $0 < y_{i,Q} < 1$。

为了考察另一条零流线，我们分析 $P_i - P_n = \frac{ry_t\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}}{N_I\ 1-w\ y_i} + y_t - 1 + v_I$ $\frac{\partial}{\partial y_t}[P_i - P_n] > 0$ ()。事实上，对于 $0 < y_i < 1$，$P_i(y_i,1) - P_n(y_i,1) > 0$成立，稍后我们将对此进行证明。因此，当且仅当 $v_I < 1$时，存在 $P_i(y_i,0) - P_n(y_i,0) = v_I - 1 < 0$，使零流线 $P_i - P_n = 0$ 存在于范围 $0 < y_t < 1$ 内。注意，零流线 $P_i - P_n = 0$ 可表示为 $y_t = g(y_i)$，因为对于任意 $y_i$，都存在唯一的 $y_t$ 满足 $P_i - P_n = 0$。

现在我们证明 $\frac{\partial}{\partial y_t}[P_i - P_n] = \frac{r\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}}{N_I\ 1-w}()y_i + 1 > 0$对于 $0 < y_i < 1$成立。若 $0 < w < 1$，则我们得到 $0 < 1 + (w-1)y_i < 1$，使得 $1 - [1 + (w-1)y_i]^{N_I}$和 $1 - w$均为正数。若 $w > 1$，则 $1 < 1 + (w-1)y_i$，使得$1 - [1 + (w-1)y_i]^{N_I}$和 $1 - w$均为负数。若 $w = 1$，则 $\frac{\partial}{\partial y_t}[P_i - P_n] = \lim_{w\to 1}\frac{r\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}}{N_I\ 1-w\ y_i} + 1 = r + 1 > 0$ $\lim()$。因此，我们证明了对于任意 $w$，$\frac{\partial}{\partial y_t}[P_i - P_n] > 0$成立。

现在我们证明 $P_i(y_i,\ 1) - P_n(y_i,\ 1) > 0$。如果 $w \ne 1$，则可得到 $P_i\ y_i\ 1 - P_n\ y_i\ 1 = \frac{1-w\ y_t}{r\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}}$ $+(,)(,)$ $v_I > 0$ $w \ne 1$ $P_i\ y_i\ 1 - P_n\ y_i\ 1 = \frac{}{N_I}$ ()。如果，则可得到 $(,)(,)\ \lim_{w\to 1} r\left\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\right\}$ $\lim_{w\to 1} N_I(1-w)y_i + v_I = r + v_I > 0$。因此，对于任意 $w$，$P_i(y_i,\ 1) - P_n(y_i,\ 1) > 0$成立。

最后，这些结果表明，$y_i = y_{i,\ Q}$与 $y_t = g(y_i)$ 之间存在唯一交点，满足 $0 < y_i < 1 \wedge 0 < y_t <$1；该交点是一个内部均衡$\mathbf{Q}$。

我们现在分析内部均衡 $\mathbf{Q}$ 的稳定性。$\mathbf{Q}$ 处的雅可比矩阵为

$$J_Q = \begin{pmatrix} J_{11}^Q & J_{12}^Q \\ J_{21}^Q & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.42}$$

where $J_{11}^Q = \frac{N_I w d - d^{1/N_I}\{d[(N_I-1)w+N_I]+w\}+[d(N_I-1)+1]d^{2/N_I}}{(w-1)\left\{d^{1/N_I}[N_I-(d-1)r]-N_I d^{2/N_I}\right\}} \times r(1 - v_I)$，$J_{12}^Q = -\frac{\left\{N_I d^{1/N_I}+[(d-1)r-N_I]\right\}\left(d^{1/N_I}-w\right)}{N_I(w-1)^2}$，and $J_{21}^Q = -\frac{d^{1-1/N_I}\left(d^{1/N_I}-1\right)\left\{N_I v_I d^{1/N_I}+[(d-1)r-N_I v_I]\right\}}{N_T\left\{N_I d^{1/N_I}+[(d-1)r-N_I]\right\}^2} \times$

$N_I^2(r-1)(v_I-1)$。我们首先证明行列式$|_Q > 0$以及符号(迹$|_Q$) = 符号$(w-1)$。

对于$w \neq 1$，我们有行列式$|_Q = v_I - 1\ N_I\ 1 -$，$r\ d^{1-1/N_I}\ d^{1/N_I-1}\ d^{1/N_I}-w\ [N_I v_I\ d^{1/N_I}-1$

$N$ $+(d-1)r]$

$\tau(w-1)^2\left[N_I\left(d^{1/N_I}\mp(d-1)r\right)+(d-1)r\right]$。

我们注意到$N_I v_I(d^{1/N_I}-1)N_I\ d^{1/N_I}-1\ +(d-1)r$ ( ) 为正，因为符号($d-1$) = 符号$\left(d^{1/N_I}-1\right)$。由于$0 < v_T < v_T^* = (1-r)($ $w^{N_I}-1)\ N_T(w-1)$ 是内部均衡存在的条件，我们有$d = 1+{}^{N_T v_T}($ $w-1)_{1-r} = 1+s\left(w^{N_I}-1\right)$，其中$v_T = sv_T^*$和$0 < s < 1$。因此，我们得到$w^{N_I}-d = (1-s)\left(w^{N_I}-1\right) \Longrightarrow$符号$\left(w^{N_I}-d\right)$ = 符号$\left(w^{N_I}-1\right) \Longrightarrow$符号$\left(w-d^{1/N_I}\right) = w-1 \Longrightarrow \left(w < d^{1/N_I} < 1\right) \vee$符号 ( ) $\left(1 < d^{1/N_I} < w\right) \Longrightarrow \left(d^{1/N_I}-1\right)\left(d^{1/N_I}-w\right) < 0 \Longrightarrow$符号$\left(\left(d^{1/N_I}-1\right)\left(d^{1/N_I}-w\right)\right) = -1$。对于$d \neq 1$，我们得到符号 (行列式$|_Q$) = 符号 $(1-v_I)$，因为符号 (行列式$|_Q$) = 符号 ( $v_I-1$) 符号$\left[\left(d^{1/N_I}-1\right)\left(d^{1/N_I}_{+(d-1)r}-w\right)\right]$

