弯曲背景下的卡西米尔效应与$TGTG$公式

Luc´ıa Santamar´ıa-Sanz*,
Departamento de Física Teórica, Atómica y Optica,
Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, Spain

本文研究了正弦-戈登扭结的拓扑背景中一对半透明二维板之间的量子真空相互作用能。正弦-戈登扭结解周围的量子真空涨落可以解释为畴壁时空中的量子标量场论。本文将 O. Kenneth 和 I. Klich 首次发现的 $TGTG$ 公式推广至弱曲率背景。

arXiv:2305.01433v1 [hep-th] 2 May 2023

引言

拓扑孤子是经典场方程的有限能量解，它们在渐近情况下连接构形空间不同拓扑扇区中的两个不等价真空。因此，它们打破离散对称性 [1–3]。特别是，拓扑孤子及其量子化被用作畴壁等延展基本对象的模型 [3]。量子场论（QFT） [4]中，人们已广泛研究了标量场 $\phi(x^\mu)$在这些经典解周围的量子真空涨落，以及这些涨落与背景的相互作用。一个著名的例子是 1+1 维正弦-戈登模型，其拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+\cos\phi-1,\qquad x^\mu=(t,z),$$

用无量纲量表示。研究经典静态解 $\phi(z)=4\arctan e^z$ 周围的小涨落 $\eta(t,z)$，并保留到二阶，可得到一个关于涨落的二次拉格朗日量

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta-\left(1-2\,\mathrm{sech}^2\,z\right)\eta^2\right].$$

介子在这一背景周围的传播将作为本文的出发点。

将单圈自相互作用真空图的有限部分全部相加，得到所谓的零点能量 [5]。其在自然界中最著名的表现之一是卡西米尔效应，该效应最初由 H.B.G. Casimir 于 1948 [6], 发现，并由 M.J. Sparnaay 在实验室中测量 [7]。卡西米尔力源于空间中引入静止或缓慢变化的外部物体时，涨落场的能量与移除这些物体时的能量之差。人们已经研究了这些力在 [8] 中对不同形状和组成物体的作用。它们在纳米电子器件 [9, 10], 、碳纳米管中的吸收现象 [11] 以及暴胀过程 [12], 等领域有着广泛应用，这里仅举几例。

将量子真空能直接计算为场论哈密顿量在真空态中的期望值（$E_{vac}\sim\langle 0|\mathbf{H}|0\rangle$），会得到一个无穷大的结果。由于问题中存在无限多个涨落模，因此会出现固有的紫外发散，难以消除。人们已研究了许多重整化这些发散的方法 [8]。最重要的理论成果之一是所谓的$TGTG$公式，该公式最初由 O. Kenneth 和 I. Klich [13] 提出，用于研究平直时空中相距很近的两个物体。这一形式体系基于跃迁算符（更准确地说，是所谓的 Lippmann-Schwinger T算符）和格林函数。$TGTG$公式以每个物体的非相对论量子散射数据为基础，给出零点能中依赖于距离的有限部分。当物体由具有互不相交紧支撑的势表示时，该公式是精确的。

考虑弯曲时空时，场方程的解、时间坐标和通常的正则量子化，只有在具有全局类时 Killing 矢量 [14] 的全局双曲时空中才有全局定义。只要存在由柯西超曲面构成的叶状分解，就可以像在闵可夫斯基度规中那样，对时间坐标每个固定取值所对应的空间切片求解 Laplace–Beltrami 算子的谱。然而，在更一般的情形下，如果弯曲时空的纤维丛无法用与观察者无关的粒子谱来诠释，那么散射算子和传递算子都不会是普适的结果。事实上，关于弯曲背景中的 $TGTG$ 公式，已有的结果并不多，有时它甚至并不存在 [15]。不过，有一种特殊情形值得考虑。当引力背景产生的粒子频率远低于普朗克频率时，可以将微扰理论用作量子引力的半经典方法 [16, 17]。在这种做法中，这些弱引力背景按经典方式处理，而物质场则进行量子化。这里将研究一个弱引力场的例子：一个 3+1维时空，其中一个空间维度上存在 P¨oschl-Teller（PT）扭结,$V_{PT}(z)=-2/\cosh^2(z)$（注意， $x^\mu=(t,\vec{x}_\parallel,z)$ $\vec{x}_\parallel\in\mathbb{R}^2$）。这种引力足以对量子物质产生一些影响,

