arXiv:2305.01428v2 [math.PR] 9 Jun 2023

# E增长度随机正则图的普适性

Jiaoyang Huang
*University of Pennsylvania*
*E-mail: huangjy@wharton.upenn.edu*

Horng-Tzer Yau
*Harvard University*
*E-mail: htyau@math.harvard.edu*

**摘要**

我们研究随机 $d$-正则图的极端特征值统计，其中 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$ 对任意小的 $\mathfrak{c} > 0$ 均成立。我们证明，在这一范围内，极端特征值的涨落服从特雷西-维多姆分布。因此，约有 69% 的 $d$-正则图的所有非平凡特征值的绝对值均不超过 $2\sqrt{d-1}$。

## 目录

**1 引言 1 2 特征值刚性估计 5 3 简单切换 6 4 格林函数估计 13 5 自洽方程 14 6 自洽方程的识别 33 7 边缘普适性 39**

## 1 引言

扩展图 是具有强连通性的稀疏图，在稳健网络设计和纠错编码理论中有着广泛的应用 [33]。正则图的扩展性质可以用其谱隙来衡量。拉马努金图 是 $d$-正则图，具有最大的谱隙，即所有非平凡特征值的绝对值均不超过 $2\sqrt{d-1}$。至少就以谱隙衡量扩展性的标准而言，它们是最佳的扩展图。

当 $d = p + 1$ 且 $p$ 为素数幂时，Lubotzky、Phillips 和 Sarnak [47] 以及 Margulis [50], 独立地运用数论中的深刻工具，明确构造出了拉马努金图。最近，在突破性工作 [48, 49], 中，Marcus、Spielman 和 Srivastava 证明了每个度都存在二部 *Ramanujan* 图。每个度是否都存在非二部拉马努金图，仍是一个有趣的开放问题。然而，根据数值模拟 [52], ，人们发现，随机 $d$-正则图 中有正比例是拉马努金图。

我们研究随机 $d$-正则图的极端特征值统计，其中度 $d$ 随图的规模增长。对于具有 $N$ 个顶点的随机 $d$-正则图，已有证明表明，[8] 当$N^{2/9+\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$且 [31]当 $N^{2/3+\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N/2$时，极端特征值的涨落服从随机矩阵理论中的特雷西-维多姆分布。在这项工作中，我们将这些边缘普适性结果推广到更稀疏的情形 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$，其中 $\mathfrak{c} > 0$可以任意小。因此，对于具有 $N$ 个顶点、且 $d^3 \ll N \leqslant d^{1/\mathfrak{c}}$ 的 $d$-正则图中，约有 69% 的图的所有非平凡特征值的绝对值均不超过 $2\sqrt{d-1}$。这意味着存在许多拉马努金图。

Wigner 矩阵边缘统计量的普适性最初是通过矩方法建立的 [39,54,57]，当时对矩阵元的分布施加了某些对称性假设。矩方法随后在 [29, 53] 和 [56]中得到了进一步发展。另一种针对 Wigner 矩阵边缘普适性的方法，是将其与相应的高斯系综直接比较；该方法在 [22, 28, 58]中提出。后来，[46]中发现了 Wigner 矩阵具有边缘普适性的充要条件。

对于比较论证而言，一个关键的中间环节是极端特征值的刚性。要使边缘普适性成立，极端特征值必须在 $O_{\prec}(N^{-2/3})$ 的尺度上波动。本文的主体部分致力于证明这一最优刚性估计。证明首先构造经验特征值分布的斯蒂尔切斯变换所满足的高阶自洽方程，然后通过递归矩估计计算该自洽方程的高阶矩，并证明其集中于零附近。该方法最初在 [45]中提出，随后在 [32,35,37,44] 中得到进一步发展，用于研究稀疏 Erd˝os-R´enyi 图，并在 [8]中用于研究稀疏随机 $d$-正则图。

对于随机 $d$-正则图，自洽方程具有 $1/\sqrt{d}$ 渐近展开。上述方法的主要挑战在于证明自洽方程的高阶矩接近于零，这要求渐近展开中的每一阶都发生抵消。[8] 能够探索抵消现象直到 $d^{-3/2}$，这意味着极端特征值的涨落被 $O_{\prec}(d^{-3} + N^{-2/3})$ 所界定。为了获得最优的 $O_{\prec}(N^{-2/3})$ 涨落界，我们需要对任意大的 $\mathfrak{a} \geqslant 0$实现直到 $d^{-\mathfrak{a}/2}$的抵消。为此，本文将这两个步骤结合起来，一步构造高阶自洽方程并计算其高阶矩。根据构造方式，我们的高阶自洽方程集中在零附近。为了确定该自洽方程，我们直接证明 无限 $d$-正则树 的谱测度的斯蒂尔切斯变换满足同一个方程。因此，极端特征值集中在无限 $d$-正则树的谱边缘附近，并具有最优误差 $O_{\prec}(N^{-2/3})$。

高阶自洽方程的计算归结为估计以下量（及其推广形式）

$$\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}} R U], \tag{1.1}$$

其中，$\mathcal{T}$ 是一个子树图（不一定连通），$A_{\mathcal{T}}$ 是示性函数，表示 $\mathcal{T}$ 包含于该图中，$R$ 是格林函数项的一个多项式，而 $U$ 是斯蒂尔切斯变换的任意多项式。为了估计（1.1），我们对该子树 $\mathcal{T}$的每条边进行重新采样，并将其用作离散分部积分。这推广了 [11] 中引入的简单切换过程，用以证明随机 $d$-正则图的局部定律。

对于（1.1），有三种情况：i）如果 $R$ 包含一个非对角格林函数项 $G_{ij}$，使得 $i$、$j$位于 $\mathcal{T}$的不同连通分支中，则我们证明（1.1）可忽略。ii）如果 $R$ 包含一个非对角格林函数项 $G_{ij}$，使得 $i$、$j$ 位于 $\mathcal{T}$的同一连通分支中，则我们证明（1.1）可表示为有限个同形式项的线性组合，但包含一些额外的$1/\sqrt{d}$因子。iii）如果 $R$仅包含对角格林函数条目，则将 $R$ 替换为经验测度的斯蒂尔切斯变换的某个幂，即可得到主导项；高阶项仍具有（1.1）的形式，但包含一些额外的 $1/\sqrt{d}$因子。重复这一过程，最终得到经验测度的斯蒂尔切斯变换的一个多项式，由此得到自洽方程。

为证明收敛到特雷西-维多姆分布，我们采用了一种动力学方法，该方法最初是为证明 Wigner 矩阵的体相普适性而提出的 [17,19,21,24–26,41,42]。我们将邻接矩阵与高斯正交系综（GOE）进行插值。每个时刻的特征值具有与 Dyson 布朗运动（DBM）相同的分布。对于足够正则的初始数据，文献 [43], 已证明，在短时间后，DBM 在谱边缘处的特征值统计与 GOE 一致。以最优边缘刚性为输入， [43] 可推出邻接矩阵加上一个小的高斯分量满足边缘普适性。我们的主要贡献是证明插值过程中边缘统计量保持不变，因此原始邻接矩阵也满足边缘普适性。主要挑战在于追踪插值过程中的边缘位置 $L_t$ 。在每个时刻 $t$，我们都可以构造一个高阶自洽方程，它刻画插值矩阵的谱。我们发现， $L_t$ 的时间导数等于相应高阶自洽方程的空间导数，且误差项可忽略。这使我们能够围绕 $L_t$ 建立一个动力学框架，并证明边缘统计量保持不变。

值得比较稀疏 Erd˝os–R´enyi 图与随机 $d$正则图的边缘结果。得益于一系列论文 [22,32,35,37,44,45],, Erd˝os–R´enyi 图的边缘统计量 $G(N,\ p)$在 $Np \geqslant N^{\mathfrak{c}}$的情况下如今已得到充分理解。当平均度 $pN \gg N^{1/3}$时，极端特征值呈现特雷西-维多姆涨落 [22,45]。然而，当 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant pN \ll N^{1/3}$时，极端特征值呈现高斯涨落，其涨落由边的总数的涨落决定 [32,35]。高阶涨落则由一系列无限层级的子图计数随机变量之和给出，这些随机变量渐近地服从联合高斯分布 [44]。令人惊讶的是，除去这一显式的随机平移后，极端特征值的涨落仍由特雷西-维多姆分布给出 [37]。对于随机 $d$-正则图，这些子图计数的涨落可以忽略不计。极端特征值集中在确定性谱边缘附近，并收敛到特雷西-维多姆分布。在相同的范围内，Erd˝os–R´enyi 图与随机 $d$-正则图的体相普适性也已得到证明 [7,22,34]。

对于较稀疏情形 $Np = \mathrm{O}(\ln\ N)$ 下的 Erd˝os–R´enyi 图，存在一个临界值 $b_* = 1/(\ln\ 4 - 1)$，使得当 $Np \geqslant b_* \ln\ N/N$ 时，归一化邻接矩阵的极端特征值收敛到$\pm 2$ [4,13,14,59]，且所有特征向量均为离域的 [5,23]。对于 $(\ln\ln\ N)^4 \ll Np < b_* \ln\ N/N$，则存在离群特征值 [4,59]。谱分为三个相：主体部分的离域相、谱边缘附近的完全局域相，以及介于两者之间的半局域相 [3,6]。此外，谱边缘附近特征值的联合涨落构成一个泊松点过程。对于任意固定度数 $d \geqslant 3$ 的随机$d$-正则图，所有特征向量均为离域的 [9,36]。极端特征值的涨落仍被猜想服从特雷西-维多姆分布 [52]。这一猜想仍有待解决，但我们确实知道，极端特征值集中在 $\pm 2\sqrt{d-1}$ 附近，误差项为 $\mathrm{O}((\ln\ln\ N/\ln\ N)^2)$ [16,30],；最近，两位作者又将其改进为多项式界 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{c}})$ [36]。

**组织结构**。本节其余部分将定义模型并给出主要结果1。第2节回顾随机 $d$-正则图的局部定律 [12],，并陈述我们对经验特征值分布的斯蒂尔切斯变换所得到的改进估计。第3节讨论简单切换，并将其用作离散分部积分。第4节汇总关于格林函数的一些估计和记号。第5节构造高阶自洽方程，并证明其矩接近于零。第6节确定自洽方程并证明最优边缘刚性。第7节通过与高斯正交系综进行插值，证明边缘普适性结果。

**记号**。我们用 $C$ 表示较大的通用常数，用 $c$ 表示较小的通用常数；这些常数可能因行而异。令 $Y \geqslant 0$。如果存在常数 $C > 0$使得 $X \leqslant CY$，则记作 $X \lesssim Y$或 $Y \gtrsim X$ 。如果存在常数 $C > 0$ 使得 $Y/C \leqslant X \leqslant Y/C$，则记作 $X \asymp Y$。我们用 $\mathbb{C}_+$ 表示上半平面。对于任意指标集 $\boldsymbol{m} = \{m_1, m_2, \cdots, m_r\}$，我们记作

$$\sum_{\boldsymbol{m}}^{*} = \sum_{\substack{1 \leqslant m_1, m_2, \cdots, m_r \leqslant N, \\ \text{distinct}}} . \tag{1.2}$$

**致谢** J.H. 的研究得到了 NSF 拨款 DMS-2054835 的支持。H-T.Y. 的研究

得到了 NSF 拨款 DMS-1855509、DMS-2153335 以及西蒙斯研究员奖的支持。J.H. 感谢 Yukun He 仔细审阅论文手稿并指出其中的一些错误。

## 1.1 主要结果

令 $\mathbb{P}$ 为 $N$ 个顶点上的 $d$-正则图集合上的均匀概率测度。我们将一个图与其邻接矩阵 $A=(A_{ij}) \in \{0,1\}^{N\times N}$ 对应起来，其中当且仅当 $i$ 与 $j$ 相邻时，$A_{ij}=1$。因此，$\mathbb{P}$ 是满足 $\sum_{j=1}^{N} A_{ij}=d$ 且对所有 $i=1,\dots,N$ 均有 $A_{ii}=0$ 的对称矩阵 $A\in\{0,1\}^{N\times N}$ 集合上的均匀概率测度。

由于 $A$ 是 $d$-正则的，显然 $A$ 有一个平凡特征值 $d$，其对应的特征向量为 $(1,1,\dots,1)^*$。此外，根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理，所有其他特征值的绝对值均不超过 $d$。为方便起见，我们将考虑归一化邻接矩阵

$$H := A/\sqrt{d-1}. \tag{1.3}$$

我们将其特征值记为 $\lambda_1 = d/\sqrt{d-1} \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N \geqslant -d/\sqrt{d-1}$，相应的标准正交特征向量记为 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_N$。

我们的主要结果涉及极端特征值的极限分布。对于 $1 \ll d \ll N^{1/3}$，随机 $d$ 度正则图的极端特征值收敛到特雷西-维多姆分布。

**定理 1.1.** 任取足够小的 $\mathfrak{c}>0$ 和一个整数 $k\geqslant 1$，令 $F:\ \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ 为有界导数的有界检验函数。对于 $N^{\mathfrak{c}}\leqslant d\leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$，存在一个通用常数 $\mathfrak{e}>0$，使得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_H[F(N^{2/3}(\lambda_2-2),\cdots,N^{2/3}(\lambda_{k+1}-2)]\\ &=\mathbb{E}_{GOE}[F(N^{2/3}(\mu_1-2),\cdots,N^{2/3}(\mu_k-2))]+\mathcal{O}\left(N^{-\mathfrak{e}}\right),\end{aligned} \tag{1.4}$$

只要 $N$ 足够大即可。第二个期望是关于特征值为 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_N$ 的高斯正交系综矩阵取的。类似的结果也适用于最小特征值。

自开创性工作 [47,50]，以来，是否存在度为 $d$ 的拉马努金图无限族，仍然是一个悬而未决的问题。对于二部情形，近期的突破性工作 [48,49] 给出了肯定答案；关于这一构造的多项式时间算法，另见 [20]。非二部情形下的问题仍未解决。[52,55]，还猜想，固定度 $d$ 的正则图中有正比例的图是拉马努金图。正如 [55]，所强调的，特雷西–维多姆$_1$ 分布约有 83% 的概率质量落在集合 $\{x:\ x<0\}$。因此，定理 1.1 意味着，若 $N$ 和 $d$ 满足定理 1.1 的条件，则有 83% 的 $d$ 度正则图的第二特征值小于 $2\sqrt{d-1}$。定理 1.1 的证明可以扩展到如下结论：在 $N^{\mathfrak{c}}\leqslant d\leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$ 的情形下，最大和最小非平凡特征值依分布收敛到相互独立的特雷西–维多姆$_1$ 分布；见下文备注 7.7 和 7.9。由此可得以下结果。

**推论 1.2.** 当 $d$ 足够大且 $d^3\ll N\leqslant d^{1/\mathfrak{c}}$ 时，大约有 $69\%$[1] 的 $d$ 正则图，其 $N$ 个顶点对应的所有非平凡特征值的绝对值均不超过 $2\sqrt{d-1}$。

尽管推论 1.2 并未给出拉马努金图的无限族，但它确实给出了许多拉马努金图。

除非另有说明，本文中的所有量都依赖于基本参数 $N$，我们在记号中省略这种依赖关系。对于下述陈述，若确定性的、依赖于 $N$ 的量 $X$ 和 $Y$ 满足 $X\ll Y$，即对于某个固定的 $\varepsilon>0$ 以及足够大的 $N\geqslant N(\varepsilon)$，有 $X\leqslant N^{-\varepsilon}Y$，则记作 $X\ll Y$。对于依赖于 $N$ 的随机（或确定性）变量 $X$ 和 $Y$，若对任意 $\varepsilon>0$ 和 $D>0$，都有随机支配 $X$，则称 $Y$，此时

$$\mathbb{P}(X\leqslant N^{\varepsilon}Y)\geqslant 1-N^{-D},$$

[1] 在 [8], 百分比为 27%，这是一个错误。这个 27% 的百分比是按照 52% × 52% 计算的，这是因为 Tracy–Widom$_1$ 分布约有 52% 的质量位于集合 $\{x:\ x<0\}$。52% 这个数字是错误的，应为 83%。

当 $N \geqslant N(\varepsilon,\ D)$ 足够大时成立，并记作 $X \prec Y$或 $X = \mathcal{O}_{\prec}(Y)$。若对于任意 $D > 0$，当 $N \geqslant N(D)$ 足够大时，均有 $\mathbb{P}(\Omega) \geqslant 1 - N^{-D}$，则称事件 $\Omega$ 以压倒性概率成立。

## 2 特征值刚性估计

我们考虑将邻接矩阵 $A$限制在与向量 $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)^*$正交的子空间上。更准确地说，令 $P_\perp$ : $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 为到 $\mathbf{1}^\perp$上的正交投影，其显式形式为 $P_\perp = I - \mathbf{1}\mathbf{1}^*/N$其中 $I$是单位矩阵。由于 $H$是正则图的归一化邻接矩阵，矩阵 $H$ 和 $P_\perp$ 可交换： $HP_\perp = P_\perp H$。

对于谱参数 $z \in \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}[z] > 0\}$，我们将格林函数 定义为

$$G(z) := P_\perp (H - z)^{-1} P_\perp = \sum_{i=2}^{N} \frac{\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^*}{\lambda_i - z},$$

我们注意到，投影算子 $P_\perp$ 会消去最大特征值。因此， $G$ 与 $(H-z)^{-1}$ 在 $P_\perp$ 的像空间上相同，而该像空间是 $\mathbb{R}^N$ 中与 $\mathbf{1}$ 正交的子空间。格林函数满足以下关系

$$G(z)H = HG(z) = zG(z) + P_\perp = zG(z) + (I - \mathbf{1}\mathbf{1}^*/N). \tag{2.1}$$

此外,

$$\sum_{i=1}^{N} G_{ij}(z) = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}(z) = 0. \tag{2.2}$$

我们将 $G$ 的归一化迹记为，它也是 $H|_{\mathbf{1}^\perp}$ 的经验谱测度的斯蒂尔切斯变换，即

$$m(z) := \frac{1}{N} \sum_i G_{ii}(z) = \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{\lambda_i - z}. \tag{2.3}$$

我们将 $m(z)$ 简称为斯蒂尔切斯变换。我们的目标是用 $m_d(z)$ 近似 $m(z)$，其中 $m_d(z)$ 是 Kesten–McKay定律 [38], 的斯蒂尔切斯变换

$$m_d(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho_d(x)}{x - z} \mathrm{d}x, \qquad \rho_d(x) := \left(1 + \frac{1}{d-1} - \frac{x^2}{d}\right)^{-1} \frac{\sqrt{[4 - x^2]_+}}{2\pi}.$$

Kesten–McKay定律 $\rho_d$ 是无限 $d$ 正则树在任意顶点处的谱测度（例如，参见 [2] 或 [10, 第 5] 节）。在我们的归一化下，其支撑集为 $[-2, 2]$。斯蒂尔切斯变换 $m_d(z)$ 的显式表达式为

$$m_d(z) = -\left(z + \frac{d}{d-1} m_{\mathrm{sc}}(z)\right)^{-1}, \tag{2.4}$$

其中 $m_{\mathrm{sc}}(z)$ 是 Wigner半圆定律的斯蒂尔切斯变换,

$$m_{\mathrm{sc}}(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho_{\mathrm{sc}}(x)}{x - z} \mathrm{d}x, \qquad \rho_{\mathrm{sc}}(x) := \frac{\sqrt{[4 - x^2]_+}}{2\pi}, \tag{2.5}$$

满足自洽方程

$$1 + z m_{\mathrm{sc}}(z) + m_{\mathrm{sc}}^2(z) = 0. \tag{2.6}$$

稍后我们将用到另一种表述： $m_d(z)$ 可由自洽方程刻画，该方程可通过重新整理（2.4）

$$P_\infty(z, m_d(z)) = 0, \quad P_\infty(z, w) = 1 + zw + \frac{d}{d-1} w^2 + \sum_{k \geqslant 2} \frac{(-2)^{k-1}(2k-3)!!}{k!} \frac{d}{(d-1)^k} w^{2k}. \tag{2.7}$$

我们取一个较大的常数 $\mathfrak{K} > 0$，并定义谱域

$$\mathbf{D} := \{z = E + \mathrm{i}\eta : -\mathfrak{K} \leqslant E \leqslant \mathfrak{K}, 0 < \eta \leqslant \mathfrak{K}, N\eta\sqrt{\min\{|E-2|, |E+2|\} + \eta} \geqslant N^{1/\mathfrak{K}}\}. \tag{2.8}$$

这里以及下文中，我们用记号 $z = E + \mathrm{i}\eta$ 表示$z$的实部和虚部。随机正则图的局部半圆律 [12] 表明，$m(z)$ 可由 $m_d(z)$近似到 $1/\sqrt{d}$ 的阶（除对数修正外），至少在谱测度的边缘 $\pm 2$ 之外。下一个结果由 [12, 定理 1.1]推出。注意，[12, 定理 1.1] 对远离边缘 $\Lambda_{\mathrm{d}}$ 的 $z$ 给出了更好的估计，但以下较弱的形式已足以满足我们的目的。

**定理 2.1** ( [12, 定理 1.1])。令 $z = E + \mathrm{i}\eta \in \mathbb{C}_+$，定义确定性控制参数

$$\Lambda_{\mathrm{o}}(z) := \frac{1}{\sqrt{N\eta}} + \frac{1}{\sqrt{d}} + \frac{d^{3/2}}{N}, \quad \Lambda_{\mathrm{d}}(z) := \left(\frac{1}{\sqrt{N\eta}} + \frac{1}{\sqrt{d}} + \frac{d^{3/2}}{N}\right)^{1/2}. \tag{2.9}$$

固定较小的 $\mathfrak{c} > 0$，对于 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{2/3-\mathfrak{c}}$以及所有 $z \in \mathbf{D}$取自 (2.8)

$$\max_{i \neq j} |G_{ij}(z)| \prec \Lambda_{\mathrm{o}}(z), \quad \max_{i} |G_{ii}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| \prec \Lambda_{\mathrm{d}}(z). \tag{2.10}$$

对指标 $i$取平均后，估计式（2.10）推出了关于斯蒂尔切斯变换 $m$（$z$）的一个估计。利用这一平均带来的额外抵消，本文将推导出一个更精确的估计，并据此得到关于极端特征值的结果。

**定理 2.2**。对于 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$，对 $z = E + \mathrm{i}\eta \in \mathbf{D}$ 一致，随机$d$-正则图的斯蒂尔切斯变换满足

$$|m(z) - m_d(z)| \prec \begin{cases} \frac{1}{N\eta} + \frac{d}{N\sqrt{\mathrm{dist}(z, \pm 2)}}, & -2 \leqslant E \leqslant 2, \\ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{dist}(z, \pm 2)}}\left(\frac{1}{N\eta^{1/2}} + \frac{1}{(N\eta)^2} + \frac{d}{N}\right), & |E| \geqslant 2. \end{cases} \tag{2.11}$$

我们将 *Kesten-McKay* 分布 $\rho_d$ 的经典特征值位置记为 $\gamma_2 > \gamma_3 > \cdots > \gamma_N$，

$$\frac{k - 1/2}{N - 1} = \int_{\gamma_k}^{2} \rho_d(x)\mathrm{d}x, \quad 2 \leqslant k \leqslant N.$$

于是我们得到以下刚性估计

$$|\lambda_k - \gamma_k| \prec \frac{d}{N} + \frac{1}{N^{2/3}\min\{k-1, N+1-k\}^{1/3}}, \quad 2 \leqslant k \leqslant N. \tag{2.12}$$

**注 2.3**。需要指出，刚性估计 （2.12）由于额外项 $d/N$的存在，对于谱主体特征值并非尖锐。然而，由于 $d/N \ll 1/N^{2/3}$，该估计对于极端特征值是尖锐的。

# 3 简单切换

我们的分析运用了正则图的切换，也在一定程度上利用了顶点置换下的不变性。我们采用了与以下文献中所提出的方法相关的思路：[7, 12], 我们也参考该文献了解切换的其他应用。

## 3.1 切换

与 [7, 12], 中一样，我们定义有符号邻接矩阵

$$(\Delta_{ij})_{ab} := \delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ib}\delta_{ja}, \qquad \xi_{ij}^{k\ell} := \Delta_{ij} + \Delta_{k\ell} - \Delta_{ik} - \Delta_{j\ell}, \tag{3.1}$$

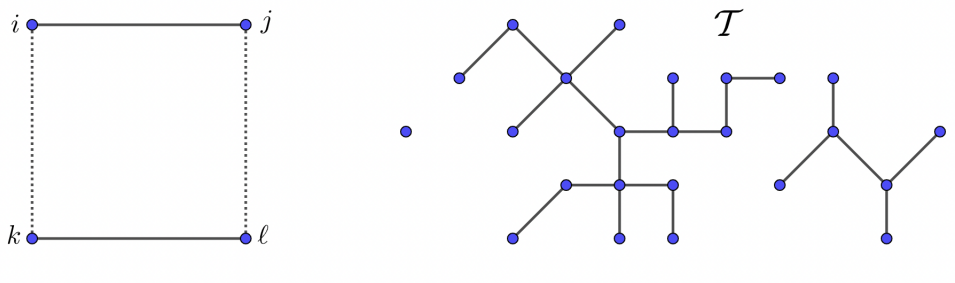



图 1：左图：将实线边替换为虚线边，即得到一个简单切换。右图：森林 $\mathcal{T}$ 的一个示例，它由三个连通分支组成，即 $\theta(\mathcal{T}) = 3$。

对应于边的切换 $ij$ 和 $k\ell$；见图 1。对于任意指标 $i$，$j$，$k$，$\ell$，我们将边 $ij$ 和 $k\ell$可切换 (即边 $ij$ 和 $k\ell$ 均存在，且再次切换后仍得到一个简单正则图 ) 这一条件的示性函数记作

$$\chi_{ij}^{k\ell}(A) = A_{ij}A_{k\ell}(1 - A_{ik})(1 - A_{jl}). \tag{3.2}$$

本文将始终使用以下森林概念。

**定义 3.1**。（森林）。森林是指由树构成的并图有限简单图：$\mathcal{T} = (\mathbf{i}(\mathcal{T})\ E(\mathcal{T})) = (\mathbf{i}\ E)$。其中 $\mathbf{i} \in [\![N]\!]$ 是由互不相同的顶点构成的有限集合，$E$ 是边的有限集合，且每条边 $e \in E$ 连接 $\{i_e, i'_e\} \in \mathbf{i}$。我们将 $\mathcal{T}$的连通分支数记为 $\theta(\mathcal{T})$。注意，$\mathcal{T}$ 可以包含单点。示例见图 *1* 。

给定一个森林 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$，我们记

$$A_{\mathcal{T}} = \prod_{e\in E} A_{i_e i'_e},$$

如果 $\mathcal{T}$ 仅由单点组成，即 $E = \emptyset$，那么我们就定义 $A_{\mathcal{T}} = 1$。本节余下部分中，我们使用切换来估计以下形式的项

$$\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}F(A)\right], \quad \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{ik}F(A)\right], \quad \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{jk}F(A)\right], \quad i \in \mathbf{i}, j, k \notin \mathbf{i}$$

其中，$F$ 是依赖于随机图 $A$的任意函数。（稍后，我们将令 $F$ 为格林函数项$\{G_{ij}\}_{i,\ j\in[\![N]\!]}$ 以及斯蒂尔切斯变换 $m$的多项式。）

**命题 3.2**。给定一个森林 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$，以及一个依赖于随机图 $A$的函数 $F$。对于每条边 $e \in E$，我们关联另一条边 $\{j_e, j'_e\} \in [\![N]\!]$，并记作$\mathbf{j} = \{j_e, j'_e\}_{e\in E}$。若指标$\mathbf{i}$和$\mathbf{j}$ 互不相同，则有如下恒等式

$$\mathbb{E}\left[F(A)\prod_{e\in E}\chi_{i_e i'_e}^{j_e j'_e}(A)\right] = \mathbb{E}\left[F\left(A + \sum_{e\in E}\xi_{i_e i'_e}^{j_e j'_e}\right)\prod_{e\in E}\chi_{i'_e j_e}^{i'_e j'_e}(A)\right]. \tag{3.3}$$

若指标 $i \in \mathbf{i}$ 与指标$\mathbf{i}jkm\ell$ 互不相同，则有如下恒等式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}\chi_{ik}^{m\ell}(A)F(A)\right] &= \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}\chi_{im}^{k\ell}(A)F(A + \xi_{ik}^{m\ell})\right],\\ \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}\chi_{jk}^{m\ell}(A)F(A)\right] &= \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}\chi_{jm}^{k\ell}(A)F(A + \xi_{jk}^{m\ell})\right],\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中示性函数 $\chi$ 的定义见 (3.2)。

证明。 定义图的集合

$$\mathcal{G}_1 = \left\{ A : \prod_{e\in E} \chi^{j_e j'_e}_{i_e i'_e}(A) = 1 \right\}, \quad \mathcal{G}_2 = \left\{ A : \prod_{e\in E} \chi^{i'_e j'_e}_{i_e j_e}(A) = 1 \right\}.$$

根据我们的假设，指标 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 彼此不同，因此 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$ 之间存在一个简单的双射，即

$$A \in \mathcal{G}_2 \mapsto A + \sum_{e\in E} \xi^{j_e j'_e}_{i_e i'_e} \in \mathcal{G}_1. \tag{3.5}$$

Since $\mathbb{P}$ 是定义在 $d$-正则图上的均匀概率测度，该断言由（3.5 ）.