$\left(\begin{array}{c} N_I v_I \\ (d^{1/N_I}-1)N_I\ d^{1/N_I}-1 \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{c} \\ ( )+(d-1)r \end{array}\right)$ $= \times$符号 $(-1)\ \cdot(-1)$

$\cdot\ 1 = 1$。回想一下，$0 \le v_I < 1$是 Q 存在所必需的。对于$w = 1$，我们得到行列式$|_Q = (1-v_I)v_T(r+v_I)\ [N_I\ 1-r\ -N_T v_T]$ ( ) ( ) $> 0$，因为$0 < v_T < v_T^* =$ 极限$_{w\to 1}(1-r)(\ N_I\ 1-r^2$ $w^{N_I}-1)$ 极限$_{w\to 1} N_T$ $(w-1) = N_I(1-r)\ N_T$是 Q 存在所必需的。因此，我们证明了行列式$|_Q > 0$或符号(行列式$|_Q$) = 1，无论$w$的值如何。

对于$w \neq 1$ $|_Q =$，我们得到迹 $(\ )_{d^{-1/N_I}\{d^{1/N_I}[(\ )(\ )+1]-dN_I\}_{w=d^{1/N_I}}N_T(d^{1/N_I}-1)}$ We $_{+(d-1)r\quad w-1}$。得到 sign$(w-d^{1/N_I})$ sign$(w-1) = 1$，因为 sign $\left(w-d^{1/N_I}\right)$ =sign$(w-1)$，如前所示。对于$d \neq 1$，我们有$q(d) \equiv d^{1/N_I}\left[d(N_I-1)+1\right]-dN_I > 0$，因为$q(1) = 0$是$q(d)$在$d > 0$下的全局最小值，后者可如下证明。首先，$q(1)$是$q(d)$的局部最小值，因为$\left.\frac{\partial q}{\partial d}\right|_{d=1} = \left\{ d^{1/N_I-1}[d(\right.$

$\left.{}_{N_I}^{N_I^2-1\ +1]} - N_I\right\}\Big|_{d=1} = 0$) 且$\left.\frac{\partial^2 q}{\partial d^2}\right|_{d=1} = (N_I-1)d^{1/N_I-2}($

$\left.{}_{N_I^2}^{dN_I+d-1}\right|_{d=1} = \frac{N_I-1}{N_I} > 0$)。其次，$d = d^* \equiv \frac{1}{N_I+1} \in (0,1)$是函数$q(d)$在$d > 0$下唯一的拐点，因为对于$d < d^*$有$\frac{\partial^2 q}{\partial d^2} < 0$，在处有$\frac{\partial^2 q}{\partial d^2} = 0$ $d = d^*$ $\frac{\partial^2 q}{\partial d^2} > 0$ $d > d^*$，并且对于。因此，在$d \le d^*$中不存在局部最小值，而在$d > d^*$中至多存在一个局部最小值，该最小值位于$d = 1$。第三，我们得到$q(0) = 0 = q(1)$。因此，$q(1) = 0$是$q(d)$在$d > 0$下的全局最小值。我们得到 sign$(N_I\left(d^{1/N_I}-1\right)+(d-1)r)$ = sign$(w-1)$，因为 sign$(d^{1/N_I}-1)$ =sign$(d-1)$ =sign$(w-1)$。由此可得 sign(迹$|_Q$) =sign$(1-v_I)$ sign$(d^{1/N_I}[(d(N_I-1)+1]-dN_I)$ sign( $N_I\ d^{1/N_I}-1\ +(d-1)r$ $w-1$ =( ) ) sig $1\cdot {}^{1}\cdot 1 = w-1$ $w=1$ n$(w-d^{1/N_I})$ sign( ) sign$(w-1)$ sign( )。对于，sign(迹$|_Q$) = 0成立，因为迹$|_Q = 0$。因此，我们证明了无论$w$取何值，sign(迹$|_Q$) = sign$(w-1)$。

对于$w < 1$，我们得到 Det$|_Q > 0 \wedge$ Tr$|_Q < 0$，因此 Q 渐近稳定。对于$w > 1$，我们得到 Det$|_Q > 0 \wedge$Tr$|_Q > 0$，因此Q 不稳定。对于$w = 1$，我们得到 Det$|_Q > 0$且 Tr $|_Q = 0$。在这种情况下，判别式$D = (\text{Tr}|_Q)^2 - 4\text{Det}|_Q < 0$且 Tr$|_Q = 0$，这意味着特征值为纯虚数。因此，Q 中性稳定，且轨迹围绕它循环。

*6)* $y_i = 0$: 我们发现，当且仅当$v_T = 0$时，$(0,\ y_t)$（其中$0 < y_t < 1$）是平衡点线。在这种情况下，$(0,\ y_t)$处的雅可比矩阵为

$$J_{(0,y_t)} = \begin{pmatrix} ry_t + v_I + y_t - 1 & 0 \\ -\frac{N_I(r-1)(y_t-1)y_t}{N_T} & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.43}$$

我们得到 Det$|_{(0,y_t)} = 0$和 Tr$|_{(0,y_t)} = (r+1)y_t + v_I - 1$。若$v_T = 0 \wedge y_t < {}^{1-v_I}_{r+1}$，则 Tr$|_{(0,y_t)} < 0$，因此$(0,y_t)$稳定但并非渐近稳定。若$v_T = 0 \wedge y_t > {}^{1-v_I}_{r+1}$，则 Tr$|_{(0,y_t)} > 0$，因此$(0,y_t)$不稳定。

*7)* $y_i = 1$: 我们发现，当且仅当$v_T = v_T^*$时，$(1,y_t)$（其中$0 < y_t < 1$）构成一条平衡点线。在这种情况下，$(1,y_t)$处的雅可比矩阵为

$$J_{(1,y_t)} = \begin{pmatrix} -\frac{ry_t\left(w^{N_I}-1\right)}{N_I(w-1)} - v_I - y_t + 1 & 0 \\ -\frac{N_I(r-1)(y_t-1)y_t w^{N_I-1}}{N_T} & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.44}$$