但又没有强到需要对其自身进行量子化。此外，PT势是透明的，也就是说，场在渐近区域可以诠释为粒子。因此，可以定义入射波与出射波，并以类似于平直时空中通常做法的方式导出一个 S-矩阵。此外，由于 V_{PT}是透明的，与自由情形相比不会产生额外的反射。

本工作的目标是推导一个$TGTG$公式，用以研究嵌入以$z=0$为中心的 PT 势背景 V_{PT} 中的两个均匀板之间的量子真空相互作用能；这两个板由点势 $V_{2\delta}(z) = v_0\delta(z-a) + v_1\delta(z-b)$ $v_0,\ v_1 \in \mathbb{R}$模拟。在过去二十年里，支撑于一点上的势，或等价地，接触相互作用 [18]，一直被用于模拟卡西米尔装置中的板及其他几何结构（参见 [19, 20] 及其中的参考文献）。事实上，可以通过 δ 相互作用耦合来研究导电板的电磁性质，这些耦合在 Barton 流体力学模型中代表等离子体频率 [21]。

本文的组织结构如下。首先，介绍扭结的弯曲背景中两个狄拉克 δ 相互作用的量子力学谱。随后，通过格林函数和$TGTG$形式体系中的 T算符研究板之间的量子相互作用。最后，总结若干结论。全文将采用自然单位制 $\hbar = c = 1$ 。完整的技术细节及进一步的拓展留待配套论文 [22]讨论。

散射数据和谱

板之间的卡西米尔力源于电磁场的量子真空涨落与板中带电电流涨落之间的耦合 [23]。当板间距离远大于与板的电响应有关的任何其他长度尺度时，只有电磁场的长波长横向模与相互作用有关。它们可以由标量场的正常模来模拟，其动力学由作用量描述

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^4x\left[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V_{2\delta}(z)\phi^2 - V_{PT}(z)\phi^2\right],$$

其中 $v_0,\ v_1,\ a<b\in\mathbb{R}$。注意， z 应是垂直于板的维度坐标，且$x \equiv x^\mu$。我还考虑了系统的温度为零。为了识别标量场涨落的本征模，需要对相关非相对论薛¨定谔算子 $-\partial^2_{\vec{x}_\parallel} + \hat{K} = -\partial^2_{\vec{x}_\parallel} - \partial_z^2 + V_{PT}(z) + V_{2\delta}(z)$ 的谱进行详细描述

。系统具有开放几何，因此正能谱将是连续的。散射态对应于薛¨定谔方程 $\hat{K}\phi = k^2\phi$的解，其中 $k\in\mathbb{R}$ （使得 $k^2>0$）。远离奇异点时，“*diestro*”散射解（从左侧入射的粒子）具有以下形式:

$$\psi_k^R(z) = \begin{cases} f_k(z) + r_R\, f_{-k}(z), & \text{if } z<a,\\ B_R\, f_k(z) + C_R\, f_{-k}(z), & \text{if } a<z<b,\\ t_R\, f_k(z), & \text{if } z>b, \end{cases} \quad (1)$$

其中， $f_k(z) = e^{ikz}(\tanh(z) - ik)$ 是 P¨oschl-Teller 势的自由波。同样，“*zurdo*”散射的波函数（从右侧入射的粒子）可以描述为:

$$\psi_k^L(z) = \begin{cases} t_L\, f_{-k}(z), & \text{if } z<a,\\ B_L\, f_{-k}(z) + C_L\, f_k(z), & \text{if } a<z<b,\\ r_L\, f_k(z) + f_{-k}(z), & \text{if } z>b. \end{cases} \quad (2)$$

$\{t_L, t_R, r_L, r_R, B_L, B_R, C_L, C_R\}(k)$ 是散射数据。由于 Schr¨odinger 算子的时间反演不变性，透射振幅满足 $t_R(k) = t_L(k)$。从现在起，将用 $t(k)$ 替代它们。

请注意，该算符 $K_z^{PT} = -\partial_z^2 + V_{PT}(z)$ 不本质自伴。要定义自伴扩张，必须在边界点 $\{a,b\}$ 处添加一些匹配条件:

$$\begin{pmatrix} \psi(a^+)\\ \psi'(a^+)\\ \psi(b^+)\\ \psi'(b^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ v_0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & v_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(a^-)\\ \psi'(a^-)\\ \psi(b^-)\\ \psi'(b^-) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