（3.4）中的两个恒等式可以用相同的方法证明，我们只给出第一个恒等式的证明。我们定义图集 $\mathcal{G}_1 = \{A: \quad A_{\mathcal{T}} \chi^{m\ell}_{ik}\ (A) \quad = 1\}$ 和 $\mathcal{G}_2 = \{A: \quad A_{\mathcal{T}} \chi^{k\ell}_{im}\ (A) \quad = 1\}$ .根据我们的假设，指标 $\mathbf{i}km\ell$ 互不相同，因此 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$之间存在一个简单的双射： $A \in \mathcal{G}_2 \mapsto A + \xi^{m\ell}_{ik} \in \mathcal{G}_1$，断言得证。

□

## 3.2 离散分部积分

我们定义由简单切换诱导的离散导数算子，这些算子将在本文的其余部分使用。

**定义 3.3**。 对于任意对称矩阵 $\xi = \sum_{a=1}^{b} \xi^{k_a \ell_a}_{i_a j_a}$ （回顾 (3.1)中的内容），对于某个固定的 $b \in \mathbb{N}$，我们将顶点集记为 $\boldsymbol{V}(\xi) = \cup_{a=1}^{b} \{i_a, j_a, k_a, \ell_a\}$ 并将离散和连续导数算子定义为

$$D_\xi F(A) := F(A+\xi) - F(A), \quad \partial_\xi F(A) := \sqrt{d-1}\, \partial_t F(A + t\xi)|_{t=0}\,. \tag{3.6}$$

对于矩阵序列 $\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_c$，我们记 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_c)$ 和

$$\partial_{\boldsymbol{\xi}} = \partial_{\xi_1} \partial_{\xi_2} \cdots \partial_{\xi_c}, \quad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\xi}) = \cup_{a=1}^{c} \boldsymbol{V}(\xi_a), \quad |\boldsymbol{\xi}| = c. \tag{3.7}$$

注意，操作 $D_\xi$ 会同时切换 $\xi$ 中的所有边。连续导数 $\partial_\xi$ 是缩放变量 $H = A/\sqrt{d-1}$ 在 $\xi$ 方向上的方向导数。对于离散导数算子$D_\xi$，我们有离散乘积法则和交换性质

$$D_\xi(FG) = (D_\xi F)G + F(D_\xi G) + (D_\xi F)(D_\xi G), \quad D_{\xi_1} D_{\xi_2} F = D_{\xi_2} D_{\xi_1} F, \tag{3.8}$$

如果 $F$ 连续可微至 $\mathfrak{b}$ 阶，带余项的泰勒展开给出

$$D_\xi F(A) = \sum_{n=1}^{\mathfrak{b}-1} \frac{\partial^n_\xi F(A)}{n!(d-1)^{n/2}} + \frac{\partial^{\mathfrak{b}}_\xi F(A+\theta\xi)}{\mathfrak{b}!(d-1)^{\mathfrak{b}/2}}, \tag{3.9}$$

对于某个 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$。
在（3.3）中的切换过程中，示性函数 $\prod_{e\in E} \chi^{i'_e j'_e}_{i_e j_e}\ (A)$ 确保矩阵 $A + \sum_{e\in E} \xi^{j_e j'_e}_{i_e i'_e}$ 再次成为简单图的邻接矩阵。请注意，如果没有这个示性函数，例如在下面的推论以及整个证明的其他地方， $A + \sum_{e\in E} \xi^{j_e j'_e}_{i_e i'_e}$ 不一定是简单图的邻接矩阵，而只是一个实对称矩阵。不过，这并不影响我们的论证；这些论证应被理解为针对一般对称矩阵，而不是简单图的邻接矩阵进行的。

**命题 3.4**。 给定一个森林 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$，对于每条边 $e \in E$，我们关联另一条边 $\{j_e, j'_e\} \in [\![N]\!]$，并记为 $\mathbf{j} = \{j_e, j'_e\}_{e\in E}$。对于任意依赖于顶点 $\mathbf{i}$ 和邻接矩阵 $A$的函数 $F_{\mathbf{i}}(A)$，我们记作

$$\mathcal{C}(F, A) := \max_{\mathbf{ij}} \left( |F_{\mathbf{i}}(A)| + \left| F_{\mathbf{i}} \left( A + \sum_{e\in E} \xi^{j_e j'_e}_{i_e i'_e} \right) \right| \right). \tag{3.10}$$

于是我们有离散分部求和公式（回顾求和 $\sum^*$ 来自 (1.2)）

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}F_{\mathbf{i}}(A)\right]&=\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[F_{\mathbf{i}}(A)\right]\\&+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{\mathbf{ij}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^{+}}D_{\mathcal{T}^{+}}F_{\mathbf{i}}(A)\right]+\mathrm{O}\left(\frac{d\mathbb{E}[\mathcal{C}(F,A)]}{N}\right),\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中 $\mathcal{T}^{+}=(\mathbf{ij}\ E^{+})$ 满足 $E^{+}=\cup_{e\in E}\{i_e,j_e\}\cup\{i'_e,j'_e\}$, $\xi=\sum_{e\in E}\xi_{i_ei'_e}^{j_ej'_e}$ 以及 $D_{\mathcal{T}^{+}}=D_{\xi}$ 由 (3.6)。

请注意，(3.11) 的右侧可以解释为切换图上的期望，因为 $A_{\mathcal{T}^{+}}$ 是示性函数，表示图 $A$ 具有边 $E^{+}=\cup_{e\in E}\{i_e,j_e\}\cup\{i'_e,j'_e\}$。矩阵$\xi=\sum_{e\in E}\xi_{i_ei'_e}^{j_ej'_e}$ 是未切换图与切换图之间边差异的示性函数。

**命题 3.5**。 给定一个森林 $\mathcal{T}=(\mathbf{i}\ E)$，并固定一个指标 $i\in\mathbf{i}$。对于任意依赖于顶点 $\mathbf{i}k$ 和邻接矩阵 $A$的函数 $F_{\mathbf{i}k}(A)$，我们有如下分部积分公式

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|+1}}\sum_{\mathbf{i}k}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{ik}F_{\mathbf{i}k}(A)\right]&=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}k}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}F_{\mathbf{i}k}(A)\right]\\&+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{\mathbf{i}k\ell m}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^{+}}D_{\mathcal{T}^{+}}F_{\mathbf{i}k}(A)\right]+\mathrm{O}\left(\frac{d\mathbb{E}[\mathcal{C}(F,A)]}{N}\right),\end{aligned}\tag{3.12}$$

其中 $\mathcal{T}^{+}=(ik m\ell, E^{+})$ 与 $E^{+}=E\cup\{i,m\}\cup\{k,\ell\}$, $\xi=\xi_{ik}^{m\ell}$, $\mathcal{C}(F,A):=\max_{\mathbf{i}km\ell}(|F_{\mathbf{i}k}(A)|+|F_{\mathbf{i}k}(A+\xi_{ik}^{m\ell})|)$, 以及由 (3.6) 得到的 $D_{\mathcal{T}^{+}}=D_{\xi}$。
对于任意依赖于顶点 $(A)$ $\mathbf{i}jk$ 和邻接矩阵 $A$ 的函数，我们有分部积分公式

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|+1}}\sum_{\mathbf{i}jk}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{jk}F_{\mathbf{i}jk}(A)\right]&=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+2}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}jk}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}F_{\mathbf{i}jk}(A)\right]\\&+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{\mathbf{i}jk\ell m}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^{+}}D_{\mathcal{T}^{+}}F_{\mathbf{i}jk}(A)\right]+\mathrm{O}\left(\frac{d\mathbb{E}[\mathcal{C}(F,A)]}{N}\right),\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中 $\mathcal{T}^{+}=(ijkm\ell, E^{+})$ 与 $E^{+}=E\cup\{j,m\}\cup\{k,\ell\}$, $\xi=\xi_{jk}^{m\ell}$，以及 $\mathcal{C}(F,A):=\max_{\mathbf{i}km\ell}(|F_{\mathbf{i}jk}(A)|+|F_{\mathbf{i}jk}(A+\xi_{jk}^{m\ell})|)$，还有由 (3.6) 得到的 $D_{\mathcal{T}^{+}}=D_{\xi}$。这里，$i$ 中的顶点完全不参与切换。

**注记 3.6**。 图 $\mathcal{T}^{+}$ 是在命题 3.4 中构造的，其以下性质将在本文后文中派上用场。

1. 图 $\mathcal{T}^{+}$ 由 $|\mathbf{i}|$ 个连通分支组成，即 $\theta(\mathcal{T}^{+})=|\mathbf{i}|$。每个顶点 $i\in\mathbf{i}$ 对应于 $\mathcal{T}^{+}$中的一个连通分支。如果顶点 $i$ 在 $\mathcal{T}$中的度为 $\deg_{\mathcal{T}}(i)$，则对应的分支是一棵以 $i$ 为根顶点的二层树，并具有 $\deg_{\mathcal{T}}(i)$ 个子顶点。

2. 对于任意两个不同的顶点 $i$、$i'\in\mathbf{i}$， $i$ 和 $i'$ 位于 $\mathcal{T}^{+}$ 的不同连通分支中。

**例 3.7**。 取 $\mathcal{T}=\{\mathbf{i}=\{i,j,k\},\ E=\{(i,\ j)、(j,\ k)\}\}$ 作为一棵森林，它是一条长度为 2 的路径（见图 2）。它只有一个连通分支，即 $\theta(\mathcal{T})=1$。 $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}=A_{ij}A_{jk}$。求和

$$\sum_{ijk}^{*}A_{\mathcal{T}}=\sum_{ijk\,distinct}A_{ij}A_{jk},$$

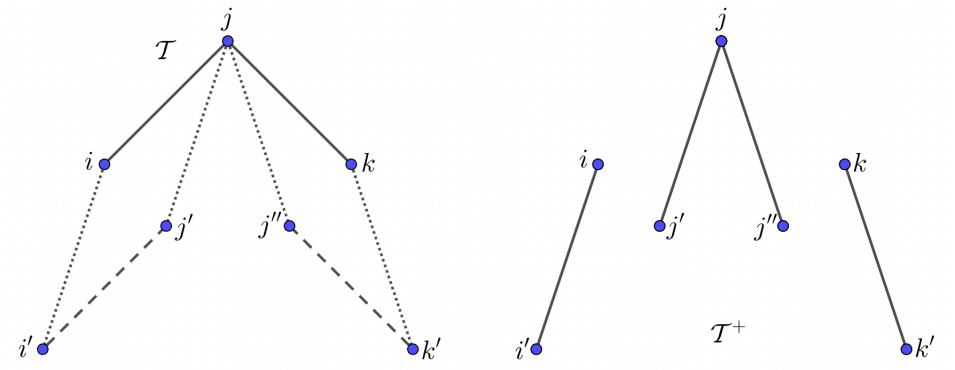



图 2：取 $\mathcal{T} = \{\mathbf{i} = \{i, j, k\},\ E = \{(i,\ j)、(j,\ k)\}\}$ 作为一棵森林，则命题 3.4 中构造的 $\mathcal{T}^+$ 为 $\mathcal{T}^+ = \{\mathbf{i}^+ = (i,\ i',\ j,\ j',\ j'',\ k,\ k')\ E^+ = \{(i,\ i')、(j,\ j')、(j,\ j'')、(k,\ k')\}\}$。

它统计了将 $\mathcal{T}$ 嵌入到 $\mathcal{G}$ 中的方式数，其中 $\mathcal{T}$ 的顶点被映射到 $\mathcal{G}$ 的互不相同的顶点$[\![N]\!]$。命题 *3.4* 中构造的森林 $\mathcal{T}^+$ 为 $\mathcal{T}^+ = \{i^+ = (i, i', j, j', j'', k, k')\ E^+ = \{(i, i'), (j, j'), (j, j''), (k, k')\}\}$，它有三个连通分支；并且 $i$、$j$、$k$ 分别属于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支。

**命题 3.8**。对于任意图 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$，若它是森林，则有

$$\sum_{\mathbf{i}} A_{\mathcal{T}} = N^{\theta(\mathcal{T})} d^{|E|}, \tag{3.14}$$

*and*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})} d^{|E|}} \sum_{\mathbf{i}}^{*} A_{\mathcal{T}} = c_{\mathcal{T}} + \mathrm{O}_{\prec}\left(\frac{d}{N}\right), \\ &c_{\mathcal{T}} = \frac{\prod_{i \in \mathbf{i}: \deg(i) \geqslant 1} (d-1)(d-2)\cdots(d-\deg(i)+1)}{d^{|E|-\theta(\mathcal{T})}} \asymp 1. \end{aligned} \tag{3.15}$$

根据定义，$c_{\mathcal{T}}$ 的分子等于 1，当 $\deg(i) = 1$。若 $\mathcal{T}$ 恰好包含一个圈，则有

$$\sum_{\mathbf{i}}^{*} A_{\mathcal{T}} \prec N^{\theta(\mathcal{T})-1} d^{|E|}. \tag{3.16}$$

**注 3.9**。给定森林 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$。$\mathcal{T}^+ = (\mathbf{i}^+,\ E^+)$ 如命题 *3.4* 或 *3.5*中所构造。由于 $\mathcal{T}^+$ 和 $\mathcal{T}$具有相同的度分布（度为一的顶点除外），我们有 $c_{\mathcal{T}} = c_{\mathcal{T}^+}$ 如式 (3.15)所示。

命题的证明 *3.4*。由于 $A$ 等于 $d$，引入新的指标

$\{j_e, j'_e\}_{e\in E}$，我们将式（3.11）的左侧改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}F_{\mathbf{i}}\right]=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+|E|}d^{2|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\sum_{\mathbf{j}}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}\prod_{e\in E}A_{j_ej'_e}F_{\mathbf{i}}\right]\\
&=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+|E|}d^{2|E|}}\left(\sum_{\mathbf{ij}}^{*}\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E}\chi_{i_ei'_e}^{j_ej'_e}(A)F_{\mathbf{i}}\right]+\sum_{\mathbf{i}}^{*}\sum_{\substack{\mathbf{j}:\mathbf{ij}\\ \text{not distinct}}}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}\prod_{e\in E}A_{j_ej'_e}F_{\mathbf{i}}\right]\right.\\
&\left.+\sum_{\mathbf{ij}}^{*}\mathbb{E}\left[\left(A_{\mathcal{T}}\prod_{e\in E}A_{j_ej'_e}-\prod_{e\in E}\chi_{i_ei'_e}^{j_ej'_e}(A)\right)F_{\mathbf{i}}\right]\right).
\end{aligned}\tag{3.17}$$

右端的第二项在（3.17）中可估计为

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+|E|}d^{2|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\sum_{\substack{\mathbf{j}:\mathbf{ij}\\ \text{not distinct}}}A_{\mathcal{T}}\prod_{e\in E}A_{j_ej'_e}F_{\mathbf{i}}(A)\right|\\
&\leqslant\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+|E|}d^{2|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\sum_{\substack{\mathbf{j}:\mathbf{ij}\\ \text{not distinct}}}A_{\mathcal{T}}\prod_{e\in E}A_{j_ej'_e}\mathcal{C}(F,A)\leqslant\frac{1}{N}\mathcal{C}(F,A),
\end{aligned}\tag{3.18}$$

其中在最后一行，$\mathbf{ij}$ 互不相同；要么某些 $j_e=j'_e$ 然后 $A_{j_ej'_e}=0$，要么 $\mathcal{T}\cup_{e\in E}\{j_e,j'_e\}$ 的连通分支数小于 $\theta(\mathcal{T})+|E|$。由（3.14），在这种情况下，对 $\mathbf{ij}$ 求和有界于 $O(N^{\theta(\mathcal{T})+|E|-1}d^{2|E|})$。类似地，利用 $|A_{ij}A_{k\ell}-\chi_{ij}^{k\ell}(A)|=A_{ij}A_{k\ell}[A_{ik}+A_{jl}-A_{ik}A_{jl}]\leqslant A_{ij}A_{k\ell}[A_{ik}+A_{jl}]$，我们也有

$$\left|\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+|E|}d^{2|E|}}\sum_{\mathbf{ij}}^{*}\left[\left(A_{\mathcal{T}}\prod_{e\in E}A_{j_ej'_e}-\prod_{e\in E}\chi_{i_ei'_e}^{j_ej'_e}(A)\right)F_{\mathbf{i}}\right]\right|\leqslant\frac{d}{N}\mathcal{C}(F,A).\tag{3.19}$$

将估计式（3.18）和（3.19）代入（3.17），得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}F_{\mathbf{i}}\right]=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+|E|}d^{2|E|}}\sum_{\mathbf{ij}}^{*}\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E}\chi_{i_ei'_e}^{j_ej'_e}(A)F_{\mathbf{i}}(A)\right]+O\left(\frac{d\mathbb{E}[\mathcal{C}(F,A)]}{N}\right)\\
&=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+|E|}d^{2|E|}}\sum_{\mathbf{ij}}^{*}\mathbb{E}\left[F\left(A+\sum_{e\in E}\xi_{i_ei'_e}^{j_ej'_e}\right)\prod_{e\in E}\chi_{i_ej_e}^{i'_ej'_e}(A)\right]+O\left(\frac{d\mathbb{E}[\mathcal{C}(F,A)]}{N}\right),
\end{aligned}\tag{3.20}$$

最后一行用到了命题 3.2 。由命题3.2 以及与上述类似的估计，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[F_{\mathbf{i}}\right]=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+|E|}d^{2|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\sum_{\mathbf{j}}\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E}A_{i_ej_e}A_{i'_ej'_e}F_{\mathbf{i}}\right]\\
&=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+|E|}d^{2|E|}}\sum_{\mathbf{ij}}^{*}\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E}\chi_{i_ej_e}^{i'_ej'_e}(A)F_{\mathbf{i}}(A)\right]+O\left(\frac{d\mathbb{E}[\mathcal{C}(F,A)]}{N}\right),
\end{aligned}\tag{3.21}$$

其中，在第一个等式中，我们利用了 (3.14)：$\mathcal{T}$是森林，且 $\theta(\mathcal{T})=|\mathbf{i}|-|E|$。新图$\mathcal{T}^+=(\mathbf{ij}\ E^+)$ 在 $E^+=\cup_{e\in E}\{i_e,j_e\}\cup\{i'_e,j'_e\}$ 下有 $\theta(\mathcal{T}^+)=|\mathbf{i}|=|E|+\theta(\mathcal{T})$ 个连通分支，并有 $2|E|$ 条边。结合 (3.20) 和 (3.21)，并将 $\prod_{e\in E}\chi_{i_ej_e}^{i'_ej'_e}(A)$ 替换为 $\prod_{e\in E}A_{i_ej_e}A_{i'_ej'_e}=A_{\mathcal{T}^+}$，即可得到该断言。□

命题的证明 3.5。 两个估计式 (3.12) 和 (3.13) 可以用与命题3.4相同的方法证明，即利用 (3.4) 进行离散分部积分。证明从略。 □

命题 3.8 的证明。 在 $\mathcal{T}$ 是一棵树的特殊情形下，对于求和 $\sum_{\mathbf{i}} A_{\mathcal{T}}$，我们可以依次对叶顶点求和。每个叶顶点贡献一个因子 $d$，而对根顶点求和则贡献一个因子 $N$。因此$\sum_{\mathbf{i}} A_{\mathcal{T}} = Nd^{|\mathbf{i}|-1}$。在一般情形下，当 $\mathcal{T}$ 是一片森林时，我们可以对其每个连通分支分别求和。共有 $\theta(\mathcal{T})$ 个连通分支，且 $|E| = |\mathbf{i}| - \theta(\mathcal{T})$，于是得到（3.14）。

我们假设 $\mathcal{T}$ 恰好包含一个圈 $i_1 i_2 \cdots i_\ell$，其长度为 $\ell$，然后可以像（3.14）中那样依次对其他顶点求和

$$\sum_{\mathbf{i}}^{*} A_{\mathcal{T}} \leqslant N^{\theta(\mathcal{T})-1} d^{|E|-\ell} \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_\ell}^{*} A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \cdots A_{i_\ell i_1} = N^{\theta(\mathcal{T})-1} d^{|E|-\ell} Z, \tag{3.22}$$

其中 $Z$ 表示长度为 $\ell$ 的圈的数量。为了给（3.22）右侧的量取上界，我们回顾 [51, 定理 3]：对于任意有限子图 $\mathcal{J}$，若其有 $|\mathcal{J}|$ 条边，

$$\mathbb{P}(\mathcal{J} \subset \mathcal{G}) = (1 + \mathrm{o}(1)) \left(\frac{d}{n}\right)^{|\mathcal{J}|}. \tag{3.23}$$

根据（3.23），对于任意 $k \geqslant 1$，$\mathbb{E}[Z^k] \leqslant C_k d^{k\ell}$。由马尔可夫不等式可得

$$\mathbb{P}(Z \geqslant d^\ell N^\varepsilon) \leqslant \frac{C_k}{N^{\varepsilon k}}.$$

<escape>我们得出 $Z \prec d^\ell$，并且通过结合（3.16）和（3.22）即可得到该断言。</escape>

我们通过归纳法证明（3.15）。如果 $\mathcal{T}$由单点组成，即 $E = \emptyset$，那么 $\sum_{\mathbf{i}}^{*} A_{\mathcal{T}}/N^{\theta(\mathcal{T})} = c_{\mathcal{T}} = 1$。否则，存在某个顶点 $i$，使得除至多一个邻点外，其所有邻点均为叶顶点。我们可以按以下方式分解 $\mathcal{T}$：$\mathcal{T}' = (\mathbf{i}', E')$，$i \in \mathbf{i}'$，其中 $\deg_{\mathcal{T}'}(i) \leqslant 1$，且 $\mathbf{i} = \mathbf{i}'\mathbf{j}, \mathbf{j} = \{j_1, j_2, \cdots, j_b\}$, $E = E' \cup \{i, j_1\} \cup \cdots \{i, j_b\}$。

$$\sum_{\mathbf{i}}^{*} A_{\mathcal{T}} = \sum_{\mathbf{i}'}^{*} A_{\mathcal{T}'} \sum_{\mathbf{j}:\mathbf{i}'\mathbf{j} \text{ distinct}}^{*} A_{ij_1} A_{ij_2} \cdots A_{ij_b}. \tag{3.24}$$

$\deg_{\mathcal{T}'}(i) = 0$ 和 $\deg_{\mathcal{T}'}(i) = 1$ 这两种情况相似。我们只研究 $\deg_{\mathcal{T}'}(i) = 1$的情况。设 $A_{ii'} = 1$ 满足 $i' \in \mathbf{i}'$，则 $\deg_{\mathcal{T}}(i) = b + 1$，根据 $c_{\mathcal{T}}$在（3.15）中的定义可得

$$c_{\mathcal{T}} = c_{\mathcal{T}'} \frac{(d-1)(d-2)\cdots(d-b)}{d^b}. \tag{3.25}$$

我们将顶点 $i$ 在 $\mathcal{G}$中的邻点枚举为 $i'$、$k_1$、$k_2$、$\cdots$、$k_{d-1}$。如果 $\{k_1, k_2, \cdots, k_{d-1}\} \cap \mathbf{i}' = \emptyset$，那么 $j_1$ $j_2$ $\cdots$ $j_b$ $k_1$ $k_2$ $\cdots$ $k_{d-1}$ $\sum^{*}$， $A_{ij_1} A_{ij_2} \cdots A_{ij_b} = d-1$ $d-$、、、可以取、、、中的任意 $2, \cdots d-b$ 值，并且 $\mathbf{j}$: $\mathbf{ij}$ 各不相同（）（）（）。这对应于下面分解中的第一项。

$$\sum_{\mathbf{i}}^{*} A_{\mathcal{T}} = \sum_{\mathbf{i}}^{*} A_{\mathcal{T}} \prod_{k \in \mathbf{i}' \setminus \{i'\}} (1 - A_{ik}) + \sum_{\mathbf{i}}^{*} A_{\mathcal{T}} \left(1 - \prod_{k \in \mathbf{i}' \setminus \{i'\}} (1 - A_{ik})\right). \tag{3.26}$$

对于（3.26）右侧的第二项，我们注意到 $\left|1 - \prod_{k \in \mathbf{i}' \setminus \{i'\}} (1 - A_{ik})\right| \lesssim \sum_{k \in \mathbf{i}' \setminus \{i'\}} A_{ik}$。通过将边 $\{i, k\}$（其中 $k \in \mathbf{i}' \setminus \{i'\}$）添加到 $\mathcal{T}$中，它要么形成一个圈，要么使连通分支的数量减少 1。因此，根据上述讨论，利用（3.14）和（3.16），我们得到

$$\sum_{\mathbf{i}}^{*} A_{\mathcal{T}} = (d-1)(d-2)\cdots(d-b) \sum_{\mathbf{i}'}^{*} A_{\mathcal{T}'} + \mathrm{O}_{\prec}(N^{\theta(\mathcal{T})-1} d^{|E|+1}). \tag{3.27}$$

结论（3.15）可由结合（3.25）和（3.27）得出。

□

# 4 格林函数估计

本节汇总格林函数 $G$ 以及谱测度 $m$的斯蒂尔切斯变换的一些估计。这些估计将在本文余下部分中反复使用。我们还引入格林函数项的单项式，并记录它们的一些基本性质。

根据我们的定义，格林函数 $G = P_\perp(H-z)^{-1}P_\perp$ 是对称的，并满足（2.2）。*Ward* 恒等式指出，格林函数 $G$ 满足

$$\frac{1}{N}\sum_j |G_{ij}|^2 = \frac{\mathrm{Im}[G_{ii}]}{N\eta}, \qquad \frac{1}{N}\sum_{ij} |G_{ij}|^2 = \frac{\mathrm{Im}[m]}{\eta}; \tag{4.1}$$

我们记录以下基本结果，它由定理 2.1推出，并将在本文余下部分反复使用。

**引理 4.1**。 取足够小的 $\mathfrak{c} > 0$，设 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{2/3-\mathfrak{c}}$。以压倒性概率，对 $z \in \mathbf{D}$ 取自(2.8)时，均一致成立：

$$\max_{x\neq y} |G_{xy}(z)| \leqslant \Lambda_o(z), \quad \max_{xx} |G_{xx}(z)| \leqslant 2, \quad \max_x \mathrm{Im}[G_{xx}(z)] \prec \mathrm{Im}[m(z)], \tag{4.2}$$

其中 $\Lambda_o$ 来自定理 *2.1*。

证明。 (4.2)中的前两个关系直接由定理 2.1推出；对于最后一个关系，我们利用特征向量的非局域化 $\max_\alpha \max_i |u_\alpha(i)| \prec 1/\sqrt{N}$，然后则

$$\mathrm{Im}[G_{xx}] = \sum_{\alpha=2}^N \frac{u_\alpha(x)^2\eta}{|\lambda_\alpha - z|^2} \prec \frac{1}{N}\sum_{\alpha=2}^N \frac{\eta}{|\lambda_\alpha - z|^2} = \mathrm{Im}[m].$$

□

**注 4.2.** 我们回顾 $\xi_{ij}^{k\ell}$ 来自 (3.1)。根据引理 *4.1*，对于任意固定的 $b \in \mathbb{N}$ 利用预解式展开可知，以下结论以压倒性概率成立

$$\max_{xy} \left| G_{xy}(A+\xi) \right| \leqslant |G_{xy}(A)| + \mathrm{O}(d^{-1/2}), \quad \xi = \sum_{a=1}^b \xi_{i_a j_a}^{k_a \ell_a}.$$

在下面的命题中，我们汇总了关于斯蒂尔切斯变换的一些估计：

**命题 4.3.** 固定 $z \in$ **来自** *(*2.8*)*。对于任意导数算子 $\partial_{\xi_1}$，$\partial_{\xi_2}$，$\cdots$，$\partial_{\xi_b}$ 如定义*3.3*中所示，令 $\cup_{a=1}^b \boldsymbol{V}(\xi_a) = \{i,j\} \cup \mathbf{m}$，设 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} = \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\cdots\partial_{\xi_b}$。那么对于 $b \geqslant 1$ 导数 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} m(z)$ 可表示为以下形式的若干项之和

$$\frac{\mathrm{Im}[m]}{N\eta} \sum_{\mathbf{k}} G_{ij}^a(z) X_{\mathbf{k}\mathbf{m}i}(z) Y_{\mathbf{k}\mathbf{m}j}(z), \tag{4.3}$$

其中 $a \geqslant 0$，指标集 $\mathbf{k} = \emptyset$ 和 $|X_{k\mathbf{m}i}(z)|^2, |Y_{k\mathbf{m}j}(z)|^2 = \mathrm{O}\prec(1)$ 或者 $\mathbf{k} = \{k\}$ 和 $\sum_k |X_{k\mathbf{m}i}(z)|^2, \sum_k |Y_{k\mathbf{m}j}(z)|^2 = \mathrm{O}\prec(1)$。由此可得

$$|\partial_{\boldsymbol{\xi}} m(z)| \prec \frac{\mathrm{Im}[m(z)]}{N\eta}. \tag{4.4}$$

证明。 导数 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} m$ 是以下形式的项之和

$$\frac{1}{N}\sum_k G_{kv_1} G_{v_2 v_3} \cdots G_{v_{2b-2} v_{2b-1}} G_{v_{2b} k}, \tag{4.5}$$

其中 $v_1$，$v_2$，$\cdots$，$v_{2b} \in ij\mathbf{m}$。对于（4.5）中的格林函数项，我们可以根据其是否包含指标 $i$，$j$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G^a_{ij}\tilde{X}_{k\mathbf{m}i}\tilde{Y}_{k\mathbf{m}j},$$

其中，对每个 $G_{xy}$ 在 (4.5) 中，若指标集 $\{x, y\}$ 仅包含 $i$，则将其放入 $X_{k\mathbf{m}i}$；若仅包含 $j$，则将其放入 $Y_{k\mathbf{m}j}$；若不包含 $i$，$j$ 仍将其放入 $X_{k\mathbf{m}j}$。

分两种情况。第一种情况下，每个 $X_{k\mathbf{m}i}, Y_{k\mathbf{m}j}$ 都包含 $G_{kv_1}, G_{v_{2b}k}$ 中的一个；第二种情况下，两个 $G_{kv_1}, G_{v_{2b}k}$ 都属于 $X_{k\mathbf{m}i}$ 或 $Y_{k\mathbf{m}j}$。

在第一种情况下，设 $G_{kv_1}$ 属于 $X_{k\boldsymbol{m}i}$，利用 $|G_{v_s v_{s+1}}| \prec 1$ 引理 4.1 和 Ward 恒等式 (4.1) 可得

$$\sum_{k=1}^{N}|\tilde{X}_{k\mathbf{m}i}|^2 \prec \sum_{k=1}^{N}|G_{kv_1}|^2 \prec \frac{\mathrm{Im}[m]}{\eta}, \quad \sum_{k=1}^{N}|\tilde{Y}_{k\mathbf{m}j}|^2 \prec \sum_{k=1}^{N}|G_{kv_{2b}}|^2 \prec \frac{\mathrm{Im}[m]}{\eta}.$$

断言 (4.3可由取 $\mathbf{k} = \{k\}$, $\sqrt{\mathrm{Im}[m]/\eta}X_{\mathbf{k}\mathbf{m}i} = \widetilde{X_{k\mathbf{m}i}}$, $\sqrt{\mathrm{Im}[m]/\eta}Y_{\mathbf{k}\mathbf{m}j} = \widetilde{Y_{k\mathbf{m}j}}$ 得出。

在第二种情况下，设二者都 $G_{kv_1}$，$G_{v_{2b}k}$ 属于 $X_{k\mathbf{m}i}$。则 $Y_{k\mathbf{m}j} = Y_{\mathbf{m}j}$ 不依赖于指标$k$。此外，利用 $|G_{v_s v_{s+1}}| \prec 1$ 引理 4.1 中的结果以及 Ward 恒等式（4.1）

$$\left|\sum_{k}\tilde{X}_{k\mathbf{m}i}\right| \prec \sum_{k=1}^{N}|G_{kv_1}G_{v_{2b}k}| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}|G_{kv_1}|^2 + |G_{v_{2b}k}|^2 \prec \frac{\mathrm{Im}[m]}{\eta}.$$

断言（4.3）可通过取$\mathbf{k} = \emptyset$, $(\mathrm{Im}[m]/\eta)X_{\mathbf{k}\mathbf{m}i} = \sum_k X_{k\mathbf{m}i}$，$Y_{\mathbf{k}\mathbf{m}j} = Y_{\mathbf{m}j}$。这就完成了（4.3）的证明。（4.4）中的界由（4.3）的分解得到。

□

我们的证明中的一个核心对象是以下格林函数矩阵元多项式的概念。

**定义 4.4**。设 $R = R(\{x_{st}\}_{s,t=1}^{r}, y)$ 是抽象变量 $r^2+1$ 的$\{x_{st}\}_{s,t=1}^{r}, y$中的一个单项式。我们用 $\deg(R)$表示其度。对于 $\mathbf{i} \in [\![N]\!]^r$，我们定义其在格林函数和斯蒂尔切斯变换上的取值如下：

$$R_{\mathbf{i}} = R(\{G_{i_s i_t}\}_{s,t=1}^{r}, m),$$

并称 $R_{\mathbf{i}}$ 是格林函数项中的一个单项式$\{G_{i_s i_t}\}_{s,\ t=1}^{r}$。我们将 $R_{\mathbf{i}}$ 中非对角元的个数记为 $\chi(R_{\mathbf{i}})$。

# 5 自洽方程

本节构造斯蒂尔切斯变换 $m$ 的自洽方程，并证明该自洽方程以压倒性概率成立。

**命题 5.1**。假设 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$。存在一个有限度多项式，它依赖于 $d$，但不依赖于 $N$，

$$P(z,u) = 1 + zu + u^2 + Q(u), \tag{5.1}$$

其中

$$Q(u) = a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + \cdots + a_nu^n, \tag{5.2}$$

是一个有界系数多项式 $a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n = \mathrm{O}(1/\sqrt{d})$ 满足，对于任意 $z \in \mathbf{D}$ 取自(2.8)

$$\mathbb{E}[|P(z, m(z))|^{2q}] \prec \mathbb{E}[\Phi_q(z)]. \tag{5.3}$$

其中，控制参数 $\Phi_q(z)$ 定义为

$$\begin{aligned}\Phi_q(z) :=& \frac{d^{3/2}\Lambda_o(z)}{N}|P(z, m(z))|^{2q-1} + \sum_{s=1}^{2q}\left(\frac{\mathrm{Im}[m(z)]}{N\eta}\right)^s |P(z, m(z))|^{2q-s} \\ &+ \sum_{s=1}^{2q-1}\left(\frac{1}{N\eta} + \frac{d^{3/2}\Lambda_o(z)}{N}\right)\left(\frac{\mathrm{Im}[m(z)]|\partial_2 P(z, m(z))|}{N\eta}\right)^s |P(z, m(z))|^{2q-s-1}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

我们将证明，估计式 (5.3) 源于随机正则图的切换不变性。它可视为随机正则图系综的近似 施温格–戴森方程；在统计力学和场论中，这类方程通常通过分部积分推导。在本文其余部分，我们记 $\partial_2 P(z, w) := \partial_w P(z, w)$.