我们得到 Det$|_{(1,y_t)} = 0$和 Tr$|_{(1,y_t)} = -{}^{ry_t(w^{N_I}-1)}$

$y_t+1$ $v_T = v_T^* \wedge 0 \le v_I < 1 \wedge y_t >$ $w^{N_I}-1)+N_I(w-1)$，则 Tr$|_{(0,y_t)} < 0$，因此$(1,y_t)$稳定但并非渐近稳定，其中$0 < {}^{N_I(1-v_I)(w-1)}_{r\ w^{N_I}-1\ +N_I\ w-1} < 1$ $v_T = v_T^* \wedge 0 \le$ $v_I < 1 \wedge y_t < {}^{N_I\ 1-v_I\ \ w-1}_{r\ w^{N_I}-1\ +N_I\ w-1}|_{(0,y_t} > 0$，则 Tr)，因此$(1,y_t)$不稳定。若$v_T = v_T^* \wedge v_I > 1$，则 Tr$|_{(0,y_t)} < 0$，因此整条平衡点线稳定。

*8)* $y_t = 0$: 我们发现，当且仅当$v_I = 1$时，$(y_i,0)$（其中$0 < y_i < 1$）是一条平衡点线。在这种情况下，$(y_i,0)$处的雅可比矩阵为

$$J_{(y_i,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(y_i-1)\left(r\left(((w-1)y_i+1)^{N_I}-1\right)+N_I(w-1)y_i\right)}{N_I(w-1)} \\ 0 & \frac{(r-1)\left([(w-1)y_i+1]^{N_I}-1\right)}{N_T(w-1)} + v_T \end{pmatrix}. \tag{A.45}$$

我们得到

$$\text{Det}|_{(y_i,0)} = 0, \tag{A.46}$$

$$\text{Tr}|_{(y_i,0)} = \frac{(r-1)\left([(w-1)y_i+1]^{N_I}-1\right)}{N_T(w-1)} + v_T \tag{A.47}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\text{Tr}|_{(y_i,0)} = -\frac{N_I(1-r)[1+(w-1)y_i]^{N_I-1}}{N_T} < 0. \tag{A.48}$$

若$v_T = 0$，则 Tr$|_{(y_i,0)} > 0$，使得$(y_i,0)$不稳定。若$0 < v_T < v_T^* \wedge y_i > {}^{\left(\frac{N_T v_T(\ \ 1-w}{r\ \ -1}+1\right)^{1/N_I}-1}_{w-1} = {}^{d^{1/N_I}-1}_{w-1}$，则 Tr$|_{(y_i,0)} < 0$，使得$(y_i,0)$稳定但并非渐近稳定。若$0 < v_T < v_T^* \wedge y_i < {}^{d^{1/N_I}-1}_{w-1}$，则 Tr$|_{(y_i,0)} > 0$，使得$(y_i,0)$不稳定。注意，对于$0 < v_T < v_T^*$，我们得到$0 < {}^{d^{1/N_I}-1}_{w-1} < 1$。若$v_T \ge v_T^*$，则 Tr$|_{(y_i,0)} > 0$，使得$(y_i,0)$不稳定。

*9)* $y_t = 1$: 在边界$(y_i,\ 1)$上不存在均衡。这是因为$\dot{y}_i = (1-y_i)y_i\left(\begin{array}{c} r\{1-[1+(w-1)y_i]^{N_I}\} \\ N_I\ 1-w \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{c} \\ ()y_i \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{c} \\ +v_I \end{array}\right) > 0$，这是由以下内容综合得出的：$1-[1+{}^{(w-1\ y_i]^{N_I}}_{1-w} > 0$)见附录 B5 以及$0 < y_i < 1$。

### C. $w = 1$的$(y_i, y_t)$ 的时间平均收益，以及一个周期内的收益

我们需要证明，对于 $w = 1$，有 $(y_i, y_t) = (y_{i,Q}, y_{t,Q})$，其中 $y_t = \frac{1}{T}\int_0^T y_i dt$, $y_t = \frac{1}{T}\int_0^T y_t dt$, $T$表示一个周期的周期长度，而 Q $= (y_{i,Q}, y_{t,Q})$ 由式（20）给出。将式（13）两边除以 $y_i(1-y_i) > 0$，并代入 $w = 1$，可得 $\frac{\dot{y}_i}{y_i(1-y_t)} = \binom{r}{N_I} + 1 \Big) y_t - 1 + v_I$。对等式两边关于时间取平均，得 $0 = \binom{r}{N_I} + 1 \Big) y_t - 1 +$，因为 ( )，这由 ( ) $v_I \quad \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot{y}_i}{y_i(1-y_i)} dt = 0 \quad y_i \; 0 =$ $y_i \; T \quad 20$ ( ) 可知。另一方面，由式（ ）可得 $\binom{r}{N_I} + 1) y_t$, $Q -$ $1 + v_I = 0 \quad y_t = y_t \; Q$ 。因此，我们得到，。类似地，从式（ 14 ）两边除以 $y_t(1-y_t) > 0$ 开始，也可以证明 $y_i = y_{i,Q}$。