上方， $\psi(z^\pm)$表示波函数在点 z处的右侧(+)或左侧(–)极限。

将 (1) 和 (2) 代入 (3)，并求解所得的两个方程组，即可得到散射数据。透射系数和反射系数列于 (5) 中，其中 $W = W[f_k(x)\ f_{-k}(x)] = -2ik(k^2+1)$。注意，散射数据显式地以一种非平凡的方式依赖于板的位置，因为 P¨oschl-Teller 背景势破坏了空间的平移不变性。

所有散射参数的共同分母是谱函数。它在正虚轴上的零点给出谱ˆ中 K 的束缚态。可以验证，不存在能量低于某个特定值 E_{min} 的束缚态，该值为:

$$E_{min} = -\frac{1}{16}\left[(|v_1|+|v_0|) + \sqrt{(|v_1|+|v_0|)^2+16}\right]^2, \quad (4)$$

对所有 $a,\ b,\ v_0,\ v_1 \neq 0$。

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{W^2}{W^2 + v_0 W f_k(a) f_{-k}(a) + v_1 W f_k(b) f_{-k}(b) + v_0 v_1 f_{-k}(a) f_k(b)[f_k(a) f_{-k}(b) - f_{-k}(a) f_k(b)]}, \\
r_R &= \frac{-v_0 W f_k^2(a) - v_1 W f_k^2(b) + v_0 v_1 f_k(a) f_k(b)[f_{-k}(a) f_k(b) - f_k(a) f_{-k}(b)]}{W^2 + v_0 W f_k(a) f_{-k}(a) + v_1 W f_k(b) f_{-k}(b) + v_0 v_1 f_{-k}(a) f_k(b)[f_k(a) f_{-k}(b) - f_{-k}(a) f_k(b)]}, \\
r_L &= \frac{-v_0 W f_{-k}^2(a) - v_1 W f_{-k}^2(b) - v_0 v_1 f_{-k}(a) f_{-k}(b)[f_k(a) f_{-k}(b) - f_{-k}(a) f_k(b)]}{W^2 + v_0 W f_k(a) f_{-k}(a) + v_1 W f_k(b) f_{-k}(b) + v_0 v_1 f_{-k}(a) f_k(b)[f_k(a) f_{-k}(b) - f_{-k}(a) f_k(b)]}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

E_{min} 的值对于计算相应量子场论中的量子真空相互作用能至关重要。由于能量最低的束缚态由 E_{min}表征，理论中的涨落质量将与此值E_{min} 相平衡，从而使涨落吸收不可能发生。量子场论的幺正性为量子真空涨落的质量设定了这一下限，因此谱中能量最低态的总能量将为零。这样，谱将由一组能量位于能隙 $[0, m^2]$ 内的离散态，以及能量高于此阈值的连续散射态组成，即 $E = m^2 = |E_{min}|$。

***TGTG*公式与卡西米尔压力**

经过二次量子化，上一节阐述的非相对论量子力学问题被提升为量子场论。现在的目标是研究量子真空能 $\tilde{E_0} = \frac{1}{2}\sum_{\omega^2}\omega$，其中求和遍及算符 $-\partial^2_{\vec{x}_\parallel} + \hat{K}_z^{PT} + V_{2\delta}(z)$ 的谱。量子场的模式满足 $\omega^2 = \vec{k}_\parallel^2 + k^2 + m^2$。请注意，$k_\parallel$ 指的是动量在与板表面平行的两个方向上的分量，而 k 指的是垂直方向上的分量。为了计算相互作用能，必须对 E_0 进行正则化和重整化，以消除因体区场论的能量密度无限大而产生的紫外发散，以及与板的无限面积相关的次要发散。首先，在板的单位面积真空能表达式中引入一个调节参数

$$
\frac{E_0}{A} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\vec{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \sum_k \sqrt{\vec{k}_\parallel^2 + k^2 + m^2}\; e^{-\epsilon(\vec{k}_\parallel^2 + k^2 + m^2)}
$$

然后，去除在 $\epsilon \to 0$ 附近展开被积函数时产生的发散项。

平直时空的$TGTG$公式 [13]为

$$
E_0 = -i \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \log\Big[1 - \mathrm{tr}\Big(T^\ell G^{(0)}(a,b) T^r G^{(0)}(b,a)\Big)\Big], \tag{6}
$$