从 (2.1) 出发，并注意到 $A_{ii} = 0$ 可得

$$1 + zm = \sum_{ij}^{*} \frac{A_{ij}G_{ij}}{N(d-1)^{1/2}} + \frac{1}{N}.$$

将等式两边乘以 $P^{q-1}\bar{P}^q$，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(1+zm)P^{q-1}\bar{P}^q] &= \frac{1}{N(d-1)^{1/2}}\sum_{ij}^{*}\mathbb{E}[A_{ij}(G_{ij}P^{q-1}\bar{P}^q)] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]) \\ &= \frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_0)}d^{|E_0|}}\sum_{ij}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}_0}R_{\mathbf{i}_0}P^{q-1}\bar{P}^q] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]),\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 $\mathcal{T}_0 = (\mathbf{i}_0 = ij, E_0 = \{i, j\})$、$A_{\mathcal{T}_0} = A_{ij}$ 和 $R_{\mathbf{i}_0} = G_{ij}$。

在第 5.1 节和 5.2 节中，我们将证明可以利用命题 3.4 和 3.5 进一步展开 (5.5)。这样，从图 $\mathcal{T}_0 = (\mathbf{i}_0 = ij, E_0 = \{i, j\})$ 出发，我们将得到一列图

$$\mathcal{T}_0 = (\mathbf{i}_0, E_0), \quad \mathcal{T}_1 = (\mathbf{i}_1, E_1), \quad \mathcal{T}_2 = (\mathbf{i}_2, E_2), \quad \cdots,$$

构造图 $\mathcal{T}_r$ 后，我们还需要进一步利用命题 3.4和3.5，按以下形式展开项

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_r)}d^{|E_r|}}\sum_{\mathbf{i}_r}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_r}R_{\mathbf{i}_r}U_{\mathbf{i}_r}\right],$$

其中 $R_{\mathbf{i}_r}$ 是定义4.4中所述的格林函数项的单项式，而 $U_{\mathbf{i}_r}$ 具有以下形式。

**定义 5.2。** 给定一个指标集 $\mathbf{i}$，我们将使用 $U_{\mathbf{i}} = U_{\mathbf{i}}(m,\ \bar{m})$ 表示以下形式的表达式：对于固定的 $b \in \mathbb{N}$ 和离散导数算子 $D_{\xi_1},\ D_{\xi_2},\ \cdots,\ D_{\xi_b}$ 如定义 3.3中所述，其中 $\boldsymbol{V}(\xi_1)\ \boldsymbol{V}(\xi_2)\ \cdots,\ \boldsymbol{V}(\xi_b) \subset \mathbf{i}$。

$$\left(\prod_{a=1}^{b}(1+D_{\xi_a})^{e_a}(\sqrt{d-1}D_{\xi_a})^{1-e_a}\right)P^{q-1}\bar{P}^q, \quad e_1, e_2, \cdots, e_b \in \{0, 1\}. \tag{5.6}$$

如果 $b = 0$，则上述表达式简化为 $P^{q-1}\bar{P}^q$。

我们指出，根据泰勒展开（3.9），忽略可忽略误差后，$U_{\mathbf{i}}$ 是如下形式的项的有限线性组合：$\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q)$。

## 5.1 命题的证明5.1

我们回顾上一节的讨论：我们需要估计以下形式的项：

**定义 5.3**。 对于 $\mathfrak{h}, \mathfrak{o} \in \mathbb{N}$，我们用符号 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$ 表示某个 $\mathfrak{h} \geqslant 0$ 对应形式的项的有限线性组合，

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{b}/2}} \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})} d^{|E|}} \sum_{\mathbf{i}}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}} R_{\mathbf{i}} U_{\mathbf{i}}\right], \tag{5.7}$$

其中，森林 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$ 如定义 *3.1* 所述， $R_{\mathbf{i}}$ 是定义 *4.4* 中所述的格林函数项的单项式，满足 $\chi(R_{\mathbf{i}}) = \mathfrak{o}$ （回忆一下， $\chi(R_{\mathbf{i}})$ 计数非对角格林函数条目的数量），且 $U_{\mathbf{i}}$ 如 (5.6) 所述。

在接下来的两个命题中，我们汇总了一些有用的估计。其证明见第5.2节和5.3节。

**命题 5.4**。 我们采用命题 *5.1*中的假设，并回顾多项式 $P$，它来自 (5.1)。对于 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} = \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}, \cdots \partial_{\xi_b}$ 如定义 (3.3)中所示，则对于 $b \geqslant 1$

$$\partial_{\boldsymbol{\xi}} P(z,m) = \partial_{\boldsymbol{\xi}} m \partial_2 P(z,m) + \mathcal{O}_{\prec}\left(\frac{\operatorname{Im}[m]^2}{(N\eta)^2}\right) = \mathrm{O}_{\prec}\left(\frac{\operatorname{Im}[m]|\partial_2 P(z,m)|}{N\eta} + \frac{\operatorname{Im}[m]^2}{(N\eta)^2}\right), \tag{5.8}$$

*and*

$$\left(\frac{d^{3/2}\Lambda_o}{N} + \frac{1}{N\eta}\right) \partial_{\boldsymbol{\xi}}\left(P^{q-1}(z,m)\bar{P}^{q}(z,m)\right) \prec \Phi_q. \tag{5.9}$$

因此，若 $R_{\mathbf{i}}, U_{\mathbf{i}}$ 如定义 *4.4* 和 *5.2*所述，则若 $R_{\mathbf{i}}$ 至少包含一个非对角格林函数项

$$\left(\frac{d^{3/2}\Lambda_o}{N} + \frac{\operatorname{Im}[m]}{N\eta}\right) \left| R_{\mathbf{i}} U_{\mathbf{i}} \left(A + \sum_{a=1}^{b} \xi_a\right)\right| \lesssim \Phi_q, \tag{5.10}$$

且当 $\mathfrak{o} + \mathfrak{h}$ 足够大，使得 $\Lambda_o^{\mathfrak{o}+\mathfrak{h}} \leqslant 1/N$ （回忆 $\Lambda_o$ 见 (2.9)），我们有

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}} \lesssim \mathbb{E}[\Phi_q]. \tag{5.11}$$

**命题 5.5**。 我们假设命题 *5.1*中的假设成立。给定一个森林 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$ 如定义*3.1*所述， $R_{\mathbf{i}}$ 是一个格林函数项的单项式，如定义 *4.4*所述。令 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} = \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}, \cdots \partial_{\xi_b}$ 如定义 *3.3* 所述，其中 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\xi}) \subset \mathbf{i}$。若 $R_{\mathbf{i}}$ 至少包含一个非对角格林函数项，即$R_{\mathbf{i}} = G_{ij} R'_{\mathbf{i}}$，且 $i, j \in \mathbf{i}$ 位于 $\mathcal{T}$的不同连通分支中，则

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})} d^{|E|}} \sum_{\mathbf{i}}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}} R_{\mathbf{i}} \partial_{\boldsymbol{\xi}}\left(P^{q-1}\bar{P}^{q}\right)\right] \prec \mathbb{E}[\Phi_q], \tag{5.12}$$

特别地，若取 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E = \emptyset)$，则 $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = 1$ 和

$$\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}} \sum_{\mathbf{i}}^{*} \mathbb{E}\left[R_{\mathbf{i}} \partial_{\boldsymbol{\xi}}\left(P^{q-1}\bar{P}^{q}\right)\right] \prec \mathbb{E}[\Phi_q]. \tag{5.13}$$

下面两个命题说明如何利用命题 5.7 进一步展开表达式（3.4和 3.5）。根据 $R_{\mathbf{i}}$ 是否包含非对角格林函数项，分为两种情况。证明见第 5.4 节和第 5.5节。

**命题 5.6**（非对角离散分部积分）。若 $R_{\mathbf{i}}$ 在（5.7）中至少包含一个非对角格林函数项，即 $\mathfrak{o} \geqslant 1$，则除去一个小误差项 $\mathrm{O}_{\prec}(d^{-\mathfrak{h}/2}\mathbb{E}[\Phi_q])$，（5.7）是如下形式各项的有限和

$$\frac{1}{d^{\tilde{\mathfrak{h}}/2}} \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)} d^{|E^+|}} \sum_{\mathbf{i}^+}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+} R_{\mathbf{i}^+} U_{\mathbf{i}^+}\right] \in \mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{h}},\tilde{\mathfrak{o}}}, \quad U_{\mathbf{i}^+} = (1 + D_{\mathcal{T}^+}) U_{\mathbf{i}}, \tag{5.14}$$

其中 $\mathcal{T}^+ = (\mathbf{i}^+, E^+)$，其中 $\mathbf{i}^+ = \mathbf{ij}$、$E^+ = \cup_{e \in E}\{i_e, j_e\} \cup \{i'_e, j'_e\}$、$\mathfrak{h} \geqslant \mathfrak{h} + \mathfrak{o}$。

**命题 5.7** (对角离散分部求和)。若 $R_{\mathbf{i}}$ 在 (5.7) 中是由对角格林函数条目构成的单项式，且 $m$ ($\mathfrak{o} = 0$)，并至少包含一个对角格林函数条目，例如$R_{\mathbf{i}} = G_{ii} R'_{\mathbf{i}}$，则忽略小误差项 $\mathrm{O}_{\prec}(d^{-\mathfrak{h}/2}\mathbb{E}[\Phi_q])$，(5.7) 等于

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}} \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})} d^{|E|}} \sum_{\mathbf{i}}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}} (m R'_{\mathbf{i}}) U_{\mathbf{i}}\right],$$

再加上有限个如下形式的项之和

$$\frac{1}{d^{\tilde{\mathfrak{h}}/2}} \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)} d^{|E^+|}} \sum_{\mathbf{i}^+}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+} R_{\mathbf{i}^+} U_{\mathbf{i}^+}\right] \in \mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{h}},\tilde{\mathfrak{o}}}, \tag{5.15}$$

其中有三种情况

1. $\mathcal{T}^+ = (jk\ell m\mathbf{i}\ E \cup \{j,\ell\} \cup \{k,m\})$，$U_{\mathbf{i}^+} = (1 + D^{\ell m}_{jk}) U_{\mathbf{i}}$ 或 $U_{\mathbf{i}^+} = \sqrt{d-1} D^{\ell m}_{jk} U_{\mathbf{i}}$；则要么 $\tilde{\mathfrak{h}} \geqslant \mathfrak{h} + 1$，要么 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ 且 $\tilde{\mathfrak{o}} \geqslant 1$。
2. $\mathcal{T}^+ = (k\ell m\mathbf{i}\ E \cup \{i,\ell\} \cup \{k,m\})$，其中 $i \in \mathbf{i}$，$U_{\mathbf{i}^+} = (1 + D^{\ell m}_{ik}) U_{\mathbf{i}}$ 或 $U_{\mathbf{i}^+} = \sqrt{d-1} D^{\ell m}_{ik} U_{\mathbf{i}}$；则要么 $\mathfrak{h} \geqslant \mathfrak{h} + 1$，要么 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ 且 $\tilde{\mathfrak{o}} \geqslant 1$。
3. $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}$、$U_{\mathbf{i}^+} = U_{\mathbf{i}}$；则要么 $\tilde{\mathfrak{h}} \geqslant \mathfrak{h} + 1$。

在这三种情况下 $\mathfrak{h} + \tilde{\mathfrak{o}} \geqslant \mathfrak{h} + \mathfrak{o} + 1$。

从图 $\mathcal{T}_0 = (\mathbf{i}_0 = ij, E_0 = \{i,j\})$ 开始，如 (5.5) 所示，利用命题 3.4 以及 $F_{\mathbf{i}} = G_{ij} P^{q-1} \bar{P}^{q-1}$，得到 $\mathcal{T}_1 = (\mathbf{i}_1 = ijk\ell,$ $E_1 = \{i,k\} \cup \{j,\ell\})$。然后对于 $i \neq j$，$|F_{\mathbf{i}}| \prec \Lambda_o |P|^{2q-1}$，

$d^{3/2}\mathcal{C}$ $F$ $A$ 5 5 $(,)/N \prec \Phi_q$，且 $(.)$ 等于

$$\frac{d}{(d-1)^{1/2}} \frac{1}{N^2} \sum_{ij}^{*} \mathbb{E}[G_{ij} P^{q-1} \bar{P}^q] + \frac{d}{(d-1)^{1/2}} \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_1)} d^{|E_1|}} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}[A_{\mathcal{T}_1} D^{k\ell}_{ij} (G_{ij} P^{q-1} \bar{P}^q)], \tag{5.16}$$

误差项有界于 $\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q])$。对于 (5.16) 中的第一项，有 $\sum_{ij} G_{ij} = 0$ 且 $\sum^{*}_{ij} G_{ij} \prec N$。因此，它有界于 $\mathbb{E}[\Phi_q]$。对于 (5.16) 中的第二项，根据离散链式法则，可将其改写为

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d-1} \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_1)} d^{|E_1|}} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}[A_{\mathcal{T}_1} G_{ij} \sqrt{d-1} D^{k\ell}_{ij} (P^{q-1} \bar{P}^q)] \\ &+ \frac{d}{(d-1)^{1/2}} \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_1)} d^{|E_1|}} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}[A_{\mathcal{T}_1} D^{k\ell}_{ij} (G_{ij}) (1 + D^{k\ell}_{ij}) P^{q-1} \bar{P}^q)] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]). \end{aligned} \tag{5.17}$$

(5.17) 中的第一项，回顾 $\mathcal{T}_1 = (\{i,j,k,\ell\}, \{\{i,k\},\{j,\ell\}\})$。我们注意到 $i,j$ 位于 $\mathcal{T}_1$ 的不同连通分支中。我们可以像 (3.9) 中那样对 $\sqrt{d-1} D^{k\ell}_{ij} (P^{q-1} \bar{P}^q)$ 进行泰勒展开，随后它是如下形式各项的线性组合 $\partial_{\xi} (P^{q-1} \bar{P}^q)$。由 (5.12) 可知，(5.17) 中的第一项有界于 $\mathbb{E}[\Phi_q]$。对于 (5.17) 中的第二项，我们也可以对 $D^{k\ell}_{ij} G_{ij}$ 进行泰勒展开，

$$D^{k\ell}_{ij} G_{ij} = \sum_{n=1}^{\mathfrak{b}-1} \frac{\partial^n_{\xi} G_{ij}}{n! (d-1)^{n/2}} + \frac{\partial^{\mathfrak{b}}_{\xi} G_{ij}(A + \theta\xi)}{\mathfrak{b}! (d-1)^{\mathfrak{b}/2}}, \quad \xi = \xi^{k\ell}_{ij}. \tag{5.18}$$

我们注意到 $\partial_\xi^n G_{ij}$ 是格林函数项的单项式线性组合，并且随机有界，即 $\mathrm{O}_\prec(1)$。我们可以将 $\mathfrak{b}$ 取足够大，使余项有界于 $\mathrm{O}_\prec(1/N)$。这样，忽略误差项 $\mathbb{E}[\Phi_q]$ 后，(5.17) 中的第二项可以改写为以下各项的线性组合

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_1)}d^{|E_1|}}\sum_{\mathbf{i}_1}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_1}R_{\mathbf{i}_1}U_{\mathbf{i}_1}\right],\quad U_{\mathbf{i}_1}=P^{q-1}\bar{P}^q \text{ or } U_{\mathbf{i}_1}=\sqrt{d-1}D_{ij}^{k\ell}P^{q-1}\bar{P}^q, \tag{5.19}$$

其中 $\mathfrak{h}\geqslant 0$。对应于 $\mathfrak{h}=0$ 的项来自于在（$n=1$）中取5.18，以及 $U_{\mathbf{i}_1}=P^{q-1}\bar{P}^q$ ：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_1)}d^{|E_1|}}\sum_{ijk\ell}^{*}\mathbb{E}[A_{ik}A_{j\ell}\partial_{ij}^{k\ell}(G_{ij})P^{q-1}\bar{P}^q)]\\
=&-\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_1)}d^{|E_1|}}\sum_{ijk\ell}^{*}\mathbb{E}[A_{ik}A_{j\ell}(G_{ii}G_{jj}+G_{ik}G_{j\ell}+\mathcal{I})P^{q-1}\bar{P}^q)]\\
=&-\frac{d}{d-1}\left(\mathbb{E}[m^2P^{q-1}\bar{P}^q]+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_1)}d^{|E_1|}}\sum_{ijk\ell}^{*}\mathbb{E}[A_{ik}A_{j\ell}G_{ik}G_{j\ell}P^{q-1}\bar{P}^q)]\right)+\mathrm{O}_\prec(\mathbb{E}[\Phi_q]),
\end{aligned} \tag{5.20}$$

其中

$$\mathcal{I}=G_{ij}^2+G_{il}G_{kj}+G_{ii}G_{kj}+G_{ik}G_{ij}+G_{ij}G_{lj}+G_{il}G_{jj}. \tag{5.21}$$

要得到（5.20）的最后一行，我们使用以下性质：由于 $\mathcal{I}$ 包含指标位于不同连通分支中的格林函数矩阵元 $\mathcal{T}_1$，相应的项根据命题 $\mathbb{E}[\Phi_q]$有界，其中 5.5。

对于（5.19）中满足 $\mathfrak{h}\geqslant 1$ 的项，以及（5.20）右侧的第二项，我们可以进一步利用命题 5.6 和 5.7 对它们进行展开。这样，我们将得到一系列森林

$$\mathcal{T}_0=(\mathbf{i}_0,E_0),\quad \mathcal{T}_1=(\mathbf{i}_1,E_1),\quad \mathcal{T}_2=(\mathbf{i}_2,E_2),\quad \mathcal{T}_3=(\mathbf{i}_3,E_3),\quad \cdots. \tag{5.22}$$

更具体地说，若我们有一项对应于图 $\mathcal{T}_t=(\mathbf{i}_t,\ E_t)$

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_t)}d^{|E_t|}}\sum_{\mathbf{i}_t}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_t}R_{\mathbf{i}_t}U_{\mathbf{i}_t}\right]\in\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}. \tag{5.23}$$

有两种情况：如果 $\mathfrak{o}\geqslant 1$，我们可以使用命题 5.6 将（5.23）展开为 $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{h}}}$ 中各项之和，$\tilde{\mathfrak{o}}$ 其中 $\mathfrak{h}\geqslant\mathfrak{h}+\mathfrak{o}$ 对应于新图 $\mathcal{T}_{t+1}=(\mathbf{i}_{t+1},\ E_{t+1})$；如果 $\mathfrak{o}=0$，且 $R_{\mathbf{i}_t}$ 包含对角格林函数条目，我们使用命题5.7 将 $R_{\mathbf{i}_t}$ 中的对角格林函数条目替换为 $m$，

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_t)}d^{|E_t|}}\sum_{\mathbf{i}_t}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_t}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}_t}\right]\in\mathcal{E}_{\mathfrak{h},0},\quad \mathfrak{d}=\deg(R_{\mathbf{i}_t}), \tag{5.24}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$其余各项属于 $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{h}},\ \tilde{\mathfrak{o}}}$ 其中 $\mathfrak{h}\geqslant\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}+\tilde{\mathfrak{o}}\geqslant\mathfrak{h}+1$ 分别对应于新图 $\mathcal{T}_{t+1}=(\mathbf{i}_{t+1},\ E_{t+1})$。由归纳法可知，在（5.23）中 $\mathfrak{h}+\mathfrak{o}\geqslant\lfloor t/2\rfloor$。因此，当 $t$ 足够大时，（5.11）意味着（5.23）被 $\mathbb{E}[\Phi_q]$所界定。

下一个命题指出，我们可以将（5.24）改写回关于 $m^{\mathfrak{d}}P^q\bar{P}^{q-1}$ 的期望。其证明将在第5.6节给出。

**命题 5.8.** 若 $\mathcal{T}_t$ 按 (5.22) 中的方式构造，且 $\mathfrak{h}\geqslant 1$，则存在某个常数 $C\asymp 1$，它取决于图序列 $\mathcal{T}_1$，$\mathcal{T}_2$，$\cdots$，$\mathcal{T}_t$，使得以下结论成立

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_t)}d^{|E_t|}}\sum_{\mathbf{i}_t}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}_t}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}_t}]=\frac{C}{d^{\mathfrak{h}/2}}\mathbb{E}[m^{\mathfrak{d}}P^q\bar{P}^{q-1}]+\mathrm{O}_\prec(\mathbb{E}[\Phi_q]). \tag{5.25}$$

~所有这些项（如（5.24）中的项以及（5.20）中的第一项）都会导出一个多项式 $Q(m)$，使得

$$\mathbb{E}[(1+zm)P^{q-1}\bar{P}^q] = -\mathbb{E}[\widetilde{Q}(m)P^{q-1}\bar{P}^q] + \mathrm{O}_{\prec}(\Phi_q). \tag{5.26}$$

右侧的第一项（5.20）给出 $du^2/(d-1)$ 中的项 $\widetilde{Q}(u)$。与（5.24）中相同的所有其他项均有 $\mathfrak{h} \geqslant 1$，它们在 $\widetilde{Q}(u)$ 中产生系数为 $\mathrm{O}(1/\sqrt{d})$ 的项。因此$\widetilde{Q}(u) = u^2 + Q(u)$，其中 $Q(u)$ 的系数为 $\mathrm{O}(1/\sqrt{d})$，如¯（5.2）所示。

## 5.2 命题 5.4 的证明

命题 *5.4* 的证明。对于任意集合 $J \subset [\![1,b]\!]$，记 $\partial_J = \prod_{j\in J}\partial_{\xi_j}$。导数 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} P(z,m)$ 是以下形式各项的线性组合：

$$\partial_{J_1} m \partial_{J_2} m \cdots \partial_{J_r} m \partial_2^r P, \quad J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_r = [\![1,b]\!], \quad |J_1|, |J_2|, \cdots, |J_r| \geqslant 1. \tag{5.27}$$

由（4.4），可得 $|\partial_J m| \prec \mathrm{Im}[m]/N\eta$当 $|J| \geqslant 1$时。因此，除 $r=1$外，（5.27）由（$\mathrm{Im}[m]/N\eta$）$^2$,界定 $r=1$。在这种情况下，（5.27）简化为 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} m \partial_2 P \prec \mathrm{Im}[m]|\partial_2 P|/N\eta$。这给出（5.8）。
对于（5.9），$\partial_{\boldsymbol{\xi}}$（$P^{q-1}\bar{P}^q$）可以由有限个如下形式的项之和所界定

$$|\partial_{J_1} P||\partial_{J_2} P| \cdots |\partial_{J_r} P||P|^{2q-r-1} \prec \left(\frac{\mathrm{Im}[m]|\partial_2 P(z,m)|}{N\eta} + \frac{\mathrm{Im}[m]^2}{(N\eta)^2}\right)^r |P|^{2q-r-1},$$

其中 $J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_r = [\![1,b]\!]$ 且 $|J_1|$，$|J_2|$，$\cdots$，$|J_r| \geqslant 1$。根据 $\Phi_q$在（5.4）中的定义，断言得证

对于（5.10），令$\xi = \sum_{a=1}^b \xi_a$，由注记4.2，可得 $R_{\mathbf{i}}$（$A+\xi$）$\prec 1$。对于 $U_{\mathbf{i}}$（$A+\xi$），我们用 $U_{\mathbf{i}}$（$A$）与 $D_\xi U_{\mathbf{i}} = U_{\mathbf{i}}$（$A+\xi$）$-U_{\mathbf{i}}$（$A$）之和来估计。根据定义（5.6）和泰勒展开（3.6），$U_{\mathbf{i}}$ 与 $D_\xi U_{\mathbf{i}}$ 都是有限个如下形式的项之和

$$\partial_{\xi_{i_1}}\partial_{\xi_{i_2}}\cdots\partial_{\xi_{i_r}}(P^{q-1}\bar{P}^q), \quad 1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_r \leqslant b. \tag{5.28}$$

若 $r=0$，则（5.28）由 $|P|^{2q-1}$所界定；若 $r \geqslant 1$，则有界（5.9）。断言（5.10）得证。
最后，对于（5.11），我们由（2.10）回忆，对于非对角格林函数项 $|G_{ij}| \prec \Lambda_o$。对于 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$中的任意一项，我们可以界定 $|R_{\mathbf{i}}| \prec \Lambda_o^{\mathfrak{o}}$，并使用（5.9）中的平凡界 $|U_{\mathbf{i}}| \prec N\Phi_q$，于是

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right] \prec \frac{\Lambda_o^{\mathfrak{o}}}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}N\Phi_q\right] \leqslant \frac{\Lambda_o^{\mathfrak{o}}}{d^{\mathfrak{h}/2}}N\mathbb{E}[\Phi_q] \leqslant \mathbb{E}[\Phi_q],$$

p假设 $\Lambda_o^{\mathfrak{o}}/d^{\mathfrak{h}/2} \leqslant \Lambda_o^{\mathfrak{o}+\mathfrak{h}} \leqslant 1/N$，这里我们在对 $A_{\mathcal{T}}$求和时使用了（3.14） . □

命题 *5.9*。设 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} = \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\cdots\partial_{\xi_b}$ 如定义 *3.3* 所述，且 $\boldsymbol{V(\xi)} \subset \boldsymbol{i}$。设 $R_{\mathbf{i}}$ 如定义 *4.4* 所述，并假设其包含一个非对角格林函数项 $G_{ii'}$，使得 $i$ 和 $i'$ 属于 $\mathcal{T}$ 的不同连通分支。 $\mathcal{T}^+$ 按命题 *5.6* 的方式由 $\mathcal{T}$ 构造。则在误差项 $\Phi_q$ 的意义下，$D_{\mathcal{T}^+} R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}} P^{q-1}\bar{P}^q$ $d^{-\mathfrak{h}/2}R_{\mathbf{i}^+}\partial_{\boldsymbol{\xi}'} P^{q-1}\bar{P}^q$ $\mathfrak{h} \geqslant 1$ $R_{\mathbf{i}^+}$ *( ( ))* 是 *( )* 的有限线性组合，其中含有至少一个非对角格林函数项 $G_{jj'}$，使得 $j$、$j'$ 属于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支；$\boldsymbol{V(\xi')} \subset \boldsymbol{i}^+$ 和 $|\boldsymbol{\xi}'| \geqslant b$。

证明。得益于离散链式法则（3.6），我们可以将 $D_{\mathcal{T}^+}(R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q))$ 改写为如下形式

$$R_{\mathbf{i}}D_{\mathcal{T}^+}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q) + (D_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}})(1+D_{\mathcal{T}^+})\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q). \tag{5.29}$$

我们回顾一下 $\mathcal{T}^+$ 从 $\mathcal{T}$ 构造的过程。设 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$，对于每条边 $e = \{i_e, i'_e\} \in E$，我们关联另一条边 $\{j_e, j'_e\} \in [\![N]\!]$。那么 $\mathcal{T}^+ = (\mathbf{ij}\ E^+)$ 由 $2|E|$ 条互不相交的边组成，其中 $E^+ = \cup_{e\in E}\{i_e, j_e\}\cup$

$\{i'_e, j'_e\}$。对于（5.29）中的第一项，利用注释 3.6，若 $i,\ i'\in\mathbf{i}$ 两两不同，则它们位于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支中。

根据泰勒展开（3.9），误差项至多为 $\mathbb{E}[\Phi_q]$，$D_{\mathcal{T}^+}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q$ 是 $d^{-\mathfrak{h}/2}\partial_{\boldsymbol{\xi}'}(P^{q-1}\bar{P}^q$ 的有限线性组合，其中 $\mathfrak{h}\geqslant 1$，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\xi}')\subset\mathbf{i}^+$ 以及 $|\boldsymbol{\xi}'|\geqslant b$。