我们需要证明 $\frac{1}{T}\int_0^T P dt = P(\mathrm{Q})$，其中 $P(y_i \; y_t = \frac{2rN_I y_i y_t + N_I v_I y_i + N_T v_T y_t - a \; N_I v_I + N_T v_T}{y_i y_t = y_i \; y_t}$, ) ( ) $N_I + N_T$。由于我们已在上文证明了 $y_i = y_{i,Q}$ 和 $y_t = y_{t,Q}$，因此只需证明 $y_i y_t \left[ \frac{N_I \; 1-1}{N_T} - r - 1 \right] + y_i \left[ \frac{N_I \; r-1}{N_T} - v_I + 1 \right] + y_t$。为此，我们注意到 $\frac{1}{y_i y_t} \frac{d(y_i y_t)}{dt}$ ( ) ( ) ( $v_T + 1 + v_I + v_T - 1$ $r -$ )。对等式两边取时间平均，得到 $0 = y_i y_t \binom{N_I \; 1-r}{N_T} - r - 1 \Big) +$ ( ) $y_i \binom{N_I \; r-1}{N_T} - v_I + 1 \Big) + y_t \; r - v_T + 1 + v_I + v_T - 1$ ( ) ( )，因为 $\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{y_i y_t} \frac{d(y_i y_t)}{dt} dt = 0$。因此，我们利用 $y_{i\,Q} = -\frac{N_T v_T}{N_I \; 1-r}$ $y_t = y_{t\,Q} = \frac{1-v_I}{1+r}$ 、( ) 和，得到 $y_i y_t = \frac{y_i(N_I(r-1)+N_T(1-v_I)) + y_t N_T(r-v_T+1) + N_T(v_I+v_T-1)}{r \; N_I + N_T - N_I + N_T} = ( ) ( ) \frac{N_I(1-r)(1+r)}{N_T v_T \; 1-v_I} = y_i y_t$。

### D. 当 $w > 1$ 时的异宿环

假设 $w > 1$、$0 < v_T < v_T^*$ 和 $0 \le v_I < 1$。我们首先证明异宿环 $\mathrm{F}_0 \equiv (0,0) \to \mathrm{F}_1 \equiv (0,1) \to \mathrm{F}_2 \equiv (1,1) \to \mathrm{F}_3 \equiv (1,0) \to \mathrm{F}_0$具有吸引性，即轨迹收敛于该环。我们得到 $\lambda_1|_{\mathbf{y}} > 0$ 和 $\lambda_2|_{\mathbf{y}} < 0$，其中 $\lambda_1|_{\mathbf{y}}$ 和 $\lambda_2|_{\mathbf{y}}$ 是雅可比矩阵在 $\mathbf{y} \in \{\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3\}$处的特征值。具体而言，我们得到 $\lambda_1|_{\mathbf{F}_0} = v_T$, $\lambda_1|_{\mathbf{F}_1} = r + v_I$, $\lambda_1|_{\mathbf{F}_3} = 1 - v_I$ $\lambda_2|_{\mathbf{F}_0} = -1 + v_I$ $\lambda_2|_{\mathbf{F}_1} = -v_T$ $\lambda_2|_{\mathbf{F}_2} = -\frac{r \; w^{N_I} - 1 + N_I v_I \; w - 1}{w^{N_I} - 1) - N_T v_T (w-1)}$ ( ) , , , ( ) ( ) $N_I(w-1)$ 和 $\lambda_2|_{\mathbf{F}_3} = -\frac{(1-r)(w^{N_I}-1) - N_T v_T (w-1)}{N_T(w-1)}$。换言之，每个 y 都是一个鞍点。根据参考文献 [53] 中引理1的证明，异宿环 $\mathrm{F}_0 \to \mathrm{F}_1 \to \mathrm{F}_2 \to \mathrm{F}_3 \to \mathrm{F}_0$具有吸引性，因为 $\rho \equiv \left(\frac{-\lambda_2|_{\mathbf{F}_0}}{\lambda_1|_{\mathbf{F}_0}}\right)\left(\frac{-\lambda_2|_{\mathbf{F}_1}}{\lambda_1|_{\mathbf{F}_1}}\right)\left(\frac{-\lambda_2|_{\mathbf{F}_2}}{\lambda_1|_{\mathbf{F}_2}}\right)\left(\frac{-\lambda_2|_{\mathbf{F}_3}}{\lambda_1|_{\mathbf{F}_3}}\right) = ( ) ( ) \frac{r \; w^{N_I} - 1 + N_I v_I \; w - 1}{N_I(w-1)(r+v_I)} > 1$。

我们如下证明 $\frac{r(w^{N_I}-1) + N_I v_I (w-1) \, N_I (w-1)(r+v_I)}{} > 1$。利用 $w > 1$，我们得到 $1 + N_I(-1+w) - w^{N_I} < 0$，因为 $\frac{\partial}{\partial w}\left[1 + N_I(-1+w) - w^{N_I}\right] = N_I\left(1 - w^{N_I - 1}\right) < 0$ 且 $\left[1 + N_I \; -1 + w \; - w^{N_I}\right]|_{w=1} = 0$ $1 +$ ( )。接着我们得到 ( ) ( ( ) ) $N_I \; -1 + w \; - w^{N_I} < 0 \iff r \; 1 + N_I \; -1 + w \; - w^{N_I} < 0 \iff N_I r \; w-1 + N_I v_I \; w - 1 < r \; w^{N_I} - 1 \iff N_I r \; w-1 < r \; w^{N_I} - 1 + N_I v_I \; w - 1 \iff \frac{r \; w^{N_I} - 1 + N_I v_I \; w-1}{N_I \; w-1 \quad r+v_I} >$ ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )。

时间平均值 $\frac{1}{T}\int_0^T (y_i, y_t) dt$ 不收敛，其中 $(y_i, y_t) = (y_i(t)$ $y_t(t))$ 是一条收敛到异宿周期的轨迹。相反，根据参考文献 [53], 中的定理1，$\frac{1}{T}\int_0^T (y_i, y_t) dt$ 渐近地螺旋趋向多边形（即四边形）$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$, 的边界，其中 $\mathrm{A}_i \equiv \mathrm{F}_{i+1} + \rho_{i+2}\mathrm{F}_{i+2} + \rho_{i+2}\rho_{i+3}\mathrm{F}_{i+3} + \rho_{i+2}\rho_{i+3}\rho_{i+4}\mathrm{F}_{1+\rho_{i+2}+\rho_{i+2}\rho_{i+3}+\rho_{i+2}\rho_{i+3}\rho_{i+4}}^{i+4}$，$\rho_i = \frac{-\lambda_2|_{\mathbf{F}_{i-1}}}{\lambda_1|_{\mathbf{F}_i}}$ 且指标按模4计数（例如 $\mathrm{F}_4 = \mathrm{F}_0, \rho_5 = \rho_1$）。由于点 $\mathrm{A}_i$、$\mathrm{A}_{i+1}$（其中 $i \in \{1,2,3,4\}$）和 $\mathrm{F}_{i+1}$ 共线，$\frac{1}{T}\int_0^T (y_i, y_t) dt$ 在每个周期 [53]中，渐近地沿着一条直线从 $\mathrm{A}_i$ 朝 $\mathrm{F}_{i+1}$ 的方向移动到 $\mathrm{A}_{i+1}$。