其中 $G^{(0)}$ 是无板平直背景的格林函数。上标 ℓ, r 表示所考虑的是哪块板：ℓ 表示系统左侧的板，r 表示另一块板。这种形式有两个根本优势。一方面，使用散射数据计算多个物体之间的卡西米尔能时，必须刻画这两个物体所形成背景中的整个谱，这往往相当困难。相比之下，由于$TGTG$公式只需了解单个物体的谱，计算工作量便小得多。另一方面，$TGTG$公式没有发散项，并能直接给出两个分离物体之间的卡西米尔能。因此，在现有的各种正则化方法中，这种形式是一种便利的选择。

由于我处理的是弱且透明的背景势，因此有理由寻找一种适用于这类特定曲流形的$TGTG$公式推广形式。为此，需要计算格林函数以及与每块板相关的传递算子。

方程的格林函数解

$$
\Big[\partial_t^2 - \partial^2_{\vec{x}_\parallel} + \hat{K}^{PT} + m^2 + V_{2\delta}(z)\Big] G(x^\mu, y^\mu) = \delta(x^\mu - y^\mu),
$$

可以表示为

$$
G(x, x') = \int \frac{d^2 k_\parallel}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_\parallel (\vec{x}_\parallel - \vec{x'}_\parallel)} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} G_k(z, z').
$$

垂直于板的方向上的约化格林函数可计算为

$$
G_k(z,z') = \frac{\mathrm{u}(z-z')\psi_k^R(z)\psi_k^L(z') + \mathrm{u}(z'-z)\psi_k^R(z')\psi_k^L(z)}{W[\psi_k^R, \psi_k^L]}
$$

由散射解 (1)-(2) 和单位阶跃函数得到。该计算结果可写为 $G_k(z_1, z_2) = G_k^{PT}(z_1, z_2) + \Delta G_k(z_1, z_2)$。注意，$G_k^{PT}(z_1, z_2) = f_{-k}(z_<) f_k(z_>)/W$（其中 $z_<$ 和 $z_>$ 分别为 $\{z_1, z_2\}$中较小或较大的一个）是不存在任何 δ相互作用时 PT 势的格林函数。此外，

$$
\Delta G_k(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{r_L}{W} f_k(z_1) f_k(z_2), & \text{if } z_1, z_2 > b, \\ \dfrac{r_R}{W} f_{-k}(z_1) f_{-k}(z_2), & \text{if } z_1, z_2 < b, \\ (t-1)\, G_k^{PT}(z_1, z_2), & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{7}
$$

是移除两块板中的一块后格林函数的剩余部分（即 $v_0 = 0$）。当两块板都引入系统时，可得到 $\Delta G_k(z_1, z_2)$ 更复杂的表达式，但此处不予列出，因为计算 $TGTG$公式时并不需要它。

根据利普曼-施温格方程和格林函数的定义，可以计算位于 $z = b$ 处的板的传递算子，结果为

$$T_k(z_1, z_2) = -(t-1)(\hat{K}^{PT}_{z_2} - k^2)\,(\hat{K}^{PT}_{z_1} - k^2)\,G^{PT}_k(z_1, z_2) = \frac{|W|^2}{k^4}\delta(z_1 - b)\delta(z_2 - b)\Delta G_k(b, b).$$

其中 $\Delta G_k(b,\ b)$由（7）给出。由于T算子与散射矩阵相关，其归一化为

$$T(z_1, z_2) = -W^*\delta(z_1 - b)\delta(z_2 - b)\begin{cases} r_L(b), & z_1, z_2 \to b^+, \\ r_R(b), & z_1, z_2 \to b^-, \\ 1 - t(b), & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{8}$$

左侧板的情况也类似。星号表示复共轭。该传递算子表示粒子与势相互作用、但不发生传播的概率振幅。

将（7）、（8）结合起来，并在对动量进行维克旋转之前，将（6）推广到三维空间，可得适用于所考虑的弱透明弯曲时空的$TGTG$公式：

$$\frac{E_0}{A} = \frac{1}{8\pi^2}\int_m^\infty d\xi\,\xi\,\sqrt{\xi^2 - m^2}\,\log\left(1 - \mathrm{Tr}\left[T^\ell G^{PT} T^r G^{PT}\right]\Big|_{i\xi}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(\sqrt{(i\kappa_j)^2 + m^2}\right)^3}{6\pi}, \tag{9}$$