接下来我们研究（5.29）中的第二项，并证明 $D_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}}$ 至少包含一个非对角格林函数项 $G_{jj'}$，使得 $j,\ j'$ 位于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支中。我们需要计算

$$D_{\mathcal{T}^+}(G_{ii'}R_{\mathbf{i}})=\sum_{n=1}^{\mathfrak{b}-1}\frac{1}{n!(d-1)^{n/2}}\left(\sum_{e\in\mathcal{T}}\partial_{i_e j_e}^{i'_e j'_e}\right)^n(G_{ii'}R_{\mathbf{i}})+\mathrm{O}_{\prec}\left(d^{-\mathfrak{b}/2}\right). \tag{5.30}$$

如果导数没有作用于 $G_{ii'}$，那么 $R_{\mathbf{i}^+}$ 包含 $G_{ii'}$，其中 $i,\ i'$ 位于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支中。对 $G_{ii'}$ 在（5.30）中的导数可写成如下形式的若干项之和

$$G_{ix_1}G_{x_2x_3}\cdots G_{x_{2a-2}x_{2a-1}}G_{x_{2a}i'},$$

其中，对某个 $e_b\in E$，有 $1\leqslant b\leqslant a$，$\{x_{2b-1},x_{2b}\}\in\{i_{e_b},j_{e_b},i'_{e_b},j'_{e_b}\}$。对于顶点和边的序列 $i,e_1,\cdots,e_a,i'$，由于 $i,i'\in\mathbf{i}$ 位于 $\mathcal{T}$ 的不同连通分支中，因此有两种情况：**i)** $i$ 和 $e_1$ 位于 $\mathcal{T}$ 的不同连通分支中。根据 $\mathcal{T}^+$ 的构造，$i$ 和 $\{i_{e_1},j_{e_1},i'_{e_1},j'_{e_1}\}$ 在 $\mathcal{T}^+$ 中不连通。因此 $i$ 和 $x_1$ 位于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支中。如果 $x_{2a}$ 和 $i'$ 位于 $\mathcal{T}$ 的不同连通分支中，根据同样的论证，$x_{2a}$ 和 $i'$ 位于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支中。**ii)** 存在某个 $1\leqslant b\leqslant a-1$，使得 $e_b$ 和 $e_{b+1}$ 位于 $\mathcal{T}$ 的不同连通分支中。根据 $\mathcal{T}^+$ 的构造，$\{i_{e_b},j_{e_b},i'_{e_b},j'_{e_b}\}$ 和 $\{i_{e_{b+1}},j_{e_{b+1}},i'_{e_{b+1}},j'_{e_{b+1}}\}$ 在 $\mathcal{T}^+$ 中不连通。因此 $x_{2b}$ 和 $x_{2b+1}$ 位于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支中。命题 5.9 得证。

□

## 5.3 命题5.5 的证明

**命题 5.10**。命题 *5.5* 在 $b\geqslant 1$ 时成立。

命题 *5.10* 在 $E=\emptyset$ 下的证明。若 $R_{\mathbf{i}}$ 包含两个非对角格林函数项 $G_{ij}$，$G_{i'j'}$，则根据算术-几何平均不等式，以及 $|G_{xy}|\prec 1$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q)\right]\right|\prec\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[(|G_{ij}|^2+|G_{i'j'}|^2)\left|\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q)\right|\right]\\&\prec\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[(|G_{ij}|^2+|G_{i'j'}|^2)(N\eta)\Phi_q\right]\prec\mathbb{E}[\Phi_q],\end{aligned} \tag{5.31}$$

其中，第二个不等式用到了（5.9），最后一个不等式用到了 Ward 恒等式（4.1）。

在下文中，我们假设 $R_{\mathbf{i}}$ 恰好包含一个非对角项。我们记 $\mathbf{i}=\{i,j,m_1,m_2,\cdots,m_r\}$，$|\mathbf{i}|=r+2$，以及 $R_{\mathbf{i}}=G_{ij}R'_{\mathbf{i}}$。回顾 $P$ 由（5.8）给出的导数：

$$\partial_{\boldsymbol{\xi}'}P=\partial_{\boldsymbol{\xi}'}m(z)\partial_2P+\mathcal{O}_{\prec}\left(\frac{\mathrm{Im}[m]^2}{(N\eta)^2}\right). \tag{5.32}$$

我们可以将（5.13）改写为如下形式各项之和

$$\frac{1}{N^{r+2}}\sum_{ij\mathbf{m}}\mathbb{E}[G_{ij}R'_{\mathbf{i}}I_1I_2\cdots I_tP^{r-1-t_1}\bar{P}^{r-t_2}],\quad t_1+t_2=t, \tag{5.33}$$

其中 $I_s$ 对于 $1\leqslant s\leqslant t$ 对应于（5.32）中定义如下的各项：

1. 根据（4.3），（5.32）中的第一项$\partial_{\xi'} m(z)\partial_2 P$是以下形式各项的和：

$$\frac{\mathrm{Im}[m]\partial_2 P}{N\eta}\sum_{\mathbf{k}_s} G_{ij}^{a_s} X_{\mathbf{k}_s\mathbf{m}i} Y_{\mathbf{k}_s\mathbf{m}j}. \tag{5.34}$$

其中 $a_s \geqslant 0$并且 $\mathbf{k}_s$是某个指标集，并且$\sum_{\mathbf{k}_s}|X^2_{\mathbf{k}_s\mathbf{m}i}|$，$\sum_{\mathbf{k}_s}|Y^2{}_{\mathbf{k}_s\mathbf{m}j}| = \mathcal{O}_{\prec}(1)$。我们取 $I_s$为（5.34）或其复共轭。在此情形下 $|I_s| \prec \mathrm{Im}[m]|\partial_2 P|/N\eta$。

2. $I_s$受 $\mathcal{O}_{\prec}\left(\frac{\mathrm{Im}[m]^2}{N\eta}()^2\right)$的约束，对应于（5.32）中的最后一项。

根据构造，我们有 $|I_s| \prec \mathrm{Im}[m]/N\eta$ 对所有 $1 \leqslant s \leqslant t$。如果存在一个 $I_s$ 对应于条目 1 且满足 $a_s \geqslant 1$，则

$$|I_s| \prec |G_{ij}|\frac{\mathrm{Im}[m]|\partial_2 P|}{N\eta}.$$

并且注意到 $|\partial_2 P| \prec 1$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{r+2}}\sideset{}{^*}\sum_{ij\mathbf{m}}\mathbb{E}[G_{ij}R'_{\mathbf{i}}I_1I_2\cdots I_tP^{q-t_1-1}\bar{P}^{q-t_2}] &\prec \frac{1}{N^2}\sideset{}{^*}\sum_{ij}\mathbb{E}\left[|G_{ij}|^2\left(\frac{\mathrm{Im}[m]}{N\eta}\right)^t|P^{2q-t-1}|\right]\\ &\leqslant \mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{Im}[m]}{N\eta}\right)^{t+1}|P^{2q-t-1}|\right] \prec \mathbb{E}[\Phi_q].\end{aligned}$$

其中我们使用了 Ward 恒等式（4.1）。
如果存在一个 $I_s = \mathcal{O}_{\prec}\left(\frac{\mathrm{Im}[m]^2}{N\eta}()^2\right)$ 如条目 2中所示，则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^{r+2}}\sideset{}{^*}\sum_{ij\mathbf{m}}\mathbb{E}[G_{ij}R'_{\mathbf{i}}I_1I_2\cdots I_tP^{q-t_1-1}\bar{P}^{q-t_2}]\\ \prec\ &\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{Im}[m]^2}{(N\eta)^2}\left(\frac{\mathrm{Im}[m]}{N\eta}\right)^{t-1}|P^{2q-t-1}|\right] \prec \mathbb{E}[\Phi_q].\end{aligned}$$

I其余情况下，我们可以假设每个 $I_s$ 都对应于第 1 项，其中 $a_s = 0$。那么我们有 ave

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^{r+2}}\sideset{}{^*}\sum_{ij\mathbf{m}}\mathbb{E}[G_{ij}R'_{\mathbf{i}}I_1I_2\cdots I_tP^{q-t_1-1}\bar{P}^{q-t_2}]\\ =\ &\frac{1}{N^{r+2}}\sideset{}{^*}\sum_{\mathbf{m}}\mathbb{E}\left[\sideset{}{^*}\sum_{ij\notin\mathbf{m}}G_{ij}\sum_{\mathbf{k}}X_{\mathbf{k}\mathbf{m}i}Y_{\mathbf{k}\mathbf{m}j}\left(\frac{\mathrm{Im}[m]\partial_2 P}{N\eta}\right)^t P^{q-t_1-1}\bar{P}^{q-t_2}\right].\end{aligned} \tag{5.35}$$

其中$\sum^*_{ij\notin\mathbf{m}}$是对指标 $i \neq j \in [\![N]\!]\setminus\mathbf{m}$、$\mathbf{k} = \cup_s\mathbf{k}_s$的求和，并且

$$X_{\mathbf{k}\mathbf{m}i} = \prod_s X_{\mathbf{k}_s\mathbf{m}i}, \quad Y_{\mathbf{k}\mathbf{m}j} = \prod_s Y_{\mathbf{k}_s\mathbf{m}j}.$$

它们是有界的

$$\sum_{\mathbf{k}}|X^2_{\mathbf{k}\mathbf{m}i}| = \sum_{\mathbf{k}}\prod_s|X^2_{\mathbf{k}_s\mathbf{m}j}| = \sum_s\sum_{\mathbf{k}_s}|X^2_{\mathbf{k}_s\mathbf{m}j}| \prec 1, \quad \sum_{\mathbf{k}}|Y^2_{\mathbf{k}\mathbf{m}j}| \prec 1.$$

我们可以将总和$\sum^*_{ij\notin\mathbf{m}}$重写为对 $i,j\notin\mathbf{m}$ 的总和与 $i=j\notin\mathbf{m}$之差。

$$\frac{1}{N^2}\sideset{}{^*}\sum_{ij\notin\mathbf{m}}\sum_{\mathbf{k}}G_{ij}X_{\mathbf{k}\mathbf{m}i}Y_{\mathbf{k}\mathbf{m}j} = \frac{1}{N^2}\sum_{ij\notin\mathbf{m}}\sum_{\mathbf{k}}G_{ij}X_{\mathbf{k}\mathbf{m}i}Y_{\mathbf{k}\mathbf{m}j} - \frac{1}{N^2}\sum_{i\notin\mathbf{m}}\sum_{\mathbf{k}}G_{ii}X_{\mathbf{k}\mathbf{m}i}Y_{\mathbf{k}\mathbf{m}i} \tag{5.36}$$

<escape>对于</escape><escape>右侧</escape><escape>（</escape>5.36<escape>）</escape>中的第一项，我们使用 $G$ 有界于 $1/\eta$的范数以及柯西-施瓦茨不等式

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N^2}\sum_{ij\notin\mathbf{m}}\sum_{\mathbf{k}}G_{ij}X_{\mathbf{km}i}Y_{\mathbf{km}j}\right| &\leqslant \frac{1}{N^2\eta}\sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\sum_i|X_{\mathbf{km}i}|^2\sum_i|Y_{\mathbf{km}i}|^2}\\ &\leqslant \frac{1}{N^2\eta}\sqrt{\sum_{\mathbf{k}}\sum_i|X_{\mathbf{km}i}|^2\sum_{\mathbf{k}}\sum_i|Y_{\mathbf{km}i}|^2}\prec\frac{1}{N\eta}.\end{aligned}\tag{5.37}$$

对于右侧（5.36）中的第二项，我们有

$$\left|\frac{1}{N^2}\sum_{i\notin\mathbf{m}}\sum_{\mathbf{k}}G_{ii}X_{\mathbf{km}i}Y_{\mathbf{km}j}\right|\leqslant\frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\sum_i|X_{\mathbf{km}i}|^2\sum_i|Y_{\mathbf{km}i}|^2}\prec\frac{1}{N}.\tag{5.38}$$

将（5.37）和（5.38）代入（5.35），并回顾 $|\mathbf{m}|=r$，得到

$$\frac{1}{N^{r+2}}\sum_{ij\mathbf{m}}^{*}\mathbb{E}[G_{ij}R'_{\mathbf{i}}I_1I_2\cdots I_tP^{q-t_1-1}\bar{P}^{q-t_2}]\prec\mathbb{E}\left[\frac{1}{N\eta}\left(\frac{\mathrm{Im}[m]\partial_2P}{N\eta}\right)^t|P|^{2q-t-1}\right]\prec\mathbb{E}[\Phi_q].$$

至此，5.13）对于 $b\geqslant1$ 和 $E=\emptyset$的证明完成。 □

命题*5.10* 在 $E\neq\emptyset$下的证明。为证明（5.12），我们需要引入一些新记号。对于$\mathfrak{h}\in\mathbb{N}$，我们用符号 $\mathcal{E}_\mathfrak{h}$ 表示如下形式的项的有限线性组合：

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_\mathcal{T}R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q)\right].\tag{5.39}$$

其中森林 $\mathcal{T}=(\mathbf{i}\ E)$如定义3.1所述， $R_{\mathbf{i}}$ 是定义4.4中所述的格林函数项单项式，并且$\partial_{\boldsymbol{\xi}}=\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\cdots\partial_{\xi_b}$满足 $b\geqslant1$ 且$\mathbf{V}(\boldsymbol{\xi})\subset\mathbf{i}$。根据我们的假设， $R_{\mathbf{i}}$包含一个非对角格林函数项 $G_{ij}$，使得 $i$， $j$ 属于 $\mathcal{T}$的不同连通分支。

~ ~ ~接下来我们证明， $\mathcal{E}_\mathfrak{h}$ （如（5.39）所示）中的任意项，只要满足 $E\neq\emptyset$，都可以改写为 $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{h}}}$ 中的项，且满足 $\mathfrak{h}\geqslant\mathfrak{h}+1$，误差为可忽略误差 $\mathrm{O}_\prec(d^{-\mathfrak{h}/2}\mathbb{E}[\Phi_q])$：

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_\mathcal{T}R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q)\right]\in\widetilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathfrak{h}}}+\mathrm{O}_\prec(d^{-\mathfrak{h}/2}\mathbb{E}[\Phi_q]),\quad\tilde{\mathfrak{h}}\geqslant\mathfrak{h}+1.\tag{5.40}$$

~与（5.11）中的情况相同，如果 $\mathfrak{h}$ 足够大，则 $|\mathcal{E}_\mathfrak{h}|\leqslant\mathbb{E}[\Phi_q]$。命题 5.10 可通过反复使用（5.40）得出。

我们证明5.40在 $\mathfrak{h}=0$这一情形下的结论，一般情形可通过将 $d^{-\mathfrak{h}/2}$ 乘以~的两边得到。对于 $\mathcal{E}_\mathfrak{h}$ 中形如（5.39）的任意一项，我们可以利用命题3.4 进行展开，

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_\mathcal{T}R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q)\right]&=\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q)\right]\\ +\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{ij}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}D_{\mathcal{T}^+}(R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q))\right]&+\mathrm{O}_\prec\left(\mathbb{E}[\Phi_q]\right),\end{aligned}\tag{5.41}$$

其中 $\mathcal{T}^+=(\mathbf{i}^+=\mathbf{ij}\ E^+)$，且 $E^+=\cup_{e\in E}\{i_e,j_e\}\cup\{i'_e,j'_e\}$。

对于（5.41）右侧的第一项，由于命题（5.10）适用于 $E=\emptyset$，它有界于 $\mathrm{O}_\prec(\mathbb{E}[\Phi_q])$。对于（5.41）右侧的第二项，由于命题 5.9，

$D_{\mathcal{T}^+}(R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q))$ 是形如 $d^{-\tilde{\mathfrak{h}}/2}R_{\mathbf{i}^+}\partial_{\boldsymbol{\xi}'}(P^{q-1}\bar{P}^q)$ 的项的线性组合，其中 $\tilde{\mathfrak{h}} \geqslant 1$，且 $R_{\mathbf{i}^+}$ 含有非对角项 $G_{k\ell}$，使得 $k$，$\ell$ 属于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支。~此外，$|\boldsymbol{\xi}'| \geqslant b \geqslant 1$。因此我们得出，（5.41）右侧的第二项属于 $\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathfrak{h}}}$，其中 $\mathfrak{h} \geqslant 1$。这就完成了（5.40）的证明。 □

**命题 5.11**。 命题 *5.5* 成立，当且仅当 $b = 0$。

~命题 *5.11*的证明。 对于 $\mathfrak{h}$，$\mathfrak{o} \in \mathbb{N}$，我们使用符号 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$ 表示形如以下形式的项的有限线性组合

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}R_{\mathbf{i}}U\right], \quad U = P^{q-1}\bar{P}^q, \tag{5.42}$$

其中，森林 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$ 如定义 3.1中所述，$R_{\mathbf{i}}$ 是由格林函数项构成的单项式，如定义 4.4中所述，而 $U_{\mathbf{i}}$ 如（5.6）中所述。 $R_{\mathbf{i}}$ 包含一个非对角格林函数项 $G_{ij}$，使得 $i$，$j$属于 $\mathcal{T}$的不同连通分支，并且 $\chi(R_{\mathbf{i}}) = \mathfrak{o} \geqslant 1$（回顾一下，$\chi(R_{\mathbf{i}})$ 统计非对角格林函数项的数量）。

我们注意到，$\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$和 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$在（5.7）中的唯一差别在于 $U = P^{q-1}\bar{P}^q$与指标 $\mathbf{i}$无关。

~ ~ ~ ~接下来我们证明，$\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$ 中的任意一项都可以改写为 $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{h}},\tilde{\mathfrak{o}}}$ 中的若干项，其中 $\tilde{\mathfrak{h}} \geqslant \mathfrak{h}$ 和 $\tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{o}} \geqslant \mathfrak{h} + \mathfrak{o} + 1$成立，误差为 $\mathrm{O}_{\prec}(d^{-\mathfrak{h}/2}\mathbb{E}[\Phi_q])$，且该误差可忽略：

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}R_{\mathbf{i}}\partial_{\boldsymbol{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^q)\right] \in \widetilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathfrak{h}},\tilde{\mathfrak{o}}} + \mathrm{O}_{\prec}(d^{-\mathfrak{h}/2}\mathbb{E}[\Phi_q]). \tag{5.43}$$

~由 (5.11) 可知，若 $\mathfrak{h},\mathfrak{o}$ 足够大，则 $|\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}| \leqslant \mathbb{E}[\Phi_q]$。命题 5.11 由 (5.43) 得证。 □

*(*5.43*)* 的证明，其中 $E = \emptyset$。不失一般性，可设 $\mathfrak{h} = 0$。若 $R_{\mathbf{i}}$ 包含两个非对角格林函数项，则由与 (5.31) 相同的论证可得，其上界为 $\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[(\mathrm{Im}[m]/N\eta)|P|^{2q-1}] = \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q])$。若 $R_{\mathbf{i}}$ 恰好包含一个非对角格林函数项，令$R_{\mathbf{i}} = G_{ij}R'_{\mathbf{i}}$。根据格林函数的定义 (2.1)，有

$$-\frac{1}{N} = -zG_{ij} + \frac{(AG)_{ij}}{\sqrt{d-1}}, \quad \left(1 - \frac{1}{N}\right) = -zG_{kk} + \frac{(AG)_{kk}}{\sqrt{d-1}}. \tag{5.44}$$

将式（5.44）中的第一个关系式乘以 $G_{kk}$，第二个关系式乘以 $G_{ij}$，再对指标$k$取平均并作差，得到

$$G_{ij} = \frac{1}{N(d-1)^{1/2}}\sum_{k\in[\![N]\!]\setminus\mathbf{i}}(AG)_{kk}G_{ij} - \frac{1}{\sqrt{d-1}}(AG)_{ij}m + \mathrm{O}_{\prec}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{5.45}$$

将（5.45）代入（5.13），

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[G_{ij}R'_{\mathbf{i}}U\right] = &\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+1}\sqrt{d-1}}\sum_{\mathbf{i}k}^{*}\mathbb{E}\left[(AG)_{kk}R_{\mathbf{i}}U\right]\\ &- \frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}\sqrt{d-1}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[(AG)_{ij}mR'_{\mathbf{i}}U\right] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]).\end{aligned} \tag{5.46}$$

断言（5.43）可由以下两个关系推出

$$\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+1}\sqrt{d-1}}\sum_{\mathbf{i}k}^{*}\mathbb{E}\left[(AG)_{kk}R_{\mathbf{i}}U\right]=-\frac{d}{(d-1)}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[m^{2}R_{\mathbf{i}}U\right]+\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}+O_{\prec}[\Phi_{q}],\tag{5.47}$$

$$\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}\sqrt{d-1}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[(AG)_{ij}mR'_{\mathbf{i}}U\right]=-\frac{d}{(d-1)}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[m^{2}R_{\mathbf{i}}U\right]+\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}+O_{\prec}[\Phi_{q}],\tag{5.48}$$

其中 $\mathfrak{h}+\mathfrak{o}\geqslant 2$。 □

（5.47）的证明。 对于（5.47），我们有

$$\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+1}\sqrt{d-1}}\sum_{\mathbf{i}k}^{*}\mathbb{E}\left[(AG)_{kk}R_{\mathbf{i}}U\right]=\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+1}\sqrt{d-1}}\sum_{k\ell\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{k\ell}G_{k\ell}R_{\mathbf{i}}U\right]+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_{q}]).$$

我们使用了 $|G_{k\ell}|\prec 1$，并将与 $\ell\in\mathbf{i}\setminus\{k\}$ 对应的项用 $\sqrt{d}\mathbb{E}[|U|]/N\prec\mathbb{E}[\Phi_{q}]$ 进行了界定。利用命题 3.5 和 $\mathcal{T}^{+}=(k\ell uv\mathbf{i}\ E^{+}=\{k,u\}\cup\{\ell,v\})$，以及 $F_{k\ell\mathbf{i}}=G_{k\ell}R_{\mathbf{i}}U$。然后 $|F_{k\ell\mathbf{i}}|\prec\Lambda_{o}|P|^{2q-1}$，根据定义 5.4，$d^{3/2}\mathcal{C}(F,\ A)/N\prec\Phi_{q}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+1}\sqrt{d-1}}\sum_{k\ell\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{k\ell}G_{k\ell}R_{\mathbf{i}}U\right]&=\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+2}}\sum_{k\ell\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[G_{k\ell}R_{\mathbf{i}}U\right]\\&+\frac{d}{\sqrt{d-1}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{k\ell uv\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^{+}}D_{k\ell}^{uv}(G_{k\ell}R_{\mathbf{i}}U)\right]+\mathrm{O}_{\prec}\left(\mathbb{E}[\Phi_{q}]\right).\end{aligned}\tag{5.49}$$

由于 $\sum_{k\ell}G_{k\ell}=0$，且 $\sum_{k\ell}^{*}G_{k\ell}\prec N$，右侧的第一项由 $\mathbb{E}[\Phi_{q}]$ 界定。对于（5.49）右侧的第二项，我们可以将其改写为一个和

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{k\ell uv\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^{+}}G_{k\ell}R_{\mathbf{i}}\sqrt{d-1}D_{k\ell}^{uv}U\right]\\&+\frac{d}{\sqrt{d-1}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{k\ell uv\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^{+}}D_{k\ell}^{uv}(G_{k\ell}R_{\mathbf{i}})(1+D_{k\ell}^{uv})U\right].\end{aligned}\tag{5.50}$$

(5.50) 中的第一项，由于 $k$、$\ell$ 属于 $\mathcal{T}^{+}$ 的不同连通分支，且 $\sqrt{d-1}D_{k\ell}^{uv}U$ 的泰勒展开是形如 $\partial_{\mathbf{\xi}}(P^{q-1}\bar{P}^{q})$ 的项的线性组合，因此根据命题 $\mathbb{E}[\Phi_{q}]$，它有界于5.10。(5.50) 中的第二项，我们有

$$D_{k\ell}^{uv}(G_{k\ell}R_{\mathbf{i}})=\sum_{n=1}^{\mathfrak{b}}\frac{(\partial_{k\ell}^{uv})^{n}(G_{k\ell}R_{\mathbf{i}})}{n!(d-1)^{n/2}}+\mathrm{O}_{\prec}\left(d^{-\mathfrak{b}/2}\right).\tag{5.51}$$

若 $\partial_{k\ell}^{uv}$ 在 $m$ 中命中 $R_{\mathbf{i}}$，则它可由 $\mathrm{Im}[m]/N\eta$ 界定，这归功于命题 4.3，而所得项有界于 $\mathbb{E}[\Phi_{q}]$。$(\partial_{k\ell}^{uv})^{n}(G_{k\ell}R_{\mathbf{i}})$ 中的其他项构成格林函数项的多项式。将 (5.51) 代入 (5.50) 中的第二项后，(5.51) 中对应于 $n$ 的项产生一个线性组合：

$$\frac{d}{(d-1)^{(n+1)/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{\mathbf{i}^{+}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^{+}}R_{\mathbf{i}^{+}}U\right],\quad\mathbf{i}^{+}=k\ell uv\mathbf{i}.\tag{5.52}$$

根据命题5.9，$R_{\mathbf{i}^{+}}$ 包含一个指标位于不同 $\mathcal{T}^{+}$ 连通分支中的 $\mathcal{T}^{+}$。若 $n\geqslant 2$，（5.52）属于 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$ 其中 $\mathfrak{h}$，$\mathfrak{o}\geqslant 1$。接下来，我们研究（5.51）中满足 $n=1$ 的项，

$$\frac{d}{(d-1)}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{\mathbf{i}^{+}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{ku}A_{\ell v}\partial_{k\ell}^{uv}(G_{k\ell}R_{\mathbf{i}})U\right],\quad\mathbf{i}^{+}=k\ell uv\mathbf{i}.$$

分两种情况：i）若导数作用于 $R_{\mathbf{i}}$，则 $R_{\mathbf{i}^+}$ 包含格林函数条目 $G_{k\ell}$，且$k$、$\ell$ 位于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支中。此外，$\partial_{k\ell}^{uv} R_{\mathbf{i}}$ 至少包含一个非对角~格林函数条目。相应的项属于 $\mathcal{E}_{0,2}$。ii）若导数作用于 $G_{k\ell}$，则得到 $R_{\mathbf{i}^+} = -G_{kx}G_{y\ell}G_{ij}R'_{\mathbf{i}}$，其中 $\{x,y\} \in \{\{k,\ell\},\{u,v\},\{k,u\},\{y,v\}\}$。$R_{i^+}$ 包含 $G_{ij}$，且 $i$、$j$ 位于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支中。除非 $(x,y) = (k,\ell)$，在所有其他情况下，$R_{i^+}$ 至少包含两个非对角~项。相应的项属于 $\mathcal{E}_{0,2}$。对于 $(x,y) = (k,\ell)$ 的情况，我们得到

$$-\frac{d}{(d-1)}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}k\ell uv}^{*}\mathbb{E}\left[A_{ku}A_{\ell v}G_{kk}G_{\ell\ell}R_{\mathbf{i}}U\right] = -\frac{d}{(d-1)}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[m^2 R_{\mathbf{i}}U\right] + O_{\prec}[\Phi_q]. \tag{5.53}$$

这给出（5.47） □

证明 (5.48)。 我们可以将 (5.48) 重写为

$$\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}\sqrt{d-1}}\left(\sum_{k\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{ik}G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}U\right] + \sum_{\mathbf{i}}^{*}\sum_{k\in\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[A_{ik}G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}U\right]\right), \tag{5.54}$$

对于（5.54）右侧的第二项，我们可以直接利用 $|G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}| \prec 1$

$$\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}\sqrt{d-1}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\sum_{k\in\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[A_{ik}G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}U\right] \prec \frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}\sqrt{d-1}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\sum_{k\in\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[A_{ik}|P|^{2q-1}\right] \prec \mathbb{E}[\Phi_q].$$

对于（5.54）右侧的第一项，利用命题 3.5 以及 $\mathcal{T}^+ = (kuv\mathbf{i}\ E^+ = \{i,u\}\cup\{k,v\})$ 和 $F_{k\mathbf{i}} = G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}U$。于是 $|F_{k\mathbf{i}}| \prec \Lambda_o|P|^{2q-1}$ 并且我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}\sqrt{d-1}}\sum_{k\ell\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{ik}G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}U\right] &= \frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+1}}\sum_{k\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}U\right]\\ &+ \frac{d}{\sqrt{d-1}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{kuv\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}D_{ik}^{uv}(G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}U)\right] + \mathrm{O}_{\prec}\left(\mathbb{E}[\Phi_q]\right).\end{aligned} \tag{5.55}$$

由于 $\sum_k G_{jk} = 0$，且 $\sum_{k\notin\mathbf{i}}^{*} G_{jk} \prec 1$，右侧的第一项有界于 $\mathbb{E}[\Phi_q]$。对于式（5.55）右侧的第二项，我们可以将其重写为一个和

$$\frac{d}{\sqrt{d-1}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\left(\sum_{kuv\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}D_{ik}^{uv}U\right] + \sum_{kuv\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}D_{ik}^{uv}(G_{jk}mR'_{\mathbf{i}})(1+D_{ik}^{uv})U\right]\right). \tag{5.56}$$

对于（5.56）中的第一项，由于 $j$和 $k$ 属于 $\mathcal{T}^+$的不同连通分支，因此根据命题 $\mathbb{E}[\Phi_q]$，其上界为5.10。对于（5.56）中的第二项，我们有

$$D_{ik}^{uv}(G_{jk}mR'_{\mathbf{i}}) = \sum_{n=1}^{\mathfrak{b}-1}\frac{(\partial_{ik}^{uv})^n(G_{jk}mR'_{\mathbf{i}})}{n!(d-1)^{n/2}} + \mathrm{O}_{\prec}\left(d^{-\mathfrak{b}/2}\right). \tag{5.57}$$

将（5.57）代入（5.56）中的第二项，忽略误差项 $\mathbb{E}[\Phi_q]$，则（5.57）中对应于$n$ 的项产生了一个

$$\frac{d}{(d-1)^{(n+1)/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}^+}U\right], \quad \mathbf{i}^+ = k\ell uv\mathbf{i}. \tag{5.58}$$