尽管 $y_i$ 和 $y_t$ 的时间平均值不收敛，但收益 $P = \frac{1}{T}\int_0^T P dt$ 的时间平均值收敛。根据参考文献 [53], 的引理1，轨迹在鞍点$\mathbf{F}_i$ 附近停留的时间渐近地每个周期增加 $\rho$ 倍，而从一个鞍点的邻域移动到下一个鞍点所需的时间变化不大。因此，与前者相比，我们可以忽略后者。于是得到

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \frac{t_0 P(\mathbf{F}_0) + t_1 P(\mathbf{F}_1) + t_2 P(\mathbf{F}_2) + t_3 P(\mathbf{F}_3)}{t_0 + t_1 + t_2 + t_3} \\
&= \frac{P(\mathbf{F}_0) + \frac{t_1}{t_0} P(\mathbf{F}_1) + \frac{t_2}{t_0} P(\mathbf{F}_2) + \frac{t_3}{t_0} P(\mathbf{F}_3)}{1 + \frac{t_1}{t_0} + \frac{t_2}{t_0} + \frac{t_3}{t_0}} \\
&= \frac{P(\mathbf{F}_0) + \frac{t_1}{t_0} P(\mathbf{F}_1) + \frac{t_1}{t_0}\frac{t_2}{t_1} P(\mathbf{F}_2) + \frac{t_1}{t_0}\frac{t_2}{t_1}\frac{t_3}{t_2} P(\mathbf{F}_3)}{1 + \frac{t_1}{t_0} + \frac{t_1}{t_0}\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_1}{t_0}\frac{t_2}{t_1}\frac{t_3}{t_2}} \\
&= \frac{P(\mathbf{F}_0) + \rho_1 P(\mathbf{F}_1) + \rho_1\rho_2 P(\mathbf{F}_2) + \rho_1\rho_2\rho_3 P(\mathbf{F}_3)}{1 + \rho_1 + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_2\rho_3},
\end{aligned} \tag{A.49}$$

其中，$t_i$ 表示轨迹在$\mathrm{F}_i$ 的任意小邻域内停留的时间，并且我们使用了参考文献 [53]引理1中的$\frac{t_{i+1}}{t_i} = \rho_{i+1}$。注意，$\overline{P}$hc是 $P(\mathrm{F}_0)$ $P(\mathrm{F}_1)$ $P(\mathrm{F}_2)$和 $P(\mathrm{F}_3)$的凸组合。将公式 (21)中的$(y_i, y_t) = (0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$和$(1,1)$代入公式 (A.49)，得到

$$\overline{P}_{\mathrm{hc}} = \left[ \frac{1}{(w-1)\left\{ \frac{(r+1)[N_I(1-r) + rN_T v_T]}{N_T v_T \left[ r\left(w^{N_I} - 1\right) + N_I(w-1) \right]} - \frac{r}{w^{N_I} - 1} \right\} - a(N_I v_I + N_T v_T)} \right] \frac{1}{N_I + N_T}. \tag{A.50}$$

### E. 最优激励

在本节中，我们计算当 $w \le 1$ 以及当 $(w > 1 \wedge N_I \to \infty) \vee (w \to \infty)$ 时的最优激励和收益。

*1)* $w \le 1$: 为了获得最优收益，我们需要知道 $\max\{P^*(0,0)\ P^*(1,0)\ P^*(1,1)\ P^*(\mathbf{Q})\}$。我们得到 $P^*(1,1) - P^*(\mathbf{Q}) = \frac{r(w^{N_I}-1)}{(N_I+N_T)(w-1)} + \frac{(a-1)N_T}{N_I N_T}\epsilon > 0$。此外，我们有

$$\begin{aligned}
\triangle P_1 \equiv & P^*(1,1) - P^*(1,0) \\
= & \frac{[(a+1)r - a]\left(w^{N_I} - 1\right)}{(N_I + N_T)(w-1)} + \frac{aN_I}{N_I + N_T} + (a-1)\epsilon \\
> & 0
\end{aligned} \tag{A.51}$$

对于 $0 < w \leq 1$，因为 $\triangle P_1$ 是关于 $w > 0$ 的单调函数，所以我们有 $\triangle P_1|_{w=0} = \frac{(N_I+r-1)}{N_I+N_T} + (a-1)\epsilon > 0$，并且有 $\triangle P_1|_{w=1} = (a+1)\frac{rN_I}{N_I+N_T} - (a-1)\epsilon > 0$。因此，以下等式成立：$\max\{P^*(0,0)\ P^*(1,0)\ P^*(1,1)\ P^*(Q)\} = \max\{P^*(0,0)\ P^*(1,1)\}$。

如果 $r > r_1^* = \frac{a-1}{a+1}$，那么

$$\begin{aligned}\triangle P_2 &\equiv P^*(1,1) - P^*(0,0) \\ &= \frac{(a+1)r - a + 1}{N_I + N_T}\frac{w^{N_I}-1}{w-1} + (1-a)\epsilon > 0.\end{aligned} \tag{A.52}$$

在这种情况下，最优收益为 $P^*(1,1)$，相应的最优激励为 $v_I = 0 \wedge v_T = v_T^* + \epsilon$。如果 $r < r_1^*$，那么 $\triangle P_2 < 0$。在这种情况下，最优收益为 $P^*(0,0)$，相应的最优激励为 $v_I = 0 \wedge v_T = 0$。

*2)* $(w > 1 \wedge N_I \to \infty) \vee (w \to \infty)$：由于 $N_I \to \infty$，我们得到

$$\triangle P_1 = P^*(1,1) - P^*(1,0) \to \frac{(a+1)r - a}{N_I + N_T}\frac{w^{N_I}-1}{w-1}. \tag{A.53}$$