为

$$\mathrm{Tr\,TGTG}\Big|_k = r^r_R(k, v_1, b)\,r^\ell_L(k, v_0, a).$$

注意到，r^r_R, r^ℓ_L 可以通过在 (5) 中分别替换$v_0 = 0$ 和 $v_1 = 0$得到。这个结果最有趣之处在于，在区间 $[a, b]$ 内，只有由T算子分量构成的某些组合能够使 z_1, z_2 点重合，因而对板之间的量子真空相互作用能有贡献，而这些组合仅取决于这两个反射系数。平直时空 [13]也如此。但对于会破坏空间各向同性的弯曲背景，散射数据显式依赖于每块板的位置，因此必须考虑该背景特有的传播子和特征波。此外，对于具有分离物体且其特征值模小于 1 的构型，积分 (9) 有良好定义，因为$TGTG$算子是迹类算子（更多细节见 r^r_R）。

对于彼此分离物体的构型，且其特征值的模小于 1（更多详情见 [13]）。

图1展示了PT背景下对称板构型的量子真空相互作用能。可以看出，无论系数取何值，能量始终为负，

δ势。这意味着，在此系统中，板之间的卡西米尔力始终是吸引力。如果 P¨oschl-Teller 势阱完全没有被限制在板之间，且它们远离扭结中心，那么就会恢复平直时空中由两个 δ 板构成的系统。

图1中出现的突变跳跃不连续性与涨落场谱中一个动量极低的束缚态消失有关。还可以看出，δ系数的绝对值越大，E_0 的值也越大。最后值得指出的是，即使一个δ系数为零（因此系统中只有一块板），另一块板仍会感受到相互作用，因为系统中仍存在非零的卡西米尔能。

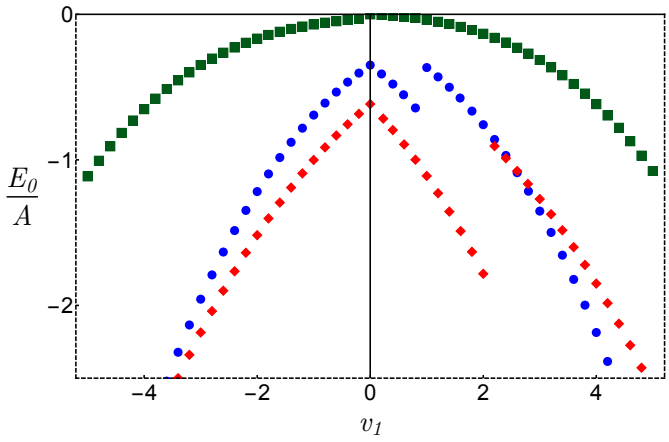

图1. E_0 板间单位面积的 $a = -b = -0.5$，作为 v_1的函数。在此图中，$v_0 = -3$ （圆圈）、 $v_0 = 0.1$ （正方形）和 $v_0 = 4$ （菱形）。

结论

本文介绍了在拓扑 P¨oschl-Teller 扭结的弯曲背景中，零温条件下与由 Diracδ-势模拟的两块平行二维板相互作用的量子标量场。我们通过将 $TGTG$ 公式推广至弱且透明的引力背景，计算了量子真空相互作用能。结果仅取决于与散射问题相关的反射系数。所选弯曲背景的特殊性质隐含在这些散射系数的定义中

。本文所得 $TGTG$-公式的优点在于，它很容易推广到其他类型的构型，包括采用其他背景，以及采用其他能够恰当模拟板的势。事实上，有证据 [24] 表明，引入 δ 势的一阶导数来模拟球壳，会导致它们之间的卡西米尔力在参数空间的不同区域改变符号。这类 $\delta\delta'$ 板将在补充材料 [22]中进行研究。

最后，我想提及本研究未来可能的一项唯象应用。在卡西米尔效应中，电磁力源于对量子电动力学中真空极化的单圈量子修正进行计算。然而，对作用量采用二次近似意味着它不依赖于该理论的耦合常数，因此，这种力在纳米尺度上具有重要意义。同理，如果计算引力子传播子的单圈量子修正，引力理论的耦合常数也不会出现。因此，鉴于引力子的质量为零，我们可以考虑研究由足够强的场描述、彼此相距很小的引力物体之间的量子相互作用力，并采用此处所应用的同样的二次近似方法。围绕引力子的经典解、且该解与其他任何有质量场均无物质耦合的无质量量子真空涨落所产生的力，将构成引力场论量子修正的一个例子。困难在于找到一种能够阻挡引力波的材料 [25]。