根据命题 5.9，$R_{\mathbf{i}^+}$ 包含一个指标属于不同~~~连通分支的 $\mathcal{T}^+$。若 $n \geqslant 2$，(5.58) 属于$\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{h}},\ \tilde{\mathfrak{o}}}$ 其中 $\tilde{\mathfrak{h}}$, $\tilde{\mathfrak{o}} \geqslant 1$。接下来，我们研究(5.57)中与 $n = 1$对应的项。

$$\frac{d}{(d-1)}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{iu}A_{kv}\partial_{ik}^{uv}(G_{jk}mR'_{\mathbf{i}})U\right], \quad \mathbf{i}^+ = kuv\mathbf{i}.$$

分两种情况：i）若导数作用于 $mR'_{\mathbf{i}}$，则 $R_{\mathbf{i}^+}$ 包含格林函数条目 $G_{jk}$，且$j$、$k$ 属于 $\mathcal{T}^+$的不同连通分支。此外，$\partial_{ik}^{uv}(mR'_{\mathbf{i}})$ 至少包含一个非对角格林函数条目。对应的项属于 $\mathcal{E}_{0,2}$。ii）若导数作用于 $G_{jk}$，则得到 $R_{\mathbf{i}^+} = -G_{jx}G_{yk}mR'_{\mathbf{i}}$，其中 $\{x,y\} \in \{\{i,k\},\{u,v\},\{i,u\},\{k,v\}\}$。在所有情况下，$G_{jx}$ 都是一个非对角项，且 $j$、$x$ 属于 $\mathcal{T}^+$的不同连通分支。除非 $(x,y) = (i,k)$、$(v,k)$，否则 $R_{\mathbf{i}^+}$ 包含两个非对角格林函数项。对应的项属于 $\mathcal{E}_{0,2}$。当 $(x,y) = (i,k)$、$(v,k)$ 时，我们得到

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{(d-1)}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{iu}A_{kv}(G_{ji}G_{kk}+G_{jv}G_{kk})mR'_{\mathbf{i}}U\right] \\ &= -\frac{d}{(d-1)}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{k\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[m^2R_{\mathbf{i}}U\right] - \frac{d}{(d-1)}\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+1}d}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{kv}G_{jv}G_{kk}mR'_{\mathbf{i}}U\right]. \end{aligned} \tag{5.59}$$

（5.59）右侧的第一项是（5.53）中的主项。对于（5.59）右侧的第二项，利用命题 3.4 以及 $\mathcal{T} = (kuv\mathbf{i}\ \{k,v\})$，$\mathcal{T}^+ = (xykuv\mathbf{i}\ \{k,x\}\cup\{v,y\})$ 和 $F_{kuv\mathbf{i}} = G_{jv}G_{kk}mR'_{\mathbf{i}}U$，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+1}d}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{kv}G_{jv}G_{kk}mR'_{\mathbf{i}}U\right] = \frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+2}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[G_{jv}G_{kk}mR'_{\mathbf{i}}U\right] \\ &+\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|+2}d^2}\sum_{xy\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{kx}A_{vy}D_{kv}^{xy}(G_{jv}G_{kk}mR'_{\mathbf{i}}U)\right] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]). \end{aligned} \tag{5.60}$$

对于(5.60)右侧的第一项，由于$\sum_v G_{iv} = 0$，我们有$\sum_{v\notin k\mathbf{i}} G_{iv} \prec 1$。它被 $\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q])$ 所界。(5.60)右侧的第二项是关于$\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$ 且满足 $\mathfrak{h},\mathfrak{o} \geqslant 1$ 的项的线性组合。

□

证明 (5.43) 与 $E \neq \emptyset$。我们可以使用命题 3.4 进行展开，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}R_{\mathbf{i}}U\right] = \frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[G_{ij}R'_{\mathbf{i}}U\right] \\ &+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{ij}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}D_{\mathcal{T}^+}(R_{\mathbf{i}}U)\right] + \mathrm{O}\left(\mathbb{E}[\Phi_q]\right), \end{aligned} \tag{5.61}$$

其中 $\mathcal{T}^+ = (\mathbf{ij}\ E^+)$，且 $E^+ = \cup_{e\in E}\{i_e,j_e\}\cup\{i'_e,j'_e\}$。对于式 (5.61) 右侧的第一项，它在 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$ 且 $E = \emptyset$。根据以上讨论，我们知道它可以改写为 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$ 中的各项，且$\mathfrak{h}+\mathfrak{o} \geqslant \mathfrak{h}+\mathfrak{o}+1$。对于式 (5.61) 中的第二项，采用与式 (5.41) 右侧第二项相同的论证，除一个误差项 $\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q])$ 外，它可以改写为 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}$ 中的各项，且 $\mathfrak{h},\ \mathfrak{o} \geqslant 1$。□

## 5.4 命题5.6 的证明

命题的证明 5.6。我们对 $\mathfrak{h} = 0$ 证明该结论，一般情形只需将两边同时乘以 $1/d^{\mathfrak{h}/2}$。利用命题 3.4 ，我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}R_{\mathbf{i}}U\right] &= \frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right] \\ &+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}D_{\mathcal{T}^+}(R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}})\right] + \mathrm{O}_{\prec}\left(\mathbb{E}[\Phi_q]\right), \end{aligned} \tag{5.62}$$

其中 $\mathcal{T}^+ = (\mathbf{i}^+, E^+)$ 满足 $\mathbf{i}^+ = \mathbf{ij}$ 且 $E^+ = \cup_{e\in E_r}\{i_e, j_e\} \cup \{i'_e, j'_e\}$；这里我们使用命题 5.4 将误差项界定为 $\mathbb{E}[\Phi_q]$。

由于 $R_{\mathbf{i}}$ 至少包含一个非对角格林函数项，右侧的第一项由 $\mathbb{E}[\Phi_q]$ 界定，这归功于命题5.5。对于（5.62）右侧的第二项，我们可以将其改写为一个和

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\left(\sum_{\mathbf{i}_1}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}}D_{\mathcal{T}^+}U_{\mathbf{i}}\right]+\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}D_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}}(1+D_{\mathcal{T}^+})U_{\mathbf{i}}\right]\right). \tag{5.63}$$

对于（5.63）中的第一项，假设 $R_{\mathbf{i}}$ 包含非对角格林函数项 $G_{ij}$。那么根据我们的构造， $\mathcal{T}^+$， $i$， $j$ 属于 $\mathcal{T}^+$的不同连通分支，因此该项由 $\mathbb{E}[\Phi_q]$ 界定，这归功于命题5.5。

对于（5.63）中的第二项，根据泰勒展开（3.9）

$$D_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}}=\sum_{n=1}^{\mathfrak{b}-1}\frac{1}{n!(d-1)^{n/2}}\left(\sum_{e\in\mathcal{T}}\partial_{i_ej_e}^{i'_ej'_e}\right)^n R_{\mathbf{i}}+\mathrm{O}_{\prec}\left(d^{-\mathfrak{b}/2}\right). \tag{5.64}$$

如果（5.64）中的导数作用于 $m$，则根据命题4.3，它可以由 $\mathbf{Im}[m]/N\eta$ 界定，且所得项由 $\mathbb{E}[\Phi_q]$界定。因此，除去误差项 $\mathsf{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q])$ 后， （5.63）中的第二项是有限个如下形式的项之和

$$\frac{1}{d^{n/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}^+}(1+D_{\mathcal{T}^+})U_{\mathbf{i}}\right],\quad n\geqslant 1. \tag{5.65}$$

如果某个非对角格林函数项 $G_{ij}$ 位于 $R_{\mathbf{i}}$ 中且未被（5.64）中的导数作用到，那么 $G_{ij}$ 位于$R_{\mathbf{i}^+}$ 而 $i$、 $j$ 位于 $\mathcal{T}^+$的不同连通分支中。相应的项（5.65）可由 $\mathbb{E}[\Phi_q]$界定。其余项对应于（5.64）中每个非对角项都被导数作用到的情形，此时有 $n\geqslant \mathfrak{o}$。断言（5.14）得证。 □

## 5.5 命题证明 5.7

命题证明 5.7。 我们证明 $\mathfrak{h}=0$ 的情形，一般情形可通过两边乘以 $1/d^{\mathfrak{h}/2}$ 得到。根据格林函数的定义（2.1），我们有

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)=-zG_{jj}+\frac{(AG)_{jj}}{\sqrt{d-1}},\quad \left(1-\frac{1}{N}\right)=-zG_{ii}+\frac{(AG)_{ii}}{\sqrt{d-1}}. \tag{5.66}$$

将式（5.66）中的第一个关系乘以 $G_{ii}$ ，第二个关系乘以 $G_{jj}$，对指标取平均，然后相减，得到

$$G_{ii}-m=\frac{1}{N(d-1)^{1/2}}\sum_{j:j\notin\mathbf{i}}(AG)_{jj}G_{ii}-\frac{1}{\sqrt{d-1}}(AG)_{ii}m+\mathrm{O}_{\prec}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{5.67}$$

将（5.67）代入（5.7），得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]&=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}mR'_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]\\&+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}\sum_{j\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}(AG)_{jj}G_{ii}R'_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]\\&-\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}(AG)_{ii}mR'_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]).\end{aligned} \tag{5.68}$$

命题的断言 5.7由以下两个估计得出

$$\frac{\sum_{j\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}(AG)_{jj}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}=-\frac{d}{d-1}\frac{\sum_{jk\ell m\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{j\ell}A_{km}G_{jj}G_{kk}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]}{N^{\theta(\mathcal{T})+2}d^{|E|+2}}+\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\mathfrak{o}}+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]),\tag{5.69}$$

$$\frac{\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}(AG)_{ii}mR'_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}=-\frac{d}{d-1}\frac{\sum_{k\ell m\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{i\ell}A_{km}mG_{kk}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|+2}}+\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{h}},\tilde{\mathfrak{o}}}+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]),\tag{5.70}$$

其中 $\tilde{\mathfrak{h}}\geqslant 0$ 且 $\tilde{\mathfrak{h}}+\tilde{\mathfrak{o}}\geqslant 1$，高阶项 $\mathcal{E}_{\tilde{\mathfrak{h}},\tilde{\mathfrak{o}}}$ 与命题 5.7中列出的前两种情况相同。因此，(5.69) 与 (5.70) 之差为

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|+2}}\left(\frac{1}{N}\sum_{jk\ell m\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{j\ell}A_{km}G_{jj}G_{kk}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]-\sum_{k\ell m\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{i\ell}A_{km}mG_{kk}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]\right)\\&\qquad=\frac{\deg_{\mathcal{T}}(i)}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}m^2R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q])\in\mathcal{E}_{2,0}+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]),\end{aligned}$$

其形式与命题 5.7中列出的最后一种情况相同。 □

证明 (5.69)。 我们可以将 (5.69) 改写为

$$\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|+1}}\sum_{jk\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{jk}G_{jk}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]+\mathrm{O}_{\prec}(\Phi_q),\tag{5.71}$$

在 (5.69) 中，对于满足 $k\in\mathbf{i}$ 的各项，我们利用 (5.10) 和 (3.14) 对其进行了上界估计：

$$\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|+1}}\sum_{j\mathbf{i}}^{*}\sum_{k\in\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{jk}|G_{jk}|\frac{N}{d}\Phi_q\right]\prec\mathbb{E}[\Phi_q].\tag{5.72}$$

对于 (5.71)，利用命题 3.5 以及 $\mathcal{T}^{+}=(\mathbf{i}^{+},\ E^{+})=(jk\ell m\mathbf{i}\ E\cup\{j,\ell\}\cup\{k,m\})$，并且 $F_{jk\mathbf{i}}=G_{jk}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}$，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|+1}}\sum_{jk\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{jk}G_{jk}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]\\&=\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+2}d^{|E|}}\sum_{jk\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}G_{jk}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]\\&+\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{\mathbf{i}^{+}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}D_{jk}^{\ell m}(G_{jk}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}})\right]+\mathrm{O}_{\prec}\left(\mathbb{E}[\Phi_q]\right).\end{aligned}\tag{5.73}$$

由于 $\sum_{jk}G_{jk}=0$，且 $\sum_{jk}^{*}G_{jk}\prec N$，右侧的第一项有上界 $\mathbb{E}[\Phi_q]$。对于 (5.73) 右侧的第二项，我们可以将其改写为一个和

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{\mathbf{i}^{+}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^{+}}G_{jk}R_{\mathbf{i}}\sqrt{d-1}D_{jk}^{\ell m}(U_{\mathbf{i}})\right]\\&+\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^{+})}d^{|E^{+}|}}\sum_{\mathbf{i}^{+}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^{+}}D_{jk}^{\ell m}(G_{jk}R_{\mathbf{i}})(1+D_{jk}^{\ell m})U_{\mathbf{i}}\right].\end{aligned}\tag{5.74}$$

(5.74中的第一项，由于 $j$、$k$ 属于 $\mathcal{T}^{+}$的不同连通分支，因此根据命题 5.5，它有 $\mathbb{E}[\Phi_q]$的界。对于 (5.74中的第二项，我们有

$$D_{jk}^{\ell m}(G_{jk}R_{\mathbf{i}})=\sum_{n=1}^{\mathfrak{b}-1}\frac{(\partial_{jk}^{\ell m})^n(G_{jk}R_{\mathbf{i}})}{n!(d-1)^{n/2}}+\mathrm{O}_{\prec}\left(d^{-\mathfrak{b}/2}\right).\tag{5.75}$$

将 (5.75代入 (5.74中的第二项，忽略误差项 $\mathbb{E}[\Phi_q]$后，(5.75中对应于$n$ 的项可表示为

$$\frac{d}{(d-1)^{(n+1)/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}^+}(1+D_{jk}^{\ell m})U_{\mathbf{i}}\right]. \tag{5.76}$$

˜若 $n\geqslant 2$，(5.76) 属于 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\,\mathfrak{d}}$ 其中 $\mathfrak{h}\geqslant 1$。对于式 (5.75) 中对应于 $n=1$ 的项，

$$\partial_{jk}^{\ell m}(G_{jk}R_{\mathbf{i}}) \tag{5.77}$$

是格林函数项的单项式 $R_{\mathbf{i}^+}$ 的线性组合。分两种情况：i）若导数作用于 $R_{\mathbf{i}}$，则 $R_{\mathbf{i}^+}$ 包含格林函数条目 $G_{jk}$。由于 $j$、$k$ 属于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支，根据命题 5.5，相应的项 (5.76) 以 $\mathbb{E}[\Phi_q]$ 为界。ii）若导数作用于 $G_{jk}$，则得到 $R_{\mathbf{i}^+}=-G_{jx}G_{yk}R_{\mathbf{i}}$，其中 $\{x,y\}\in\{\{j,k\},\{\ell,m\},\{j,\ell\},\{k,m\}\}$。除非 $(x,y)=(j,k)$、$(\ell,m)$，否则两对 $j,x$ 和 $y,k$ 中至少有一对位于 $\mathcal{T}^+$ 的不同连通分支。因此，除非 $(x,y)=(j,k)$、$(\ell,m)$，根据命题 5.5，相应的项 (5.76) 以 $\mathbb{E}[\Phi_q]$ 为界。它们对应于这两项

$$\begin{aligned}&-\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}G_{jj}G_{kk}R_{\mathbf{i}}(1+D_{jk}^{\ell m})U_{\mathbf{i}}\right]\\&-\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}G_{j\ell}G_{km}R_{\mathbf{i}}(1+D_{jk}^{\ell m})U_{\mathbf{i}}\right],\end{aligned} \tag{5.78}$$

其中，第一项给出（5.69），而（5.78）中的第二项属于$\mathcal{E}_{0,\,2}$。 □

证明（5.7 <escape>0). 对于（5.70），我们将其分为两项，分别对应于 $k\in[\![N]\!]\setminus\mathbf{i}$ 或 $k\in\mathbf{i}\setminus\{i$</escape> }:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}(AG)_{ii}mR_{\mathbf{i}}'U_{\mathbf{i}}\right]\\&=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}\sum_{k\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{ik}G_{ik}mR_{\mathbf{i}}'U_{\mathbf{i}}\right]\\&+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}\sum_{\mathbf{i},k\in\mathbf{i}\setminus\{i\}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{ik}G_{ik}mR_{\mathbf{i}}'U_{\mathbf{i}}\right].\end{aligned} \tag{5.79}$$

对于右侧的第一项（5.79），利用命题 3.5 以及 $\mathcal{T}^+=(k\ell m\mathbf{i}\ E\cup\{i,\ell\}\cup\{k,m\})$ 和 $F_{k\mathbf{i}}=G_{ik}mR_{\mathbf{i}}'U$，我们得到 $d^{3/2}\mathcal{C}(F,A)/N\prec\Phi_q$ 和

$$\begin{aligned}&\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|+1}}\sum_{k\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{ik}G_{ik}mR_{\mathbf{i}}'U\right]\\&=\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|}}\sum_{k\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}G_{ik}mR_{\mathbf{i}}'U\right]\\&+\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}D_{ik}^{\ell m}(G_{ik}mR_{\mathbf{i}}'U)\right]+\mathrm{O}_{\prec}\left(\mathbb{E}[\Phi_q]\right).\end{aligned} \tag{5.80}$$

由于 $\sum_k G_{ik}=0$，且 $\sum_{k\in[\![N]\!]\setminus\mathbf{i}}G_{ik}\prec 1$，右侧的第一项由 $\mathbb{E}[\Phi_q]$ 界定。对于

(5.80) 右侧的第二项，我们可以将其改写为一个和

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}G_{ik}mR'_{\mathbf{i}}\sqrt{d-1}D_{ik}^{\ell m}(U)\right]\\&+\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}D_{ik}^{\ell m}(G_{ik}mR'_{\mathbf{i}})(1+D_{ik}^{\ell m})U\right].\end{aligned}\tag{5.81}$$

对于（5.81）右侧的第一项，由于 $i$、$k$ 位于 $\mathcal{T}^+$的不同连通分支中，根据命题5.5，它被 $\mathbb{E}[\Phi_q]$ 所界定。对于（5.81）中的第二项，我们有

$$D_{ik}^{\ell m}(G_{ik}mR'_{\mathbf{i}})=\sum_{n=1}^{\mathfrak{b}-1}\frac{1}{n!(d-1)^{n/2}}\left(\partial_{ik}^{\ell m}\right)^n(G_{ik}mR'_{\mathbf{i}})+\mathrm{O}_{\prec}\left(d^{-\mathfrak{b}/2}\right).\tag{5.82}$$

如果导数 $\partial_{ik}^{\ell m}$命中 $m$，它由 $\mathrm{Im}[m]/(N\eta)$ 根据 (4.4 有界，而由此得到的项由 $\mathbb{E}[\Phi_q]$ 有界。$(\partial_{ik}^{\ell m})^n($ $G_{ik}mR_{\mathbf{i}})$ 中剩余的项构成一个关于格林函数项的多项式。将 (5.82) 代入 (5.81) 中的第二项后，(5.82) 中对应于 $n$ 的项产生一个线性组合

$$\frac{d}{(d-1)^{(n+1)/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}^+}(1+D_{ik}^{\ell m})U_{\mathbf{i}}\right].\tag{5.83}$$

˜若 $n\geqslant 2$，(5.83) 属于 $\mathcal{E}_{\mathfrak{h},\,\mathfrak{d}}$ 其中 $\mathfrak{h}\geqslant 1$。对于 (5.82) 中对应于 $n=1$，

$$\partial_{ik}^{\ell m}(G_{ik}mR'_{\mathbf{i}})$$

是由格林函数项的单项式构成的线性组合 $R_{\mathbf{i}^+}$。根据与（5.77）相同的论证，（5.83）要么等于

$$\begin{aligned}&-\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}mG_{ii}G_{kk}R'_{\mathbf{i}}(1+D_{ik}^{\ell m})U_{\mathbf{i}}\right]\\&-\frac{d}{d-1}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}mG_{i\ell}G_{km}R'_{\mathbf{i}}(1+D_{ik}^{\ell m})U_{\mathbf{i}}\right],\end{aligned}\tag{5.84}$$

要么被 $\mathbb{E}[\Phi_q]$ 控制。第一项给出（5.69），第二项属于 $\mathcal{E}_{0,\,2}$。

对于（5.79）右侧的第二项，有两种情况：边 $\{i,k\}\in E$，或者$k\in\mathbf{i}\setminus\{i\}$和 $\{i,k\}\notin E$。对于 $\{i,k\}\in E$ 的情况，若 $A_{\mathcal{T}}A_{ik}=A_{\mathcal{T}}$，则可将（5.79）中的最后一项改写为

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}G_{ik}mR'_{\mathbf{i}}U\right],$$

属于 $\mathcal{E}_{1,\,1}$。

若 $k\in\mathbf{i}\setminus\{i\}$ 且 $\{i,k\}\notin E$，则有两种情况：i) $\{i,k\}$ 位于 $\mathcal{T}$ 的不同连通分支中。ii) $\{i,k\}$ 位于 $\mathcal{T}$ 的同一连通分支中。在情况 i) 下，$\mathcal{T}\cup\{i,k\}$ 仍是一个森林，具有 $\theta(\mathcal{T})-1$个连通分支和 $|E|+1$ 条边。利用（3.14），

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{ik}G_{ik}mR'_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]\\&\prec\frac{\Lambda_{\mathrm{o}}}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}(d-1)^{1/2}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}A_{ik}|U_{\mathbf{i}}|\right]\prec\frac{\sqrt{d}\Lambda_{\mathrm{o}}}{N}\mathbb{E}[U_{\mathbf{i}}]\leqslant\mathbb{E}[\Phi_q].\end{aligned}\tag{5.85}$$

在情形 ii) 中，$i$，$k$ 属于同一个连通分支。由于 $\{i,k\}\notin\mathcal{T}$，$\mathcal{T}\cup\{i,k\}$ 恰好包含一个圈。命题3.8 意味着 $(1/N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|})\sum_{\mathbf{i}}^{*}A_{\mathcal{T}}A_{ik}\prec 1/N$，且在此情形下，同一估计式 (5.85) 仍然成立。

□

## 5.6 命题的证明5.8

命题5.8的证明。 我们将证明，对于任意森林 $\mathcal{T}=(\mathbf{i}\ E)$，以下关系成立。

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}^+}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}^+}]=\frac{C}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}]+\mathrm{O}_{\prec}(\sqrt{d}\mathbb{E}[\Phi_q]),\tag{5.86}$$

其中，图 $\mathcal{T}^+$ 是按命题 5.6 和 5.7 中的构造得到的。然后依次使用关系式（5.86）对 $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{t-1}$、$\cdots$、$\mathcal{T}_1$，得到

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_t)}d^{|E_t|}}\sum_{\mathbf{i}_t}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}_t}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}_t}]=\frac{C}{d^{\mathfrak{h}/2}}\sum_{ijk\ell}^{*}\frac{1}{N^2d^2}\mathbb{E}[A_{ik}A_{j\ell}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}_1}]+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]),\tag{5.87}$$

其中 $U_{\mathbf{i}_1}=P^q\bar{P}^{q-1}$ 或 $U_{\mathbf{i}_1}=\sqrt{d-1}D_{ij}^{k\ell}P^q\bar{P}^{q-1}$。注意， $d^{-\mathfrak{h}/2}$ 会消去（ $\sqrt{d}$ ）中误差项里的 5.86 因子。

为证明（5.86），我们首先注意到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}^+}m^{\mathfrak{d}}(e+D_{\mathcal{T}^+})U_{\mathbf{i}}]\\=&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}^+}(e+D_{\mathcal{T}^+})(m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}})]+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]),\quad e\in\{1,0\}.\end{aligned}\tag{5.88}$$

若 $\mathcal{T}^+$ 由命题 $\mathcal{T}$ 构造而成，其中 5.6，则 $U_{\mathbf{i}^+}=(1+D_{\mathcal{T}^+})U_{\mathbf{i}}$。利用（5.88），我们可以先将（5.86）左侧改写为两项之和

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}^+}(1+D_{\mathcal{T}^+})(m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}})]\\=&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}^+}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}]+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}^+}D_{\mathcal{T}^+}(m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}})].\end{aligned}\tag{5.89}$$

回顾注 3.6 中的结论， $\theta(\mathcal{T}^+)=|\mathbf{i}|$ ，且 $|E^+|=2|E|$。我们可以将（5.89）右侧的第一项改写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}^+}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}]=\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}d^{2|E|}}\sum_{\mathbf{i}\cup_{e\in E}\{j_e,j_e'\}}^{*}\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E}A_{i_ej_e}A_{i_e'j_e'}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}\right]\\=&\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}]+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]),\end{aligned}\tag{5.90}$$

要得到第二行，我们对指标求和 $j_e$， $j_e'$，得到一个因子 $d^{2|E|}$。利用（5.88）和（5.89），由命题3.4可得（5.86），即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}^+}(1+D_{\mathcal{T}^+})(m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}})]\\=&\frac{1}{N^{|\mathbf{i}|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}]+\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}^+}D_{\mathcal{T}^+}(m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}})]+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q])\\=&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}]+\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]).\end{aligned}$$

如果 $\mathcal{T}^+$ 由 $\mathcal{T}$ 按照命题 5.7 中的方式构造，则有三种情况。在第一种情况下 $\mathcal{T}^+ = (jk\ell m\mathbf{i}\ E \cup \{j,\ell\} \cup \{k,m\})$，我们有 $\theta(\mathcal{T}^+) = \theta(\mathcal{T}) + 2$ 以及 $|E^+| = |E| + 2$。如果 $U_{\mathbf{i}^+} = (1 + D_{jk}^{\ell m})U_{\mathbf{i}}$，根据命题 3.5（以及将相关恒等式反向使用），我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{j\ell}A_{km}(1+D_{jk}^{\ell m})(m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}})] \\
&= \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+2}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}jk}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] + \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}jk\ell m}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{j\ell}A_{km}D_{jk}^{\ell m}(m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}})] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]) \\
&= \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|+1}}\sum_{\mathbf{i}jk}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{jk}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]) \\
&= \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]).
\end{aligned} \tag{5.91}$$

若 $U_{\mathbf{i}^+} = \sqrt{d-1}D_{jk}^{\ell m}U_{\mathbf{i}}$，我们注意到

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{j\ell}A_{km}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] = \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]). \tag{5.92}$$

那么对 (5.91) 和 (5.92) 作差，得到

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{j\ell}A_{km}D_{jk}^{\ell m}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] = \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]), \tag{5.93}$$

并且 (5.86) 成立，其中 $C = 0$。

在第二种情形下 $\mathcal{T}^+ = (k\ell m\mathbf{i}\ E \cup \{i,\ell\} \cup \{k,m\})$，其中 $i \in \mathbf{i}$。我们有 $\theta(\mathcal{T}^+) = \theta(\mathcal{T}) + 1$ 并且 $|E^+| = |E| + 2$。若 $U_{\mathbf{i}^+} = (1 + D_{ik}^{\ell m})U_{\mathbf{i}}$，根据命题 3.5 (反向使用其中的恒等式)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{i\ell}A_{km}(1+D_{ik}^{\ell m})m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] \\
&= \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})+1}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}k}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] + \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{k\ell m\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{i\ell}A_{km}D_{ik}^{\ell m}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]) \\
&= \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|+1}}\sum_{k\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{ik}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]) \\
&= \left(1 - \frac{\deg_{\mathcal{T}}(i)}{d}\right)\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]).
\end{aligned} \tag{5.94}$$

若 $U_{\mathbf{i}^+} = \sqrt{d-1}D_{ik}^{\ell m}U_{\mathbf{i}}$，我们注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{i\ell}A_{km}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] \\
&= \left(1 - \frac{\deg_{\mathcal{T}}(i)}{d}\right)\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]).
\end{aligned} \tag{5.95}$$

然后将（5.94）与（5.95）相减，可得

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}A_{i\ell}A_{km}D_{ik}^{\ell m}m^{\mathfrak{d}}U_{\mathbf{i}}] = \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q]), \tag{5.96}$$

且（5.86）成立，其中 $C = 0$。

在最后一种情况下， $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}$，且 $U_{\mathbf{i}^+} = U_{\mathbf{i}}$。无需证明。

对于（5.87）的右侧，利用与（5.91）和（5.92）中相同的论证，我们可以将其改写为$C\mathbb{E}[m^{\mathfrak{d}} P^{q-1}\bar{P}^q] + \mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q])$，如果 $U_{\mathbf{i}_1} = P^q\bar{P}^{q-1}$；如果 $\prec \mathrm{O}\mathbb{E}[\Phi_q]$（ $U_{\mathbf{i}_1} = \sqrt{d-1}D_{ij}^{k\ell}P^q\overline{\bar{P}^{q-1}}$）。断言（5.25）得证。□

# 6 自洽方程的识别

根据命题 $P$ 5.1 生成多项式的过程是明确的，但相当复杂，因此，除了前几阶之外，明确追踪 $P$ 所得的系数颇具挑战性。本节将证明，这些系数（渐近地）接近幂级数 $P_\infty(z,\ w)$ 的系数，该幂级数来自（2.7），并刻画了 Kesten–McKay定律的斯蒂尔切斯变换 $m_d$。

**命题 6.1**。一致地，对于 $z \in \mathbb{C}_+$，多项式 $P(z,\ u) = 1 + zu + u^2 + Q(u)$ 由命题 *5.1*构造，满足

$$P(z, m_d(z)) = \mathrm{O}(d/N),$$

其中 $m_d$ 是 *Kesten–McKay*定律的斯蒂尔切斯变换，由 (2.4)给出。

以下推论由命题6.1得出。它们的证明与 [8, 推论 6.2、推论 6.4],基本相同，因此略去证明。

**推论 6.2**。设 $P$为命题 *5.1*中构造的多项式。则 $P(z,\ w) - P_\infty(z,\ w) = Q(w) - Q_\infty(w)$ 是关于 $w$的幂级数，并且在整个复平面上收敛。其每个系数的阶为 $\mathrm{O}(d/N)$。

**推论 6.3**。由命题 $P$ *5.1* 构造的多项式 满足

$$|\partial_2 P(z, m_d)| \asymp \sqrt{|\kappa| + \eta} + \mathrm{O}(d/N), \quad \partial_2^2 P(z, m_d) = 2 + \mathrm{O}(d^{-1/2}), \tag{6.1}$$

其中 $z = 2 + \kappa + \mathrm{i}\eta$ 或 $z = -2 - \kappa + \mathrm{i}\eta$ 对于 $\eta \leqslant \mathfrak{K}$，$-3/2 \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{K}$，其中常数 $\mathfrak{K}$ 来自 (2.8)　　.