$\triangle P_1$ 的符号由 $(a+1)r - a$ 的符号决定，因为 $\frac{w^{N_I}-1}{w-1} > 0$。因此，如果 $r > r_2^* = \frac{a}{a+1}$，则 $P^*(1,1) > P^*(1,0)$；如果 $r < r_2^*$，则 $P^*(1,1) < P^*(1,0)$。由于 $N_I \to \infty$，我们还得到

$$P^*(1,0) - \overline{P}_{\text{hc}}^* \to \infty, \tag{A.54}$$

其中我们提醒，$\overline{P}_{\text{hc}}^*$ 表示 $P_{\text{hc}}$ 关于 $v_I$ 和 $v_T$ 的最大值。我们在附录 A.54 中证明方程（F）。

方程（A.53）和（A.54）意味着以下结论。首先，若 $r > r_2^*$，则 $\max\{P^*(0,0)\ P^*(1,1)\ P^*(1,0)\ P^*\text{hc}\} = \max\{P^*(0,0)\ P^*(1,1)\}$。由于 $r > r_1^*$，这由$r_2^* > r_1^*$可得，因此我们得到 $\triangle P_2 = P^*(1,1) - P^*(0,0) > 0$，这已在方程（A.52）中证明。因此，$\max\{P^*(0,0)\ P^*(1,1)\} = P^*(1,1)$；$P^*(1,1)$ 是最优收益，相应的最优激励为 $v_I = 0 \wedge v_T = v_T^* + \epsilon$。其次，若 $r < r_2^*$，则 $\max\{P^*(0,0)\ P^*(1,1)\ P^*(1,0)\ P^*\text{hc}\} = \max\{P^*(0,0)\ P^*(1,0)\}$。在这种情况下，$\triangle P_3 \equiv P^*(0,0) - P^*(1,0) = \frac{1}{N_I+N_T}\left(-N_I a + \frac{1-w^{N_I}}{1-w}\right) - (a-1)\frac{N_I}{N_I+N_T}\epsilon \to \infty$。因此，$P^*(1,0)$ 是最优收益，相应的最优激励为 $v_I = 1 + \epsilon \wedge v_T = 0$。

最后，当 $N_I$ 为有限值且 $w \to \infty$时，通过类似的计算可得相同结果。

## *F.* 式(A.54)的证明

为证明式（A.54），我们首先证明，$P_{\text{hc}}$ 作为 $v_T \in (0, v_T^*)$ 的函数是单调的或具有局部最大值。由于 $\partial P_{\text{hc}}/\partial v_T$ 的分母为 $(w-1\{N_I[1-r^2(w^{N_I}-1) - N_T r v_T (w-1)]\})^2 > 0$，$\partial P_{\text{hc}}/\partial v_T \equiv c(v_T)$ 符号由其分子 $-v_T^2 N_T^3 a r^2 (w-1)(w^{N_I}-N_I w+N_I-1)^2 + 2v_T N_I N_T^2 a r (w-1)(w^{N_I}-1)(r^2-1)[(w^{N_I}-1) - N_I(w-1)] + N_T N_I (1-r^2)(w^{N_I}-1)^2[N_I(w-1)(ar^2-a+1)])$ 决定，该分子是关于 $v_T$ 的二次方程。在 $c(v_T) = 0$ 的两个实数解中，we consider only the larger one, $v_T = v_T^{\text{hc}} = \frac{\left\{\sqrt{aN_I(1-r^2)(w-1)[r(w^{N_I}-1)+N_I(w-1)]} - aN_I(1-r^2)(w-1)\right\}}{aN_T r(w-1)(w^{N_I}-N_I w+N_I-1)} \times (w-1)(N_I+N_T)$ 因为较小的那个保证始终为负，且 $v_T \geq 0$。由于二次项的系数 $v_T^2$ 为负，$c(v_T)$ 在定义域（0, $v_T^*$）上的符号可能始终为正、始终为负，或仅发生一次由正变负的变化。换言之，$P_{\text{hc}}$ 作为 $v_T \in (0, v_T^*)$ 的函数是单调的或具有局部最大值。若存在，$P_{\text{hc}}$的局部最大值在 $v_T = v_T^{\text{hc}}$ 处取得。由于 $\frac{\partial P_{\text{hc}}}{\partial v_I} = -\frac{aN_I}{N_I+N_T} < 0$ 意味着无论 $v_T$ 的值如何，$P_{\text{hc}}$ 关于 $v_I$ 的最大值均在 $v_I = 0$ 处取得，因此我们得出，$P^*\text{hc}$ 等于 $P_{\text{hc}}(0+\epsilon)$、$P_{\text{hc}}(v_T^{\text{hc}})$ 或 $P_{\text{hc}}(v_T^* - \epsilon)$。