致谢

我感谢C. Romaniega、LM. Nieto、I. Cavero- Pel´aez和JM. Mu˜noz-Casta˜neda富有成效的讨论。本研究得到西班牙科学与创新部的支持，资金来自欧盟NextGenerationEU（PRTRC17.I1），以及卡斯蒂利亚-莱昂自治区教育委员会通过QCAYLE项目提供的资金，同时还得到MCIN项目PID2020-113406GB-I00的支持。感谢西班牙政府提供FPU博士奖学金计划（资助编号：FPU18/00957）。

* lucia.santamaria@uva.es

[1] B. G.-g. Chen、D. Derbes、D. Griffiths、B. Hill、R. Sohn 和 Y.-S. Ting, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory* (世界科学出版社，新加坡，2019年)。[2] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory* (北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1984年)。[3] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons* (剑桥大学出版社，剑桥，2006年)。[4] N. Manton 和 P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, 《剑桥数学物理专著》（剑桥大学出版社，剑桥，2004年）。[5] K. A. Milton, *Physical Manifestations of Zero-Point Energy. The Casimir Effect* (世界科学出版社，新加坡，2001年)。[6] H. B. G. Casimir, 《荷兰皇家科学院院刊》51（1948年）。[7] M. J. Sparnaay, 《自然》180（1957年），10.1038/180334b0。[8] M. Bordag、G. L. Klimchitskaya、U. Mohideen 和 V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir effect*, 《物理学专著国际系列》第145卷（牛津大学出版社，牛津，2009年）。[9] C. D. Fosco、F. C. Lombardo 和 F. D. Mazzitelli, 《物理评论 D》80，085004（2009年）。[10] J. J. Allen, *Micro Electro Mechanical System Design* (CRC出版社，纽约，2005年)。[11] G. L. Klimchitskaya、E. V. Blagov 和 V. M. Mostepanenko, 《物理学杂志 A：数学与理论》41（2008年），10.1088/1751-8113/41/16/164012。[12] S. G. Mamaev 和 V. M. Mostepanenko，载于 *3rd Seminar on Quantum Gravity* 1984 462 478 (莫斯科，)，第–页。[13] O. Kenneth 和 I. Klich, 《物理评论 B》78，014103（2008年）。[14] C. J. Fewster, *Lectures on quantum field theory in curved spacetime* 39 ，技术报告：讲义（马克斯·普朗克数学与自然科学研究所，莱比锡，2008年）。[15] J. M. Mu˜noz-Casta˜neda 和 M. Bordag, 《物理评论 D》89，065034（2014年）。[16] C. B¨ar 和 K. Fredenhagen, *Quantum Field Theory on Curved Spacetimes: Concepts and Mathematical Foundations* 786 ，《物理学讲义》第号（施普林格出版社，柏林，海德堡，2009年）。[17] B. Kay，载于 *Encyclopedia of Mathematical Physics*，由 J.-P. Fran。coise、G. L. Naber 和 T. S. Tsun 编（学术出版社，牛津，2006年），第202–212页。[18] M. Gadella、J. Negro 和 L. M. Nieto, 《物理学快报 A》373，1310（2009年）。[19] M. Bordag、D. Hennig 和 D. Robaschik, 《物理学杂志 A》25，4483（1992年）。[20] J. M. Mu˜noz-Casta˜neda、J. M. Guilarte 和 A. M. Mos- quera, 《物理评论 D》87，105020（2013年）。[21] G. Barton, 《物理学杂志 A》37，1011（2004年）。[22] L. Santamar´ía-Sanz，补充材料《弱曲率背景下通过传递算子计算卡西米尔能》，即将发表于（2023年）。[23] E. M. Lifshitz, 《苏联物理学 JETP》2，73（1956年）。[24] I. Cavero-Pel´aez、J. M. Mu˜noz-Casta˜neda 和 C. Ro- maniega, 《物理评论 D》103，045005（2021年）。[25] J. Q. Quach, 《物理评论快报》114，081104（2015年)。