## 6.1 命题 6.1

我们回顾一下，无限 $d$ 正则树的格林函数为

$$G_{ij}^{\mathrm{tree}}(z) = m_d(z)\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{\mathrm{dist}(i,j)}. \tag{6.2}$$

特别地，若 dist$(i,\ j) = 1$，则有 $G_{ij}^{\mathrm{tree}} = -m_d m_{sc}/\sqrt{d-1}$。我们还需要下面这个关于 $m_{sc}$ 和 $m_d$的恒等式，它是对 (2.4) 的重新整理

$$1 = -zm_d + \sum_{j=1}^{N} \frac{A_{ij}}{\sqrt{d-1}}\left(-\frac{m_d m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right). \tag{6.3}$$

为了证明命题 6.1，我们将采用与第 5 节相同的步骤。我们先计算量 $(1 + zm_d)P(z,\ m_d)^{q-1}\bar{P}(z,\ m_d)^q$。

**命题 6.4**。多项式 $P(z,u) = 1 + zu + u^2 + Q(u)$ 在命题 *5.1* 中构造，满足

$$(1 + zm_d)P^{q-1}\bar{P}^q = -(m_d^2 + Q(m_d))P^{q-1}\bar{P}^q + O_{\prec}(\widehat{\Phi}_q), \quad \widehat{\Phi}_q = \frac{d}{N}|P|^{2q-1}. \tag{6.4}$$

我们证明，第 5 节中的所有估计在进行以下替换后仍然成立

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathbf{i})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}]\Rightarrow\frac{1}{N^{\theta(\mathbf{i})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}A_{\mathcal{T}}\widehat{R}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}},\tag{6.5}$$

其中 $\mathcal{T}=(\mathbf{i}\ E)$ 是任意森林（回忆一下 (3.1)）

$$\widehat{G}_{ij}^{\mathcal{T}}=m_d\bigg(-\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\bigg)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(i,j)},\quad \widehat{R}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}=R_{\mathbf{i}}(\{\widehat{G}_{ij}^{\mathcal{T}}\}_{ij\in\mathbf{i}},m_d),\quad \widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}=U_{\mathbf{i}}(m_d,\bar{m}_d).\tag{6.6}$$

我们指出，在 (6.5) 和 (6.6) 中，我们将格林函数条目 $G_{ij}$ 替换为 $d$-正则树 (6.2) 的格林函数 $\widehat{G}_{ij}^{\mathcal{T}}$，并将斯蒂尔切斯变换 $m$ 替换为 $m_d$。如果 $i$、$j$ 属于 $\mathcal{T}$ 的不同连通分支，那么 $\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(i,j)=\infty$，且 $\widehat{G}_{ij}^{\mathcal{T}}=0$。森林 $\mathcal{T}$ 由 $\theta(\mathcal{T})$ 个连通分支组成，每个分支都是一棵树。我们可以将 $\mathcal{T}$ 嵌入到 $\theta(\mathcal{T})$ 个无限 $d$-正则树的副本中，即每个连通分支都嵌入到一棵无限 $d$-正则树中。于是，$\widehat{G}_{ij}^{\mathcal{T}}$ 可以视为由无限 $d$-正则树组成的集合的格林函数。

右侧 (6.5) 的新表达式主要依赖于森林 $\mathcal{T}$。事实上，$\widehat{R}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}$和 $\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}$仅依赖于森林 $\mathcal{T}$，且与指标集 $\mathbf{i}$ 的选择无关。我们可以将 (6.5) 重写为

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathbf{i})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}A_{\mathcal{T}}\widehat{R}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}=\bigg(\frac{1}{N^{\theta(\mathbf{i})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}A_{\mathcal{T}}\bigg)\widehat{R}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}=c_{\mathcal{T}}\widehat{R}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}+\mathrm{O}_{\prec}(\widehat{\Phi}_q).\tag{6.7}$$

其中常数 $c_{\mathcal{T}}$ 来自（3.15）。

**例6.5**。取 $\mathcal{T}=\{\mathbf{i}=\{i,j,k,\ell\},\ E=\{(i,\ j)、(j,\ k)\}\}$ 构成一个森林，其中包含一条长度为二的路径（见图2）和一个单点。于是

$$\widehat{G}_{xx}^{\mathcal{T}}=m_d,\quad x\in\{i,j,k,\ell\},\quad \widehat{G}_{x\ell}^{\mathcal{T}}=0,\quad x\in\{i,j,k\},$$
$$\widehat{G}_{ij}^{\mathcal{T}}=\widehat{G}_{jk}^{\mathcal{T}}=-\frac{m_{\mathrm{sc}}m_d}{\sqrt{d-1}},\quad \widehat{G}_{ik}^{\mathcal{T}}=\frac{m_{\mathrm{sc}}^2m_d}{d-1}.$$

例如，若 $R_{\mathbf{i}}=G_{ii}G_{ij}G_{ik}G_{\ell\ell}$，则 $\widehat{R}_{\mathbf{i}}=m_d^4(-m_{\mathrm{sc}}/\sqrt{d-1})^3$。$\widehat{R}_{\mathbf{i}}$的值仅取决于森林 $\mathcal{T}$，而与指标集 $i\subset[\![N]\!]$的选取无关。若 $R_{\mathbf{i}}=G_{ii}G_{ij}G_{ik}G_{j\ell}$，则 $\widehat{R}_{\mathbf{i}}=0$，因为 $j$、$\ell$ 属于 $\mathcal{T}$和 $\widehat{G}_{j\ell}^{\mathcal{T}}=0$的不同连通分支。若 $U_{\mathbf{i}}=(1+D_{ij}^{k\ell})(P^{q-1}\bar{P}^q)$，则 $\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}=(1+D_{ij}^{k\ell})(P^{q-1}(m_d)\,\bar{P}^q(m_d))=P^{q-1}(m_d)\,\bar{P}^q(m_d)$。在最后一个等式中，我们用到了 $D_{ij}^{k\ell}(P^{q-1}(m_d)\,\bar{P}^q(m_d))=0$。同样，$\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}$的值也与指标集 $i\subset[\![N]\!]$的选取无关。

我们可以将 $\mathcal{T}=(\mathbf{i}\ E)$ 视为 $\theta(\mathcal{T})$ 个无限 $d$-正则树副本构成的子图。然后，我们也可以像第3节中那样进行简单切换：对于每条边 $e=\{i_e,i_e'\}\in E$，引入一棵新的无限 $d$-正则树，并带有一条边 $\{j_e,j_e'\}$。最后，我们将得到 $\theta(\mathcal{T})$ 个无限 $+|E|$ 份 $d$-正则树。我们将其记为 $\mathcal{D}$，其邻接矩阵为 $D$。我们可以将其视为把 $\mathcal{T}$ 嵌入 $\theta(\mathcal{T})$ 个无限 $+|E|$ 份 $d$-正则树中。由于 $\{i_e,i_e'\}$ 和 $\{j_e,j_e'\}$ 属于不同的无限 $d$-正则树，切换后我们仍然有两棵 $d$-正则树。如果对所有 $e\in E$ 的情形都切换每一对 $\{i_e,i_e'\}$ 和 $\{j_e,j_e'\}$，就得到按命题 3.4 构造的图 $\mathcal{T}^+$。这也给出了将 $\mathcal{T}^+$ 嵌入 $\sim\theta(\mathcal{T})+|E|$ 个限 $d$-正则树副本中的一种方式。我们将这个新图记为 $\mathcal{D}$，其邻接矩阵为 $D$，于是 $\widetilde{D}=D-\sum_{e\in E}\xi_{i_ei_e'}^{j_ej_e'}$。见图3。

与（5.5）类似，得益于关系式（6.3），我们有

$$\begin{aligned}(1+zm_d)P^{q-1}\bar{P}^q&=\frac{1}{N(d-1)^{1/2}}\sum_{ij}^{*}A_{ij}\bigg(-\frac{m_dm_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\bigg)P^{q-1}\bar{P}^q\\&=\frac{d}{(d-1)^{1/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_0)}d^{|E_0|}}\sum_{ij}^{*}A_{\mathcal{T}_0}\widehat{R}_{\mathbf{i}_0}^{\mathcal{T}_0}P^{q-1}\bar{P}^q,\end{aligned}\tag{6.8}$$

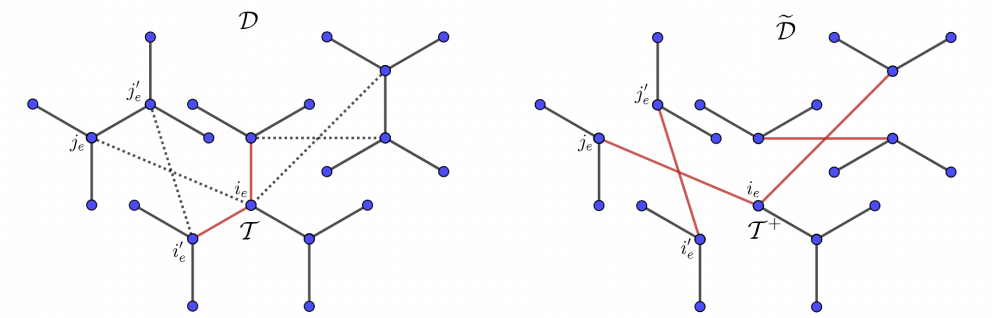



图3：左侧可将 $\mathcal{T}=(\mathbf{i}\ E)$ 视为 $\theta(\mathcal{T})$ 个无限 $d$-正则树 $\mathcal{D}$ 的子图。经过简单切换后，我们在右侧得到了将 $\mathcal{T}^+$ 嵌入 $\theta(\mathcal{T})$ 个无限 $d$-正则树 $\sim\mathcal{D}$ 中的结果。

where $\mathcal{T}_0=(\mathbf{i}_0=ij,E_0=\{i,j\})$ and $\widehat{R}^{\mathcal{T}_0}_{\mathbf{i}_0}=\widehat{G}^{\mathcal{T}_0}_{ij}=-m_d m_{\mathrm{sc}}/\sqrt{d-1}$.

**命题 6.6**。 命题 5.5、5.6、5.7和5.8 在将 $\Phi_q$ 替换为 $\Phi_q$ 以及 $R$，$U$ 替换为 $R$，$U$ 如（6.5）中所示时仍然成立。

固定一个森林 $\mathcal{T}=(\mathbf{i}\ E)$。令 $\mathcal{T}^+=(\mathbf{i}^+,E^+)$ $\xi$ 为命题 3.4 或 3.5 中构造的对象。根据上文图3附近的讨论，我们有两种嵌入：将 $\mathcal{T}$ 嵌入 $\theta(\mathcal{T}^+)$ 个无限 $\sim d$-正则树 $\mathcal{D}$ 中，以及将 $\mathcal{T}^+$ 嵌入 $\theta(\mathcal{T}^+)$ 个无限 $d$-正则树 $\mathcal{D}$ 中。从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{T}^+$ 的简单 $\sim$ 切换也使 $\mathcal{D}$ 成为 $\mathcal{D}$。我们分别将 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}$ 的邻接矩阵记为 $D$ 和 $\widetilde{D}$。格林函数 $\widehat{G}^{\mathcal{T}}$ 定义在顶点集 $\mathbf{i}$ 上，为 $\widehat{G}^{\mathcal{T}}|_{\mathbf{i}}=(D-z)^{-1}|_{\mathbf{i}}$。我们可以通过 $\widehat{G}^{\mathcal{T}}|_{\mathbf{i}^+}:=(D-z)^{-1}|_{\mathbf{i}^+}$ 将它扩展到顶点集 $\mathbf{i}^+$ 上。格林函数 $\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}$ 则由 $\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}|_{\mathbf{i}^+}:=(\widetilde{D}-z)^{-1}|_{\mathbf{i}^+}$ 给出。命题 6.6 的证明关键在于以下命题，该命题指出，$\widehat{G}^{\mathcal{T}}|_{\mathbf{i}^+}$ 和 $\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}|_{\mathbf{i}^+}$ 满足与 $d$- 正则图的格林函数 $G$ 相同的预解式展开。

**命题 6.7**。 固定一个森林 $\mathcal{T}=(\mathbf{i}\ E)$。设 $\mathcal{T}^+=(\mathbf{i}^+,E^+)$ $\xi$ 按命题 3.4 或 3.5 中的构造得到，则

$$\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}\Big|_{\mathbf{i}^+}-\widehat{G}^{\mathcal{T}}\Big|_{\mathbf{i}^+}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(d-1)^{n/2}}\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}\left(-\xi\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}\right)^n\Big|_{\mathbf{i}^+}. \tag{6.9}$$

证明。我们只证明命题 6.7 中 $\mathcal{T}^+$、$\xi$ 按照命题 3.4 的构造得到的情形。在这种情况下，$\mathcal{T}^+=(\mathbf{ij}\cup_{e\in E}\{i_e,j_e\}\cup\{i'_e,j'_e\})$，且 $\xi=\sum_{e\in E}\xi^{j_e j'_e}_{i_e i'_e}$。通过将 $\mathcal{T}$ 视为 $\theta(\mathcal{T})$ 个无限 $d$-正则树的副本的子图，根据上文图3附近的讨论，这也给出了将 $\mathcal{T}^+$ 嵌入 $\theta(\mathcal{T})$ 个无限 $d$-正则树 $\mathcal{D}$ 的 $\sim$，我们分别将 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}$ 的邻接矩阵 $\sim$ 记作 $D$ 和 $D$。然后根据我们的构造，$D=D+\xi$，

$$\widehat{G}^{\mathcal{T}}|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}}=(D-z)^{-1}\Big|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}}=\left(\widetilde{D}+\xi-z\right)^{-1}\Big|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}},\quad \widehat{G}^{\mathcal{T}^+}|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}}=(\widetilde{D}-z)^{-1}\Big|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}}.$$

根据预解式恒等式，我们有

$$\begin{aligned}\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}\Big|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}} - \widehat{G}^{\mathcal{T}}\Big|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}} &= (\widetilde{D}-z)^{-1} - \left(\widetilde{D}+\xi-z\right)^{-1}\Big|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}} \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(d-1)^{n/2}}(\widetilde{D}-z)^{-1}\left(-\xi(\widetilde{D}-z)^{-1}\right)^n\Big|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}} \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(d-1)^{n/2}}\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}\left(-\xi\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}\right)^n\Big|_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

□

命题的证明*6.6*。对于命题 5.5，如果 $R_{\mathbf{i}}$ 至少包含一个非对角格林函数项，$G_{ij}$，且 $i,\ j\in\mathbf{i}$ 位于 $\mathcal{T}$ 的不同连通分支中，那么根据我们的构造 $\widehat{G}^{\mathcal{T}}_{ij}=0=\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}$，并且

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}A_{\mathcal{T}}\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}\widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}=0, \tag{6.10}$$

这说明命题5.5在将 $\Phi_q$ 替换为 $\Phi_q$ 并将 $R,\ U$ 替换为 $R,\ U$ 如（6.5）中所示时仍然成立。

在命题 5.6中，给定一个森林 $\mathcal{T}=(\mathbf{i}\ E)$，我们构造 $\mathcal{T}^+=(\mathbf{ij}\ E^+)$，使得 $E^+=\cup_{e\in E}\{i_e,j_e\}\cup\{i'_e,j'_e\}$，并证明

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}R_{\mathbf{i}}U_{\mathbf{i}}\right]=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}^+}D_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}}(1+D_{\mathcal{T}^+})U_{\mathbf{i}}\right]+\mathrm{O}_{\prec}\left(\Phi_q\right). \tag{6.11}$$

令 $\xi=\sum_{e\in E}\xi^{j_ej'_e}_{i_ei'_e}$。那么根据泰勒展开（3.8），

$$D_{\mathcal{T}^+}G=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(d-1)^{n/2}}G\left(-\xi G\right)^n, \tag{6.12}$$

并且我们进一步将 $D_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}}$ 在（6.11）中展开为由格林函数项构成的单项式的线性组合。命题6.7给出

$$\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}\widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}=\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}\widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}=\left(\widehat{R}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}}+(\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}-\widehat{R}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}})\right)\widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}=(\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}-\widehat{R}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}})\widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}=(\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}-\widehat{R}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}})(1+D_{\mathcal{T}^+})\widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}},$$

第三个等号处，我们利用了 $R_{\mathbf{i}}$ 含有一个非对角项，例如 $G_{ij}$。于是，$i,\ j$ 属于 $\mathcal{T}^+$的不同连通分支，且 $\widehat{R}^{\mathcal{T}^+}{}_{\mathbf{i}}=0$。最后一个等号处，我们利用了 $D_{\mathcal{T}^+}\widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}=0$。若将 $G$ 替换为 $\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}$，则表达式（6.9）和（6.12）相同。因此，忽略可忽略误差项，$(\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}-\widehat{R}^{\mathcal{T}^+}{}_{\mathbf{i}})$ 可由 $D_{\mathcal{T}^+}R_{\mathbf{i}}$ 将 $G$ 替换为 $\widehat{G}^{\mathcal{T}^+}$得到。由此我们得出，$N^{-\theta}{}_{(\mathcal{T})}d^{-|E|}\sum^{*}{}_{\mathbf{i}}\ A_{\mathcal{T}}\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}\widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}=c_{\mathcal{T}}\widehat{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}\widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}+\mathsf{O}\prec(\widehat{\Phi}_q)$是以下形式的项的线性组合

$$c_{\mathcal{T}}\widehat{R}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}^+}\widehat{U}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}^+}=c_{\mathcal{T}^+}\widehat{R}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}^+}\widehat{U}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}^+}=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}A_{\mathcal{T}^+}\widehat{R}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}}\widehat{U}^{\mathcal{T}^+}_{\mathbf{i}^+}+\mathrm{O}_{\prec}\left(\widehat{\Phi}_q\right),$$

与（5.14）中的系数相同。这里 $\widehat{U}^{\mathcal{T}^+}{}_{\mathbf{i}^+}=(1+D_{\mathcal{T}^+})\ \widehat{U}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{i}}$，并且我们使用了 $c_{\mathcal{T}}=c_{\mathcal{T}^+}$ 备注 3.9中的结论。这表明，如果将 $\Phi_q$ 替换为 $\Phi_q$，并将 $R$替换为$U$，$R$，如（6.5）所示，则命题 5.6 成立。

若将 $\Phi_q$ 替换为 $\Phi_q$，并将 $R,\ U$ 替换为 $R,\ U$如（6.5）中所示，则命题 5.7 成立的证明与命题 5.6 的证明类似。因此略去证明。

对于命题5.8，关键估计是关系式（5.86）。我们证明，将 $\Phi_q$ 替换为 $\widehat{\Phi}_q$，并将 $R$，$U$ 替换为 $\widehat{R}$，$\widehat{U}$

$$\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}A_{\mathcal{T}^+}m_d^{\mathfrak{d}}\widehat{U}_{\mathbf{i}^+}^{\mathcal{T}^+}=\frac{C}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}A_{\mathcal{T}}m_d^{\mathfrak{d}}\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}+\mathrm{O}_{\prec}(\widehat{\Phi}_q),$$

我们只讨论如下情形：$\mathcal{T}^+$ 按照命题 5.6 中的方式由 $\mathcal{T}$ 构造。在这种情形下，$C=1$、$\xi=\sum_{e\in E}\xi_{i_e i'_e}^{j_e j'_e}$ 和 $\widehat{U}^{\mathcal{T}^+}{}_{\mathbf{i}^+}=(1+D_\xi)\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}=\widehat{U}^{\mathcal{T}}{}_{\mathbf{i}}$。我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}^+)}d^{|E^+|}}\sum_{\mathbf{i}^+}^{*}A_{\mathcal{T}^+}m_d^{\mathfrak{d}}\widehat{U}_{\mathbf{i}^+}^{\mathcal{T}^+}=c_{\mathcal{T}^+}m_d^{\mathfrak{d}}\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}+\mathrm{O}_{\prec}(\widehat{\Phi}_q)=c_{\mathcal{T}}m_d^{\mathfrak{d}}\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}+\mathrm{O}_{\prec}(\widehat{\Phi}_q)\\&=\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}A_{\mathcal{T}}m_d^{\mathfrak{d}}\widehat{U}_{\mathbf{i}}^{\mathcal{T}}+\mathrm{O}_{\prec}(\widehat{\Phi}_q),\end{aligned}$$

其中我们用到了 $c_{\mathcal{T}}=c_{\mathcal{T}^+}$ 备注 3.9。由此可知，若将 命题 5.8 中的 $\Phi_q$ 替换为 $\widehat{\Phi}_q$，并将 $R$ 替换为 $U$，则 $\widehat{R}$，$\widehat{U}$ 如式（6.5）所示。 □

命题 *6.1* 的证明。以命题 6.6 为输入，按照命题 5.1的相同论证，我们将得到

$$|P(z,m_d)|^{2q}=\mathrm{O}_{\prec}\left(\widehat{\Phi}_q\right),\quad \widehat{\Phi}_q=\frac{d}{N}|P(z,m_d)|^{2q-1},$$

且命题6.1 得证。 □

## 6.2 定理2.2 的证明

本节通过分析命题 2.2 中的高阶矩估计来证明定理 $P$（$z$，$m$（$z$））， 该估计见命题 5.1。我们证明定理 2.2 在 $z$ 接近右边缘 $E=2$时成立。关于左边缘的结论可用相同方法证明。我们构造平移后的谱域

$$\widetilde{\mathbf{D}}:=\{w=\kappa+\mathrm{i}\eta:-3/2\leqslant\kappa\leqslant\mathfrak{K},0<\eta\leqslant 1,N\eta\sqrt{|\kappa|+\eta}\geqslant N^{\mathfrak{a}}\}.\tag{6.13}$$

以下稳定性命题出自 [35,命题 2。11]。

**命题 6.8**。设 $E=2$。假设 $\delta:\mathbf{D}\to\mathbb{R}$ 是一个函数，使得，

$$|P(E+w,m(E+w))|\leqslant\delta(w),\quad w\in\widetilde{\mathbf{D}}.$$

假设 $N^{-2}\leqslant\delta(w)\ll 1$ 对于 $w\in\widetilde{\mathbf{D}}$成立，且 $\delta$ 是 *Lipschitz* 连续的，*Lipschitz* 常数为 $N$；此外，对于每个固定的 $\kappa$，函数 $\eta\mapsto\delta(\kappa+\mathrm{i}\eta)$ 关于 $\eta>0$非增。那么，

$$|m(E+w)-m_d(E+w)|=\mathcal{O}\left(\frac{\delta(w)}{\sqrt{|\kappa|+\eta+\delta(w)}}\right),$$

其中隐含常数与 $N$ 无关。

定理 *2.2* 的证明。 设 $E=2$ 且 $z=E+w$ 满足 $w\in\mathbf{D}$。由于 Kesten-McKay 分布具有平方根行为，

$$\mathrm{Im}[m_d(z)]\asymp\Phi(w):=\begin{cases}\sqrt{|\kappa|+\eta}, & \kappa\leqslant 0,\\ \eta/\sqrt{|\kappa|+\eta}, & \kappa\geqslant 0.\end{cases}$$

~并且注意到 $w \in \mathbf{D}$，我们有

$$\frac{d}{N} \leqslant |\kappa| + \eta, \quad \frac{d^{3/2}}{N}\frac{1}{\sqrt{N\eta}} \leqslant |\kappa| + \eta, \quad \frac{d^{3/2}\Lambda_o}{N} \leqslant |\kappa| + \eta.$$

因此（6.1）给出

$$|\partial_2 P(z, m_d(z))| \asymp \sqrt{|\kappa| + \eta}.$$

于是我们有

$$\mathrm{Im}[m(z)] \lesssim \Phi(w) + |m(z) - m_d(z)|,$$

and

$$\partial_2 P(z, m(z)) = \partial_2 P(z, m_d(z)) + \mathcal{O}(|m(z) - m_d(z)|) = \mathcal{O}(\sqrt{|\kappa| + \eta} + |m(z) - m_d(z)|).$$

采用与 [8, 命题 8.6], 中相同的论证，我们可以首先证明 $|m(z) - m_d(z)| \prec \sqrt{|\kappa| + \eta}$。我们假设存在某个确定性的控制参数 $\Lambda(w)$，使得先验估计成立

$$|m(z) - m_d(z)| \prec \Lambda(w) \lesssim \sqrt{|\kappa| + \eta}.$$

由于 $\Phi(w) \gtrsim \sqrt{|\kappa| + \eta}$ 并且 $\Lambda(w) \prec \sqrt{|\kappa|} + \eta$，（5.3）结合马尔可夫不等式可得 o

$$\begin{aligned} |P(z, m(z))| &\prec \frac{d^{3/2}\Lambda_o}{N} + \frac{1}{N\eta}\left((\Lambda(w) + \Phi(w))\sqrt{|\kappa| + \eta}\right)^{1/2} \\ &\prec \frac{d}{N} + \frac{1}{N\sqrt{\eta}} + \frac{1}{N\eta}\left((\Lambda(w) + \Phi(w))\sqrt{|\kappa| + \eta}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{6.14}$$

其中在最后一行我们使用了 $\Lambda_o \prec 1/\sqrt{d} + 1/\sqrt{N\eta}$和 $d \ll N^{1/3}$。

如果 $\kappa \geqslant 0$，那么 $\Phi(w) = \sqrt{\eta/\sqrt{|\kappa|}} + \eta$，且（6.14）简化为

$$|P(z, m(z))| \prec \frac{d}{N} + \frac{1}{N\eta^{1/2}} + \frac{(|\kappa| + \eta)^{1/4}\Lambda(w)^{1/2}}{N\eta}. \tag{6.15}$$

根据命题 6.8，取 $\delta(w)$，将 (6.15) 的右侧乘以 $N^{\varepsilon}$，其中$\varepsilon$可以任意小，我们得到

$$|m(z) - m_d(z)| \prec \frac{1}{\sqrt{|\kappa| + \eta}}\left(\frac{d}{N} + \frac{1}{N\eta^{1/2}} + \frac{(|\kappa| + \eta)^{1/4}\Lambda(w)^{1/2}}{N\eta}\right). \tag{6.16}$$

通过迭代(6.16)，我们得到

$$|m(z) - m_d(z)| \prec \frac{1}{\sqrt{|\kappa| + \eta}}\left(\frac{d}{N} + \frac{1}{N\eta^{1/2}} + \frac{1}{(N\eta)^2}\right). \tag{6.17}$$

如果 $\kappa \leqslant 0$，那么 $\Phi(w) = \sqrt{|\kappa|} + \eta$ 且 $\Lambda(w) \prec \sqrt{|\kappa| + \eta}$，(6.14) 可简化为

$$|P(z, m(z)| \prec \frac{d}{N} + \frac{(|\kappa| + \eta)^{1/2}}{N\eta}. \tag{6.18}$$

由命题6.8可知，取 $\delta(z)$，令（6.18）右侧乘以 $N^{\varepsilon}$ 任意小的 $\varepsilon$，我们有

$$|m(z) - m_d(z)| \prec \frac{1}{N\eta} + \frac{d}{N\sqrt{|\kappa| + \eta}}. \tag{6.19}$$

断言（2.12）由斯蒂尔切斯变换（6.17）和（6.19）的估计得出，参见 [27,第11]节。

□

# 7 边缘普适性

本节证明随机 $d$-正则图在 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$这一范围内的边缘普适性，此时定理2.2 为极端特征值给出了最优界。

我们的策略基于随机矩阵理论中如今已成为标准的三步法 [21]。从（重缩放后的）邻接矩阵 $H = H(0)$ 出发，该矩阵来自（1.3），我们运行矩阵值布朗运动$H(t)$。利用定理2.2 中的刚性估计，结合 [43], ，我们推得当 $t \gg N^{-1/3}$时，矩阵 $H(t)$具有 GOE 边缘统计；见下文命题7.6 。本节的主要工作是给出比较论证，证明 $H(0)$与 $H(t)$在 $t \gg N^{-1/3}$时具有相同的边缘统计；见下文命题7.8 。

我们回顾约束 GOE $W$ ，它在 [7, 第 2 节中引入。1]它可视为通常的高斯正交系综在行和与列和均为零的矩阵空间上的限制。形式上，$W$ 它是空间 $\mathcal{M}$ 上的中心高斯过程：$= \{H \in \mathbb{R}^{N\times N}\ H = H^*,\ H\mathbf{1} = 0\}$ 其协方差为$\mathbb{E}\langle W,\ X\rangle\langle W,\ Y\rangle = \langle X,\ Y\rangle$，其中 $\langle X,\ Y\rangle : = \frac{N}{2}\mathrm{Tr}(XY)$，其中 $X,\ Y \in \mathcal{M}$。具体而言，其协方差为

$$\mathbb{E}[W_{ij}W_{k\ell}] = \frac{1}{N}\left(\delta_{ik} - \frac{1}{N}\right)\left(\delta_{jl} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N}\left(\delta_{il} - \frac{1}{N}\right)\left(\delta_{jk} - \frac{1}{N}\right). \tag{7.1}$$

下面的结果是由（7.1）和高斯分部积分直接得到的。

**引理 7.1**。 对于约束 *GOE* $W$ ，我们有如下分部积分公式

$$\mathbb{E}[W_{ij}F(W)] = \frac{1}{N^3}\sum_{k\ell}\mathbb{E}[\partial_{ij}^{k\ell}F(W)]. \tag{7.2}$$

接下来，我们定义矩阵值过程

$$H(t) := e^{-t/2}H + \sqrt{1-e^{-t}}\,W, \tag{7.3}$$

其中， $H$ 是根据 $d$-正则图的邻接矩阵在（1.3）中定义的。因此， $H(0) = H$和 $H(\infty) = W$。矩阵 $H(t)$有一个平凡特征值 $\lambda_1(t) = e^{-t/2}d/\sqrt{d-1}$，其特征向量为$\mathbf{1}$。我们将 $H(t)$的其余特征值记为 $\lambda_2(t) \geqslant \lambda_3(t) \geqslant \cdots \lambda_{N-1}(t) \geqslant \lambda_N(t)$，相应的归一化特征向量记为 $\boldsymbol{u}_2(t)\ \boldsymbol{u}_3(t)\ \cdots$、 $\boldsymbol{u}_N(t)$。

我们回顾一下第 $P_\perp = I - \mathbf{1}\mathbf{1}^*/N$ 节中的投影矩阵 2。那么，矩阵 $H(t)$ 和 $P_\perp$ 是可交换的，即 $H(t)P_\perp = P_\perp H(t)$。对于 $z \in \mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Im}[z] > 0\}$，我们定义随时间变化的格林函数如下

$$G(z;t) := P_\perp(H(t) - z)^{-1}P_\perp = \sum_{i=2}^{N}\frac{\boldsymbol{u}_i(t)\boldsymbol{u}_i(t)^\top}{\lambda_i(t) - z},$$

使得 $G(z;t)$ 与 $(H(t) - z)^{-1}$ 在 $P_\perp$ 的像上相一致，即 $\mathbb{R}^N$ 中垂直于$\mathbf{1}$ 的子空间，该子空间承载着 $H(t)$ 的非平凡谱。我们将 $P_\perp H(t)P_\perp$ 的经验特征值分布的斯蒂尔切斯变换记为 $m(z;t)$,

$$m(z;t) = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,G(z;t) = \frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{\lambda_i(t) - z}. \tag{7.4}$$