We obtain $P^*(1,0) - \overline{P}_{\text{hc}}(0+\epsilon) = \frac{1-w^{N_I}}{(1-w)(N_I+N_T)} - \frac{aN_I}{N_I+N_T} + \frac{[(1-a)N_I+aN_T]}{N_I+N_T}\epsilon - \frac{1}{(w-1)(N_I+N_T)\left\{\frac{(r+1)[N_I(1-r)+N_T r\epsilon]}{N_T\epsilon[r(w^{N_I}-1)+N_I(w-1)]} - \frac{r}{w^{N_I}-1}\right\}} \to \infty$ as $N_I \to \infty$ and $\epsilon \to 0$. At $v_T = v_T^{\text{hc}}$, we have $P^*(1,0) - \overline{P}_{\text{hc}}(v_T^{\text{hc}}) = \frac{aN_I^2 r(w-1)^2 + 2(w^{N_I}-1)\sqrt{aN_I(1-r^2)(w-1)[r(w^{N_I}-1)+N_I(w-1)]}}{r(w-1)(N_I+N_T)(w^{N_I}-N_I w+N_I-1)} + \frac{N_I\{a[(r-1)r-1]-r-1\}(w^{N_I}-1)}{r(N_I+N_T)(w^{N_I}-N_I w+N_I-1)} + \frac{aN_I}{N_I+N_T}\epsilon \to \infty$ as $N_I \to \infty$ and $\epsilon \to 0$. Finally, we have $P^*(1,0) - \overline{P}_{\text{hc}}(v_T^* - \epsilon) = \frac{[a(1-r)+1](w^{N_I}-1)}{(w-1)(N_I+N_T)} - \frac{aN_I}{N_I+N_T} + \frac{(1-a)N_I - aN_T}{N_I+N_T}\epsilon - \frac{1}{\frac{(r+1)\{r[(r-1)w^{N_I}+N_T w\epsilon - N_T\epsilon - r+1]+N_I(r-1)(w-1)\}}{[r(w^{N_I}-1)+N_I(w-1)][(r-1)w^{N_I}+N_T w\epsilon - N_T\epsilon - r+1]} - \frac{r}{w^{N_I}-1}} \times \frac{1}{(w-1)(N_I+N_T)}$, which tends to $\frac{2(w^{N_I}-1)\sqrt{r(w^{N_I}-1)+N_I(w-1)}}{r(w-1)(N_I+N_T)(w^{N_I}-N_I w+N_I-1)} \times \sqrt{-aN_I(r^2-1)(w-1)} - \frac{aN_I[N_I(1-w)+r-1]}{(N_I+N_T)(w^{N_I}-N_I w+N_I-1)} + \frac{aN_I[(r-1)r-1]w^{N_I}+1)}{r(N_I+N_T)(w^{N_I}-N_I w+N_I-1)} - \frac{N_I(r+1)(w^{N_I}-1)}{r(N_I+N_T)(w^{N_I}-N_I w+N_I-1)}$ as $\epsilon \to 0$. As $N_I \to \infty$, this quantity tends to $\frac{2w^{\frac{N_I-1}{2}}\sqrt{aN_I(1-r^2)}}{\sqrt{r}(N_I+N_T)} \to \infty$. This concludes the proof of Eq. (A.54).

## 参考文献


[1] J. Li、C. Zhang、Q. Sun、Z. Chen 和 J. Zhang，《在重复囚徒困境博弈中基于个体行为改变互动强度》，IEEE进化计算汇刊，第21卷，第4期，第506–517页，2017年。[2] R. Chiong 和 M. Kirley，《重复互动对多参与者空间演化博弈的影响》，IEEE进化计算汇刊，第16卷，第4期，第537–555页，2012年。[3] M. A. Nowak，《合作演化的五条规则》，《科学》，第314卷，第5805期，第1560–1563页，2006年12月。[4] C. Hauert、F. Michor、M. A. Nowak 和 M. Doebeli，《社会困境中合作的协同效应与折扣》，《理论生物学杂志》，第239卷，第2期，第195–202页，2006年。[5] S. Van Segbroeck、F. C. Santos、T. Lenaerts 和 J. M. Pacheco，《对不利关系作出不同反应有助于促进社会网络中的合作》，《物理评论快报》，第102卷，058 105号，2009年2月。[6] T. Sasaki、A. Brännström、U. Dieckmann 和 K. Sigmund，《接受或放弃选项使小额惩罚足以克服社会困境》，《美国国家科学院院刊》，第109卷，第4期，第1165–1169页，2012年1月。[7] J. M. Smith 和 G. R. Price，《动物冲突的逻辑》，《自然》，第246卷，第5427期，第15–18页，1973年。

[8] P. D. Taylor 和 L. B. Jonker，《进化稳定策略与博弈动力学》，数学生物科学，第40卷，第1期，第145–156页，1978年。[9] E. D. Bolluyt 和 C. Comaniciu，《动态影响对竞争性技术传播过程中复制子演化的作用》，IEEE进化计算汇刊，第23卷，第5期，第899–903页，2019年。[10] Q. Long、X. Tao、Y. Shi 和 S. Zhang，《绿色供应链中三类绿色敏感方之间的演化博弈分析》，IEEE进化计算汇刊，第25卷，第3期，第508–523页，2021年。[11] G. Bravo 和 L. Tamburino，《非同步交换情境中的信任演化》，《理性与社会》，第20卷，第1期，第85–113页，2008年。[12] N. D. Johnson 和 A. A. Mislin，《信任博弈：一项荟萃分析》，《经济心理学杂志》，第32卷，第5期，第865–889页，2011年。[13] H. L. J. Ting、X. Kang、T. Li、H. Wang 和 C. K. Chu，《面向未来全连接数字世界的信任与信任建模：一项综合研究》，IEEE Access，第9卷，第106 743–106 783页，2021年。[14] D. D. S. Braga、M. Niemann、B. Hellingrath 和 F. B. D. L. Neto，《计算信任与声誉模型综述》，ACM计算调查，第51卷，第5期，第101:1–101:40页，2018年11月。[15] J.-H. Cho、K. Chan 和 S. Adali，《信任建模综述》，ACM计算调查，第48卷，第2期，第28:1–40页，2015年。[16] T. Jung、X. Li、W. Huang、Z. Qiao、J. Qian、L. Chen、J. Han 和 J. Hou，《Accounttrade：针对不诚信的大数据买卖双方的问责机制》，IEEE信息取证与安全汇刊，第14卷，第1期，第223–234页，2019年。[17] C. Camerer 和 K. Weigelt，《序贯均衡声誉模型的实验检验》，《计量经济学》，第56卷，第1期，第1–36页，1988年。[18] J. Berg、J. Dickhaut 和 K. McCabe，《信任、互惠与社会历史》，《博弈与经济行为》，第10卷，第1期，第122–142页，1995年。[19] N. Masuda 和 M. Nakamura，《信任博弈中守信买家与合作卖家的协同演化》，《公共科学图书馆·综合》，第7卷，第9期，e44169，2012年。[20] J. M. McNamara、P. A. Stephens、S. R. X. Dall 和 A. I. Houston，《信任与可信任性的演化：社会意识有利于人格差异》，《英国皇家学会学报B辑：生物科学》，第276卷，第1657期，第605–613页，2009年2月。[21] H. Tzieropoulos，《神经科学中的信任博弈：简要综述》，《社会神经科学》，第8卷，第5期，第407–416页，2013年9月。[22] I. S. Lim，《非对称参数下信任博弈的随机演化动力学》，《物理评论E辑》，第102卷，第6期，第062 419页，2020年12月。[23] A. Kumar、V. Capraro 和 M. Perc，《信任与可信任性的演化》，《英国皇家学会界面杂志》，第17卷，第169期，20200491，2020年。[24] V. Capraro 和 M. Perc，《道德偏好的数学基础》，《英国皇家学会界面杂志》，第18卷，第175期，20200880，2021年。[25] W. Güth 和 H. Kliemt，《进化稳定合作承诺》，《理论与决策》，第49卷，第3期，第197–222页，2000年。[26] P. Dasgupta，《作为商品的信任》，载于《信任：合作关系的建立与破裂》，D. Gambetta 编，牛津大学社会学系，牛津大学，2000年，第4章，第49–72页。[27] H. Abbass、G. Greenwood 和 E. Petraki，《$n$参与者信任博弈及其复制子动力学》，IEEE进化计算汇刊，第20卷，第3期，第470–474页，2016年。[28] M. L. Manapat、M. A. Nowak 和 D. G. Rand，《信息、非理性与信任演化》，《经济行为与组织杂志》，第90卷，第S57–S75页，2013年。[29] C. Tarnita，《结构化种群中的公平与信任》，《博弈》，第6卷，第3期，第214–230页，2015年。[30] I. S. Lim 和 V. Capraro，《制度激励与网络化结构在多智能体系统演化博弈动力学中的协同效应》，IEEE电路与系统汇刊II：简报，第69卷，第6期，第2777–2781页，2022年。[31] M. Chica、R. Chiong、M. Kirley 和 H. Ishibuchi，《网络化n参与者信任博弈及其演化动力学》，IEEE进化计算汇刊，第22卷，第6期，第866–878页，2018年。[32] Z. Hu、X. Li、J. Wang、C. Xia、Z. Wang 和 M. Perc，《自适应声誉促进社会网络中的信任》，IEEE网络科学与工程汇刊，第8卷，第4期，第3087–3098页，2021年。