我们有如下关于定理 2.2 的推论。

**推论 7.2**。 固定常数 $\mathfrak{c} > 0$，并假设 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$。那么，以压倒性概率，*<lemma*

$$|\lambda_2(0) - 2|, |\lambda_N(0) + 2| \prec N^{-2/3},$$

~且对以下范围均一致 $w \in \mathbf{D}$ （回顾 (6.13)），$z = 2 + w$ 或 $z = -2 - \bar{w}$,

$$|m(0; z) - m_d(z)| \prec \left( \frac{1}{N\eta} + \frac{d}{N\sqrt{\eta}} \right).$$

## 7.1 自由卷积

矩阵 $H(t)$ 的渐近特征值密度由经过重缩放的 Kesten–McKay测度与时间 $s = 1-e^{-t}$的半圆律的自由加法卷积所决定。我们回顾文献 [15] 中关于与半圆分布进行自由卷积所得测度的一些性质。半圆密度$\rho_{\mathrm{sc}}(x)$ 由式 (2.5) 给出，而时间 $s$ 处的半圆密度为 $s^{-1/2}\rho_{\mathrm{sc}}(s^{-1/2}x)$。给定定义在 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 $\mu$，我们将其与方差为 $s$ 的半圆分布的自由卷积记为 $\mu_s$。$\mu$ 和 $\mu_s$ 的斯蒂尔切斯变换分别为 $G_\mu(z) = \int \mathrm{d}\mu(x)$ $_{x-z}$ 和 $G_{\mu_s}(z) = \int \mathrm{d}\mu_s(x)$ $_{x-z}$。于是有以下结论 [15]。 —— ——

1. 我们将集合 $U_s = \{z \in \mathbb{C}_+ \colon \int \mathrm{d}^{\mu\ x}_{|z-x|^2} < \frac{1}{s}\}$() 记作。于是 $z \mapsto z - sG_\mu(z)$ 是一个同胚 fro m $U_s$ 到 $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$，并且从 $U_s$ 到 $\mathbb{C}_+$是共形映射。我们将其逆映射记为 $F_{\mu_s} \colon \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \mapsto U_s$。2. $\mu_s$ 的斯蒂尔切斯变换由 $G_\mu(z) = G_{\mu_s}(z - sG_\mu(z))$刻画，对任意 $z \in U_s$均成立。

$W$ 的渐近特征值密度是半圆密度 $\rho_{\mathrm{sc}}(x)$，而 $\sqrt{1-e^{-t}}\,W$ 的渐近特征值密度是时间 $s = 1 - e^{-t}$下的半圆密度。$H(t)$的渐近特征值密度是重缩放的 Kesten–McKay定律 $\mu(\mathrm{d}x) = e^{t/2}\rho_d(e^{t/2}x)\mathrm{d}x$ 在时间 $e^{-t}$ 下与时间 $1 - e^{-t}$下的半圆密度的自由卷积。我们将其密度记为 $\rho_d(x; t)$，将其斯蒂尔切斯变换记为 $m_d$ $(z; t) = \int {}^{\rho_d(x;t)}_{x-z}\, \mathrm{d}x$。由于 $G_\mu(e^{-t/2}z) = e^{t/2}m_d(z)$，由上述 (i) 和 (ii) 可推得

$$m_d(\xi_d(z; t); t) = e^{t/2}m_d(z), \tag{7.5}$$

其中

$$\xi_d(z; t) := e^{-t/2}z - e^{t/2}(1 - e^{-t})m_d(z) = e^{-t/2}z - (1 - e^{-t})m_d(\xi_d(z; t); t) \tag{7.6}$$

是从集合 $\{z \in \mathbb{C}_+ \colon \int {}^{\rho_d(x)}_{|x-z|^2}\, \mathrm{d}x \leqslant {}^{1}_{e^t-1}\}$ 到 $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$的一个同胚。为了确定测度 $\rho_d(t;\ x)$ 的支撑集，我们注意到存在 $z_d^{\pm}(t) \in \mathbb{R}$，使得 $\{z \in \mathbb{C}_+ \colon \int \overline{{}^{\rho_d(x)}_{|x-z|^2}\, \mathrm{d}x} = {}^{1}_{e^t-1}\}$ 由区间 $(-\infty, z_d^-(t)] \cup [z_d^+(t)\ \infty)$ 以及一条从 $z_d^-(t)$ 到 $z_d^+(t)$ 的弧 $\mathcal{C}$组成。这两个端点 $z_d^{\pm}(t) \in \mathbb{R}$分别是满足以下条件的最大和最小实数解：

$$\int \frac{\rho_d(x)}{|x - z|^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{e^t - 1} \quad \Leftrightarrow \quad m_d'(z) = \frac{1}{e^t - 1}. \tag{7.7}$$

因此，测度 $\rho_d(x; t)$ 的右边缘和左边缘分别为

$$E_d^{\pm}(t) = \xi_d(t; z_d^{\pm}(t)) = e^{-t/2}z_d^{\pm}(t) - e^{t/2}(1 - e^{-t})m_d(z_d^{\pm}(t)). \tag{7.8}$$

回顾命题 6.4，$m_d(z)$ 满足函数方程

$$1 + zm_d(z) + m_d^2(z) + Q(m_d(z)) = \mathrm{O}(d/N), \tag{7.9}$$

下一个命题指出，$m_d(z; t)$ 满足类似的方程；我们还刻画了边随时间 $\partial_t E_d^{\pm}(t)$ 的变化。

**命题 7.3.** 采用定理 2.2中的假设，并回顾 $m_d(z; t)$，它来自 (7.5)。它满足以下方程

$$1 + zm_d(z; t) + m_d^2(z; t) + Q(e^{-t/2}m_d(z; t)) = \mathrm{O}(d/N). \tag{7.10}$$

并且谱边缘 $E_d^{\pm}(t)$ 满足

$$\partial_t E_d^{\pm}(t) = \frac{e^{-t/2}}{2} Q'(e^{-t/2} m_d(E_d^{\pm}; t)) + \mathrm{O}\left(\sqrt{\frac{d}{N}}\right). \tag{7.11}$$

证明。令 $z$ 为 $\xi_d(z;t)$ 在 (7.9) 中，并利用关系式 (7.5)

$$1 + z e^{-t/2} m_d(\xi_d(z;t);t) + e^{-t} m_d^2(\xi_d(z;t);t) + Q(e^{-t/2} m_d(\xi_d(z;t);t)) = \mathrm{O}(d/N). \tag{7.12}$$

根据（7.6）中对 $\xi_d$（$z$； $t$）的定义，我们有

$$\xi_d(z;t) + (1 - e^{-t}) m_d(\xi_d(z;t);t) = z e^{-t/2},$$

并且 (7.12) 可简化为

$$1 + z m_d(z;t) + m_d^2(z;t) + Q(e^{-t/2} m_d(z;t)) = \mathrm{O}(d/N),$$

即（7.10）。

通过对等式两边求时间导数，并利用关系式（7.8）和（7.7），我们得到

$$\partial_t E_d^{\pm}(t) = -\frac{1}{2}\left(e^{-t/2} z_d^{\pm}(t) + (e^{t/2} + e^{-t/2}) m_d(z_d^{\pm}(t))\right) = -\frac{1}{2}\left(E_d^{\pm}(t) + 2 m_d(E_d^{\pm}(t);t)\right), \tag{7.13}$$

其中，最后一个等式用到了 (7.8) 和 $e^{t/2} m_d(z_d^{\pm}(t)) = m_d(E_d^{\pm}(t);t)$。由于 $m_d(z;\, t)$ 在边 $E_d^{\pm}(t)$ 处具有平方根行为。令 $z = E_d^{\pm}(t) + w$ with $w \in \widetilde{\mathrm{D}}$（回忆 (6.13)），则 $|m_d(z;t) - m_d(E_d^{\pm}(t);t)| \asymp \sqrt{|w|}$。

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}(d/N) &= \left(1 + u m_d(u;t) + m_d^2(u;t) + Q(e^{-t/2} m_d(u;t))\right)\Big|_{u=E_d^{\pm}(t)}^{u=z} \\
&= (m_d(z,t) - m_d(E_d^{\pm}(t),t))\left(E_d^{\pm}(t) + 2 m_d(E_d^{\pm}(t),t) + e^{-t/2} Q'(e^{-t/2} m_d(E_d^{\pm}(t);t))\right) \\
&\quad + \mathrm{O}(|w| + |m_d(z,t) - m_d(E_d^{\pm}(t),t)|^2).
\end{aligned}$$

通过重新排列可得，

$$E_d^{\pm}(t) + 2 m_d(E_d^{\pm}(t),t)) + e^{-t/2} Q'(e^{-t/2} m_d(E_d^{\pm}(t);t) = \mathrm{O}\left(\frac{d}{N\sqrt{|w|}} + \sqrt{|w|}\right). \tag{7.14}$$

取 $|w| \asymp d/N$，即可使右侧最小，此时右侧变为 $\mathrm{O}(\sqrt{d/N})$。将 (7.11) 代入 (7.14)，即可得到断言 (7.13)。□

## 7.2 刚性与 $H(t)$的边缘普适性

本节汇总关于格林函数 $G(z;t)$ 和斯蒂尔切斯变换$m(z;\, t)$ 的一些估计，其中 $H(t)$，并陈述当 $H(t)$ 且 $t \gg N^{-1/3}$ 时的边缘普适性结果。本节中的所有结论和估计均可直接由 [1, 18, 43] 得出。

对于足够正则的初始数据，已有研究证明，在短时间后，(7.3) 的谱边缘处的特征值统计与高斯正交系综一致。该定理的一个修改版本在 [1]，中得到证明，其假设初始数据充分接近一个良好剖面。为使用这些结果，我们需要将$H(0)$ 限制在一个满足最优刚性的子集上。记 $\mathcal{A}$ 为满足 (6.17) 和 (6.19) 在边缘处成立的稀疏随机矩阵 $H$集合 $\pm 2$:

$$\mathcal{A} := \{H : (2.11) \text{ holds.}\}. \tag{7.15}$$

根据定理 2.2，我们知道该事件以压倒性概率成立。

首先，以推论7.2的刚性估计为输入，关于斯蒂尔切斯变换的刚性估计$m(z;\ t)$ 对 $H(t)$ 可由 [1, 43]推出。

**命题 7.4**。 固定常数 $\mathfrak{c} > 0$ 和 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$。对于任意时间 $0 \leqslant t \ll 1$，令 $L_t = E_d^+(t)$取自 (7.8)，以压倒性概率有

$$|\lambda_2(t) - L_t|, |\lambda_N(t) + L_t| \prec N^{-2/3},$$

$a$ 并且对任意 $w = \kappa + \mathrm{i}\eta \in \mathbf{D}$ (回顾 (6.13))，以及 $z = L_t + w$ 或 $-L_t - \bar{w}$ ，

$$|m(z;t) - m_d(z;t)| \prec \left(\frac{1}{N\eta} + \frac{d}{N\sqrt{\eta}}\right), \tag{7.16}$$

其中 $m(z;\ t)$ 由 (7.4) 定义，是斯蒂尔切斯变换，而 $m_d(z;\ t)$ 定义为 (7.5)。

<escape>利用推论 7.2 中的刚性估计以及定理 $H$(0) 中关于格林函数矩阵元的估计 $H(t)$ 在 $t > 0$ 下关于格林函数逐矩阵元的估计，可通过类似于定理 [18, 2.1] 的证明中的论证得到。</escape>

**命题 7.5**。 固定常数 $\mathfrak{c} > 0$ 并假设 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$。对于任意时间 $0 \leqslant t \ll 1$，令$L_t = E_d^+(t)$ 来自 (7.8)，以压倒性概率有

$$|G_{ij}(z;t) - \delta_{ij} m_d(z;t)| \prec \frac{1}{d^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{N\eta}},$$

对任意 $w = \kappa + \mathrm{i}\eta \in \mathbf{D}$，以及 $z = L_t + w$ 或 $-L_t - \bar{w}$，均一致成立。

接下来我们证明以下定理。该定理指出，对于时间 $t \gg N^{-1/3}$ ，在以 $H(t)$ 的 $H(0) \in \mathcal{A}$ 为条件时，其极端特征值的涨落服从特雷西-维多姆分布。对于 $H(t)$ 的边缘普适性，在 $t \gg N^{-1/3}$ 的情形下，可由以下 [43]给出的结果推出。

命题 *7.6.* 固定常数 $\mathfrak{c} > 0$，并假设 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$。令 $\mathfrak{d}, \mathfrak{e} > 0$ 为充分小的常数，设 $t = N^{-1/3+\mathfrak{d}}$，并令 $L_t = E_d^+(t)$ 如 *(7.8)* 所定义。令 $H(t)$ 如 *(7.3)* 所定义，它有一个特征值 $\lambda_1(t) = e^{-t/2} d/\sqrt{d} - 1$，其余特征值记为 $\lambda_2(t) \geqslant \lambda_3(t) \geqslant \cdots \lambda_{N-1}(t) \geqslant \lambda_N(t)$。固定 $k \geqslant 1$ 和 $s_1$、$s_2$、$\cdots$、$s_k \in \mathbb{R}$。那么

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{H(t)}\left(N^{2/3}(\lambda_{i+1}(t) - L_t) \geqslant s_i, 1 \leqslant i \leqslant k\right) \\ &= \mathbb{P}_{\mathrm{GOE}}\left(N^{2/3}(\mu_i - 2) \geqslant s_i, 1 \leqslant i \leqslant k\right) + + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{e}}), \end{aligned} \tag{7.17}$$

其中 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_N$ 是高斯正交系综的特征值。类似的结论也适用于最小特征值。

证明。取较小的 $\mathfrak{d} > 0$、$\eta^* = N^{-2/3+\mathfrak{d}/2}$ 和 $r = N^{-2/3+10\mathfrak{d}}$。令 $\mathbb{B}(r)$ 为以 0 为中心、半径为 $r$ 的圆盘，且 $w = \kappa + \mathrm{i}\eta \in \mathbb{B}(r) \cap \mathbf{D}$ 来自 (6.13)。对于任意 $H \in \mathcal{A}$ （回忆 (7.15)），由 $\mathcal{A}$ 的定义关系，即 (2.11)，我们有对于 $w \in \mathbb{B}(r) \cap \mathbf{D}$

$$|m(z) - m_d(z)| \prec \frac{1}{N\eta} + \frac{d}{N\sqrt{\kappa + \eta}} \lesssim \frac{1}{N\eta},$$

已给出 $5\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$。此外，(2.11) 还蕴含 (2.12)，因此 $\lambda_2(0) - 2 \leqslant N^{-2/3+\mathfrak{d}/2}/2 = \eta^*/2$。于是，$H$ 满足带参数 $\eta^*$的 [1, 假设 4.1] 。我们指出， [1, (4.2) 假设 4.1], 中还有一项额外假设，要求当 $z$ 与谱边缘 2 保持正距离时，对 $m(z) - m_d(z)$给出一个界。该假设仅用于处理 [1, 断言 4.13]中的误差项。这个误差项源自 Dyson 布朗运动中的势 $V$。然而，在我们的情形下， $V = 0$，且 [1, 断言 4.13] 中的误差项消失。定理 [1, 定理 6.1] 适用于上述的 $t = N^{-1/3+\mathfrak{d}}$ 。该结果给出了 $H(t)$的极端特征值的极限分布，由此可得定理 7.6。

□

**注 7.7**。 通过对 *[1, 43]*,命题 *7.6* 中关于 *Dyson* 布朗运动的分析作适当修改， $k$ 同样适用于 $N^{2/3}(\lambda_2(t) - L_t$与 $-\lambda_N(t) + L_t)$ 最大和最小特征值的联合分布是一对相互独立的 *Tracy–Widom*$_1$ 分布。尤其是，这意味着在与前一个命题相同的假设下，

## 7.3 格林函数比较

本节将证明关于 $H$（$t$）的谱边缘特征值统计的以下短时间比较结果。

命题 *7.8.* 固定常数 $\mathfrak{c} > 0$并假设 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$。令 $\mathfrak{d}, \mathfrak{e} > 0$为充分小的常数，并设 $t = N^{-1/3+\mathfrak{d}}$。令 $H(t)$ 如 *(7.3)* 所示，其有一个特征值$\lambda_1(t) = e^{-t/2}d/\sqrt{d-1}$，并将其其余特征值记为 $\lambda_2(t) \geqslant \lambda_3(t) \geqslant \cdots \lambda_{N-1}(t) \geqslant \lambda_N(t)$。固定 $k \geqslant 1$和 $s_1, s_2, \cdots, s_k \in \mathbb{R}$。那么

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_H\left(N^{2/3}(\lambda_{i+1}(0)-2) \geqslant s_i, 1 \leqslant i \leqslant k\right) \\ &= \mathbb{P}_{H(t)}\left(N^{2/3}(\lambda_{i+1}(t)-L_t) \geqslant s_i, 1 \leqslant i \leqslant k\right) + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{e}}), \end{aligned} \tag{7.18}$$

其中 $L_t = E_d^+($ $t)$ 定义见引理*7.8*。对于最小特征值，也有类似的结论 *s.*

定理 *1.1* 的证明。 结合命题 7.6和7.8。 □

**注 7.9**。 命题 *7.8* 的证明可以修改，从而证明 $k$ 的最大和最小特征值的 $H$ 与 $H(t)$ 的联合分布渐近相同。将其与注 *7.7* 结合即可得到推论 *1.2*。

命题 7.8 可由下面关于斯蒂尔切斯变换函数乘积的比较定理推出，参见 [40]。

命题 *7.10*。固定常数 $\mathfrak{c} > 0$和 $N^{\mathfrak{c}} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathfrak{c}}$。令 $\mathfrak{d}, \delta > 0$充分小，设$t = N^{-1/3+\mathfrak{d}}$和 $\eta_0 = N^{-2/3-\delta}$，并令 $L_t = E_d^+(t)$ 取自 （*7.8*）。令 $F\colon \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$为固定的光滑测试函数。那么对于 $E_1, E_2, \cdots, E_k = O(N^{-2/3})$，以及 $w = y + i\eta_0$，有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_H\left[F\left(\left\{\mathrm{Im}\left[N\int_{E_i}^{N^{-2/3+\delta}} m(L_0+w;t)\,\mathrm{d}y\right]\right\}_{i=1}^k\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_{H(t)}\left[\left\{F\left(\mathrm{Im}\left[N\int_{E_i}^{N^{-2/3+\delta}} m(L_t+w;t)\,\mathrm{d}y\right]\right\}_{i=1}^k\right)\right] + \mathrm{O}\left(\frac{N^{1/3+C\delta}t}{d^{1/2}}\right). \end{aligned} \tag{7.19}$$

在证明命题 7.10之前，我们先陈述一些有用的估计，这些估计将在本节余下部分反复使用。

回顾 $H(t) = e^{-t/2}H + \sqrt{1-e^{-t}}W$来自 （7.3）。我们用记号 $\partial_{ij}^{k\ell}$作用于关于$H(t)$的函数上，例如 $G(t)$ 或 $m(t)$，表示关于 $H(t)$的方向导数。因此，根据链式法则，我们有

$$\frac{\partial}{\partial H}F(H(t)) = e^{-t/2}\,\partial F(H(t)), \qquad \frac{\partial}{\partial W}F(H(t)) = \sqrt{1-e^{-t}}\,\partial F(H(t)).$$

**命题 7.11**。 调整命题 *7.10*中的假设，并令 $L_t = E_d^+(t)$取自 (7.8)。对于任意 $w = y + \mathrm{i}\eta$，若满足 $|y| \leqslant N^{-2/3+\delta}$， $\eta_0 = N^{-2/3-\delta}$以下估计以压倒性概率成立

$$|\,\mathrm{Im}[m(L_t+w;t)]| \leqslant N^{-1/3+2\delta}, \quad \max_a |\,\mathrm{Im}[G_{aa}(L_t+w;t)]| \leqslant N^{-1/3+3\delta}, \tag{7.20}$$

$$|\partial_w m(L_t+w;t)| \leqslant N^{1/3+3\delta}, \quad |\partial_w G_{ab}(L_t+w;t)| \leqslant N^{1/3+3\delta}, \tag{7.21}$$

*and*

$$\max_a |G_{aa}(L_t+w;t)| \leqslant 2, \quad \max_{a\neq b} |G_{ab}(L_t+w;t)| \leqslant \frac{N^\delta}{\sqrt{d}}. \tag{7.22}$$

令 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} = \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\cdots\partial_{\xi_b}$ 如定义 3.3 所述，且 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\xi}) \subset \mathbf{i}$。对于 $b \geqslant 1$ 斯蒂尔切斯变换 $m(z;\ t)$ 的导数满足

$$\partial_{\boldsymbol{\xi}} m(L_t+w;t) \leqslant N^{-2/3+4\delta}. \tag{7.23}$$

命题的证明 7.11。令 $0 \leqslant \mathfrak{a} \leqslant \delta/2$ 和 $w' = y + N^{-2/3+\mathfrak{a}}\mathbf{i}$，则容易看出 $w' \in \widetilde{\mathbf{D}}$（回顾 6.13），而命题 7.4 给出

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}[m(L_t+w';t)] &\leqslant \operatorname{Im}[m_d(L_t+w';t)] + \mathrm{O}_\prec\left(\frac{1}{N\operatorname{Im}[w']}\right)\\ &\lesssim \sqrt{|w'|} + \mathrm{O}_\prec\left(\frac{1}{N\operatorname{Im}[w']}\right) \lesssim \frac{N^{\delta/2}}{N^{1/3}},\end{aligned}$$

第二行用到了 $m_d(z;t)$ 在边 $L_t$ 附近平方根行为这一事实。对于对角格林函数条目，由于特征向量的非局域化

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}[G_{aa}(L_t+w;t)] &= \sum_{i=2}^N \frac{\operatorname{Im}[w](\boldsymbol{u}_i(t)\boldsymbol{u}_i(t)^\top)_{aa}}{|L_t+w-\lambda_\alpha(t)|^2} \leqslant \frac{N^\delta}{N}\sum_{i=2}^N \frac{\operatorname{Im}[w]}{|L_t+w-\lambda_\alpha(t)|^2}\\ &= N^\delta \operatorname{Im}[m(L_t+w;t)] \leqslant N^{-1/3+3\delta},\end{aligned}$$

以压倒性概率成立。

$m(z;t)$ 的导数满足

$$|\partial_z \operatorname{Im}[m(z;t)]| \leqslant |\partial_z m(z;t)| \leqslant \frac{\operatorname{Im}[m(z;t)]}{\operatorname{Im}[z]}, \tag{7.24}$$

这意味着，对于任意 $M \geqslant 1$，$\operatorname{Im}[m(E+\mathrm{i}\eta/M;\ t) \leqslant M\operatorname{Im}[m(E+\mathrm{i}\eta;\ t)]$。特别地，只要 $\mathfrak{a} \leqslant \delta/2$，我们就有 $\operatorname{Im}[m(L_t+w;\ t)] \leqslant N^{\mathfrak{a}+\delta}\operatorname{Im}[m(L_t+w';\ t)] \leqslant N^{\mathfrak{a}+\delta}N^{-1/3+\delta/2} \leqslant N^{-1/3+2\delta}$，且该结论以压倒性概率成立。

再次利用（7.24），$\operatorname{Im}[m(L_t+w;\ t)] \leqslant N^{-1/3+2\delta}$ 以压倒性概率推出 $|\partial_z m(L_t+w;\ t)| \leqslant N^{1/3+3\delta}$。对于格林函数的导数，由 Ward 恒等式（4.1）和特征向量的非局域化可推出

$$\begin{aligned}|\partial_w G_{ab}(L_t+w;t)| &\leqslant \sum_{i=1}^N |G_{ai}(L_t+w;t)G_{bi}(L_t+w;t)|\\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N (|G_{ai}(L_t+w;t)|^2 + |G_{bi}(L_t+w;t)|^2)\\ &\prec \frac{\operatorname{Im}[m(L_t+w;t)]}{\eta} \leqslant N^{1/3+3\delta},\end{aligned}$$

以压倒性概率。

逐项估计（7.22）由此得出

$$\begin{aligned}G_{ab}(L_t+w;t) &= G_{ab}(L_t+w';t) - \int_w^{w'} \partial_z G_{ab}(L_t+w;t)\mathrm{d}w\\ &= G_{ab}(L_t+w';t) + \mathrm{O}\left(|w-w'|N^{1/3+3\delta}\right) \leqslant \mathbf{2}(a=b) + \frac{N^\delta}{\sqrt{d}},\end{aligned}$$

其中我们使用了命题 7.5 给出的格林函数项的逐项界。

$m(z;\,t)$ 关于 $=(1/N)$ 的导数 $\partial_{\boldsymbol{\xi}} m(z,t)$ $\sum_{k=1}^{N} G_{kk}(z;\,t)$ 是以下形式的项的线性组合

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G_{kx_1}G_{x_1x_2}\cdots G_{x_bk}$$

其中 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_b \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\xi})$. 利用界（7.20）、（7.22）和 Ward 恒等式，可得（7.23）

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G_{kx_1}G_{x_1x_2}\cdots G_{x_bk}\right| &\lesssim \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|G_{kx_1}||G_{x_bk}| \leqslant \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}|G_{kx_1}|^2+|G_{x_bk}|^2\\ &= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{Im}[G_{x_1x_1}]+\operatorname{Im}[G_{x_bx_b}]}{N\eta_0} \lesssim N^{-2/3+4\delta}.\end{aligned}$$

□

作为命题的一个简单推论 7.11，对于任意 $w=y+\mathrm{i}\eta$ 满足 $|y|\leqslant N^{-2/3+\delta}$，$\eta_0=N^{-2/3-\delta}$ 根据 Ward 恒等式（4.1）

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^2}\sum_{ij}|G_{ij}(L_t+w;t)|^2 &= \frac{\operatorname{Im}[m(L_t+w;t)]}{N\eta} \leqslant N^{-2/3+3\delta},\\ \frac{1}{N^2}\sum_{ij}|G_{ij}(L_t+w;t)| &\leqslant \sqrt{\frac{\operatorname{Im}[m(L_t+w;t)]}{N\eta}} \leqslant N^{-1/3+3\delta/2},\end{aligned} \tag{7.25}$$

以压倒性概率。

## 7.4 命题证明 7.10

为简化记号，我们只证明 $k=1$ 的情形；一般情形可以用相同的方法证明。令

$$X_t=\operatorname{Im}\left[N\int_E^{N^{-2/3+\delta}} m(L_t+y+\mathrm{i}\eta_0;t)\,\mathrm{d}y\right].$$

我们将证明

$$|\mathbb{E}[F(X_t)]-\mathbb{E}[F(X_0)]| \leqslant \frac{N^{1/3+C\delta}t}{d^{1/2}}. \tag{7.26}$$

我们注意到（7.23）意味着

$$|\partial_{\boldsymbol{\xi}} X_t| = \left|\operatorname{Im}\left[N\int_E^{N^{-2/3+\delta}} \partial_{\boldsymbol{\xi}} m(L_t+w;t)\mathrm{d}y\right]\right| \lesssim N^{-1/3+5\delta}, \tag{7.27}$$

以压倒性概率成立。

**命题 7.12**。 调整命题 7.10 中的假设，令 $L_t=E_d^+(t)$ 取自 (7.8)。令 $w=y+\mathrm{i}\eta_0$ 满足 $\eta_0=N^{-2/3-\delta}$ 且 $z=L_t+w$，我们有以下估计

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[F(X_t)] = \mathbb{E}\left[F'(X_t)\operatorname{Im}\left(\sum_{ij}\dot{H}_{ij}(t)G_{ij}(t)-\frac{N}{2}Q(e^{-t/2}m(t))\right)\right]\Bigg|_{y=E}^{y=N^{-2/3+\delta}}\\ +\mathrm{O}\left(\frac{N^{10\delta+1/3}}{d^{1/2}}\right),\end{aligned} \tag{7.28}$$

并且对任意 $|y| \leqslant N^{-2/3+\delta}$，该估计一致成立，

$$\mathbb{E}\left[F'(X_t)\operatorname{Im}\left(\frac{1}{N}\sum_{ij}\dot{H}_{ij}(t)G_{ij}(t)-\frac{1}{2}Q(e^{-t/2}m(t))\right)\right]\leqslant\frac{N^{8\delta}}{N^{2/3}d^{1/2}}. \tag{7.29}$$

$\mathbb{E}[F(X_t)]$ 关于时间 $t$ 的导数为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[F(X_t)]=\mathbb{E}\left[F'(X_t)\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[F'(X_t)\operatorname{Im}\int_E^{N^{-2/3+\delta}}\left(N\sum_{ij}\dot{H}_{ij}(t)\frac{\partial m(t)}{\partial H_{ij}(t)}+\dot{L}_t\sum_{ij}G_{ij}^2(t)\right)\mathrm{d}y\right]\\
&=\mathbb{E}\left[F'(X_t)\operatorname{Im}\int_E^{N^{-2/3+\delta}}\left(-\sum_{ijk}\dot{H}_{ij}(t)G_{ik}(t)G_{jk}(t)+\dot{L}_t\sum_{ij}G_{ij}^2(t)\right)\mathrm{d}y\right],
\end{aligned} \tag{7.30}$$

其中，我们分别用 $G(t)$ 和 $m(t)$ 表示 $G(L_t+y+\mathrm{i}\eta_0;t)$ 和 $m(L_t+y+\mathrm{i}\eta_0;t)$。

为了估计右侧 (7.30) 的第二项，关键是计算 $L_t$ 的时间导数，其由以下命题给出。

**命题 7.13.** 采用命题 *7.10*中的假设。以压倒性概率，对任意 $w=y+\mathrm{i}\eta_0$，且 $|y|\leqslant N^{-2/3+\delta}$，$\eta_0=N^{-2/3-\delta}$

$$\left|\partial_t L_t-\frac{e^{-t/2}}{2}Q'(e^{-t/2}m(L_t+w;t))\right|\leqslant\frac{N^{4\delta}}{N^{1/3}\sqrt{d}}, \tag{7.31}$$

其中，$L_t=E_d^+(t)$ 由命题 *7.3*构造。

命题的证明　命题 *7.13*。我们回顾命题 7.3，谱边缘的导数 $L_t$ 满足 es

$$\partial_t L_t=\frac{e^{-t/2}}{2}Q'(e^{-t/2}m_d(L_t;t))+\mathrm{O}\left(\sqrt{\frac{d}{N}}\right). \tag{7.32}$$

设 $w'=y+N^{-2/3+\mathfrak{a}}\mathrm{i}$，那么很容易看出 $w'\in\widetilde{\mathbf{D}}$（回忆 6.13）。由（7.20）以及刚性估计（7.16）

$$\begin{aligned}
&|m(L_t+w;t)-m_d(L_t;t)|\leqslant|m(L_t+w';t)-m(L_t+w;t)|\\
&+|m_d(L_t+w';t)-m(L_t+w';t)|+|m_d(L_t+w';t)-m_d(L_t;t)|\\
&\leqslant|w'-w|N^{1/3+3\delta}+\mathcal{O}_{\prec}\left(\frac{1}{N\operatorname{Im}[w']}\right)+\sqrt{|w'|},
\end{aligned}$$

对于最后一行中的第一项，我们使用了 $|\partial_z m(L_t+y+\mathrm{i}\eta;t)|\leqslant N^{1/3+3\delta}$ 对 $\eta\geqslant N^{-2/3-\delta}$（来自（7.21））；对于最后一行中的最后一项，我们利用了 $m_d(z;t)$的平方根行为：靠近谱边缘时，我们有 $|m_d(L_t+w';t)-m_d(L_t;t)|\lesssim|w'|^{1/2}\lesssim N^{-1/3+\delta/2}$。因此可得

$$|m(L_t+w;t)-m_d(L_t;t)|\leqslant\frac{N^{4\delta}}{N^{1/3}}, \tag{7.33}$$

以压倒性概率成立。将（7.33）代入（7.32），并利用 $Q'(m)$ 是关于 $m$ 的有限多项式，且其系数有界于 $\mathcal{O}_{\prec}(d^{-1/2})$，我们得出

$$\partial_t L_t=\frac{e^{-t/2}}{2}Q'(e^{-t/2}m_d(L_t;t))=\frac{e^{-t/2}}{2}Q'(e^{-t/2}m(L_t+w;t))+\mathcal{O}\left(\frac{N^{4\delta}}{N^{1/3}d^{1/2}}\right).$$

□

(7.28) 的证明。 我们可以将右侧（7.30）第一项中关于 $k$ 的求和改写为$-\sum_k G_{ik}(t)\,G_{jk}(t) = \partial_y G_{ij}(L_t + y + \mathrm{i}\eta; t)$。对于右侧（7.30）的第二项，由命题 7.13，

$$\begin{aligned}\dot{L}_t \sum_{ij} G_{ij}^2(t) &= -N\frac{e^{-t/2}}{2}\left(Q'(e^{-t/2}m(t)) + \mathcal{O}\left(\frac{N^{4\delta}}{N^{1/3}d^{1/2}}\right)\right)\partial_y m(t)\\ &= -\frac{N}{2}\partial_y Q(e^{-t/2}m(t)) + \mathcal{O}\left(\frac{N^{2/3+7\delta}}{d^{1/2}}\right),\end{aligned}$$

以压倒性概率成立，其中我们使用了 (7.21) 来界定 $\partial_y m(t)$。根据上述讨论，我们可以将 (7.30) 的右侧改写为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[F'(X_t)\,\mathrm{Im}\int_E^{N^{-2/3+\delta}} \partial_y\left(\sum_{ij}\dot{H}_{ij}(t)G_{ij}(t) - \frac{N}{2}Q(e^{-t/2}m(t))\right)\mathrm{d}y\right]\\ &= \mathbb{E}\left[F'(X_t)\,\mathrm{Im}\left(\sum_{ij}\dot{H}_{ij}(t)G_{ij}(t) - \frac{N}{2}Q(e^{-t/2}m(t))\right)\right]\Bigg|_{y=E}^{y=N^{-2/3+\delta}},\end{aligned}$$

误差项为 $\mathcal{O}(N^{2/3+8\delta}/d^{1/2})$。由此完成了对（7.28）的证明。 □

## 7.5 证明 (7.29)

在下文中，我们估计（7.29）中的第一项。根据定义，

$$\dot{H}_{ij}(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2}H_{ij} + \frac{e^{-t}}{2\sqrt{1-e^{-t}}}W_{ij}. \tag{7.34}$$

将（7.34）代入（7.30），并使用高斯分部积分（7.2），我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{ij}\mathbb{E}\left[\dot{H}_{ij}(t)F'(X_t)G_{ij}(t)\right] = \frac{1}{2N}\sum_{ij}\mathbb{E}\left[\left(-e^{-t/2}H_{ij} + \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-t}}}W_{ij}\right)F'(X_t)G_{ij}(t)\right]\\ &= -\frac{e^{-t/2}}{2N\sqrt{d-1}}\sum_{ij}\mathbb{E}\left[A_{ij}G_{ij}(t)F'(X_t)\right] + \frac{e^{-t}}{2N^4}\sum_{ijk\ell}\mathbb{E}[\partial_{ij}^{k\ell}(G_{ij}(t)F'(X_t))].\end{aligned} \tag{7.35}$$

如果我们将 $F'(X_t)$替换为 $P^qP^q$，则（7.35）右侧的表达式与（5.5）基本相同，只差一个 $-e^{-t/2}/2$ 因子。我们在（7.35）中会得到这些 $e^{-t/2}$ 因子，因为（7.35）是 $H(t)$的函数。离散导数会产生额外的 $e^{-t/2}$ 因子：

$$\begin{aligned}D_\xi F(H(t)) &= F\left(H(t) + \frac{e^{-t/2}\xi}{\sqrt{d-1}}\right) - F(H(t))\\ &= \sum_{n=1}^{\mathfrak{b}-1}\frac{e^{-nt/2}\partial_\xi^n F(H(t))}{n!(d-1)^{n/2}} + \mathrm{O}\left((d-1)^{-\mathfrak{b}/2}\right).\end{aligned} \tag{7.36}$$

与第5节相同，我们可以通过反复使用推论3.4 和3.5，展开式（7.35）右侧的第一项。与式（5.7）类似，展开后得到的所有项都具有以下形式

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{e^{-\mathfrak{o}t/2}}{N^{\theta(\mathcal{T})}d^{|E|}}\sum_{\mathfrak{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}}R_{\mathfrak{i}}(A(t))V_{\mathfrak{i}}(A(t))\right], \quad \deg(R_{\mathfrak{i}}(A(t)) = \mathfrak{d}, \tag{7.37}$$

其中，森林 $\mathcal{T} = (\mathbf{i}\ E)$与定义3.1中的相同， $R_{\mathbf{i}}$ 是定义4.4中格林函数项的一个单项式，而 $V_{\mathbf{i}}$具有以下形式（与式（5.6）相同，只需将 $P^{q-1}\bar{P}^q$替换为 $F'(X_t)$ ）

$$\prod_{a=1}^{b}(1+D_{\xi_a})^{e_a}(\sqrt{d-1}D_{\xi_a})^{1-e_a}F'(X_t), \quad e_1,e_2,\cdots,e_b\in\{0,1\}. \tag{7.38}$$

如果 $b=0$，上式可简化为 $F'(X_t)=0$。

类似于命题 6.6，我们有以下命题。以命题7.11 中的估计为输入，证明与命题 6.6的证明类似。因此我们省略证明。

**命题 7.14**。命题 *5.6*、*5.7*、*5.8* 和 *5.10* 仍然成立，只需将 $R_{\mathbf{i}}$ 替换为 $e^{-\deg(R_{\mathbf{i}})t/2}R_{\mathbf{i}}$，将 $U_{\mathbf{i}}$ 替换为 $V_{\mathbf{i}}$中定义的 (7.38)，并将误差项 $\mathrm{O}_{\prec}(\mathbb{E}[\Phi_q])$ 替换为 $\mathrm{O}(N^{C\delta-2/3})$。

我们回顾 $\mathcal{I}(t)$（见5.21），导数 $\partial_{ij}^{k\ell}G_{ij}(t)$ 为 $-G_{ii}(t)G_{jj}(t)-G_{ik}(t)G_{j\ell}(t)-\mathcal{I}(t)$。对于右侧 (7.35) 中的第一项，我们将证明

$$\begin{aligned}
&-\frac{e^{-t/2}}{N\sqrt{d-1}}\sum_{ij}\mathbb{E}\left[A_{ij}G_{ij}(t)F'(X_t)\right]=\frac{e^{-t}d}{N^4(d-1)}\sum_{ijk\ell}^{*}\mathbb{E}\left[(G_{ik}(t)G_{j\ell}(t)+\mathcal{I})F'(X_t))\right]\\
&-\frac{e^{-t}d}{N^4(d-1)}\sum_{ijk\ell}^{*}\mathbb{E}\left[G_{ij}(t)\partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))\right]+\frac{e^{-t}d}{N^4(d-1)}\sum_{ijk\ell}^{*}\mathbb{E}\left[A_{ik}A_{j\ell}G_{ik}(t)G_{j\ell}(t)F'(X_t))\right]\\
&+\{\text{higher order term}\}+\mathrm{O}\left(\frac{N^{7\delta}}{N^{2/3}\sqrt{d}}\right),
\end{aligned} \tag{7.39}$$

其中高阶项是以下各项的线性组合

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}}\frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_1)}d^{|E_1|}}\sum_{\mathbf{i}}^{*}\mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_1}R_{\mathbf{i}_1}V_{\mathbf{i}_1}\right], \quad V_{\mathbf{i}_1}=F'(X_t)\text{ or }V_{\mathbf{i}_1}=\sqrt{d-1}D_{ij}^{k\ell}F'(X_t), \tag{7.40}$$

其中 $\mathfrak{h}\geqslant 1$ 以及 $\mathcal{T}_1=\{ijk\ell,\{i,k\}\cup\{j,\ell\}\}$。这些项与（5.19）中的各项一一对应，其中 $\mathfrak{h}\geqslant 1$。

对于（7.35）右侧的第二项，我们将证明

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-t}}{N^4}\sum_{ijk\ell}\mathbb{E}[\partial_{ij}^{k\ell}(G_{ij}(t)F'(X_t))]=-\mathbb{E}[e^{-t}m^2(t)F'(X_t)]\\
&+\frac{e^{-t}}{N^4}\sum_{ijk\ell}^{*}\mathbb{E}[-(G_{ik}(t)G_{j\ell}(t)+\mathcal{I}(t))F'(X_t)+G_{ij}(t)\partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))]+\mathrm{O}(1/N).
\end{aligned} \tag{7.41}$$

证明 （7.29）。以估计式（7.39）、（7.41）和命题 7.14 作为输入，（7.29）的证明与第 5.1 节中给出的命题 5.1的证明平行。

（7.39）右侧的前两项与（7.41）右侧的第二项相消，

$$\frac{e^{-t}}{N^4(d-1)}\sum_{ijk\ell}^{*}\mathbb{E}\left[(G_{ik}(t)G_{k\ell}(t)+\mathcal{I}(t))F'(X_t))-G_{ij}(t)\partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))\right]\leqslant\frac{1}{d}\frac{N^{C\delta}}{N^{2/3}}, \tag{7.42}$$

这里我们用到了命题 7.14，因为（$G_{ik}(t)G_{k\ell}(t)+\mathcal{I}(t)$ 中的每一项都包含一个非对角格林函数项。

对于（7.39）右侧的第三项以及（7.40）中的各项，我们还可以进一步用命题7.14对它们进行展开，误差项有界于 $N^{C\delta}/\sqrt{d}N^{2/3}$。与命题5.1的证明相同，我们将得到一列图

$$\mathcal{T}_0 = (\mathbf{i}_0, E_0), \quad \mathcal{T}_1 = (\mathbf{i}_1, E_1), \quad \mathcal{T}_2 = (\mathbf{i}_2, E_2), \quad \mathcal{T}_3 = (\mathbf{i}_3, E_3), \quad \cdots,$$

并以如下形式的项结束

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}} \frac{e^{-\mathfrak{d}t/2}}{N^{\theta(\mathcal{T}_t)} d^{|E_t|}} \sum_{\mathbf{i}_t}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_t} m^{\mathfrak{d}}(t) V_{\mathbf{i}_t}\right], \quad \mathfrak{d} = \deg(R_{\mathbf{i}_t}), \quad \mathfrak{h} \geqslant 1. \tag{7.43}$$

然后我们可以利用命题 7.14 将 (7.43) 改写回 $\mathbb{E}[Q(e^{-t/2}m(t))F'(X_t)]$。

□

对 (7.39) 的证明。对于 (7.39)，我们将推论 3.4 应用于随机变量 $F_{ij} = F'(X_t)G_{ij}(t)$。由于$\mathcal{C}(F_{ij}, A) \leqslant N^{\delta}/\sqrt{d}$ 以压倒性概率成立，

$$\begin{aligned} &-\frac{e^{-t/2}}{N\sqrt{d-1}} \sum_{ij}^{*} \mathbb{E}\left[A_{ij} G_{ij}(t) F'(X_t)\right] = -\frac{e^{-t/2}}{N\sqrt{d-1}} \frac{d}{N} \sum_{ij}^{*} \mathbb{E}\left[F'(X_t) G_{ij}(t)\right] \\ &-\frac{e^{-t/2}}{N^2 d\sqrt{d-1}} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}\left[A_{ik} A_{j\ell} D_{ij}^{k\ell}(F'(X_t) G_{ij}(t))\right] + \mathrm{O}\left(\frac{dN^{\delta}}{N}\right). \end{aligned} \tag{7.44}$$

对于右侧 (7.44) 中的第一项，利用 $\sum_{ij} G_{ij}(t) = 0$ 和 $\sum_{ij}^{*} G_{ij}(t) \lesssim N$，以压倒性概率可将其界为 $\mathrm{O}(\sqrt{d}/N)$。我们将右侧 (7.44) 中的第二项改写为以下求和

$$-\frac{e^{-t/2}}{N^2 d\sqrt{d-1}} \left( \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}\left[A_{ik} A_{j\ell} G_{ij}(t) D_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))\right] + \mathbb{E}\left[A_{ik} A_{j\ell} D_{ij}^{k\ell} G_{ij}(t)(1 + D_{ij}^{k\ell}) F'(X_t))\right] \right). \tag{7.45}$$

回顾 (7.36) 中的泰勒展开，以及 (7.45) 中的第一项

$$\begin{aligned} &-\frac{e^{-t}}{N^2 d(d-1)} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}\left[A_{ik} A_{j\ell} G_{ij}(t) \partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))\right] + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2 d^{5/2}} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}\left[A_{ik} A_{j\ell} |G_{ij}(t)| \frac{N^{5\delta}}{N^{1/3}}\right]\right) \\ &= -\frac{e^{-t}}{N^2 d(d-1)} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}\left[A_{ik} A_{j\ell} G_{ij}(t) \partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))\right] + \mathrm{O}\left(\frac{N^{7\delta}}{N^{2/3}\sqrt{d}}\right), \end{aligned} \tag{7.46}$$

这里我们利用 (7.27) 对 $(\partial_{ij}^{k\ell})^n(F'(X_t))$ 进行界定，并利用 (7.25) 对 $|G_{ij}(t)|$ 求和。我们还可以利用推论 3.4 和 $F_{ijk\ell} = G_{ij}(t)\partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))$ 展开 (7.46)。接着 $(d/N)\mathcal{C}(F, A) \lesssim N^{-2/3}$，并且

$$\begin{aligned} &-\frac{e^{-t}}{N^2 d(d-1)} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}\left[A_{ik} A_{j\ell} G_{ij}(t) \partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))\right] \\ &= -\frac{e^{-t} d}{N^4 (d-1)} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}\left[G_{ij}(t) \partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))\right] + \mathrm{O}\left(\frac{N^{7\delta}}{N^{2/3}\sqrt{d}}\right). \end{aligned}$$

这给出了（7.39）右侧的第二项。

展开 $D_{ij}^{k\ell}$ $G_{ij}$（$t$）与（7.36）中一样，（7.45）中的第二项可以改写为一个线性组合 of

$$\frac{1}{d^{\mathfrak{h}/2}} \frac{1}{N^{\theta(\mathcal{T}_1)} d^{|E_1|}} \sum_{\mathbf{i}}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_1} R_{\mathbf{i}_1} V_{\mathbf{i}_1}\right], \quad V_{\mathbf{i}_1} = F'(X_t) \text{ or } V_{\mathbf{i}_1} = \sqrt{d-1} D_{ij}^{k\ell} F'(X_t), \tag{7.47}$$

其中 $\mathcal{T}_1 = \{\mathbf{i}_1 = ijk\ell,\ \{i,k\} \cup \{j,\ell\}\}$ 以及 $\mathfrak{h} \geqslant 0$。对应于 $\mathfrak{h} = 0$ 的项来自在（ $n = 1$）中取 7.36）以及 $V_{\mathbf{i}_1} = F'(X_t)$ ，由下式给出

$$\begin{aligned}
&-\frac{e^{-t}}{N^2 d(d-1)} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}\left[A_{ik}A_{j\ell}\partial_{ij}^{k\ell} G_{ij}(t) F'(X_t))\right] \\
&= \frac{e^{-t} d}{N^4 (d-1)} \sum_{ijk\ell}^{*} \mathbb{E}\left[A_{ik}A_{j\ell}(G_{ii}(t)G_{jj}(t) + G_{ik}(t)G_{j\ell}(t) + \mathcal{I}(t))F'(X_t))\right] \\
&= \frac{e^{-t} d}{(d-1)} \mathbb{E}[m(t)^2 F'(X_t)] + \frac{e^{-t} d}{N^4 (d-1)} \sum_{\mathbf{i}_1}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_1}(G_{ik}(t)G_{j\ell}(t) + \mathcal{I}(t))F'(X_t))\right],
\end{aligned} \tag{7.48}$$

其中 $\mathcal{I}(t)$ 来自 (5.21)。我们还可以利用推论 3.4，进一步展开 (7.48) 中的最后一项，得到$F_{ijk\ell} = \mathcal{I}(t)F'(X_t)$。于是 $(d/N)\mathcal{C}(F,\ A) \leqslant \sqrt{d}/N^{1-\delta} \lesssim 1/(N^{2/3}\sqrt{d})$，并且

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-t} d}{N^4 (d-1)} \sum_{\mathbf{i}_1}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_1}\mathcal{I}(t)F'(X_t))\right] \\
&= \frac{e^{-t} d}{N^4 (d-1)} \left( \sum_{\mathbf{i}_1}^{*} \mathbb{E}\left[\mathcal{I}(t)F'(X_t))\right] + \sum_{\mathbf{i}_2}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_2}\mathcal{I}(t) D_{\mathcal{T}_2} F'(X_t))\right] \right) \\
&+ \frac{e^{-t} d}{N^4 (d-1)} \sum_{\mathbf{i}_2}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_2} D_{\mathcal{T}_2}\mathcal{I}(t)(1 + D_{\mathcal{T}_2})F'(X_t))\right] + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{d}N^{2/3}}\right).
\end{aligned} \tag{7.49}$$

由于 $|D_{\mathcal{T}_2}F'(X_t)| \leqslant N^{5\delta}/N^{1/3}\sqrt{d}$，利用 (7.25)，(7.49) 右侧的第二项有界

$$\frac{e^{-t} d}{N^4 (d-1)} \sum_{\mathbf{i}_2}^{*} \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{T}_2}\mathcal{I}(t) D_{\mathcal{T}_2} F'(X_t))\right] = \mathrm{O}(N^{7\delta}/\sqrt{d}N^{2/3}).$$

(7.49) 中的第三项，注意到 $\mathcal{I}(t)$ 中的所有项都包含某个 $G_{xy}(t)$，使得 $x$，$y$ 位于 $\mathcal{T}_1$的不同连通分支中。根据命题 5.9，$D_{\mathcal{T}_2}\mathcal{I}(t)$ 中的每一项也包含某个$G_{x'y'}(t)$，使得 $x'$，$y'$ 位于 $\mathcal{T}_2$ 的不同连通分支中，并且至少还有一个额外的 $1/\sqrt{d} - 1$因子。这些项可根据命题 $N^{C\delta}/\sqrt{d}N^{2/3}$进行估计，命题编号为 7.14。

□

证明 (7.41)。我们可以将（7.41）重写为

$$\frac{e^{-t}}{N^4} \sum_{ijk\ell} \mathbb{E}[\partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t)G_{ij}(t))] = \frac{e^{-t}}{N^4} \sum_{ijk\ell} \mathbb{E}[\partial_{ij}^{k\ell}(G_{ij}(t))F'(X_t) + G_{ij}(t)\partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))]. \tag{7.50}$$

将 $\partial_{ij}^{k\ell} G_{ij}(t) = -G_{ii}(t)G_{jj}(t) - G_{ik}(t)G_{j\ell}(t) - \mathcal{I}(t)$ 代入（7.50），可得

$$\begin{aligned}
&-\mathbb{E}[e^{-t}m^2(t)F'(X_t)] \\
&+ \frac{e^{-t}}{N^4} \sum_{ijk\ell} \mathbb{E}[-(G_{ik}(t)G_{j\ell}(t) + \mathcal{I}(t))F'(X_t) + G_{ij}(t)\partial_{ij}^{k\ell}(F'(X_t))].
\end{aligned} \tag{7.51}$$

对于（7.51）中的最后一个求和，我们可以将其限制为 $ijk\ell$ 互不相同，误差为 $\mathrm{O}(1/N)$。由此得到（7.41）。

□

# 参考文献

[1] A. Adhikari 和 J. Huang。一般情形下的 Dyson 布朗运动及边缘处的势。《概率论及相关领域》，178(3):893–950，2020年。[2] M. Aizenman 和 S. Warzel。《随机算子》，《数学研究生教材》第168卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年。关于无序对量子谱与动力学的影响。[3] J. Alt、R. Ducatez 和 A. Knowles。临界 Erdős–Rényi 图的离域化转变。《数学物理通讯》，388(1):507–579，2021年。[4] J. Alt、R. Ducatez 和 A. Knowles。临界 Erdős–Rényi 图的极端特征值。《概率年刊》，49(3):1347–1401，2021年。[5] J. Alt、R. Ducatez 和 A. Knowles。Erdős–Rényi 图的完全离域区域。《电子概率通讯》，27，2022年。[6] J. Alt、R. Ducatez 和 A. Knowles。稀疏 Erdős–Rényi 图谱边缘处的泊松统计与局域化。《概率年刊》，51(1):277–358，2023年。[7] R. Bauerschmidt、J. Huang、A. Knowles 和 H.-T. Yau。随机正则图的体区特征值统计。《概率年刊》，45(6A):3626–3663，2017年。[8] R. Bauerschmidt、J. Huang、A. Knowles 和 H.-T. Yau。中等度数随机正则图的边缘刚性与普适性。《几何与泛函分析》，30(3):693–769，2020年。[9] R. Bauerschmidt、J. Huang 和 H.-T. Yau。随机正则图的局部Kesten–McKay定律。《数学物理通讯》，369(2):523–636，2019年。[10] R. Bauerschmidt、J. Huang 和 H.-T. Yau。随机正则图的局部Kesten–McKay定律。《数学物理通讯》，369(2):523–636，2019年。[11] R. Bauerschmidt、A. Knowles 和 H.-T. Yau。随机正则图的局部半圆律。《纯粹与应用数学通讯》，70(10):1898–1960，2017年。[12] R. Bauerschmidt、A. Knowles 和 H.-T. Yau。随机正则图的局部半圆律。《纯粹与应用数学通讯》，70(10):1898–1960，2017年。[13] F. Benaych-Georges、C. Bordenave 和 A. Knowles。稀疏非齐次 Erdős–Rényi 图的最大特征值。《概率年刊》，47(3):1653–1676，2019年。[14] F. Benaych-Georges、C. Bordenave 和 A. Knowles。稀疏随机矩阵的谱半径。载于《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，第56卷，第2141–2161页。亨利·庞加莱研究所，2020年。[15]P. Biane。关于与半圆分布的自由卷积。《印第安纳大学数学杂志》，46(3):705–718，1997年。[16] C. Bordenave。Friedman第二特征值定理及其对随机提升的推广的新证明。载于《高等师范学校科学年刊》，第4卷，第1393–1439页，2020年。[17] P. Bourgade、L. Erdős、H.-T. Yau 和 J. Yin。广义Wigner矩阵的固定能量普适性。《纯粹与应用数学通讯》，69(10):1815–1881，2016年。[18] P. Bourgade、J. Huang 和 H.-T. Yau。稀疏随机矩阵的特征向量统计。《电子概率杂志》，22：第64号论文，38页，2017年。[19] P. Bourgade 和 H.-T. Yau。特征向量矩流与局部量子唯一遍历性。《数学物理通讯》，350(1):231–278，2017年。

[20] M. Cohen. 多项式时间内的拉马努金图。载于第57届IEEE计算机科学基础年会—FOCS 2016，第276–281页。IEEE计算机学会，洛斯阿拉米托斯，加利福尼亚州，2016年。[21] L. Erd˝os 和 H.-T. Yau。《随机矩阵理论的动力学方法》，库朗数学讲义第28卷。库朗数学科学研究所，纽约；美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。[22] L. Erd˝os、A. Knowles、H.-T. Yau 和 J. Yin。Erd˝os–R´enyi 图的谱统计 II：特征值间距与极端特征值。《数学物理通讯》，314(3):587–640，2012年。[23] L. Erd˝os、A. Knowles、H.-T. Yau 和 J. Yin。Erd˝os–R´enyi 图的谱统计 I：局部半圆律。《概率年刊》，41(3B):2279–2375，2013年。[24] L. Erd˝os、B. Schlein 和 H.-T. Yau。随机矩阵的普适性与局部弛豫流。《数学发明》，185(1):75–119，2011年。[25] L. Erd˝os、B. Schlein、H.-T. Yau 和 J. Yin。局部弛豫流方法：随机矩阵局部统计量的普适性。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，48(1):1–46，2012年。[26] L. Erd˝os 和 K. Schnelli。时变密度随机矩阵流的普适性。载于《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，第53卷，第1606–1656页。亨利·庞加莱研究所，2017年。[27] L. Erd˝os 和 H.-T. Yau。《随机矩阵理论的动力学方法》，第28卷。美国数学会，2017年。[28] L. Erd˝os、H.-T. Yau 和 J. Yin。广义Wigner矩阵特征值的刚性。《数学进展》，229(3):1435–1515，2012年。[29] O. Feldheim 和 S. Sodin。某些样本协方差矩阵最小特征值的普适性结果。《几何与泛函分析》，20(1):88–123，2010年。[30] J. Friedman。阿隆第二特征值猜想的证明。载于第三十五届ACM计算理论年会论文集，第720–724页，2003年。[31]Y. He。稠密随机正则图的谱隙与边缘普适性。arXiv预印本 arXiv:2203.07317，2022年。[32] Y. He 和 A. Knowles。稀疏Erd˝os–R´enyi图极端特征值的涨落。《概率论及相关领域》，180(3):985–1056，2021年。[33] S. Hoory、N. Linial 和 A. Wigderson。扩展图及其应用。《美国数学会通报》，43(4):439–561，2006年。[34] J. Huang、B. Landon 和 H.-T. Yau。稀疏随机矩阵的体相普适性。《数学物理学杂志》，56(12):123301，2015年。[35] J. Huang、B. Landon 和 H.-T. Yau。稀疏Erd˝os–R´enyi图极端特征值从Tracy–Widom涨落到高斯涨落的转变。《概率年刊》，48(2):916–962，2020年。[36] J. Huang 和 H.-T. Yau。随机 $d$-正则图直到谱边缘的谱。arXiv预印本 arXiv:2102.00963，即将在《纯粹与应用数学通讯》发表，2021年。[37]J. Huang 和 H.-T. Yau。稀疏随机矩阵的边缘普适性。arXiv预印本 arXiv:2206.06580，2022年。[38] H. Kesten。群上的对称随机游走。《美国数学会汇刊》，92:336–354，1959年。[39] O. Khorunzhiy。大型Wigner随机矩阵的高阶矩及谱范数的渐近性质。2012年。

[40] A. Knowles 和 J. Yin。Wigner矩阵的特征向量分布。《概率论及相关领域》，155(3-4):543–582，2013年。[41] B. Landon、P. Sosoe 和 H.-T. Yau。Dyson布朗运动的固定能量普适性。《数学进展》，346:1137–1332，2019年。[42] B. Landon 和 H.-T. Yau。Dyson布朗运动局部统计量的收敛。《数学物理通讯》，355(3):949–1000，2017年。[43]B. Landon 和 H.-T. Yau。Dyson布朗运动的边缘统计量。arXiv预印本 arXiv:1712.03881，2017年。[44] J. Lee。稀疏随机矩阵极端特征值的高阶涨落。arXiv预印本 arXiv:2108.11634，2021年。[45] J. O. Lee 和 K. Schnelli。稀疏随机矩阵的局部定律与Tracy-Widom极限。arXiv预印本 arXiv:1605.08767，2016年。[46] J. O. Lee 和 J. Yin。Wigner矩阵边缘普适性的充要条件。《杜克数学杂志》，163(1):117–173，2014年。[47] A. Lubotzky、R. Phillips 和 P. Sarnak。拉马努金图。《组合数学》，8(3):261–277，1988年。[48] A. Marcus、D. A. Spielman 和 N. Srivastava。交错族 I：任意度的二部 Ramanujan 图。载于2013年IEEE第54届计算机科学基础年会，第529–537页。IEEE，2013年。[49] A. W. Marcus、D. A. Spielman 和 N. Srivastava。交错族 IV：任意规模的二部 Ramanujan 图。《SIAM 计算杂志》，47(6):2488–2509，2018年。[50] G. A. Margulis。组合方案及其在扩展图和集中器设计中的应用的显式群论构造。《信息传输问题》，24(1):51–60，1988年。[51] B. D. McKay、N. C. Wormald 和 B. Wysocka。随机正则图中的短圈。《电子组合数学杂志》，第R66–R66页，2004年。[52] S. J. Miller、T. Novikoff 和 A. Sabelli。随机正则图族中最大非平凡特征值的分布。《实验数学》，17(2):231–244，2008年。[53] S. P´ech´e。某些样本协方差矩阵系综最大特征值的普适性结果。《概率论及相关领域》，143(3-4):481–516，2009年。[54] A. Ruzmaikina。具有多项式衰减矩阵元分布的Wigner随机矩阵特征值边缘分布的普适性。《数学物理通讯》，261(2):277–296，2006年。[55] P. Sarnak。什么是扩展图？《美国数学会通告》，51(7):762–763，2004年。[56] S. Sodin。某些随机带状矩阵的谱边缘。《数学年刊》(第2辑)，172(3):2223–2251，2010年。[57] A. Soshnikov。Wigner随机矩阵谱边缘处的普适性。《数学物理通讯》，207(3):697–733，1999年。[58] T. Tao 和 V. Vu。随机矩阵：局部特征值统计量直至谱边缘的普适性。《数学物理通讯》，298(2):549–572，2010年。[59] K. Tikhomirov 和 P. Youssef。稀疏Wigner矩阵谱中的离群特征值。《随机结构与算法》，58(3):517–605，2021年。