[33] X. Fang 和 X. Chen，“个体奖励与惩罚下 n人信任博弈中信任的演化动力学”，《欧洲物理学杂志B》，第94卷，第9期，第176页，2021年。[34] S. H. Strogatz，《非线性动力学与混沌：及其在物理学、生物学、化学和工程学中的应用》，第2版。博卡拉顿：CRC出版社，2015年。[35] M. A. Nowak、K. M. Page 和 K. Sigmund，“最后通牒博弈中的公平与理性”，《科学》，第289卷，第5485期，第1773页，2000年9月。[36] F. Guala 和 L. Mittone，“范式实验：独裁者博弈”，《社会经济学杂志》，第39卷，第584页，2010年5月，第578页，第—期。[37] J. C. Schank、P. E. Smaldino 和 M. L. Miller，“多层次选择下独裁者博弈中公平的演化”，《理论生物学杂志》，第382卷，第64–73页，2015年。[38] J. E. Snellman、G. Iˇniguez、J. Kert´esz、R. A. Barrio 和 K. K. Kaski，“网络独裁者博弈中作为公平来源的地位最大化”，《复杂网络杂志》，第7卷，第2期，第281–305页，2019年。[39] J. Hofbauer 和 K. Sigmund，“演化博弈动力学”，《美国数学学会公报》，第40卷，第519页，2003年4月，第479页，第—期。[40] K. Sigmund，《自私性的微积分》。普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2010年。[41] N. Masuda，“志趣相投的个体之间通过模仿实现的演化”，《理论生物学杂志》，第349卷，第100–108页，2014年。[42] M. Archetti 和 I. Scheuring，“综述：无分类配对的一次性社会困境中的公共物品博弈论”，《理论生物学杂志》，第299卷，第9–20页，2012年。[43] S. Wang、L. Liu 和 X. Chen，“合作演化的激励策略：分析与优化”，《欧洲物理快报》，第136卷，第6期，第68002页，2021年。[44] M. Perc、J. J. Jordan、D. G. Rand、Z. Wang、S. Boccaletti 和 A. Szolnoki，“人类合作的统计物理学”，《物理学报告》，第687卷，第1–51页，2017年。[45] J. Zhang 和 M. Cao，“演化博弈论框架下多智能体系统的策略竞争动力学”，IEEE电路与系统汇刊II：简报，第67卷，第1期，第152–156页，2020年。[46] Y. Dong、T. Sasaki 和 B. Zhang，“制度性奖励的竞争优势”，《英国皇家学会学报B辑：生物科学》，第286卷，第1899期，第20190001页，2019年。[47] R. Cressman、J.-W. Song、B.-Y. Zhang 和 Y. Tao，“制度激励下公共物品博弈中的合作与演化动力学”，《理论生物学杂志》，第299卷，第151页，2012年，第144页，第—页。[48] M. Perc，“可持续的制度化惩罚需要消除二阶搭便车者”，《科学报告》，第2卷，第344页，2012年，第1期。[49] F. C. Santos、M. D. Santos 和 J. M. Pacheco，“社会多样性促进公共物品博弈中合作的涌现”，《自然》，第454卷，第213 EP页，2008年7月。[50] U. Alvarez-Rodriguez、F. Battiston、G. F. de Arruda、Y. Moreno、M. Perc 和 V. Latora，“社会网络中高阶交互的演化动力学”，《自然·人类行为》，第5卷，第5期，第586–595页，2021年。[51] N. Samian、Z. A. Zukarnain、W. K. G. Seah、A. Abdullah 和 Z. M. Hanapi，“无线多跳网络的合作促进机制：综述”，《网络与计算机应用杂志》，第54卷，第88–106页，2015年。[52] B. M. C. Silva、J. J. P. C. Rodrigues、N. Kumar 和 G. Han，“受限网络及其应用的合作策略：综述”，《IEEE系统杂志》，第11卷，第4期，第2749–2760页，2017年。[53] A. Gaunersdorfer，“异宿吸引子的时间平均值”，《SIAM应用数学杂志》，第52卷，第5期，第1476–1489页，1992年。